# 第一章　随机事件与概率

关键词：

- 样本空间
- 随机事件
- 频率和概率
- 条件概率
- 事件的独立性

# 1.1 随机事件及其运算

## 【随机现象】

- 例： 向上抛出的物体会掉落到地上 ——确定

  明天天气状况 ——不确定

  买了彩票会中奖 ——不确定

- 在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象称为**随机现象**。
- 它具有以下特性：

  1. 结果不唯一；

  2. 事先不能确定会出现何种结果

# 【随机试验】

- 例：1、抛一枚硬币，观察试验结果；

  2、对某路公交车某停靠站登记下车人数；

  3、对听课人数进行一次登记；

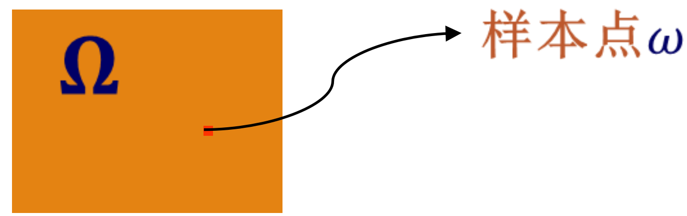
- 对随机现象的观察、记录、试验统称为**随机试验**。

它具有以下特性：

1. 可以在相同条件下重复进行
2. 事先知道可能出现的结果
3. 进行试验前并不知道哪个试验结果会发生

# 【样本空间】

定义：随机试验E的所有结果构成的集合称为E的**样本空间**，记为$\Omega = \{\omega\}$，称S中的元素$\omega$为**基本事件**或**样本点**.




- 一枚硬币抛一次

  $\Omega$ = {正面，反面}；

- 记录一城市一日中发生交通事故次数

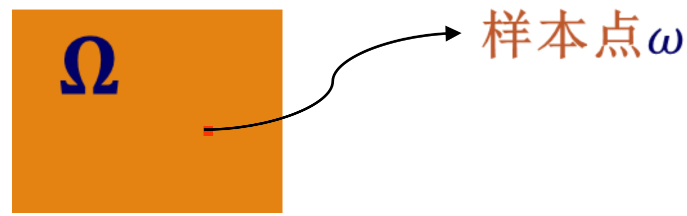
  $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$；

- 记录某地一昼夜最高温度x，最低温度y

  $\Omega = \{(x, y) \mid T_0 \leqslant y \leqslant x \leqslant T_1\}$；

## 【样本空间】

定义：随机试验E的所有可能的结果组成的集合称为E的样本空间，用$\Omega = \{\omega\}$表示，称$\omega$为基本事件或样本点。




- 一枚硬币抛一次

  $\Omega = \{正面，反面\}$；

- 记录一城市一日中发生交通事故次数

  $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$；

- 记录某地一昼夜最高温度$x$，最低温度$y$

  $\Omega = \{(x, y) \mid T_0 \leqslant y \leqslant x \leqslant T_1\}$；

➢ 调查城市居民（以户为单位）烟、酒的年支出，结果可以用$(x,y)$表示，

□ $x$, $y$分别表示烟、酒年支出的元数.

**样本空间:**

由坐标平面第一象限内一定区域内一切点构成 .

□按某种标准把支出分为高、中、低三档.

**样本空间:**

由（高,高），（高,中），…，(低,低）等9个样本点构成 .

例1 写出下列随机试验的样本空间：

$E_1$：抛一枚硬币，观察正面H和反面T出现的情况。

$E_2$：将一枚硬币抛掷三次，观察正面H出现的次数。

$E_3$：记录电话交换台一分钟内接到的呼叫次数。

例2 一个袋中装有8个大小完全相同的球，其中有4个是白色的，4个是红色的，搅匀后从中任取一球，求此随机试验的样本空间。

注意： 实际工作中, 在进行随机试验时, 我们往往会关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合.

- 例如: 在测试某灯泡的寿命试验中,若规定灯泡的寿命 (小时) 小于500为次品,那么我们关心灯泡的寿命$t$是否满足$t \geq 500$。或者说, 我们关心满足这一条件的样本点组成的一个集合$\{t|t \geq 500\}$ .

## 【随机事件】

- 一般我们称Ω的子集A为E的**随机事件**A.

- 例：观察100路公交车淮师站某一时刻候车人数，

$$S=\{0,1,2,\cdots\};$$

记$A=\{$至少有10人候车$\}=\{10,11,12,\cdots\}$，

则A为随机事件，A可能发生，也可能不发生。

- 随机事件简称事件，常用**A**，**B**，**C**等表示.

例：在掷骰子试验中，观察掷出的点数 .写出其样本空间。

➢ 样本空间为：$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

事件 A={掷出1点} $=\{1\}$.

事件 B={掷出奇数点} $=\{1,3,5\}$

事件 C={出现的点数大于4} $=\{5,6\}$.

◆基本事件: 由一个样本点组成的单点集.

(相对于观察目的不可再分解的事件)

例：如在掷骰子试验中，观察掷出的点数 .

事件 $A_i$ ={掷出$i$点}, $i$ =1,2,3,4,5,6

基本事件

## ◆随机事件的发生

当且仅当集合A中的一个样本点出现时,称事件A发生.

例：在掷骰子试验中，观察掷出的点数.


B发生当且仅当B中的样本点1,3,5中的某一个出现.

事件 B={掷出奇数点}= $\{1,3,5\}$

## ◆ 两个特殊的事件：

必然事件

即在试验中必定发生的事件，常用Ω表示；

不可能事件

即在一次试验中不可能发生的事件，常用Φ 表示 .

例如，在掷骰子试验中，“掷出点数小于7”是必然事件；

“掷出点数8”则是不可能事件.

## 【事件间的关系】

$1^\circ\ A\subset B$: 事件$A$发生一定导致$B$发生

$$2^\circ\ A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A\subset B \\ B\subset A \end{cases}$$


$A\subset B$

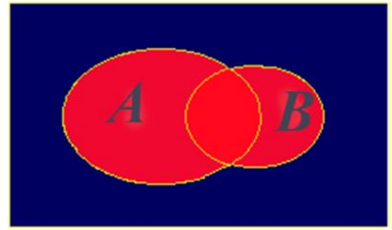
✓记A={明天天晴}，B={明天无雨} $\Rightarrow B\supset A$

