04

随机变量的数字特征

《概率论与数理统计》 数科学院统计系

目录/Contents

目录/Contents

4.1 数学期望

一、数学期望的定义

例1 设甲、乙两班各40名学生, 概率统计成绩及得分人数如表所示, 成绩以10的倍数表示.

甲、乙两班概率统计的平均成绩各是多少?

甲班分数	60	70	80	90	100		乙班分数	40	60	70	80	90	100
人数	2	9	18	9	2		人数	3	1	8	13	8	7
频率	$\frac{2}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{18}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{2}{40}$		频率	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{7}{40}$

解：班级平均成绩=总分÷总人数

甲班平均成绩 $= 60\times\frac{2}{40}+70\times\frac{9}{40}+80\times\frac{18}{40}+90\times\frac{9}{40}+100\times\frac{2}{40}=80(分)$

同理，乙班平均成绩=80(分)

$$\sum_i x_i p_i \triangleq E(X)$$

一、数学期望的定义

定义1

设X 是离散型随机变量，其分布律为

$$P(X = x_i) = p_i, \qquad i = 1,2,\cdots$$

当级数 $\sum_i x_i p_i$ 绝对收敛时，称 $\sum_i x_i p_i$ 为随机变量 X 的数学期望

（或期望、均值），记作$E(X)$.

一、数学期望的定义

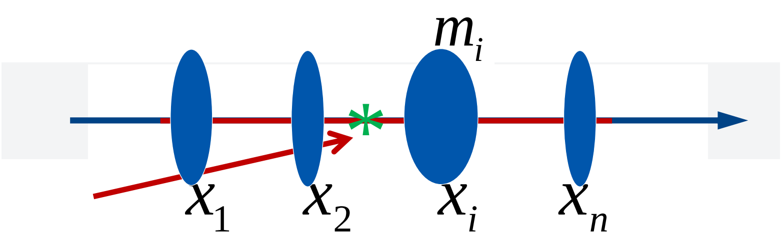
注:

1 为保证无穷级数 $\sum_i x_i p_i$的值不因改变求和次序而变，要求级数$\sum_i x_i p_i$绝对收敛，$E(X)$ 才有定义。

2 当X服从某个分布时,也称$E(X)$是这个分布的期望 。期望刻画随机变量取值的平均，有直观含义。

3 物理含义：单位质量的细棒，

重心坐标 $\sum_i x_i m_i$



一、数学期望的定义

复习：

1. 若 $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$收敛，则称 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$绝对收敛; 如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

2. 若$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 收敛，但$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$ 不收敛，则称$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 条件收敛; 如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

3. 若$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 绝对收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 一定收敛;

4. 若$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 绝对收敛，则级数$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$求和唯一.

例2 设随机变量 X 的分布律分别为（1）$P\left(X=\frac{2^i}{i}\right)=\frac{1}{2^i}, i=1,2,\cdots$

（2）$P\left(X=(-1)^i\frac{2^i}{i}\right)=\frac{1}{2^i}, i=1,2,\cdots$

在三种情形下，试问 X 的数学期望$E(X)$是否存在？为什么？

解 （1）**因为** $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^i}{i}\cdot\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$**发散**，所以 X 的数学期望不存在。

一、数学期望的定义

（2）**因为** $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i=\sum_{i=1}^{\infty}\left|(-1)^i\frac{2^i}{i}\right|\cdot\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$ **发散**，所以 X 的数学期望不存在。

（3）**因为** $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^i}{i^2}\cdot\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ **收敛**，所以 X 的数学期望存在。

一、数学期望的定义

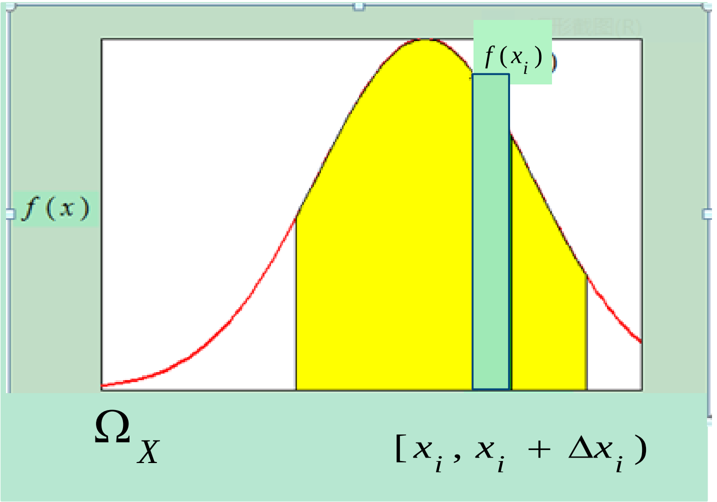
例3 设离散型随机变量 X 的分布律如下，计算$E(X)$

X	-2	1
P_r	0.2	0.8

解

$$E(X)=\sum_i x_i p_i=-2\times 0.2+1\times 0.8=0.4$$

一、数学期望的定义



$$P(x_i \le X < x_i + \Delta x_i)$$

$$= \int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} f(x)dx \approx f(x_i)\Delta x_i$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P_r	$f(x_1)\Delta x_1$	$f(x_2)\Delta x_2$	$\cdots$	$f(x_n)\Delta x_n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \approx \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i,$$

