03

多维随机变量及其分布

《概率论与数理统计》 数科学院& 统计系

目录/Contents

目录/Contents

3.1 多维随机变量及其联合分布

一、随机试验

定义1

设有随机试验E，其样本空间为Ω. 若对Ω中的每一个样本点，都有一对有序实数$(X(\omega), Y(\omega))$与其对应。则称(X, Y)为二维随机变量或二维随机向量。称(X, Y)的取值范围为它的值域，记为$\Omega_{(x,y)}$。

例1

现有将一颗骰子独立地上抛两次的随机试验E,观察两次出现的点数. 讨论第一次出现的点数以及两次出现点数的最小值. （1）请给出随机试验E的样本空间Ω； （2）引入二维随机变量(X,Y)，并写出值域$\Omega_{(X,Y)}$。

解 （1）由已知得随机试验E的样本空间为

$$\Omega=\{(1,1),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}$$

一、随机试验

(X,Y)的值域为

$$
\begin{aligned}
\Omega_{(X,Y)}=\{&(1,1),\\
&(2,1),(2,2),\\
&(3,1),(3,2),(3,3),\\
&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),\\
&(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\\
&(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}
\end{aligned}
$$

一、随机试验

定义2

设有随机试验E，其样本空间为Ω.若对Ω中的每一个样本点ω都有一组有序实数列$(X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$与其对应. 则称$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$n$维随机变量或$n$维随机向量. 称$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的取值范围为它的值域，记为$\Omega_{(X_1,X_2,\cdots,X_n)}$.

二、联合分布函数

定义3

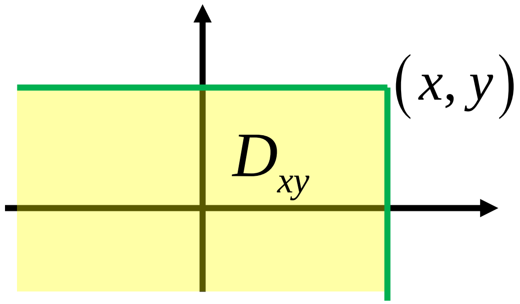
设 (X,Y) 为二维随机变量，对任意的 $(x,y)\in R^2$，称

$$F(x,y)\triangleq P(X\le x, Y\le y),$$

为随机向量 (X,Y) 的 **（联合）分布函数.**

由定义可知，对平面上任一点 (x,y) ，

$$F(x,y)=P((X,Y)\in D_{xy}).$$



定义4

定义4 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为n 维随机变量，对任意的$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$

称 $F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n)$

为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的**(联合)分布函数.**

二、联合分布函数

定理 1 联合分布函数的性质:

1 $0 \le F(x,y) \le 1;$

2 当固定y 时， $F(x\,,y)$ 是变量x 的单调非减函数;

当固定x 时， $F(x\,,y)$ 是变量y 的单调非减函数;

3 $\lim\limits_{x\to-\infty} F\left(x,y\right)=0,\ \lim\limits_{y\to-\infty} F\left(x,y\right)=0$

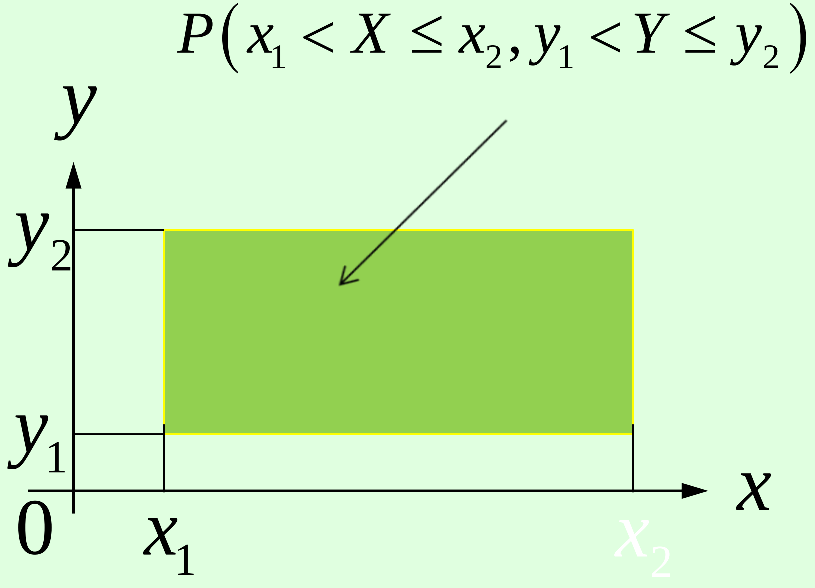
$\lim\limits_{x,y\to-\infty} F\left(x,y\right)=0,\ \lim\limits_{x,y\to+\infty} F\left(x,y\right)=1$

4 当固定 y 时，$F(x,y)$ 是变量x 的右连续函数;

当固定 x 时，$F(x,y)$ 是变量 y 的右连续函数;

5 对任意的 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ ，有**矩形公式**

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)$$
$$- F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$



如图所示: 联合分布函数的矩形公式

定义 5

设二维随机变量 (X,Y) 仅可能取有限个值,
则称 (X,Y) 为二维离散型随机变量.

