

## P11

托卡马克基本工作原理：

利用电容器放电，使真空室形成环形磁场，然后变压器初级线圈储存的电感放电，与之耦合的次级线圈即真空环内部产生感应电场，感应电场产生等离子体环电流，等离子体被流过它的环形电流加热而升温，同时环形电流产生的角向磁场与环向磁场叠加后形成旋转的磁力线，这样可以较好的克服漂移，约束等离子体。

## P20

等离子体的描述性定义：

当物质的温度从低到高变化时，物质将逐次经历固体、液体和气体三种状态；当温度进一步升高时，气体中的原子、分子将出现电离状态，形成电子离子组成的体系，这种由大量带电粒子（有时还有中性粒子）组成的体系便是等离子体。

等离子体是物质存在的另一种状态，称物质第四态。

等离子体广泛存在于宇宙空间，宇宙空间中可见物质99%是等离子体。

地球表面几乎没有自然存在的等离子体，只存在于闪电和实验室中气体放电等情形下。

## P21

等离子体是由大量带电粒子组成的多粒子体系，两个带电粒子之间本来是简单的库仑作用，但由于大量带电粒子的存在，会出现电荷屏蔽现象，这是等离子体的重要特征之一。

电荷屏蔽现象：

在等离子体中考察任一个带电粒子，由于它的静电场作用，在它附近会吸引异号电荷的粒子，同时排斥同号电荷的粒子，从而在其周围会出现净的异号电荷云，这样就削弱了这个带电粒子对远处其他带电粒子的作用，这就是电荷屏蔽现象。因此在等离子体中，一个带电粒子及其周围的异号电荷云对较远处的另一个带电粒子作用的总效果就是“屏蔽库仑势”，而不再是一个单独粒子作用的库仑势。

## P28

等离子体的严格定义：

并非任何带电粒子组成的体系都是等离子体，只有具备了等离子特性的带电粒子体系，才可称为等离子体。

等离子体是具有以下三个特性的体系：

- 1.由大量正负带电粒子组成（有时还有中性粒子）
- 2.在空间尺度 $l \gg \lambda_D$ （德拜屏蔽长度）和时间尺度 $\tau \gg 1/\omega_{pe}$ （等离子体振荡频率）上具有准电中性
- 3.在电磁及其它长程力作用下粒子的运动和行为了以集体效应为主

## P34

等离子体中带电粒子间既有短程库仑作用引起的碰撞，又存在长程库仑作用引起的集体运动，其中又有外加的强磁场，还有自身产生的电磁场，因此要精确描述等离子体的行为及其困难。

等离子体的描述方法：

1.单粒子轨道描述法：

研究等离子体中单个带电粒子在外加的电场或磁场作用下的运动，等离子体中其他带电粒子对它的作用被完全忽略。

单个粒子的运动轨道只需用牛顿力学方程和粒子的初始条件（空间位置和速度）就可以完全确定。

这是一种近似方法，但它处理问题的方法简单，物理图像直观，能够给出带电粒子在一些复杂的电磁场下运动的轨迹，能较好地解释等离子体的许多性质。

## 2.磁流体描述法：

把等离子体看成是导电的流体，用经典流体力学和电动力学相结合的方法，研究导电流体和磁场的相互作用，它着重于等离子体的整体行为，不考虑其中单个粒子的运动状态。

等离子体与普通流体不同，等离子体是导电的流体，它的运动比普通流体要复杂得多，它同时服从流体力学和电动力学的规律，形成了研究导电流体在电磁场中运动规律的科学，称为磁流体力学。