$$\lim_{\max(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

定义2

设 X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$，如果广义积分

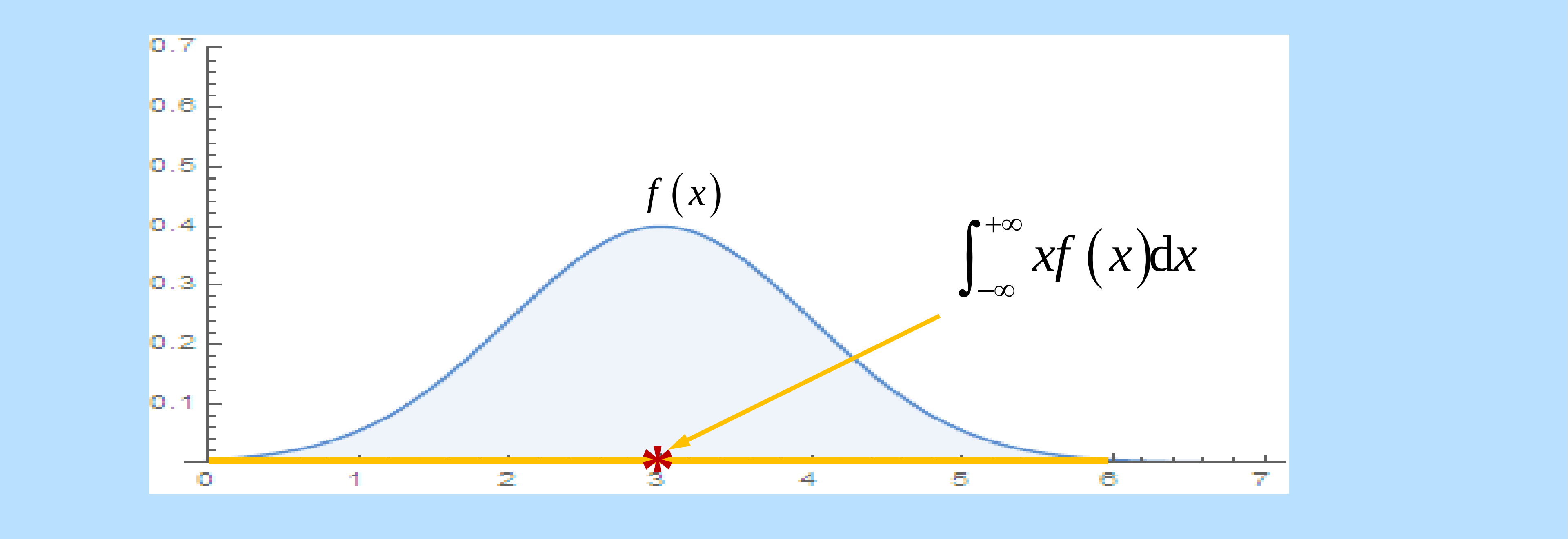
$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$**绝对收敛**，则称

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

为连续型随机变量X 的数学期望，也称作期望或均值 。

一、数学期望的定义

物理含义： 密度函数为$f(x)$ 单位质量细棒重心坐标



一、数学期望的定义

例4 设连续型随机变量X的密度函数如下，问$E(X)$ 是否存在

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},-\infty<x<+\infty. \qquad E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x$$

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{|x|}{1+x^2}dx$$

而 $\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx^2=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_{0}^{+\infty}=+\infty$ 所以$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx$发散

一、数学期望的定义

同理

$$\int_{-\infty}^{0} |x| \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = -\infty$$

所以$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$ **发散.**由此$E(X)$不存在.

一、数学期望的定义

例5 设有离散型随机变量X，在下列三种情况下计算随机变量 X 的数学期望$E(X)$

$$(1)X \sim B(1,p);(2)X \sim B(n,p);\quad (3)\ X \sim P(\lambda).$$

解

（1）因为$X{\sim}B(1,p)$，所以 $E(X) = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

解

(2) 因为 $X \sim B(n,p)$，所以$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n.$

由期望的定义得

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)}$$

$$\underline{\underline{令 l=k-1}}\ np\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}p^l q^{n-1-l}=np$$

解

(3) 因为 $X \sim P(\lambda)$, 所以 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$.

由期望的定义得

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\underline{\underline{令 l=k-1}}\ \lambda e^{-\lambda}\sum_{l=1}^{n}\frac{\lambda^l}{l!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

例6 设有连续型随机变量X，在下列三种情况下计算随机变量X的数学期望$E(X)$

$$(1)X\sim U(a,b);(2)X\sim E(\lambda);\quad (3)\ X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right).$$

解 (1) 因为$X\sim U(a,b)$，所以X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由期望的定义得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

解

(2) 因为$X \sim E(\lambda)$，所以X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\cdot\frac{1!}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}$$

或

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

解

（3）因为$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，所以X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

由期望的定义得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{令t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma dt=\mu$$

上式使用了密度函数的规范性.