✓记A={至少有10人候车}，B={至少有5人候车} $\Rightarrow B\supset A$

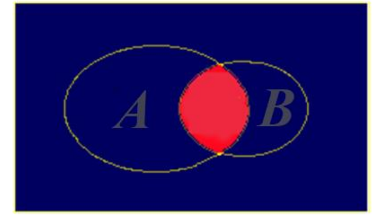
✓一枚硬币抛两次，A={第一次是正面}，

B={至少有一次正面} $\Rightarrow B\supset A$

# 【事件间的运算】



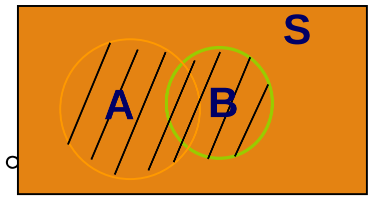

$A \cup B$




$AB$

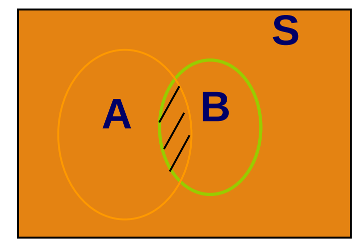
- ✓ A与B的和事件，记为$A \cup B$

$A \cup B = \{ x \mid x \in A$ 或 $x \in B \}$：$A$与$B$至少有一发生。




- ✓ A与B的积事件，记为$A \cap B, A \cdot B, AB$

$A \cap B = \{ x \mid x \in A$ 且 $x \in B \}$：$A$与$B$同时发生。




$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$：$A_1, A_2, \cdots A_n$至少有一发生

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$：$A_1, A_2, \cdots A_n$同时发生

➢ 例如$B = \{2,4\}$，$C = \{1,2,3,5\}$

则$B \cup C =$____________；$B \cap C =$________________.

性质：

（1）$A \subset (A \cup B)$ ，$B \subset (A \cup B)$

$(A \cap B) \subset A$ ,$(A \cap B) \subset B$

（2）$A \cup A = A$ ，$A \cap A = A$

（3）若$B \supset A$，则$AB = A$，$A \cup B = B$

# 互斥事件Vs对立事件

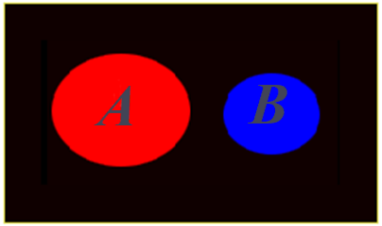
- 互斥事件：

  若事件$A$，$B$不能同时发生，即$AB=\emptyset$，则称事件A与B为互斥事件或者互不相容事件.此时$A\cup B$可记为$A+B$

- 对立事件：

  若事件$A$，$B$在一次实验中有且只有其中之一发生，即$A\cup B=\Omega$且$AB=\emptyset$，则称事件A与B为互逆事件或者对立事件。事件A的对立事件记为$\bar{A}$.

易见：$\bar{\bar{A}}=A$




$AB=\phi$

$A$、$B$ 互斥


对立事件 $\bar{A}$

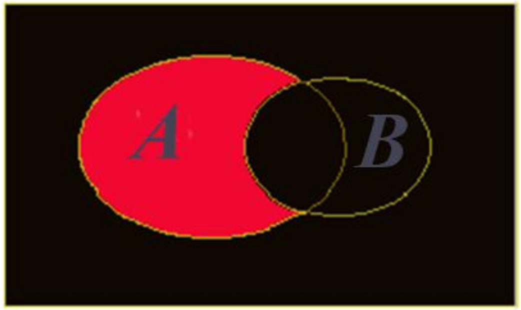
注：

对立必互斥；

互斥不一定对立

✓ 差事件：称事件$A$发生而事件$B$不发生所构成的事件为事件$A$与事件$B$的差事件，记为$A-B$.

$$A-B=A\overline{B}=A-AB$$




$$A-B=A\overline{B}$$

## 【事件运算的性质】

（1）交换律：$A \cup B = B \cup A$；$AB = BA$

（2）结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；$(AB)C = A(BC)$

（3）分配律：$(A \cup B)C = AC \cup BC$；

$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$$

（4）德摩根律（对偶律）

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}；\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- **例：按长度和直径两个指标检验某种圆柱形产品是否为合格品。设$\boldsymbol{A}=\{$长度合格$\}$，$\boldsymbol{B}=\{$直径合格$\}$，试用$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的运算表示事件$\boldsymbol{C}=\{$产品为合格品$\}$，**

$$\boldsymbol{D}=\{\text{产品为不合格品}\}$$

解：产品为合格品必须是长度和直径两个指标同时合格，

$$C=AB$$

产品为不合格品必须是长度和直径两个指标至少有一个不合格，

$$D=\bar{A}\cup\bar{B}\text{或}D=\overline{AB}$$

【练习】设$A,B,C$为样本空间中的三个随机事件，试用$A,B,C$的运算表示下列随机事件：

（1）$A$发生而$B,C$都不发生；

（2）$A,B,C$都不发生

（3）$A,B,C$中恰好有一个发生；

（4）$A,B,C$中至少有两个发生；

（5）$A,B,C$中至少有一个发生；

（6）$A,B,C$中恰好有两个发生

# 基本概念

| | |
|---|---|
| 不确定现象 | 子事件 |
| 随机试验 | 事件的相等 |
| 基本事件 | 事件的和(并) |
| 不可能事件 | 事件的积(交) |
| 随机现象 | 事件的差 |
| 随机事件 | 事件的互斥(互不相容) |
| 样本空间 | 事件的互逆(对立) |
| 必然事件 | 事件的运算律 |
| 统计规律性 | |

# 1.2　概率的定义及其性质

研究随机现象，不仅关心试验中会出现哪些事件，更重要的是想知道事件出现的可能性大小，也就是事件的概率.

概率是随机事件发生可能性大小的度量

事件概率的大小对人们生活的意义:

- 了解发生意外人身事故的可能性大小,确定保险金额.

➢了解来商场购物的顾客人数的各种可能性大小，合理配置服务人员.

➢了解每年最大洪水超警戒线可能性大小，合理确定堤坝高度.

## 【频率】

- 设在n次试验中，事件A出现的次数为$n(A)$, 这里的$n(A)$称为事件A出现的频数，称

$$f_n(A)=\frac{n(A)}{n}$$

为事件A出现的频率。

- 中国国家足球队，“冲击亚洲”共进行了$n$次，其中成功了一次，求在这$n$次试验中“冲击亚洲”这事件发生的频率。
- 某人一共听了16次“概率统计”课，其中有10次迟到，记A={听课迟到}，求A发生的频率。

## ** 频率的性质：

（1）非负性：$0 \le f_n(A) \le 1$

（2）正则性：$f_n(\Omega) = 1$

（3）有限可加性：若$A_1, A_2, \cdots, A_m$两两互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

# 抛掷钱币试验记录

| 试验者 | 抛币次数n | “正面向上”次数 | 频率 $f_n(A)$ |
|---|---|---|---|
| De Morgan | *2084* | *1061* | *0.518* |
| Bufen | *4040* | *2048* | *0.5069* |
| Pearson | *12000* | *6019* | *0.5016* |
| Pearson | *24000* | *12012* | *0.5005* |

可见, 在大量重复的试验中,随机事件出现的频率具有稳定性.即通常所说的统计规律性.