磁流体描述法主要用于描述等离子体的宏观运动，如等离子体的集体震荡、宏观平衡、宏观不稳定性、以及各种波动现象。

## 3.统计描述法：

等离子体是由大量微观粒子组成的体系，对于这样的体系，用统计力学方法才可揭示其更深刻的运动规律。等离子体的统计描述法是最基本的描述法。

统计力学最基本的描述是定义粒子的位置、速度、时间的分布函数，然后确定分布函数满足的方程，即动力学方程。

## 4.粒子模拟法：

在有些等离子体问题中，无论用磁流体描述法还是统计描述法，都不足以描述等离子体行为，于是人们不得不去跟踪每个粒子的轨道，以了解整个体系的行为。

等离子体模拟就是通过跟踪大量带电粒子在自洽场和外加电磁场的作用下的运动来了解等离子体的某些行为。

核聚变装置中每 $1m^3$ 等离子体的总粒子数约为 $10^{19}$ 个，如果对这些粒子的运动轨道都加以考虑，计算机容量是不够的。如果只局限于研究某类等离子体的某些特殊行为，只需要考察一个相对小的模拟体系，使得其尺度和其中的粒子数，足以描述所想要研究的等离子体现象，这样就可利用计算机模拟。

## P43

### 带电粒子在不均匀磁场中的漂移

对不均匀磁场，粒子运动方程非线性，难以求得它的精确解。如果磁场的不均匀性很小，即在回旋半径 $r_c$ 范围内磁场 $B$ 的变化满足缓慢变化条件：

$$|\vec{r}_c \cdot \nabla \vec{B}| \ll B$$

亦即在一个回旋轨道运动过程中粒子所感受的磁场基本不变，这样粒子的运动可近似地看为两部分：在均匀磁场中绕磁力线回旋运动和磁场微小的不均匀性引起的回旋中心的漂移。

### 1.梯度漂移：

设磁场 $B$ 沿 $z$ 轴，在 $y$ 轴方向有梯度，即 $\vec{B} = (0, 0, B(y))$ ，因此 $\nabla B = \frac{\partial B}{\partial y} \hat{e}_y$ ，粒子运动方程为：

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B}[\vec{r}] \quad (1)$$

因为 $B$ 满足缓变条件，可在回旋中心处展开，保留到一级小量，即

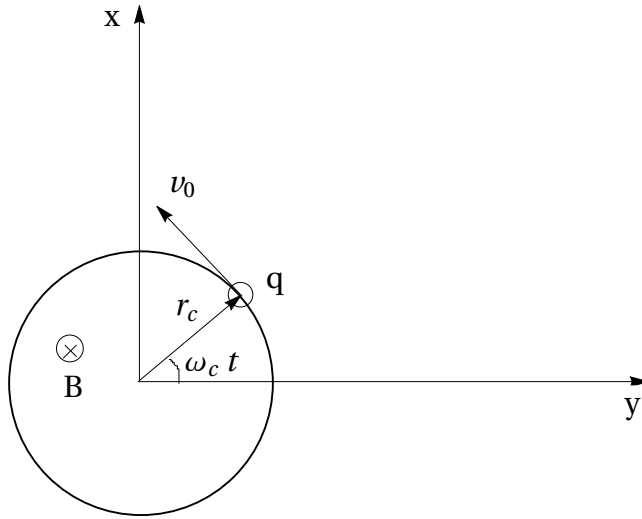
$$\vec{B} \approx \vec{B}_0 + (\vec{r}_c \cdot \nabla) \vec{B}_0 \quad (2)$$

其中 $\vec{B}$ 是回旋中心处的磁场。把 $\vec{v}$ 分解为回旋运动 $\vec{v}_0$ 和漂移运动 $\vec{v}_D$ 两部分，即

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_D \quad (3)$$

并假设 $\vec{v}_D$ 是常矢量。将 (2) (3) 式带入 (1) 式, 得

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q (\vec{v}_0 \times \vec{B}_0) + q (\vec{v}_D \times \vec{B}_0) + q \vec{v}_0 \times ((\vec{r}_c \cdot \nabla) \vec{B}_0) + q \vec{v}_D \times ((\vec{r}_c \cdot \nabla) \vec{B}_0) \quad (4)$$



由上图得:

$$\vec{r}_c = \left( \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin[\omega_c t], \frac{v_\perp}{\omega_c} \cos[\omega_c t], 0 \right), \quad (5)$$

$$\vec{v}_0 = v_\perp (\cos[\omega_c t], -\sin[\omega_c t], 0). \quad (6)$$

将 (5) (6) 式带入 (4) 式, 并在一个回旋周期上对时间求平均, 因为 $\langle \vec{r}_c \rangle = 0$ ,  $\langle \vec{v}_0 \rangle = 0$ , 故得 (4) 的平均结果为:

$$q (\vec{v}_D \times \vec{B}_0) + q \langle \vec{v}_0 \times ((\vec{r}_c \cdot \nabla) \vec{B}_0) \rangle = 0 \quad (7)$$