例7 已知X的分布律为

X	-1	1	2
概率	1/4	1/2	1/4

计算 $E(X)$、$E(X^2)$、$E(X^3)$

解 **由X的分布律可得到X^2及X^3的分布律为**

X^2	1	4
概率	3/4	1/4

X^3	-1	1	8
概率	1/4	1/2	1/4

$$E(X^2)=1\times\frac{3}{4}+4\times\frac{1}{4}=\left[(-1)^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}\right]+2^2\times\frac{1}{2}=\sum_{i=1}^{3}a_i^2p_i$$

$$E(X^3)=-1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{4}=(-1)^3\times\frac{1}{4}+1^3\times\frac{1}{4}+2^3\times\frac{1}{2}=\sum_{i=1}^{3}a_i^3p_i$$

定理1（随机变量一元函数的期望公式）

(1)设X 为离散型随机变量, 其分布律为$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots$

如果级数$\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则X的一元函数$Y=g(X)$的数学期望为

$$E\left[g(X)\right]=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

(2)设X为连续型随机变量, 其密度函数为$f(x)$，如果广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$绝对收敛，则$X$的一元函数$Y=g(X)$的数学期望为

$$E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

定理2（随机变量二元函数的期望公式）

(1)设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，其联合分布律为

$$P\left(X=a_i,Y=b_j\right)=p_{ij}\qquad i,j=1,2,\cdots$$

如果级数 $\sum_i\sum_j g\left(x_i,y_j\right)p_{ij}$ 绝对收敛，

则X,Y的二元函数$g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g\left(x_i,y_j\right)p_{ij}$$

二、随机变量函数的数学期望

(2)设 (X,Y) **是二维连续型随机变量，其联合密度函数为**$f(x,y)$

如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$ **绝对收敛，**

则X,Y**的二元函数**$g(X,Y)$**的数学期望为**

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

例8

已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

计算（1）X,Y的期望$E(X),E(Y)$；（2）$Z=XY$的数学期望$E(Z)$。

解： **方法一 略**

方法二 不必计算 X 和 Y 的边缘概率函数

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=0\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\right)+1\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{4}$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}y_j\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=0\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)+1\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)+2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)=1$$

三、数学期望的性质

定理3 数学期望的性质：

01 OPTION 设c 为常数， 则$E(c)=c$；

02 OPTION 设 X 为随机变量，且$E(X)$ 存在，k,c 为常数，则$E(kX+c)=kE(X)+c$ ；

03 OPTION 设X,Y为任意两个随机变量，且$E(X)$ 和$E(Y)$ 存在，则$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

04 OPTION 设X,Y 为相互独立的随机变量，且$E(X)$ 和$E(Y)$ 存在，则$E(XY)=E(X)E(Y)$.

三、数学期望的性质

（1）$E(X)=c\cdot 1=c$，

性质（2）、（3）、（4）只给出连续型情形的证明，离散型情形类似。

（2）由随机变量一元函数的期望公式及积分的性质得，

$$E(kX+c)=\int_{-\infty}^{\infty}(kx+c)f(x)dx=k\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx+c\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=kE(X)+c$$

（3）由随机变量二元函数的期望公式及期望的定义得

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\right]dx+\int_{-\infty}^{+\infty}y\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=E(X)+E(Y);$$

三、数学期望的性质

（4）因为X,Y为相互独立的随机变量，由随机变量二元函数的期望公式及密度函数的规范性得，

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy\right]dx$$

$$=E(Y)\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=E(X)E(Y)$$

例9 某公司生产的机器其无故障工作时间 X (单位：万小时)的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}, x\geq 2,\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

公司每售出一台机器可获利1600元，若机器售出后使用2.2万小时之内出故障，则应予以更换，这时每台亏损1200元；若在2.2到3万小时之间出故障，则予以维修，由公司负担维修费400元；在使用3万小时后出故障，则用户自己负责。求该公司售出每台机器的平均获利。

解 Y**表示每台机器的获利（单位：百元），则**

$$Y=\begin{cases}16-12, & 2\leq X<2.2;\\ 16-4, & 2.2\leq X<3;\\ 16, & X\geq 3.\end{cases}$$

三、数学期望的性质

Y是 X的函数，令$Y = g(X)$由随机变量函数的数学期望公式得平均获利为

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx=\int_{2}^{2.2} 4\cdot\frac{2}{x^2}dx+\int_{2.2}^{3} 12\cdot\frac{2}{x^2}dx+\int_{3}^{+\infty} 16\cdot\frac{2}{x^2}dx$$

$$=8\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]_{2}^{2.2}+24\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]_{2.2}^{3}+32\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]_{3}^{+\infty}=13\frac{31}{33}\approx 13.94\text{（百元）}$$

故，该公司售出每台机器的平均获利为1394元.