## ◆ 概率的统计定义

定义：在不变的一组条件下进行大量的重复试验，随机事件$\boldsymbol{A}$出现的频率$\boldsymbol{f_n(A)}$会稳定地在某个固定的数值$\boldsymbol{p}$的附近摆动。我们称这个稳定值$\boldsymbol{p}$为随机事件$\boldsymbol{A}$的概率。

记为$\boldsymbol{P(A)=p}$

## ◆ 概率的古典定义（古典概型）

定义：若试验E满足：

1. Ω中样本点有限(有限性)
2. 每一样本点出现的概率相等(等可能性)

$$P(A)=\frac{A\text{所包含的样本点数}}{\Omega\text{中的样本点数}}$$

称这种试验为**等可能概型(或古典概型)**。

例1 将一枚硬币抛掷三次.

$(i)$ 设事件 $A_1$ 为"恰有一次出现正面",求 $P(A_1)$.

(ii) 设事件 $A_2$ 为"至少有一次出现正面",求 $P(A_2)$.

---

解　此试验的样本空间为:

$$S=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}.$$

而 $A_1=\{HTT,THT,TTH\}$, 所以

$$P(A_1)=\frac{3}{8}.$$

$$A_2=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH\}.$$

$$P(A_2)=\frac{7}{8}.$$

例2 设有$N$件产品,其中有$M$件次品,现从这$N$件中任取$n$件,求其中恰有$k$件次品的概率.(无放回抽样)

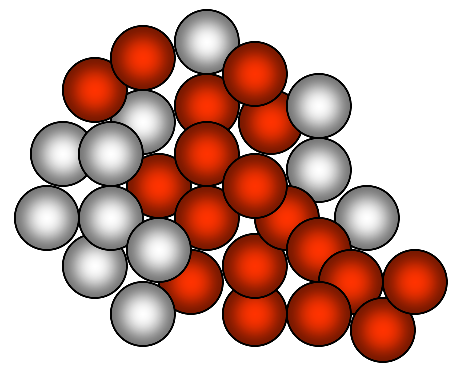
解　令$B=\{$恰有$k$件次品$\}$

$P(B)=?$

次品　M件次品

正品　N-M件正品

$$P(B)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$



......

例3：将n个不同的球，投入N个不同的盒中(n≤N)，设每一球落入各盒的概率相同，且各盒可放的球数不限，记A＝{ 指定的n个盒子各有一球 }， B＝{ 恰有n个盒子各有一球 }，求P(A)和P(B).

解　　基本事件总数为$N^n$.

事件 $A$ 所含的基本事件数为 $n!$

事件 $B$ 所含的基本事件数为$C_N^n n!$

故　$P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$,　　$P(B)=\dfrac{C_N^n n!}{N^n}$.

注：若取n＝64，N＝365

$$\Rightarrow P(\bar{A})=1-C_N^n\cdot n!/N^n=0.997$$

可解析为一个64人的班上，至少有两人在同一天过生日的概率为99.7%.

例4　某接待站在某一周曾接待过12次来访，已知所有这12次接待都是在周二和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的。

解：假设接待站的接待时间没有规定，而各来访者在一周的任一天中去是等可能的。

则12次接待都在周二与周四的概率为

$$2^{12}/7^{12} \approx 0.0000003$$

- 人们在长期的实践中总结得到“概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的”(称之为小概率事件原理)。

现在概率很小的事件在一次试验中竟然发生了，因此有理由怀疑假设的正确性，从而推断接待站不是每天都接待来访者，即认为其接待时间是有规定的。

## 注意：

1、在应用古典概型时必须注意“等可能性”的条件.

“等可能性”是一种假设，在实际应用中，我们需要根据实际情况去判断是否可以认为各基本事件或样本点是等可能的.

2、在用排列组合公式计算古典概率时，必须注意不要重复计数，也不要遗漏.

## 3、许多表面上提法不同的问题实质上属于同一类型：

- 有$n$个人，每个人都以相同的概率 $1/N$ $(N \geq n)$被分在 $N$ 间房的每一间中，求指定的$n$间房中各有一人的概率.
- 有$n$个人，设每个人的生日是任一天的概率为$1/365$. 求这$n$ $(n \leq 365)$个人的生日互不相同的概率.
- 有$n$个旅客，乘火车途经$N$个车站，设每个人在每站下车的概率为$1/N(N \geq n)$，求指定的$n$个站各有一人下车的概率.
- 某城市每周发生7次车祸，假设每天发生车祸的概率相同. 求每天恰好发生一次车祸的概率.

## ◆ 概率的几何定义（几何概型）

### ◆古典概型的局限性

- 在古典概型中,实验的结果是有限的,这是一个很大的限制.一般说来,当实验结果为无限时,会出现一些本质性的困难。而实际上,实验结果为无限的情形比比皆是.
- 这里讨论在实验结果为无限多但具有某种“等可能性”的一类问题.

## ◆几何概型

- 若我们在一个面积为S(或长度L,或体积V)的几何区域T中,等可能地任意投点.这里“等可能”的确切意义是这样的：设在T中有一个任意的小区域C，其面积为A，则点落入C中的可能性的大小与其面积A成正比，而与C的位置及形状无关.

- 若落入小区域$C$这个事件仍然记作$C$,则由$P(S)=1$,可得:

$$P(C)=A/T=\{C\text{对应的面积}/\text{总面积}\}$$

这一概率通常称作几何概率.

例1:(会面问题) 甲. 乙二人约定在6时到7 时在某处会面, 并约定先到者等候另一人一刻钟, 过时即可离去. 求两人能会面的概率.

解:以x和y分别表示甲．乙二人到达约会地点的时间，则两人能会面的充分必要条件是:

$$|x-y|\le 15$$

在平面坐标系中，（x，y）的所有结果可以表示为边长为６０的正方形，而会面的时间由图中阴影部分所表示.

$$P=\text{阴影面积}/\text{正方形的总面积}$$

$$=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}$$

## ◆ 概率的公理化定义

设E是随机试验，S是它的样本空间，对于E的每一个事件A赋予一个实数P(A)，如果它满足下列三个条件：

(1) $P(A) \geq 0$;　　（非负性）

(2) $P(S) = 1$;　　（规范性）

(3) 对于两两互斥事件 $A_1, A_2, \ldots$, 有

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$　（可列可加性）

则称P(A)为事件A的概率。

## ➢概率的性质

**性质1** $P(\varnothing)=0$ .

证　因为 $\varnothing=\varnothing+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots$

由于上式右端可列个事件两两互斥,故由概率公理化定义的可列可加性,有

$$P(\varnothing)=P(\varnothing+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots)$$

$$=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots$$

再由概率的非负性可得,

$$P(\varnothing)=0 .$$

**性质2** 设有限个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥,则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证　因为

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \varnothing + \varnothing + \cdots$$

所以由可列可加性及性质1,有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \varnothing + \varnothing + \cdots)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + 0 + 0 + \cdots$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

**性质 3**　对于任何事件 $A$,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证　因为 $A\cup\overline{A}=\Omega$ ,且 $A\overline{A}=\varnothing$ .