(7)  $\times B_0$  得:

$$\vec{v}_D = \langle (\vec{v}_0 \times ((\vec{r}_c \cdot \nabla) \vec{B}_0) \times \vec{B}_0) \rangle / B_0^2 \quad (8)$$

将 (5) (6) 带入 (8), 求得:

$$\vec{v}_D = \frac{-1}{2 B_0} \frac{v_\perp^2}{\omega_c} \frac{\partial B_0}{\partial y} \hat{e}_x \quad (9)$$

(9) 式的一般形式为:

$$\vec{v}_D = \frac{W_\perp}{q B^3} \vec{B} \times \nabla B = \frac{(-\mu \nabla B) \times \vec{B}}{q B^2} \quad (10)$$

其中,  $W_\perp$  为带电粒子垂直动能。

梯度漂移与粒子的电荷及符号有关, 因此正负粒子的漂移方向相反。

磁场梯度漂移是因带电粒子磁矩 $\mu$ 在不均匀磁场中受力所引起的，磁矩 $\mu$ 受的力 $\vec{F} = -\mu \nabla B$ 。

$\vec{v}_D$ 即为漂移速度。 $\vec{v}_D = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{q B^2}$

## 2. 曲率漂移：

如果磁力线有轻微的弯曲，曲率半径 $R \gg r_c$ ，即满足缓变条件，则可以采用漂移近似。如果粒子回旋中心以 $v_{||}$ 的速率沿弯曲的磁力线运动，同时粒子绕磁力线做回旋运动，回旋中心沿弯曲磁力线运动时将感受到一个惯性离心力的作用，产生曲率漂移。

$$\vec{F} = \frac{m v_{||}^2}{R^2} \vec{R} \quad (11)$$

可求得曲率漂移速度：

$$\vec{v}_D = \frac{m v_{||}^2}{q B^2 R^2} \vec{R} \times \vec{B} = \frac{2 W_{||}}{q B^2 R^2} \vec{R} \times \vec{B} \quad (12)$$

可知，正负粒子漂移方向相反。

曲率半径定义：

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{b}|}{\Delta l}$$

式中， $\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}$ 。利用 $\vec{n} = \frac{-\vec{R}}{R}$ ，可得：

$$\begin{aligned} \frac{\vec{n}}{R} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{b}}{\Delta l} = \frac{\partial \vec{b}}{\partial l} = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} = -\frac{\vec{R}}{R^2}, \text{ 即:} \\ \frac{\vec{R}}{R^2} &= -\left( \frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\vec{B}}{B} \end{aligned} \quad (13)$$

从而，曲率漂移速度也可写为：

$$\vec{v}_D = \frac{2 W_{||}}{q B^2} \vec{B} \times \left( \frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\vec{B}}{B} \quad (14)$$

在柱坐标系中，由P46页过程，得：

$$\frac{\nabla B}{B} = -\frac{\vec{R}}{R^2} \quad (15)$$

则 (12) 式还可写为：

$$\vec{v}_D = \frac{2 W_{||}}{q B^3} \vec{B} \times \nabla B \quad (16)$$

一般地，磁力线弯曲时必定存在磁场梯度，磁场的不均匀性引起粒子的总漂移应该是梯度漂移与曲率漂移的叠加。

则，总漂移速度为：

$$\vec{v}_D = \frac{W_{\perp} + 2 W_{||}}{q B^3} \vec{B} \times \nabla B = \frac{W_{\perp} + 2 W_{||}}{q B^2 R^2} \vec{R} \times \vec{B} \quad (17)$$

## P64

一般的矩方程中，物理上有意义的只有 $\psi = 1$ ,  $\psi = m \vec{v}$ ,  $\psi = \frac{1}{2} m v^2$ 即零阶、一阶、二阶矩。它们与质量、动量、能量守恒相联系的。对普通流体，这三种矩方程可得到流体力学方程组。对于等离子体，因为