目录/Contents

目录/Contents

4.2 方差和标准差

一、方差和标准差的定义

定义1

设X 是一个随机变量，如果$E\left[(X-E(X))^2\right]$存在，则称

$$D(X) \triangleq E\left[(X-E(X))^2\right]$$

为随机变量 X 的方差。

称方差的算术平方根 $\sigma_X \triangleq \sqrt{D(X)}$ 为随机变量的标准差。

一、方差和标准差的定义

当 X为离散型随机变量，其概率函数为$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots$,

如果级数 $\sum_i [x_i-E(X)]^2 p_i$ **收敛，则 X 的方差为**$D(X)=\sum_i [x_i-E(X)]^2\, p_i$;

当X 为连续型随机变量，其概率密度为$f(x)$，**如果广义积分**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$$

收敛，则 X 的方差为

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx.$$

一、方差和标准差的定义

在实际计算方差时，我们更多的是使用下列公式，这样更简便，

$$D(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$

$$\begin{aligned}
D(X)&=E\left[X-E(X)\right]^2\\
&=E\left\{X^2-2XE(X)+\left[E(X)\right]^2\right\}\\
&=E\left(X^2\right)-2E\left[XE(X)\right]+E\left[E(X)\right]^2\\
&=E\left(X^2\right)-2E(X)E(X)+\left[E(X)\right]^2\\
&=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2
\end{aligned}$$

一、方差和标准差的定义

例1 在下列三种情形下分别计算随机变量X的方差$D(X)$

1 设离散型随机变量$X \sim P(\lambda)$

2 设连续型随机变量$X \sim U(a,b)$

3 设连续型随机变量$X \sim E(\lambda)$

4 设连续型随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

一、方差和标准差的定义

解

01 OPTION

由例4知$E(X)=\lambda$,**由例7知**$E(X^2)=\lambda^2+\lambda$，所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

02 OPTION

由例5知$E(X)=\frac{a+b}{2}$,

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\frac{b^2-ab+a^2}{3}$$

所以$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(b-a)^2}{12}$

一、方差和标准差的定义

03 OPTION

由例5及例8知$E(X)=\frac{1}{\lambda}, E(X^2)=\frac{2}{\lambda^2}$，所以$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{\lambda^2}$

04 OPTION

由方差的定义得，

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma dt$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}t\cdot de^{-\frac{t^2}{2}}=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\left(te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot dt\right)$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\left(0-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)=\sigma^2$$

正态分布的方差即为参数σ^2

二、方差的性质

定理1 方差具有下列性质，

1. $D(X)=0$的充分必要条件是$P(X=c)=1$, 即X 服从参数为c 的退化分布，其中$c=E(X)$ 。特别地，若c为常数，则$D(c)=0$ ；

2. 设X 为随机变量，k,c 为常数，则$D(kX+c)=k^2D(X)$ ；

3. 设X,Y 为任意两个随机变量，则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

4. 设X,Y 为相互独立的随机变量，则$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

二、方差的性质

例2 设随机变量$X \sim B(n,p)$。计算X 的方差$D(X)$。

解 因为$X \sim B(n,p)$，所以$X = \sum_{i=1}^{n} U_i$，其中 U_i 相互独立同分布，

且$U_i \sim B(1,p), i = 1,2,\cdots,n$。因为，

$$E(U_i^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$$

$$D(U_i) = E(U_i^2) - [E(U_i)]^2 = pq$$

那么，由方差的性质得

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(U_i) = npq$$

例3 已知X 是任意的随机变量，

（1）设 $X_* \triangleq X - E(X)$，试证明$E(X_*) = 0$且$D(X_*) = D(X)$ ；

（2）当$D(X) > 0$ 时，设$X^* \triangleq \frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ ，试证明$E(X^*) = 0$且$D(X^*) = 1$

证明 （1）由期望的性质得，

$$E(X_*) = E[X - E(X)] = E(X) - E[E(X)] = 0$$

由方差的性质得，

$$D(X_*) = D[X - E(X)] = D(X)$$

二、方差的性质

（2）由期望的性质得，

$$E(X^*)=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}E[X-E(X)]=0$$

由方差的性质得，

$$D(X^*)=\frac{1}{D(X)}D[X-E(X)]=\frac{D(X)}{D(X)}=1$$

通常称 X_* 为 X 的中心化随机变量，X^* 为X 的标准化随机变量。

例4

已知 X 与 X 相互独立，且 $X \sim N(1,2)$，$Y \sim N(5,9)$，$Z = 2X - Y + 3$，求 $f(z)$

解

由已知及正态分布的可加性定理得 Z 服从正态分布，又由数学期望和方差的性质知，

$$E(Z) = 2E(X) - E(Y) + 2 = 2 \times 1 - 5 + 2 = -1$$

$$D(Z) = 4D(X) + D(Y) = 4 \times 2 + 9 = 17$$

故

目录/Contents

目录/Contents

4.3 协方差和相关系数

一、协方差

定义 1

设 (X,Y) 是二维随机变量，如果$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在，则称

$$\operatorname{cov}(X,Y) \triangleq E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