定义 6

设二维随机变量 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$,

$i,j=1,2,\cdots$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律.

其中 $p_{ij}\geq 0,i,j=1,2,\cdots,\sum_i\sum_j p_{ij}=1.$

三、二维离散型随机变量及其联合分布律

二维随机变量(X,Y) 的联合分布律的表格法表示.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

例2 把一颗骰子独立地上抛两次,设X表示第一次 出现的点数,Y表示两次出现点数的最小值.

试求: (1)X与Y的联合分布律; (2)$P(X=Y)$与$P(X^2+Y^2<8)$.

解 (1) 由古典概率计算得(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{6}{36}$	0	0	0	0	0
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	0	0	0	0
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	0	0	0
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	0	0
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

三、二维离散型随机变量及其联合分布律

(2) $P(X=Y)=\sum_{i=1}^{6}P(X=i,Y=i)=\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{7}{12}$

$P(X^2+Y^2<8)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=1)=\frac{7}{36}$

四、二维连续型随机变量及其联合密度函数

联合概率密度函数

两个常见的二维连续型分布

边缘概率密度函数

定义7

设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数 为 $F(x,y)$,如果存在二元非负实值函数 $f(x,y)$, 使得对任意的 $(x,y)\in R^2$有

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=\iint\limits_{D_{xy}}f(u,v)dudv$$

则称 (X,Y) 为二维连续型随机变量，称$f(x,y)$ 为二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合（概率）密度函数.

定义8

设n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，如果存在一个n元非负函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得对任意的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(u_1,u_2,\cdots,u_n)du_1du_2\cdots du_n$$

成立，则称$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为n维连续型随机变量，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为n维连续型随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合（概率）密度函数。

定理 2 （联合密度函数的性质）

设 $f(x,y)$ 为二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数，则

(1) 非负性 $f(x,y) \geq 0, -\infty < x, y < +\infty;$

(2) 规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$

四、二维连续型随机变量及其联合密度函数

定理 3 （二维连续型随机变量的性质）

1 任意一条平面曲线 L，有 $P((X,Y)\in L)=0$；

2 $F(x,y)$为连续函数，在 $f(x,y)$ 的连续点处有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y);$$

3 对 xoy 平面上任意一区域 D，有

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例3 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cy^2, & 0<x<2y, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他.} \qquad \text{其余} \end{cases}$$

求

01 OPTION 常数c

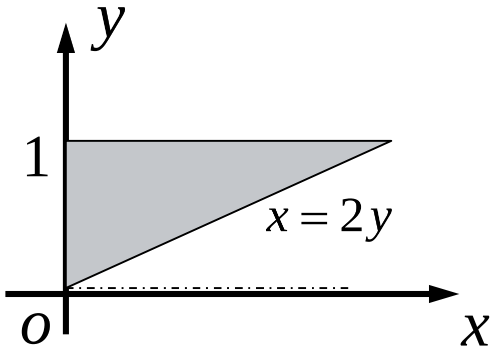
02 OPTION 联合分布函数$F(x,y)$

03 OPTION $P(|X| \le Y)$

解

(1) 由密度函数性质

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 dy\int_0^{2y}cy^2dx=\frac{1}{2}c$$ 所以 $c=2$.



(2) 由已知得

当$x<0$或$y<0$时， $F(x,y)=0$

当$0\le x<2y$且$0\le y<1$时， $F(x,y)=\int_0^x dx\int_{\frac{x}{2}}^{y}2y^2dy=\frac{2}{3}x\left(y^3-\frac{x^3}{32}\right)$

当$x\ge 2y$且$0\le y<1$时， $F(x,y)=\int_0^y dy\int_0^{2y}2y^2dx=y^4$

当$0\le x<2$且$y\ge 1$时， $F(x,y)=\int_0^x dx\int_{\frac{x}{2}}^{1}2y^2dy=\frac{2}{3}x\left(1-\frac{x^3}{32}\right)$