有不同类型的粒子，至少含一种正离子和电子，当它们没有达到平衡时，应作为两种不同的粒子体系，相应有两种不同的流体方程，即双流体力学方程。

在计算时，假定没有粒子的电离、复合等情况，只发生弹性碰撞。

速度矩方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle \psi[\vec{v}] \rangle) + \nabla \cdot (n \langle \psi[\vec{v}] \vec{v} \rangle) - \frac{nq}{m} \vec{E} \cdot \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \vec{v}} \right\rangle - \frac{nq}{m} \left\langle (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vec{v}} \right\rangle = \int \psi[\vec{v}] \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\vec{v} \quad (18)$$

1.连续性方程：

由零阶 $\psi=1$ ，代入（18）式得到：

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{u}) = 0 \quad \text{连续性方程} \quad (19)$$

因只发生弹性碰撞，粒子数前后守恒，故碰撞项 $\int \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\vec{v} = 0$ 。用 $\rho = mn$ 表示粒子质量密度，则得到质量守恒方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{质量守恒方程} \quad (20)$$

2.运动方程：

由一阶 $\psi = m\vec{v}$ ，代入（18）式得到：

$$\frac{\partial (nm\vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (nm \langle \vec{v} \vec{v} \rangle) - n\vec{F} = \vec{R} \quad (21)$$

其中， $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ ，是以平均速度 $\vec{u}$ 运动的流体元受的Lorentz力。

碰撞项：

$$\vec{R} = m \int \vec{v} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\vec{v} = m \int (\vec{u} + \vec{w}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\vec{v} = m \int \vec{w} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\vec{v} \quad (22)$$

$\vec{R}$ 为摩擦阻力， $\mathbf{P} = nm \langle \vec{v} \vec{v} \rangle = nm\vec{u}\vec{u} + p\mathbf{I} + \Pi$ ，则（21）式可写为：

$$\frac{\partial (nm\vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (nm\vec{u}\vec{u}) = n\vec{F} - \nabla p - \nabla \cdot \Pi + \vec{R} \quad \text{流体元的运动方程} \quad (23)$$

利用（19），上式可简化为：

$$nm \frac{d\vec{u}}{dt} = n\vec{F} - \nabla p - \nabla \cdot \Pi + \vec{R} \quad (24)$$

式中， $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$ 称为运流导数，表示跟随流体元运动轨道计算的时间微商。上式，左边为流体元动量变化率，右边各项是流体元所受的力： $n\vec{F}$ 为电磁场力， $-\nabla p$ 为热压力， $-\nabla \cdot \Pi$ 为粘性力， $\vec{R}$ 为 $\alpha$ 类粒子与各种不同的 $\beta$ 类粒子弹性碰撞后， $\alpha$ 类粒子失去的动量，即流体元受到的摩擦阻力。同类粒子间弹性碰撞动量守恒，所以 $\vec{R}$ 中不包含同类间粒子的碰撞。

3.能量方程：

由二阶 $\psi = \frac{1}{2} m v^2$ ，代入（18）式得到：

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{Q} + qn\vec{u} \cdot \vec{E} + \vec{u} \cdot \vec{R} + X \quad \text{能量方程} \quad (25)$$

式中， $K = \langle \frac{1}{2} nm v^2 \rangle$ ， $\vec{Q} = \langle \frac{1}{2} nm v^2 \vec{v} \rangle$ ，且已知 $\langle \frac{\partial}{\partial v} (\frac{1}{2} m v^2) \rangle = m\vec{u}$ ， $\langle (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} (\frac{1}{2} m v^2) \rangle \equiv 0$ ，上式中最后两

项是弹性碰撞的贡献：

$$\int \frac{1}{2} m v^2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\vec{v} = \frac{1}{2} m \int (u^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{w} + w^2) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\vec{v} = \vec{u} \cdot \int m \vec{w} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\vec{v} + \frac{1}{2} m \int w^2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{R} + X \quad (26)$$

$$\text{这里, } X = \frac{1}{2} m \int w^2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\vec{v} \quad (27)$$