为随机变量X和Y的协方差。

协方差是随机变量X和Y的函数的期望，由随机变量函数的期望计算公式，就可以得到X和Y的协方差。

在实际计算协方差时，更多的是使用下列公式，

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

当Y即为X时，$cov(X,Y) = cov(X,Y) = D(X)$。当$E(X)=0$ 或 $E(Y)=0$ 时，$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} = E(XY)$。

一、协方差

定理1 协方差具有下列性质：

1. 设 c 为常数，则 $\operatorname{cov}(X,c)=0$；
2. 设 X,Y 为任意两个随机变量，则 $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$ ；
3. 设 X,Y 为任意两个随机变量，k,l 为常数，则 $\operatorname{cov}(kX,lY)=kl\operatorname{cov}(Y,X)$；
4. $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$

一、协方差

证明

01 OPTION

$$\operatorname{cov}(X,c)=E\{[X-E(X)][c-E(c)]\}=0$$

02 OPTION

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}\\&=E\{[Y-E(Y)][X-E(X)]\}=\operatorname{cov}(Y,X)\end{aligned}$$

03 OPTION

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(kX,lY)&=E\{[kX-E(kX)][lY-E(lY)]\}\\&=klE\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=kl\operatorname{cov}(X,Y)\end{aligned}$$

一、协方差

04 OPTION

由协方差的计算式及期望的性质得

$$\operatorname{cov}\left(X_1+X_2,Y\right)=E\left[\left(X_1+X_2\right)Y\right]-\left[E(X_1+X_2)\right]E(Y)$$

$$=E\left(X_1Y\right)+E\left(X_2Y\right)-E(X_1)E(Y)-E\left(X_2\right)E(Y)$$

$$=\operatorname{cov}\left(X_1,Y\right)+\operatorname{cov}\left(X_2,Y\right)$$

因此，n个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$线性组合的方差为

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}k_iX_i+c\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i^2D\left(X_i\right)+2\sum_{1\le i<j\le n}k_ik_jE\left\{\left[X_i-E(X_i)\right]\left[X_j-E(X_j)\right]\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}k_i^2D\left(X_i\right)+2\sum_{1\le i<j\le n}k_ik_j\operatorname{cov}\left(X_i,X_j\right).$$

例1 设二维随机变量(X,Y)服从圆$G=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$上的均匀分布。

计算(1)$E(X),E(Y),D(X),D(Y)$；(2)X和Y的协方差；(3) $\operatorname{cov}(-3X+Y-2,5Y)$

解 由已知得(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & 若x^2+y^2\le 1;\\ 0, & 其余.\end{cases}$

则X的密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1\\ 0, & 其余.\end{cases}$

例1续 由数学期望的定义、随机变量函数的期望公式得：

$$E(X)=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{1}x^2\cdot\sqrt{1-x^2}dx=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{16}=\frac{1}{4}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{4}$$

同理，Y的概率密度函数为$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1<y<1\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$

$$\boxed{E(Y)=0,\ D(Y)=\frac{1}{4}}$$

例1续

$$(2)\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}ydy\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xdx=0$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\frac{1}{4}$$

$$(3)\operatorname{cov}(-3X+Y-2,5Y)=\operatorname{cov}(-3X,5Y)+\operatorname{cov}(Y,5Y)+\operatorname{cov}(-2,5Y)$$

$$=-3\cdot 5\operatorname{cov}(X,Y)+5\operatorname{cov}(Y,Y)+0=5D(Y)=\frac{5}{4}$$

定义2

设(X,Y)是二维随机变量，如果$\operatorname{cov}(X,Y)$存在，且$D(X)>0, D(Y)>0$ 则称

$$\rho(X,Y) \triangleq \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为随机变量X和Y的相关系数，也记作ρ_{XY}.

P97例9续 试求X和Y的相关系数ρ_{XY}。

解：由0-1分布的期望和方差公式得$E(X)=\frac{1}{4}, D(X)=\frac{3}{16}$

使用随机变量函数的期望计算公式得

$$E(Y)=1，\ E(Y^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{5}{12}=\frac{11}{6}，\ E(XY)=1\times1\times\frac{1}{12}+1\times2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4},$$

所以 $$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{6}，\ Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

从而 $$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$

例3 当$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$时，计算$X$和$Y$的数字特征$E(X)$, $D(X),E(Y),D(Y),\mathrm{cov}(X,Y),\rho_{XY}$.