所以　$P(A\cup\overline{A})=P(\Omega)=1$.

并且　$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$

由以上两式可得, $P(A)+P(\overline{A})=1$

即　$P(\overline{A})=1-P(A)$.

**性质 4** 设 $A$、$B$ 为两事件，且 $A \supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B) \quad \text{并且} \quad P(A) \geq P(B).$$

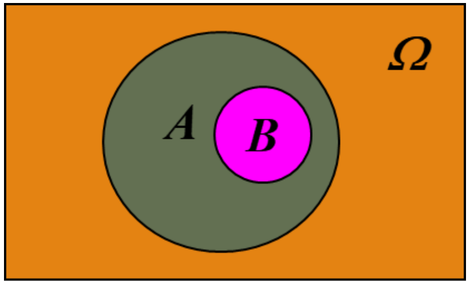
证 如图，因为 $A \supset B$，所以 $A=B+(A-B)$

并且 $B(A-B)=\varnothing$

于是由性质 2，可得

$$P(A)=P(B)+P(A-B)$$

也即 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，



$A \supset B$

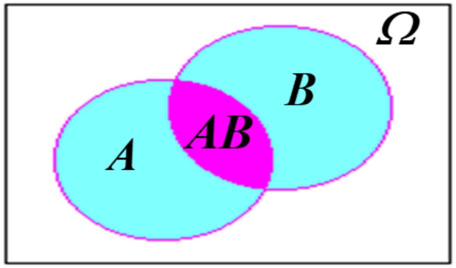
又由概率的非负性，有 $P(A-B)=P(A)-P(B) \geq 0$

即 $P(A) \geq P(B)$.

**性质5** 设 $A,B$ 为任意两个事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证 $A\cup B=A+(B-AB)$




而且 $A(B-AB)=\varnothing$

所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$

$$=P(A)+P(B)-P(AB).$$

由此性质还可推得

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B).$$

# 推论:

$$P(A\cup B\cup C)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

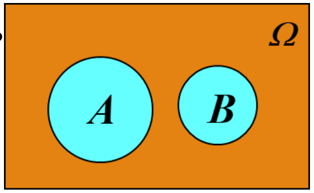
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i,j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i,j,k\le n}P(A_iA_jA_k)$$

$$-\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

【例】设A，B是两个随机事件，且$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，

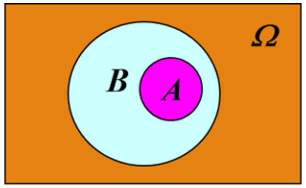
就下列三种情况求概率$P(B\bar{A})$

(1) $A$与$B$互斥；(2) $A\subset B$；(3) $P(AB)=\frac{1}{9}$.



$A$、$B$互斥

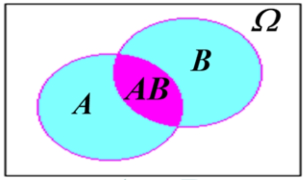
解：（1）$P(B\bar{A})=P(B)=\frac{1}{2}$



$A\subset B$

（2）$P(B\bar{A})=P(B-A)=P(B)-P(A)$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$



$A\cap B$

（3）$P(B\bar{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}=\frac{7}{18}$$

【例】设A，B，C是三事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求A，B，C至少有一个发生的概率.

解 $P(A\cup B\cup C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}.$$

【例】在1到2000的整数中随机地取一个数，问取得的整数既不能被6整除，也不能被8整除的概率是多少？

解　设 $A=\{$取到的数能被6整除$\}$,

$B=\{$取到的数能被8整除$\}$.

所求概率为 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

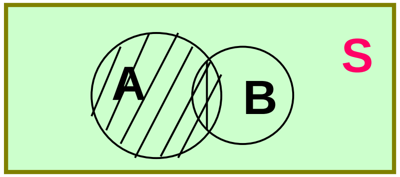
又 $P(A)=\dfrac{333}{2000}$, $P(B)=\dfrac{250}{2000}$, $P(AB)=\dfrac{83}{2000}$,

故所求概率为 $p=1-\dfrac{333}{2000}-\dfrac{250}{2000}+\dfrac{83}{2000}=\dfrac{3}{4}$.

# 1.3 条件概率

- 例：有一批产品，其合格率为90%，合格品中有95%为优质品，

- 从中任取一件，记A={取到一件合格品}，B={取到一件优质品}，则 P(A)=90%　而P(B)=85.5%。记：P(B|A)=95%




1. P(A)=0.90 是将整批产品记作1时A的测度
2. P(B|A)=0.95 是将合格品记作1时B的测度
3. 由P(B|A)的意义，其实可将P(A)记为P(A|S)，而这里的S常常省略而已，P(A)也可视为条件概率

分析：

若记P(B|A)=x，则应有P(A):P(AB)=1:x

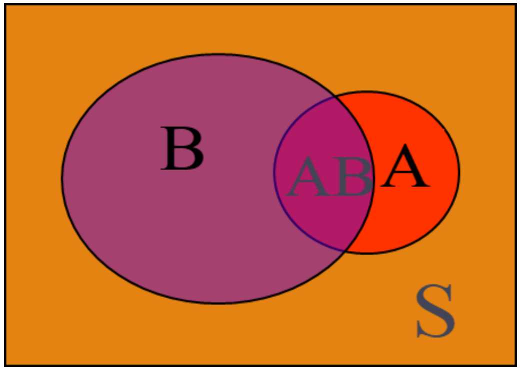
解得：　$x = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

## ◆ 条件概率

设A、B是两个事件，且P(B)>0,则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件B发生的条件下,事件A的条件概率.




若事件*B*已发生，则为使 *A*也发生， 试验结果必须是既在 *B* 中又在*A*中的样本点，即此点必属于*AB*. 由于我们已经知道*B*已发生，故*B*变成了新的样本空间 。

## ◆ 条件概率的性质

(1) 非负性:对于任意的事件 $B$, $P(B \mid A) \geq 0$;

(2) 规范性: $P(S \mid A) = 1$;

(3) 可列可加性:设 $B_1, B_2, \ldots$ 是两两互斥事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

P(B|A)具有概率的所有性质，例如：

$$P(B \mid A) = 1 - P(\bar{B} \mid A)$$

$$P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A) - P(BC \mid A)$$

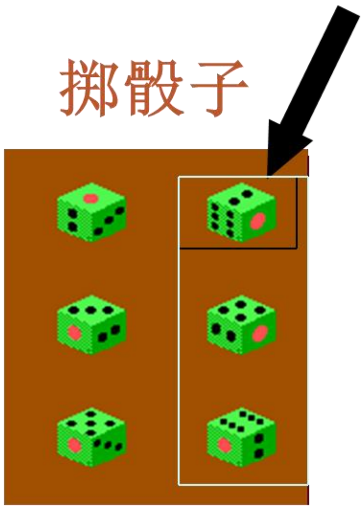
$$B \supset C \quad \Rightarrow P(B \mid A) \geq P(C \mid A)$$

## ◆ 条件概率的计算

1) 用定义计算:$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，$P(B)>0$;

2) 从加入条件后改变了的情况去算.