X是不同类粒子的弹性碰撞引起的热能交换，因为弹性碰撞动能守恒，同类粒子间碰撞无贡献。

(25) 是能量方程，即总动能守恒方程。

式中，左边代表空间某点的流体元动能变化率。

右边 $-\nabla \cdot \vec{Q}$ 表示从流体元表面流入的净能流， $q n \vec{u} \cdot \vec{E}$ 为电场对流体元做功的功率，即欧姆加热功率， $\vec{u} \cdot \vec{R}$ 为碰撞摩擦阻力做的功率，X为不同类粒子碰撞交换的热能。

利用连续性方程、运动方程，可以把能量方程改写为热能平衡方程的形式：

$$\frac{3}{2} n \frac{dT}{dt} = -(\mathbf{p} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} - \nabla \cdot \vec{q} + X \quad \text{热能平衡方程} \quad (28)$$

$-(\mathbf{p} \cdot \nabla) \cdot \vec{u}$ 表示内摩擦（粘性力）做的功率， $-\nabla \cdot \vec{q}$ 为热传导，X为不同类粒子的弹性碰撞引起的热能交换。若 $\vec{u} = 0$ 则流体元的温度变化仅来自于热传导和弹性碰撞引起的热能交换。

P67

双流体力学方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0 \\ n_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{u}_\alpha}{dt} = n_\alpha \vec{F}_\alpha - \nabla p_\alpha - \nabla \cdot \vec{\Pi}_\alpha + \vec{R}_\alpha \\ \frac{3}{2} n_\alpha \frac{dT_\alpha}{dt} = -(\mathbf{p}_\alpha \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_\alpha - \nabla \cdot \vec{q}_\alpha + X_\alpha \end{cases} \quad (29)$$

式中角标 $\alpha$ 取为i表示离子，取为e表示电子，且，式中：

$$\vec{F}_\alpha = q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}),$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla,$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1,$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1.$$

$\vec{E}_0$ 和 $\vec{B}_0$ 是外场， $\vec{E}_1$ 和 $\vec{B}_1$ 是等离子体自身的电荷电流产生的场，称为波场。

$\vec{E}_1$ 和 $\vec{B}_1$ 由与双流体力学方程组耦合的Maxwell方程组来确定：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E}_1 = \sum_\alpha \frac{n_\alpha q_\alpha}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \\ \nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \mu_0 \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{u}_\alpha \end{cases} \quad (30)$$

P77

磁场的冻结和扩散效应是导电流体与磁场相互作用的重要性质。

由Maxwell方程组及欧姆定律：

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{j} = \sigma_c (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

消去 $\vec{j}$ , 得:

$$\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B} + \frac{1}{\sigma_c \mu_0} \nabla \times \vec{B} \quad (31)$$

两边求旋度:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \nu_m \nabla^2 \vec{B} \text{ 感应方程} \quad (32)$$

式中,  $\nu_m = \frac{1}{\sigma_c \mu_0}$  称为磁粘性系数。

### 1. 磁场冻结:

假设等离子体是理想导体, 即 $\sigma_c \rightarrow \infty, \nu_m \rightarrow 0$ , 则感应方程变为:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) \text{ 冻结方程} \quad (33)$$

两条定理:

- (1) .通过和理想导电流体一起运动的任何封闭回路所围曲面的磁通量是不变的。
- (2) .在理想导电流体中, 起始位于一根磁力线上的流体元, 以后一直处在这根磁力线上。

证明:

(1) .任取一个与流体一起运动的回路C, 回路上的线元 $d\vec{l}$ 与流体一起运动时, 单位时间切割磁力线引起的磁通量变化为:

$$\Delta \Phi = (\vec{u} \times d\vec{l}) \cdot \vec{B} = (\vec{B} \times \vec{u}) \cdot d\vec{l}$$

随流体运动时, 闭合回路C所围面积的磁通量变化率应等于磁场随时间变化 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 和随流体一起运动的闭合回路C切割磁力线两者引起的磁通量变化率之和:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS + \oint_C (\vec{B} \times \vec{u}) \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{u}) \right) \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (\text{根据冻结方程})$$