解 由第三章第三节定理1知$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 所以$E(X)=\mu_1$

$D(X)=\sigma_1^2$，$E(Y)=\mu_2$ $D(Y)=\sigma_2^2$。由协方差定义得

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}dxdy$$

例3续

$$\overset{u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\ v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}}{=} \sigma_1\sigma_2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{uv}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2-2\rho uv+v^2\right]\right\}dudv$$

$$=\sigma_1\sigma_2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}du$$

$$=\sigma_1\sigma_2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}\cdot\rho v dv=\rho\sigma_1\sigma_2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\rho\sigma_1\sigma_2$$

所以 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\rho$

我们得到二维正态分布$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$的参数$\rho$恰好是$X$和$Y$的相关系数，

反映了X和Y的线性关系。

二、相关系数

定义3

设(X,Y)是二维随机变量。当$\rho(X,Y)=0$时，称X与Y线性无关或线性不相关。

定理2 当$D(X)>0, D(Y)>0$时，下列5个命题是等价的：

(1)$\rho_{XY}=0$；(2)$\mathrm{cov}(X,Y)=0$；(3)$E(XY)=E(X)E(Y)$；

(4)$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$；(5)$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$

实际中经常会用到这个公式：

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

定理3

设(X,Y)是二维随机变量，当$cov(X,Y)$存在且$D(X)>0, D(Y)>0$ 时，有

$(1)|\rho_{XY}|\leq 1$;

$(2)|\rho_{XY}|=1$的充要条件是$P(Y=aX+b)=1$，其中

当$\rho_{XY}=1$时，$a=\sqrt{\dfrac{D(Y)}{D(X)}}, b=E(Y)-\sqrt{\dfrac{D(Y)}{D(X)}}E(X)$;

当$\rho_{XY}=-1$时，$a=-\sqrt{\dfrac{D(Y)}{D(X)}}, b=E(Y)+\sqrt{\dfrac{D(Y)}{D(X)}}E(X)$;

(3)若随机变量X与Y 相互独立，则X与Y 线性无关，即$\rho_{XY}=0$

但由$\rho_{XY}=0$不能推断X与Y 独立.

证明 (1)因为cov(X,Y)存在，$D(X)>0, D(Y)>0$ 所以ρ_{XY}存在。由方差的性质得，

$$D(X^*\pm Y^*)=D(X^*)+D(Y^*)\pm 2\operatorname{cov}(X^*,Y^*)=1+1\pm 2\rho_{X^*Y^*}=2\pm 2\rho_{XY}$$

而$D(X^*\pm Y^*)\geq 0$ 因此$|\rho_{XY}|\leq 1$。

(2)由性质(1)的证明知 $\rho_{XY}=1 \Leftrightarrow D(X^*-Y^*)=0 \Leftrightarrow P(X^*-Y^*=0)=1$

即$P\left(\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}-\dfrac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}=0\right)=1$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(X)E(Y)-E(X)E(Y)=0$$

因此，$\rho_{XY}=1$的充分必要条件为$P\left(Y=\sqrt{\dfrac{D(Y)}{D(X)}}X-\sqrt{\dfrac{D(Y)}{D(X)}}E(X)+E(Y)\right)=1.$

二、相关系数

同理，$\rho_{XY}=-1$的充分必要条件为$P\left(Y=-\sqrt{\dfrac{D(Y)}{D(X)}}X+\sqrt{\dfrac{D(Y)}{D(X)}}E(X)+E(Y)\right)=1$

(3)当X与Y相互独立时，由协方差的计算式及期望的性质(4)得

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(X)E(Y)-E(X)E(Y)=0$$

那么，X与Y线性无关.

二、相关系数

定义4 设二维随机变量(X,Y)的相关系数ρ_{XY}存在，则

01 OPTION

当$|\rho_{XY}|=1$时，(X,Y)的取值(x,y)在直线$y=ax+b$上的概率为1，称X与Y完全线性相关；

02 OPTION

当$\rho_{XY}=1$时，(X,Y)的取值(x,y)在斜率大于0的直线$y=ax+b$上的概率为1，称X与Y完全正线性相关；

03 OPTION

当$\rho_{XY}=-1$时，(X,Y)的取值(x,y)在斜率小于0的直线$y=ax+b$上的概率为1，称X与Y完全负线性相关；

04 OPTION

当$\rho(X,Y)>0$时，称X与Y正线性相关；

05 OPTION

当$\rho(X,Y)<0$时，称X与Y负线性相关。

二、相关系数

随机变量相互独立和线性无关都刻画了随机变量之间的关系，它们两者有什么联系与区别呢？相互独立时一定线性无关，但反之不一定成立，例如下面的例子。

例4 设二维随机变量(X,Y)服从圆$G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$上的均匀分布。

(1)求X和Y的相关系数ρ_{XY}，试问X和Y是否不相关？(2)X和Y是否相互独立？

解 (1)由$\operatorname{cov}(X,Y)=0$，得$\rho_{XY}=0$，所以 X 和Y 不相关；

(2)因为$f(0,0)=\dfrac{1}{\pi}\neq f_X(0)f_Y(0)=\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{2}{\pi}$，所以 X 和 Y 不独立。

例5 设随机变量Z服从区间$[0,2\pi]$上的均匀分布，令$X=\sin Z, Y=\cos Z$，求ρ_{XY}.