掷骰子



例：*A*={掷出2 点}， *B*={掷出偶数点}

$$P(A|B)=\frac{1}{3}$$

*B*发生后的缩减样本空间所含样本点总数

在缩减样本空间中*A*所含样本点个数

【例】掷两颗均匀骰子,已知第一颗掷出6点,问“掷出点数之和不小于10”的概率是多少?

解 设$A$={掷出点数之和不小于10}

$B$={第一颗掷出6点}

应用定义

法1 $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3/36}{6/36}=\frac{1}{2}$$

法2 $$P(A|B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

在$B$发生后的缩减样本空间中计算

【例】 设某种动物由出生算起活到20年以上的概率为0.8，活到25年以上的概率为0.4. 问现年20岁的这种动物，它能活到25岁以上的概率是多少？

解　设$A$={能活20年以上}，$B$={能活25年以上}，

所求为 $P(B|A)$ .

依题意， $P(A)=0.8$, $P(B)=0.4$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5$$

## 条件概率 $P(A|B)$ 与 $P(A)$ 的区别

- 每一个随机试验都是在一定条件下进行的 ,设 $A$ 是随机试验的一个事件，则 $P(A)$ 是在该试验条件下事件 $A$ 发生的可能性大小.
- 而条件概率 $P(A|B)$ 是在原条件下又添加 “$B$ 发生 ” 这个条件时 $A$ 发生的可能性大小，即 $P(A|B)$ 仍是概率.
- $P(A)$ 与 $P(A|B)$ 的区别在于两者发生的条件不同,它们是两个不同的概念,在数值上一般也不同.

## ◆ 乘法公式

(1)和(2)式都称为乘法公式，利用它们可计算两个事件同时发生的概率

由条件概率的定义： $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

若已知$P(B), P(A|B)$时, 可以反求$P(AB)$.

- 若$P(B)>0$,则$P(AB)=P(B)P(A|B)$ **(1)**

将$A$、$B$的位置对调，有

若$P(A)>0$,则$P(BA)=P(A)P(B|A)$

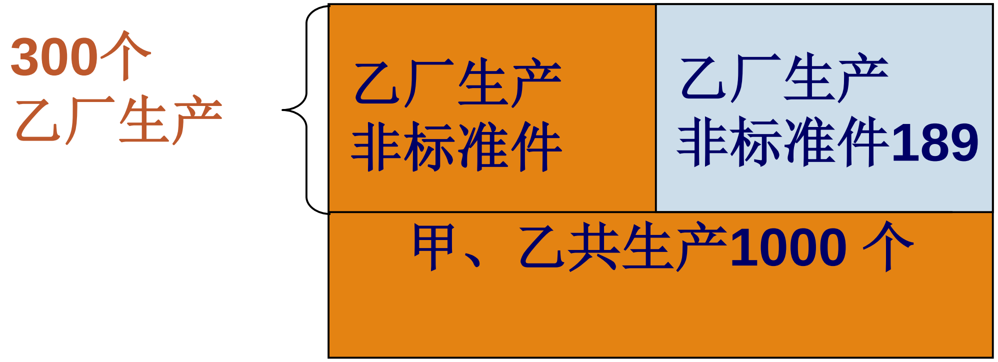
而 $P(AB)=P(BA)$

- 故 $P(A)>0$ , 则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ **(2)**

**例2** 甲、乙两厂共同生产1000个零件，其中 300件是乙厂生产的．而在这300个零件中，有189个是标准件，现从这1000个零件中任取一个，问这个零件是乙厂生产的标准件的概率是多少？

设$B$={零件是乙厂生产}，　　$A$={是标准件}

所求为$P(AB)$.



乘法定理可以推广到多个事件的积事件的情况.

设 $A$、$B$、$C$ 为三个事件,且 $P(AB)>0$,则

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A).$$

一般地,设有 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\ldots,A_n$, $n\geq 2$,并且

$P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$,则由条件概率的定义,可得

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_n\mid A_1A_2\ldots A_{n-1})P(A_{n-1}\mid A_1A_2\ldots A_{n-2})\ldots$$

$$\cdot P(A_3\mid A_1A_2)P(A_2\mid A_1)P(A_1)$$

# 乘法公式应用举例

一场精彩的足球赛将要举行, 5个球迷好不容易才搞到一张入场券.大家都想去,只好用抽签的方法来解决.


入场券

5张同样的卡片,只有一张上写有“入场券”,其余的什么也没写.将它们放在一起,洗匀,让5个人依次抽取.

你准备先抽还是后抽呢？

我们用$A_i$表示“第$i$个人抽到入场券”，则$\bar{A}_i$表示“第$i$个人未抽到入场券”,$i$＝1,2,3,4,5.

易见，$P(A_1)=\frac{1}{5}$

$$P(A_2)=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

$$P(A_3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

抽签不必争先恐后.

……………………………………

继续做下去就会发现，每个人抽到“入场券”的概率都是1/5.

例：某厂生产的产品能直接出厂的概率为70%，余下的30%的产品要调试后再定，已知调试后有80%的产品可以出厂，20%的产品要报废。求该厂产品的报废率。

解：设 A={生产的产品要报废}

B={生产的产品要调试}

已知P(B)=0.3，P(A|B)=0.2，

∵AB与$A\bar{B}$不相容

$$P(A)=P(AB\cup A\bar{B})=P(AB)+P(A\bar{B})$$

$$=P(B)\cdot P(A|B)+P(\bar{B})\cdot P(A|\bar{B})$$

$$=0.3\times 0.2+0.7\times 0=6\%$$

另解：$A\subset B, A=AB,$

$$P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B)=0.3\times 0.2=6\%$$

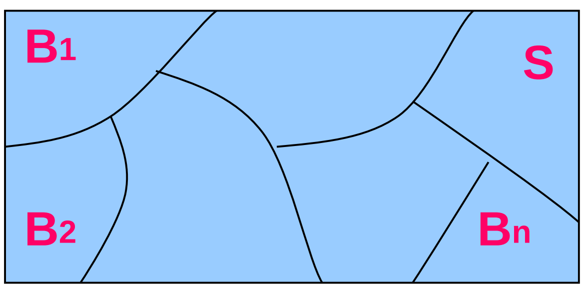
# 1.3.3 全概率公式

定义：设S为试验E的样本空间，$B_1, B_2, \cdots, B_n$为E的一组事件。若：

$$(i)\quad B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$$

$$(ii)\quad B_iB_j = \varnothing,\quad i \neq j,\quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