当$x\ge 2$且$y\ge 1$时， $F(x,y)=1$

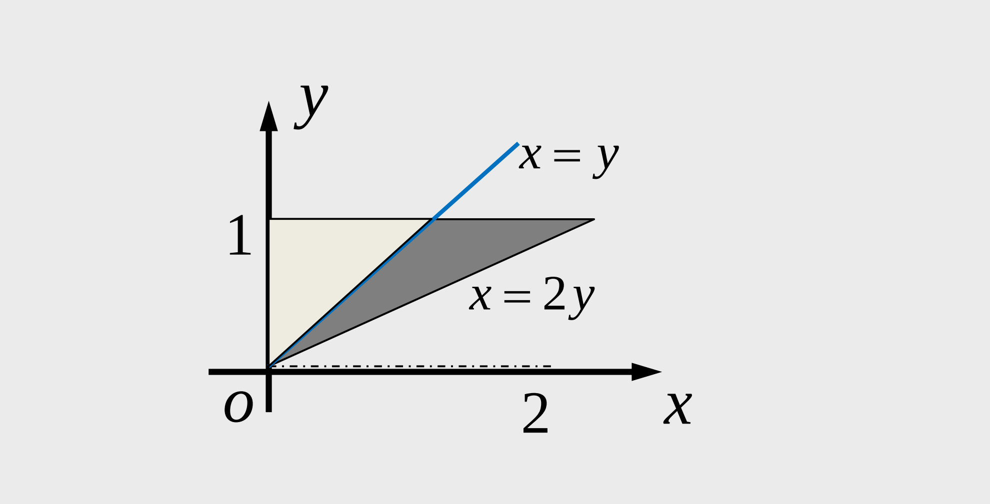
四、二维连续型随机变量及其联合密度函数

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0\text{或}y<0; \\ \dfrac{2}{3}x\left(y^3-\dfrac{x^3}{32}\right), & 0\le x<2y,\ 0\le y<1; \\ \dfrac{2}{3}x\left(1-\dfrac{x^3}{32}\right), & 0\le x<2,\ y\ge 1; \\ y^4, & x\ge 2y, 0\le y<1; \\ 1, & x\ge 2,\ y\ge 1. \end{cases}$$

(3) 如右图所示:

$$P\left(|X|\le Y\right)=\iint\limits_{|x|\le y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y 2y^2dx=\int_0^1 2y^3dx=\frac{1}{2}$$



目录/Contents

目录/Contents

3.2 常用的多维随机变量

一、二维均匀分布

二、二维正态分布

一、二维均匀分布

定义 1

设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_G}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中G 是平面 xoy上的某个区域, S_G 为区域 G 的面积,

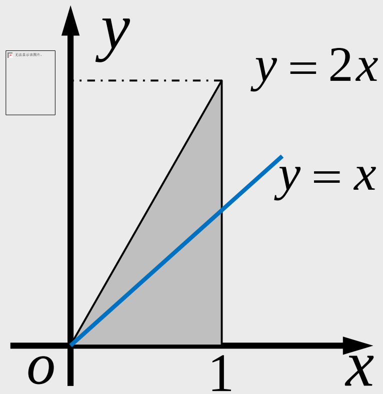
则称随机变量 (X,Y)服从区域 G上的二维均匀分布.

例1 设 (X,Y) 服从区域 G上的均匀分布，其中$G=\{(x,y):0<x<1且0<y<2x\}$

1 写出 (X,Y) 的联合密度函数

2 计算概率 $P(Y\leq X)$

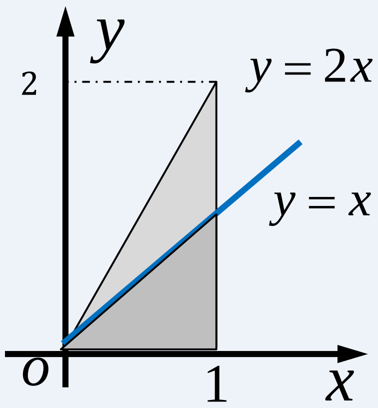
解 (1)因区域 G 的面积为 1，故由定义得联合密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in G,\\ 0 & 其他.\end{cases}$



一、二维均匀分布

(2) 所求概率为

$$P(Y \le X)=P((X,Y)\in D) =\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=S_D =\frac{1}{2}$$



定义 2

如果 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$，其中 $-\infty<\mu_1,\mu_2<+\infty,\sigma_1,\sigma_2>0,|\rho|<1.$

则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的二维正态分布,

并记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 其中

$-\infty<\mu_1,\mu_2<+\infty,\sigma_1,\sigma_2>0,|\rho|<1,$

目录/Contents

目录/Contents

3.3 边缘分布

一、边缘分布函数

定义1

设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$

称$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x,Y<+\infty)=F(x,+\infty)$

$-\infty<x<+\infty$,为随机变量X的边缘分布函数.