此定理表明, 不管外界磁场如何变化, 随着理想导电流体一起运动的任何闭合回路所围的磁力线数目是不变的。

(2) .由冻结方程:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{u} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{u}) \quad (34)$$

根据连续性方程可知:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \vec{u}$$

以及  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , 则 (34) 化为:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{\vec{B}}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

两边同除以  $\rho$ , 得:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{B}}{\rho} \right) = \left( \frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{u} \quad (35)$$

上式由冻结方程和连续性方程得到。它的意义实际上证明了定理2:

设在一根磁力线上取流体线元  $\delta \vec{l}$ , 线元一端流速为  $\vec{u}$ , 另一端为  $\vec{u}' = \vec{u} + (\delta \vec{l} \cdot \nabla) \vec{u}$ , 因此单位时间流体线元的变化率:

$$\frac{d(\delta \vec{l})}{dt} = (\delta \vec{l} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (36)$$

$\delta \vec{l}$  与  $\frac{\vec{B}}{\rho}$  满足同样的时间演化方程。因此, 如果初始时刻  $\delta \vec{l}$  与  $\frac{\vec{B}}{\rho}$  平行, 则以后也保持平行, 且它们的长度成比例变化。

以上两定理说明, 在理想导电流体中, 不仅与流体一起运动的回路所包含的磁力线数目不变, 而且流体的物质线元只能沿同一根磁力线运动, 而流体沿磁力线方向的运动是自由的。一旦流体有垂直于磁力线方向的运动, 则磁力线也要随着流体物质一起运动, 即磁力线被冻结在理想导电流体物质中, 这种现象称为磁场冻结。

物理上定性理解这一现象是可行的: 由电磁感应定律, 当磁通量有变化时就产生感应电场和电流, 以抵抗磁通的变化。对于理想导体, 电导率趋于无穷, 只要有感应电场, 感应电流就无穷大。这样感应电流的磁场总能完全补充原来磁场的变化, 也就不允许导电流体有相对于磁场的横向运动, 从而磁场被冻结在理想导电流体中。

高温等离子体是电导率很大的流体, 其中磁场有冻结现象。如果磁场原来是在等离子体外, 则难以进入其内。

## 2. 磁场扩散:

如果导电流体的电导率  $\sigma_c$  有限, 并假定流体静止不动  $\vec{u} = 0$ , 则 (32) 化为:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nu_m \nabla^2 \vec{B} \quad \text{扩散方程} \quad (37)$$

由扩散方程能够说明, 当  $\sigma_c$  有限时, 磁力线不完全冻结在等离子体中, 等离子体中的磁场会随时间衰减, 磁场从强的区域向弱的区域扩散。

估算等离子体中磁场扩散的特征时间:

设原来磁场集中在线度为  $L$  的等离子区域内,  $\nabla^2 B \approx -\frac{B}{L^2}$ , 则方程近似为:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nu_m \frac{B}{L^2} = -\frac{B}{\tau_d} \quad (38)$$

$$\text{式中 } \tau_d = \frac{L^2}{\nu_m} = \mu_0 \sigma_c L^2 \quad (39)$$



$$\text{上式的解为: } B[t] = B[0] e^{-\frac{t}{\tau_d}} \quad (40)$$

说明磁场随时间扩散或衰减,  $\tau_d$ 为磁扩散时间或磁衰减时间。

电导率越大, 衰减越慢, 若  $\sigma_c \rightarrow \infty$ , 则磁场不衰减。

对电导率有限的流体, 特征长度  $L$  越大, 衰减也越慢。因而宇宙等离子体衰减很慢。

## P91

等离子体是由大量带电粒子组成的一种连续介质, 其行为主要是由其中带电粒子间长程相互作用引起的集体效应确定的。等离子体波就是这种集体效应的一种运动形式。

等离子体中存在着三种对等离子体的扰动能起到弹性恢复力的作用力, 即热压力、静电力和磁力, 因而能使扰动在介质中传播, 形成等离子体波。

等离子体中的波就是以等离子体为介质的波动现象, 其具体特征是由介质性质决定的。

等离子体波对受控核聚变和空间等离子体研究都非常重要。

两种研究方法: 1. 等离子体的流体描述, 即磁流体力学方法; 2. 分布函数描述的动理论方法。

任何周期性的扰动或波动, 都可以分解为单一频率的简谐振动或简谐波的叠加。因此只需研究单一频率简谐振动与简谐波的问题。

为计算方便, 单一频率(单色)平面波可用复数表示为:

$$\vec{E}[\vec{r}, t] = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (41)$$