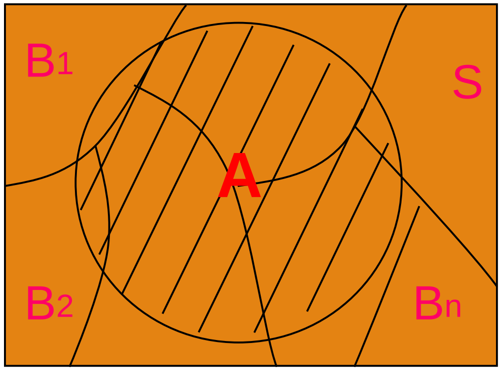
则称$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个划分，或称为一组完备事件组。




即：$B_1, B_2, \cdots, B_n$至少有一发生是必然的，两两同时发生又是不可能的。

定理：设试验E的样本空间为S，A为E的事件。$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个划分，$P(B_i)>0$，$i=1, 2, \cdots, n$；

则称：$\boxed{P(A)=\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\cdot P(A|B_j)\text{ 为全概率公式}}$




证明：

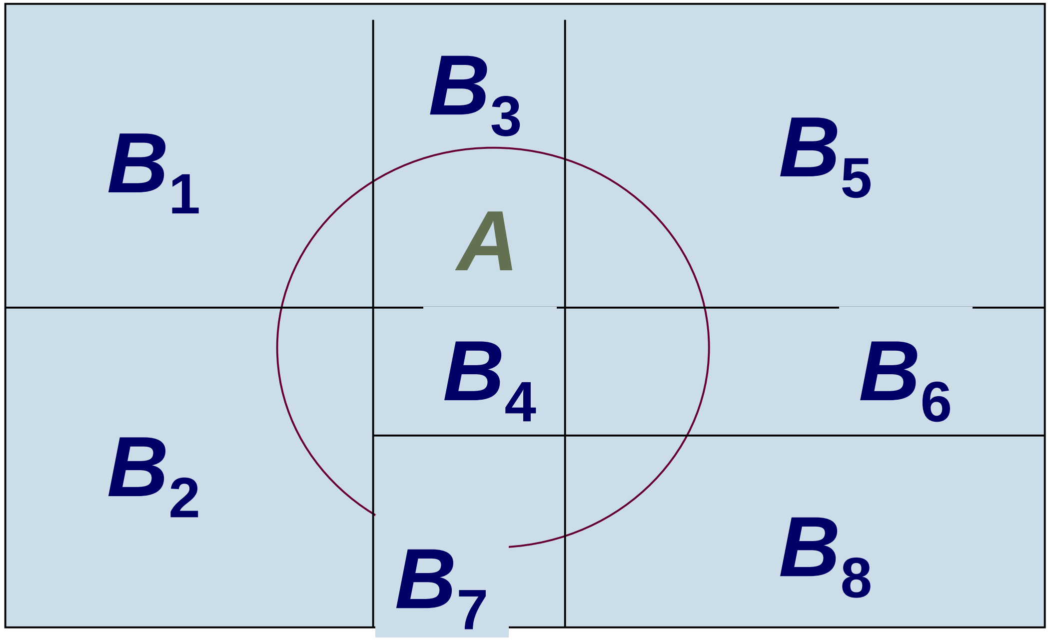
$AB_i$与$AB_j$不相容$(i \neq j)$

$$\because A = AS = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$$

$$\therefore P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(AB_j) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j)\cdot P(A|B_j)$$

全概率公式的基本思想是把一个未知的复杂事件分解为若干个已知的简单事件再求解，而这些简单事件组成一个互不相容事件组，使得某个未知事件A与这组互不相容事件中至少一个同时发生，故在应用全概率公式时，关键是要找到一个合适的S的一个划分。

由此可以形象地把全概率公式看成为“由原因推结果”，每个原因对结果的发生有一定的“作用”，即结果发生的可能性与各种原因的“作用”大小有关. 全概率公式表达了它们之间的关系 .




其中

- $B_i$是原因
- $B$是结果

例　甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为0.4、0.5、0.7. 飞 机被一人击中而击落的概率为0.2,被两人击中而击落的概率为0.6, 若三人都击中, 飞机必定被击落, 求飞机被击落的概率.

解：设$A$={飞机被击落}

$B_i$={飞机被$i$人击中}, $i$=1,2,3

则　$A = B_1A + B_2A + B_3A$

由全概率公式

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

依题意，$P(A|B_1) = 0.2, P(A|B_2) = 0.6, P(A|B_3) = 1$

为求$P(B_i)$，设 $H_i$={飞机被第$i$人击中}，$i$=1,2,3

$$P(B_1)=P\left(H_1\overline{H_2}\,\overline{H_3}\cup\overline{H_1}H_2\overline{H_3}\cup\overline{H_1}\,\overline{H_2}H_3\right)$$

$$P(B_2)=P\left(H_1H_2\overline{H_3}\cup\overline{H_1}H_2H_3\cup H_1\overline{H_2}H_3\right)$$

$$P(B_3)=P\left(H_1H_2H_3\right)$$

将数据代入计算得$P(B_1)=0.36$;$P(B_2)=0.41$;$P(B_3)=0.14$.

$$P(A)=P(B_1)P(A\,|B_1)+\ P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

$$=0.36\times0.2+0.41\ \times0.6+0.14\ \times1=0.458$$

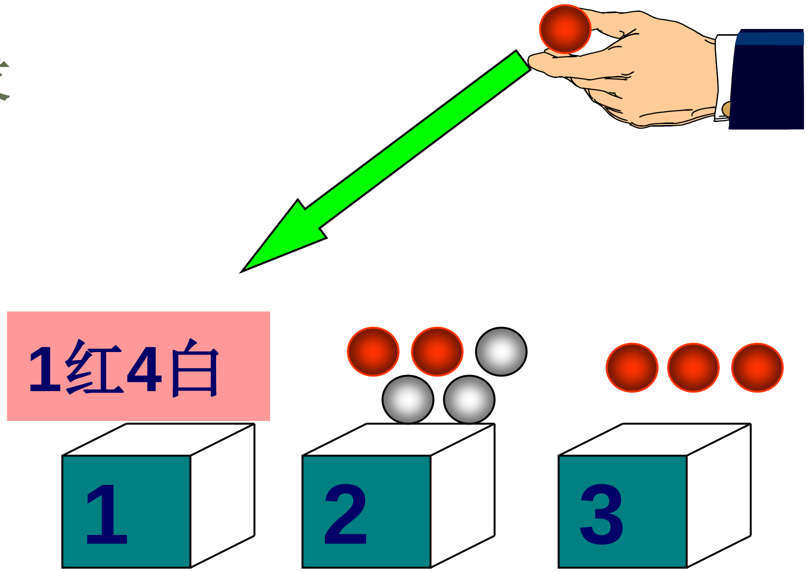
即飞机被击落的概率为0.458.