称 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X<+\infty,Y\le y)=F(+\infty,y)$

$-\infty<y<+\infty$,为随机变量Y的边缘分布函数.

一、边缘分布函数

例1 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cy^2, & 0<x<2y, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

分别计算 X 与 Y 边缘分布函数.

一、边缘分布函数

解 在第一节例4中已得 (X,Y) 的联合分布函数，

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0\text{或}y<0; \\ \dfrac{2}{3}x\left(y^3-\dfrac{x^3}{32}\right), & 0\le x<2y,\ 0\le y<1; \\ \dfrac{2}{3}x\left(1-\dfrac{x^3}{32}\right), & 0\le x<2,\ y\ge 1; \\ y^4, & x\ge 2y, 0\le y<1; \\ 1, & x\ge 2,\ y\ge 1. \end{cases}$$

解 在第一节例4中已得 (X,Y) 的联合分布函数，

故X 与 Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{2}{3}x\left(1-\dfrac{x^3}{32}\right), & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2,\end{cases}\quad F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y^4, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1,\end{cases}$$

二、二维离散型随机变量的边缘分布律

定义 2

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$$ ，称概率

$$P(X=x_i)=P\left(X=x_i, \bigcup_j Y=y_j\right)=\sum_j P(X=x_i, Y=y_j)=\sum_j P_{ij},\quad i=1,2,\cdots$$

为随机变量 X 的边缘分布律，记为 $p_{i\cdot}$，并有

$$p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_j p_{ij},\quad i=1,2,\cdots$$

类似地，称概率 $P(Y=y_j),\ j=1,2,\cdots$ 为随机变量 Y 的边缘分布律，记为

$p_{\cdot j}$ ，并有 $p_{\cdot j}=P(Y=y_j)=\sum_i p_{ij},\quad j=1,2,\cdots.$

例2 在第一节例3中计算 X 与 Y 的边缘分布律。

解 直接在 (X,Y) 联合分布律表格中计算行和、列和得

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{6}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

二、二维离散型随机变量的边缘分布律

所以 X 的边缘分布律为

X	1	2	3	4	5	6
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

所以 Y 的边缘分布律为

Y	1	2	3	4	5	6
概率	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

定义 3

设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$

则随机变量 X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \quad -\infty<x<+\infty$$

类似地，随机变量 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \quad -\infty<y<+\infty$$

例3 试求第一节例3中随机变量 X,Y 的边缘密度函数.

解 首先确定 X 的值域 $\Omega_X=(0,2)$,当 $0<x<2$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\frac{x}{2}}^{1}2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\left(1-\frac{x^3}{8}\right)$$

所以 X 的边缘密度函数为:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{x^3}{8}\right), & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

然后，确定 Y的值域 $\Omega_Y=(0,1)$,当 $0<y<1$ 时

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^{2y} 2y^2\,dx=4y^3$$

所以 Y 的边缘密度函数为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

定理 1 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ ，则$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

证明 $\Omega_X=\Omega_Y=(-\infty,+\infty)$，由边缘密度函数的定义得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dy$$

$$\overset{u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{u^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dv=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

所以$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，同理$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

例4

已知 $(X,Y)\sim N(-1,2,4,9,0.3)$ ，求$Z=-2X+3$的密度函数$f_Z(z)$.

解 由定理1知$X\sim N(-1,4)$，又由正态分布的线性变换仍是正态分布知

$$Z=-2X+3\sim N(5,16)$$

所以

$$f_Z(z)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{32}},\ -\infty<z<+\infty$$

四、随机变量的相互独立性

定义 4

设 (X,Y) 为二维随机变量，若对任意的$x,y\in R$，都有

$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$成立，则称随机变量

X 与 Y**相互独立.**

定理 2

设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，那么，X与Y相互独立的充分必要条件是对任意的 $i,j=1,2,\cdots$，都有$p_{ij}=p_{i\cdot}\times p_{\cdot j}$**成立.**

定理 3

设 (X,Y) 为二维连续型随机变量，那么，X与Y相互独立的充分必要条件是在 $f(x,y),f_X(x)$及$f_Y(y)$的一切公共连续点上都有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