实际的物理量为实数, 所以结果应取其实部。即, 上式实际代表平面波:

$$\vec{E}[\vec{r}, t] = \vec{E}_0 \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t] \quad (42)$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  为波数, 波长  $\lambda$  表示波在一个周期内振动状态传播的距离。

$(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$  为相位。

## 相速度和群速度

相速度为相位恒常点运动的速度, 也就是振动状态的传播速度。设波沿  $x$  轴方向传播, 恒常相位的坐标时间关系为:

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = kx - \omega t = C$$

这关系实际上确定了恒常相位的坐标值随时间的变化, 从而可求出相速度:

$$v_p = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{\phi=C} = \frac{\omega}{k} \quad (43)$$

实际的波不可能是单色的, 而是以某一频率(或波矢)为中心, 在其附近小的范围内各个不同频率(或波矢)的波按不同振幅叠加构成的, 这样合成的波为波群, 合成波的包络线为波包。波包的场只局限在空间中很小的范围。波包的整体运动速度为群速度。波包实际上是一种振幅调制的波。

根据狭义相对论, 群速度不能超过光速。

不同波矢、沿  $x$  方向传播的各平面波, 叠加构成的波包可表示为:

$$\psi[x, t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a[k] e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (44)$$

式中,  $\omega = \omega(k)$ , 不同波矢的波, 其振幅为:

$$a[k] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi[x, 0] e^{-ikx} dx \quad (45)$$

假定k的变化范围 $\Delta k$ 很小，且 $\omega(k)$ 随k变化很慢，则 $\omega(k)$ 可在 $k = k_0$ 点展开，

$$\omega[k] = \omega[k_0] + \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} (k - k_0) + \dots \quad (46)$$

将上式带入（44），保留至一级小量，得：

$$\begin{aligned} \psi[x, t] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a[k] e^{i(kx - \omega_0 t - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} (k - k_0) t)} dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 v_g - \omega_0) t} \int_{-\infty}^{\infty} a[k] e^{ik(x - v_g t)} dk = \psi[x - v_g t, 0] e^{i(k_0 v_g - \omega_0) t} \end{aligned} \quad (47)$$

式中 $v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}$ ，上式结果表明， $t = 0$ 时刻的波包 $\psi(x, 0)$ 以速度 $v_g$ 不变形地传播， $v_g$ 即是群速度。

$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} = \left( \frac{d v_p k}{dk} \right)_{k=k_0} = v_p[k_0] + k_0 \left( \frac{d v_p}{dk} \right)_{k=k_0} \quad (48)$$

## P94

### 电子静电振荡

电子静电振荡是一种高频振荡，由于离子质量比电子大的多，它对高频振荡几乎不响应，所以可以把离子近似看成一种均匀的正电荷背景，把电子单独作为一种流体，研究电子流体运动。

假定等离子体温度很低， $T_e \approx 0$ ，是冷等离子体，电子的热运动可以忽略，即电子的热压力 $\nabla p_e \approx 0$ 。设电子电荷 $-e$ ，质量 $m_e$ ，粒子数密度为 $n_e(\vec{r}, t)$ ，流体运动速度为 $\vec{u}_e(\vec{r}, t)$ ，由双流体力学方程组（29），电子流体的力学方程为：

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{u}_e) = 0 \quad (49)$$

$$m_e n_e \left( \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \nabla) \vec{u}_e \right) = -e n_e \vec{E} \quad (50)$$