解 由已知得$E(X)=\int_0^{2\pi}\sin z\cdot\frac{1}{2\pi}dz=0$，$E(Y)=\int_0^{2\pi}\cos z\cdot\frac{1}{2\pi}dz=0$

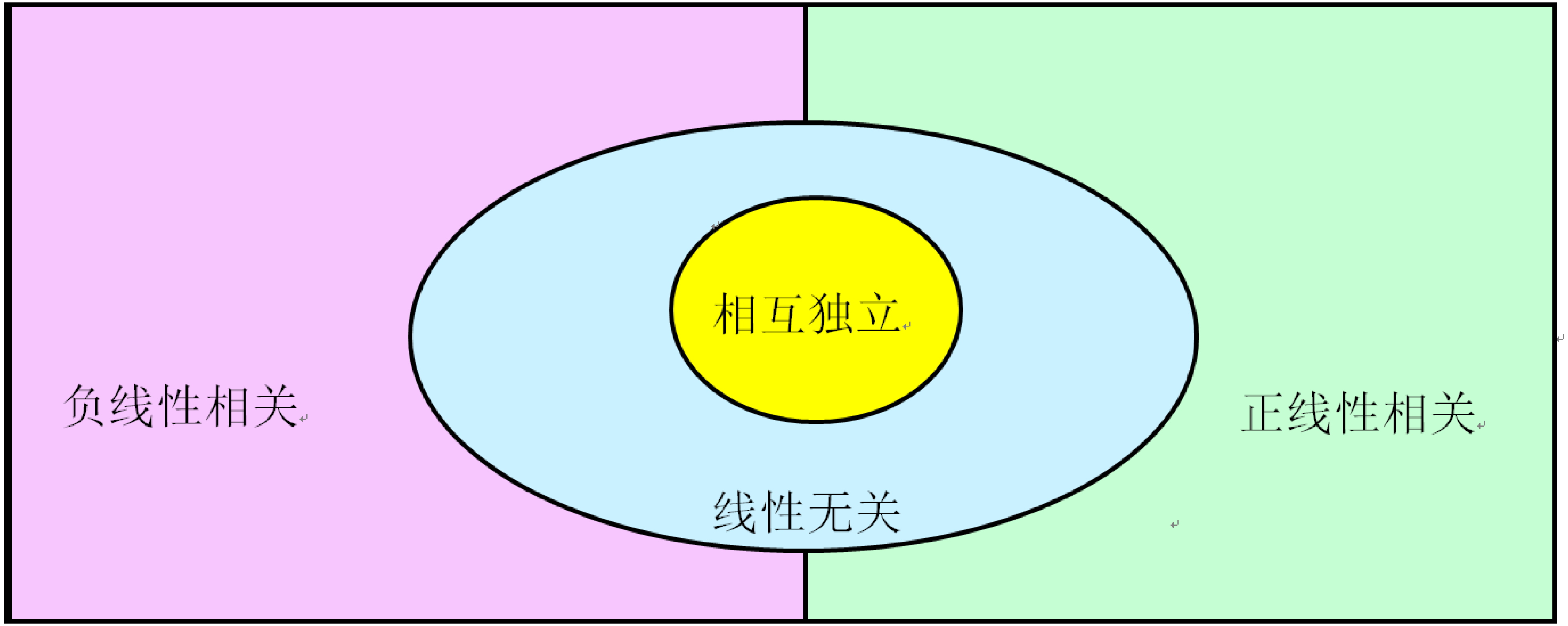
$$E(X^2)=\int_0^{2\pi}\sin^2 z\cdot\frac{1}{2\pi}dz=\frac{1}{2}\quad \mathrm{D}(Z)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}$$

同理 $D(Y)=\frac{1}{2}, E(XY)=\int_0^{2\pi}\sin z\cos z\cdot\frac{1}{2\pi}dz=0$

所以 $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0, \rho_{XY}=0.$

即X与Y不相关，但是$X^2+Y^2=1$，因此X与Y不相互独立.

二、相关系数



相互独立与线性无关、线性相关之间的关系

定理4

如果二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布，那么，X与Y相互独立等价于X与Y线性无关.

证明

由第三章第三节定理4知，当(X,Y)服从二维正态分布时，X与Y相互独立的充分必要条件是$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{0}$，又由本节例2知，$\boldsymbol{\rho}=\rho_{XY}=0$，即$X$与$Y$线性无关.