# 1.3.4 贝叶斯公式

例子:某人从任一箱中任意摸出一球，发现是红球,求该球是取自1号箱的概率.

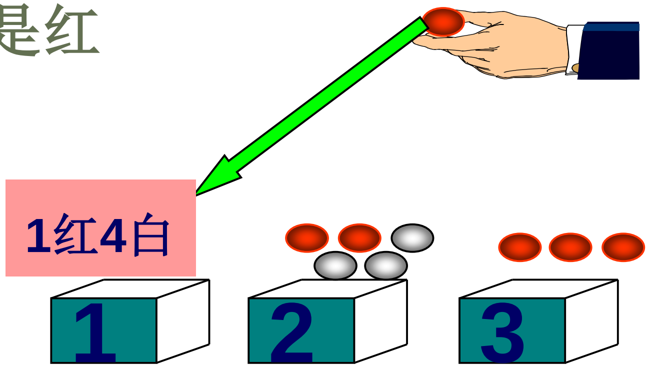
**或者问:**

该球取自哪号箱的可能性最大?




这一类问题是“已知结果求原因”. 在实际中更为常见，它所求的是条件概率，是已知某结果发生条件下，探求各原因发生可能性大小.

某人从任一箱中任意摸出一球，发现是红球，求该球是取自1号箱的概率.




记 $A_i = \{\text{球取自}i\text{号箱}\}, i = 1, 2, 3;$

$B = \{\text{取得红球}\}$

求$P(A_1|B)$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

将这里得到的公式一般化，就得到 贝叶斯公式

定理(贝叶斯公式) 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为样本空间的一个划分, $B$ 为 $\Omega$ 中的任一事件, 且 $P(B)>0$, 则恒有

$$P(A_i \mid B)=P(A_i)P(B \mid A_i)\Big/\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B \mid A_j)$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

该公式于1763年由贝叶斯 (Bayes) 给出. 它是在观察到事件*B*已发生的条件下，寻找导致*B*发生的每个原因的概率.

贝叶斯公式在实际中有很多应用.

- 它可以帮助人们确定某结果（事件 ***B***）发生的最可能原因.

例 某一地区患有癌症的人占0.005，患者对一种试验反应是阳性的概率为0.95，正常人对这种试验反应是阳性的概率为0.04，现抽查了一个人，试验反应是阳性，问此人是癌症患者的概率有多大?

【问题分析】设 $C$={抽查的人患有癌症},

$A$={试验结果是阳性},

则$\bar{C}$表示“抽查的人不患癌症”.

已知 $P(C)=0.005, P(\bar{C})=0.995$,

$P(A|C)=0.95$, $P(A|\bar{C})=0.04$

求 $P(C|A)$.

由贝叶斯公式，可得

$$P(C|A)=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})}$$

代入数据计算得$P(C|A)=$0.1066

**现在来分析一下结果的意义.**

1. 这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有无意义?

2. 检出阳性是否一定患有癌症?

1. 这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有意义.

如果不做试验,抽查一人,他是患者的概率$P(C) = 0.005$

若试验后得阳性反应，则根据试验得来的信息，此人是患者的概率为$P(C|A) = 0.1066$

从0.005增加到0.1066,将近增加约21倍.

2. 即使你检出阳性，尚可不必过早下结论你有癌症，这种可能性只有10.66% (平均来说，1000个人中大约只有107人确患癌症)，此时医生常要通过再试验来确认.

在贝叶斯公式中，$P(A_i)$和$P(A_i|B)$分别称为原因的验前概率和验后概率.

$P(A_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$是在没有进一步信息（不知道事件$B$是否发生）的情况下，人们对诸事件发生可能性大小的认识.

当有了新的信息（知道$B$发生），人们对诸事件发生可能性大小$P(A_i|B)$有了新的估计.

贝叶斯公式从数量上刻划了这种变化

**例：一单位有甲、乙两人，已知甲近期出差的概率为80%，若甲出差，则乙出差的概率为20%；若甲不出差，则乙出差的概率为90%。(1)求近期乙出差的概率；(2)若已知乙近期出差在外，求甲出差的概率。**

解：设A={甲出差}，B={乙出差}

$AB$与$\bar{A}B$不相容

已知 $P(A)=0.80,\quad P(B|A)=0.20,\quad P(B|\bar{A})=0.90$

(1) $P(B)=P(AB\cup\bar{A}B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$

$$=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$=0.8\times0.2+0.2\times0.9=34\ \%$$

全概率公式

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(AB)}{P(AB)+P(\bar{A}B)}=\dfrac{16}{34}=\dfrac{8}{17}$

Bayes公式

# §4 独立性

例：有10件产品，其中8件为正品，2件为次品。从中取2 次, 每次取1件，设$A_i$={第i次取到正品}，i=1, 2

- 不放回抽样时，$P(A_2|A_1)=\frac{7}{9}\neq P(A_2)=\frac{8}{10}$
- 放回抽样时， $P(A_2|A_1)=\frac{8}{10}=P(A_2)$

即放回抽样时，$A_1$的发生对$A_2$的发生概率不影响；同样，$A_2$的发生对$A_1$的发生概率不影响

定义：设A，B为两随机事件，$P(A)\neq 0, P(B)\neq 0$

若P(B|A)=P(B)， 即P(AB)=P(A)*P(B)

即P(A|B)=P(A)时，称A，B相互独立。

$A,B$相互独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A},B$相互独立 $\Leftrightarrow$ $A,\bar{B}$相互独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A},\bar{B}$相互独立

---

*比如*: $P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\bar{B})$

定义：设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为$n$个随机事件，若对$2\le k\le n$,

均有：$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right)=\prod_{j=1}^{k}P\left(A_{i_j}\right)$$

则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立

注：$1^\circ$ 两两独立不能 $\Rightarrow$ 相互独立

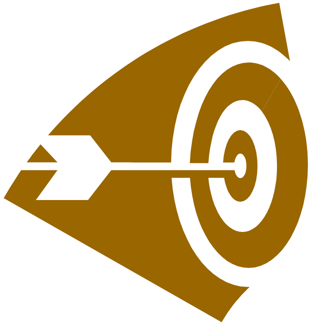
$2^\circ$ 实际问题中，常常不是用定义去验证事件的独立性，而是由实际情形来判断其独立性。