上式中，未列入电子的热压强项，因冷等离子体。未列入外磁场作用。电子振荡频率比电子离子碰撞频率高得多，所以碰撞摩擦阻力 $\vec{R}_{ei}$ 也忽略。

其中，电场 $\vec{E}$ 是电子运用产生的电荷分离引起的，它满足方程：

$$\nabla \cdot \vec{E} = - \frac{e (n_e - n_0)}{\epsilon_0} \quad (51)$$

其中 $n_0$ 为离子背景的均匀密度（ $Z=1$ ）。

只讨论小幅振荡，令：

$$\begin{cases} n_e = n_0 + n_{e1}[\vec{r}, t] \\ \vec{u}_e = \vec{u}_{e1}[\vec{r}, t] \\ \vec{E} = \vec{E}_1[\vec{r}, t] \end{cases} \quad (52)$$

下标0表示平衡状态的量，1表示微小扰动量。将（52）带入（49，50，51）三式，保留至一级小量，得到：

$$\begin{cases} \frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{u}_{e1} = 0 \\ m_e \frac{\partial \vec{u}_{e1}}{\partial t} = -e \vec{E}_1 \\ \nabla \cdot \vec{E}_1 = -\frac{e n_{e1}}{\epsilon_0} \end{cases} \quad (53)$$

设扰动发生在z轴方向，这时 $\vec{u}_{e1}$ ,  $\vec{E}_1$ 也沿z轴方向。取 $n_{e1}$ ,  $\vec{u}_{e1}$ ,  $\vec{E}_1 \propto e^{i(kz - \omega t)}$ 为平面波形式,带入上式，得：

$$\begin{cases} -i\omega n_{e1} + i n_0 k u_{e1} = 0 \\ -i m_e \omega u_{e1} = -e E_1 \\ i k E_1 = -e n_{e1} / \epsilon_0 \end{cases} \quad (54)$$

解得：

$$\left( \omega^2 - \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right) u_{e1} = 0 \quad (55)$$

$u_{e1}$ 非零解条件为：

$$\left( \omega^2 - \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right) = 0 \quad (56)$$

为色散关系。

上式中， $\omega$ 与 $k$ 无关，群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk} = 0$ ，表明电子振荡不能在等离子体中传播，只是一种局部的静电振荡。

振荡频率

$$\omega = \omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (57)$$

$\omega_{pe}$ 为电子振荡频率，也称电子等离子体频率，因为它只与等离子体自身的特征量有关，所以是等离子体的特征频率。

振荡周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{pe}} \quad (58)$$

可作为衡量等离子体准电中性的特征时间。

P103

离子声波、离子静电波的色散关系与电子静电波相比较

P109

电磁波传播的截止现象在无线电通信中的应用

一束频率为 $\omega$ 的电磁波，射向密度分布不均匀的等离子体，一般在边缘电子密度小， $\omega_{pe}$ 也就小，满足 $\omega > \omega_{pe}$ ，电磁波可以进入等离子体，随着向内部深入，电子密度逐渐增大， $\omega_{pe} \propto \sqrt{n_0}$ 也随之增大，当电磁波到达某处 $\omega = \omega_{pe}$ 时，波被截止，不能继续前进，在 $\omega = \omega_{pe}$ 处发生反射。

地面上远距离的短波通信，就是利用地球高空电离层对无线电波的反射作用来实现的。

电离层的最大截止频率 $f_p \approx 10 \text{ MHz}$

地面短波通信是利用电离层对电磁波的反射来实现的，其频率 $f < f_p$ ，最高可用的地面通信频率是30MHz以下。

地球与卫星间通信是利用足够高频率的电磁波，使其能穿透电离层而到达外层空间，因此 $f > f_p$ ，卫星通信频率一般应高于30MHz.

卫星电视频段满足 $\omega > \omega_{pe}$ ，电视信号能够穿透电离层到达外层空间被卫星接收然后再向地球转发。

P113

寻常波和非寻常波色散关系图

---

```
CreatePalette[Grid[Partition[PasteButton[Style[#, 12], RowBoxes[#, ImageSize -> 55] & /@
  {"B", "u", "v", "x", " $\frac{\partial}{\partial t}$ ", ".", " $\frac{d}{dt}$ ", "\rho", "(", ")", "=", "E", "[r, t]",
  "(k.r - \omega t)", "i", "-", "\wedge", "\vee", "U", "\cap"}, 5], Spacings -> {0, 0}]]];
```