二、相关系数

定理给出了不相关与相互独立相统一的例子，这样的例子不是唯一的。可以这样说，独立是从整体也即分布的角度刻画随机变量之间的关系，它意味着两个随机变量无任何关系，而不相关仅仅是从数字特征角度刻画随机变量之间的关系，它意味着两个随机变量之间无线性关系，但不意味着两个随机变量之间无其它关系。

目录/Contents

目录/Contents

4.4 其他数字特征

一、k阶矩

定义1

设X,Y 是随机变量，k , l 是正整数，则称

$E(X^k)$ 是随机变量X的k阶原点矩

$E\left[(X-E(X))^k\right]$ 是随机变量X 的k阶中心矩

$E(X^kY^l)$ 是随机变量(X,Y)的$(k\,,l)$阶原点矩

$E\left[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l\right]$ 是随机变量(X,Y)的$(k\,,l)$ 阶中心矩

一、k阶矩

例1

设$X\sim N(0,1)$，**试证明** $E(X^k)=\begin{cases}(k-1)(k-3)\cdots 1, & \text{当}k\text{为偶数时},\\ 0, & \text{当}k\text{为奇数时}.\end{cases}$

证明 当k为奇数时，$E(X^k)=0$；当k为偶数时，设$I_k=E(X^k)$，

$$I_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{k-1}de^{-\frac{x^2}{2}}=-\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}-(k-1)\int_{-\infty}^{\infty}x^{k-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right\}$$

$$=(k-1)I_{k-2}$$

所以$I_k=(k-1)(k-3)\cdots 1\cdot I_0=(k-1)(k-3)\cdots 1=(k-1)!!$

一、k阶矩

例2

设$X \sim N(1,2)$**，试计算**$E[(X-1)^6]$

解 因为 $\frac{X-1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$，所以

$$E[(X-1)^6]=8E\left[\left(\frac{X-1}{\sqrt{2}}\right)^6\right]=8\cdot 5!!=120$$

一、k阶矩

n维正态分布的密度函数的表示

对 n维随机向量 $(X_1,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$，设 $\mu=\begin{pmatrix}E(X_1)\\ \vdots \\ E(X_n)\end{pmatrix}$为$(X_1,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$的期望向量

定义

$$C=\begin{pmatrix}\operatorname{cov}(X_1,X_1) & \cdots & \operatorname{cov}(X_1,X_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(X_n,X_1) & \cdots & \operatorname{cov}(X_n,X_n)\end{pmatrix}$$

为 $(X_1,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$的协方差矩阵。

一、k阶矩

可以验证二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$的密度函数可表示为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\mathrm{C}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}C^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

其中

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\mathrm{C}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2&\rho\sigma_1\sigma_2\\\sigma_1\sigma_2&\sigma_2^2\end{pmatrix},\mathrm{C}^{-1}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2}&-\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}\\-\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}&\frac{1}{\sigma_2^2}\end{pmatrix}$$

二、变异系数

定义2

设随机变量 X 的数学期望$E(X) \neq 0$，方差$D(X)$存在，那么称

$$\delta_X \triangleq \frac{\sqrt{D(X)}}{|E(X)|}$$是随机变量X的变异系数

三、分位数和中位数

定义3

设 连续型随机变量 X的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$ ，

$$F(\boldsymbol{x}_p) = P(X \le \boldsymbol{x}_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f(x)dx = p$$

则称 $x_p = F^{-1}(p)$ 是随机变量 X的 p分位数。

特别地，当$p = \frac{1}{2}$时，称 $x_{\frac{1}{2}}$为中位数

例3

已知随机变量$X\sim N(3,4)$，求X 的分位数$x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{3}{4}}$，和中位数 $x_{\frac{1}{2}}$ 。

因为$P\left(X \leq x_{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}$，得$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_{\frac{1}{4}}-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{4}$，所以$\frac{x_{\frac{1}{4}}-\mu}{\sigma} = u_{\frac{1}{4}}$

其中$u_{\frac{1}{4}}$为标准正态分布的$\frac{1}{4}$ 分位数。查表得 $u_{\frac{3}{4}} = 0.6745$，

因此，$u_{\frac{1}{4}} = -0.6745$，那么

$$\frac{x_{1/4}-3}{2} = -0.6745 \qquad x_{\frac{1}{4}}=1.651$$

同理 $x_{\frac{3}{4}}=4.349$。由密度函数的轴对称性，知 $x_{\frac{1}{2}} = 3$。

定义4

设 X为离散型随机变量，其分布律为$P(X=a_i)=p_i, i=1,2,\cdots,$

如果存在实数a^* ,使得$P(X=a^*)\geq P(X=a_i)$, 对一切$i=1,2,\cdots$

成立，那么称 a^* 为 X （或 X所服从的分布）的众数。

总结/summary

理解 离散型、连续型随机变量的数学期望的定义及其概率含义
熟悉 数学期望的性质
掌握 随机变量函数的期望公式
熟练 常用随机变量的数学期望

理解 随机变量方差的定义及方差的概率含义
熟悉 方差的性质
掌握 随机变量的方差计算公式
熟练 常用随机变量的方差

理解 随机变量协方差、相关系数的定义及概率含义
熟悉 协方差、相关系数的性质
掌握 协方差、相关系数的计算

理解 阶矩的定义掌握　正态分布的 阶原点矩的计算公式

了解 期望向量、协方差矩阵的定义
了解 期望向量、协方差矩阵的简单计算

了解 变异系数、分位数、中位数及众数的定义及简单计算