例：甲、乙两人同时向一目标射击，甲命中率为0.8，乙命中率为0.7，求目标被命中的概率。

---

**解：设 A={甲击中},B={乙击中}**

**C={目标被击中}**



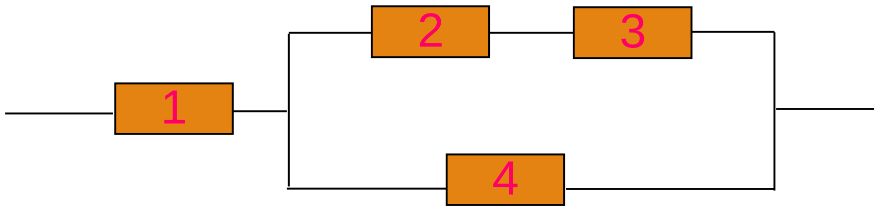
则：$C = A \cup B$，$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB)$

∵ 甲、乙同时射击，其结果互不影响，

∴ A，B相互独立

$$\Rightarrow P(C) = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 0.94$$

例：有4个独立元件构成的系统(如图)，设每个元 件能正常运行的概率为p，求系统正常运行的概率。




解：设$A_i = \{第i个元件运行正常\}, i = 1,2,3,4$

$A = \{系统运行正常\}$

则：$A = A_1(A_2A_3 \cup A_4)$

由题意知，$A_1, A_2, A_3, A_4$相互独立

$\Rightarrow P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2A_3 \cup A_4) = p(p^2 + p - p^3)$

例：甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为$p$，$p \geq 1/2$
对甲而言，采用三局二胜制有利，还是采用五局三胜制有利？设各局胜负相互独立。

---

解：设$A_i = \{第i局甲胜\} \Rightarrow P(A_i) = p, i1,2,\cdots,5;$

再设$A = \{甲胜\}$

(1) 三局二胜制：

$$P(A) = P(A_1A_2 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3) = p^2 + 2p^2(1-p) \doteq p_1$$

(2)五局三胜制：

$$P(A) = P\{A_1A_2A_3 \cup (前三次有一次输)A_4 \cup (前四次有两次输)A_5\}$$
$$= p^3 + C_3^1(1-p)p^3 + C_4^2(1-p)^2p^3 \doteq p_2$$

$$\boldsymbol{P_2 - P_1 = 3P^2(P-1)^2(2P-1) \Rightarrow \begin{cases} p_2 > p_1, 当p > \frac{1}{2} \\ p_2 = p_1, 当p = \frac{1}{2} \end{cases}}$$

## ◆伯努利概型

有一类十分广泛存在的只有相互对立的两个结果的试验。

即在试验$E$ 的样本空间S 只有两个基本事件$A$与$\bar{A}$.

例如： 种子发芽、不发芽；

考试及格、不及格；

买彩票中奖、不中奖

每次试验中$P(A)=p, P(\bar{A})=1-p=q(0\le p\le 1)$

我们称这只有两个对立的试验结果的试验为伯努里试验。

- 设在伯努利试验$E$ 中事件$A$发生的概率为$p$，现将$E$重复独立的进行 $n$ 次，称这 $n$ 次试验为n 重伯努里试验。

## □ 伯努利定理

设在一次试验中事件$A$ 发生的概率为$\boldsymbol{p(0<p<1)}$, 则在$n$ 重伯努利试验中事件 $A$ 恰好发生$\boldsymbol{k}$次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

证：设事件A在n次试验中发生了k次；

$\boldsymbol{A_i}$ = “在第$\boldsymbol{i}$次试验中事件发生”

$$P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n)=P(A_1)\cdots P(A_k)P(\overline{A}_{k+1})\cdots P(\overline{A}_n)$$

$$=p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\therefore\quad P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$$

例：某人射击每次命中的概率为 0.7，现独立射击 5次，求正好命中 2 次的概率。

---

$$P(X=2)=C_5^2 0.7^2 0.3^3=0.13$$

例：从学校乘汽车去火车站一路上有 4 个交通岗，到各个岗遇到红灯是相互独立的，且概率均为0.3，求某人从学校到火车站途中2次遇到红灯的概率。

途中遇到 4次经交通岗为4重贝努利试验，其中

$$n=4 \qquad p=0.3$$

$$P(X=2)=C_4^2 0.3^2\cdot 0.7^2=\frac{8}{27}$$

【例】某车间有50台机床，一天内每台需要维修的概率均为0.02 ，求一天内需维修的机床不多于2台的概率。

解 $n = 50 \qquad p = 0.02$

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= 0.98^{50} + C_{50}^{1} 0.02 \cdot 0.98^{49} + C_{50}^{2} 0.02^{2} \cdot 0.98^{48} \approx 0.186$$

例：袋中装有30只红球，70只蓝球，现从袋中有放回地抽取5 次，每次取1只球，试求:1） 取出的5只球中恰有 2 只红球的概率；2） 取出的5只球中至少有 2 只红球的概率；

解：取到红球的概率为0.3 ，5 次取球相互独立，

故为5 重伯努里概型，设 $X$ 为取到红球的次数

$$P(X=k)=C_5^k\times 0.3^k\times 0.7^{5-k}\qquad k=0,1,2,3,4,5$$

1) $P(X=2)=C_5^2\times 0.3^2\times 0.7^3=0.3087$

2) $P(X\geq 2)=1-P\{X<2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$

$$\approx 0.4718$$

例：购买一张彩票中奖的概率为$\boldsymbol{p = 0.01}$，问需要买多少张彩票才使至少中一次奖的概率不小于0.95？

---

**解：设需要买$\boldsymbol{n}$张彩票，$\boldsymbol{k}$表示中奖的次数，则**

$$P\{k \geq 1\} = 1 - P\{k = 0\}$$

$$= 1 - C_n^0 p^0 (1-p)^n$$

$$= 1 - 0.99^n \geq 0.95$$

故$n \geq \dfrac{\ln 0.05}{\ln 0.99} = 299.57$

因此至少要买 300 张彩票才行

# 总结：

1. 样本空间 $S=\{e\}$　　随机事件$A\subset S$

2. 事件的关系：$A\subset B; A=B$

   事件的运算：$A\cup B; A\cap B; \bar{A}$

---

3. 频率：$f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$

   概率的定义：满足$\begin{cases} 0\le P(A)\le 1; P(S)=1 \\ \text{当}AB=\varnothing\text{时，}P(A\cup B)=P(A)+P(B) \end{cases}$

   概率的性质：　(1) $P(A)=1-P(\bar{A})$

   (2) 当$A\supset B$时 $\Rightarrow P(A)\ge P(B)$

   (3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

4. 条件概率：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B|A)$

   当$B_1,B_2,\cdots,B_n$为$S$的一划分时，

   $$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j),\quad P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$$

5. 事件独立性