例5 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	0.4
1	0.1	0.1

（1）求X的边缘与Y的边缘分布律；

（2）X与Y是否相互独立，为什么？

四、随机变量的相互独立性

解

（1）由二维离散型随机变量边缘分布律定义得

$$P(X=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)=0.8$$

$$P(X=1)=1-P(X=0)=0.2$$

$$P(Y=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)=0.5$$

$$P(Y=1)=1-P(Y=0)=0.5$$

所以X与Y的边缘分布律分别为

X	0	1
概率	0.8	0.2

Y	0	1
概率	0.5	0.5

（2）可以验证对任意的$i,j=1,2$都有 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ ，

所以 X 与 Y 相互独立。

例6 在第一节例 4 中，X与Y是否相互独立？为什么？

解 X与Y不相互独立. (X,Y) 的联合密度函数及边缘密度函数如下

$$f(x,y)=\begin{cases} cy^2, & 0<x<2y, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}\left(1-\frac{x^3}{8}\right), & 0<x<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} 4y^3, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

四、随机变量的相互独立性

在它们的公共连续点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 处，

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\neq f_X\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f_Y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{64}$$

因此X与Y不相互独立.

定理 4

设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ ，那么X与Y相互独立的充分必要条件是$\rho=0$

证明 充分条件 当$\rho=0$时

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2+(y-\mu_2)^2}{2}},\quad f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2}}$$

所以，对任意 $\rho=0$，都有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

因此 X 与 Y 相互独立.

四、随机变量的相互独立性

必要条件 当X与Y 相互独立时, 对任意的$x, y \in R$ 都有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

特别地，当$x=\mu_1, y=\mu_2$ 时该等式也成立,

所以

$$f(\mu_1,\mu_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=f_X(\mu_1)\cdot f_Y(\mu_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}=1\Rightarrow\rho=0$$

对多维随机变量独立性的定义如下：

定义 5

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为n维随机变量，若对任意的$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$

都有 $F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i), -\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty$ 那么就称随机变量

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$相互独立。连续型随机变量有$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$,

在$f(x_1, \cdots, x_n), f_{X_1}(x_1), \cdots, f_{X_n}(x_n)$的一切公共连续点上成立。

对多维随机变量独立性的定义如下：

当 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为离散型随机变量 时，随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$

相互独立的充要条件是对任意的 $x_i \in \Omega_{X_i}$ $i=1,2,\cdots,n,$ 都有

$$P\left(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$ 成立.

当 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为连续型随机变量 时，随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

相互独立的充要条件是在 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$，$f_{X_1}(x_1)$，$f_{X_2}(x_2), \cdots$，$f_{X_n}(x_n)$

的一切公共连续点处都有 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$

目录/Contents

目录/Contents

3.4 条件分布

一、二维离散型随机变量的条件分布律

二、二维连续型随机变量的条件密度函数

一、二维离散型随机变量的条件分布律

定义1

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$p\left(X=x_i,Y=y_j\right)=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$$

当 $y_j\in\Omega_Y$ 时，在给定 条件 $\{Y=y_j\}$ 下 X 的条件分布律为

$$p\left(X=x_i\middle|Y=y_j\right)=\frac{p_{ij}}{P_{\cdot j}},i=1,2,\cdots$$

对固定的$y_j\in\Omega_Y$,记在给定条件 $\{Y=y_j\}$ 下的随机变量为 $X|Y{=}y_j$,其值域记为

$$\Omega_{X|Y=y_j}=\left\{x_i:P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}\neq0\left(y_j\text{固定}\right),i=1,2,\cdots\right\}$$

一、二维离散型随机变量的条件分布律

条件分布律 $\dfrac{p_{ij}}{P_{\cdot j}}$，$i=1,2,\cdots$ 满足分布律的两条性质：

01 OPTION

非负性 $p\left(X=x_i \middle| Y=y_j\right)=\dfrac{p_{ij}}{P_{\cdot j}}>0, x_i\in\Omega_{X|Y=y_j}$;

02 OPTION

规范性 $\sum\limits_{i} P\left(X=x_i \middle| Y=y_j\right)=\sum\limits_{i}\dfrac{p_{ij}}{P_{\cdot j}}=1$

定义1续

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律

$$p\left(X=x_i,Y=y_j\right)=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$$

当 $x_i\in\Omega_X$ 时，在给定条件 $\{X=x_i\}$ 下 Y 的条件分布律为

$$p\left(Y=y_j\middle|X=x_i\right)=\frac{p_{ij}}{P_{i\cdot}},j=1,2,\cdots$$

对固定的 $x_i\in\Omega_X$, 记在给定条件 $\{X=x_i\}$ 下的随机变量为 $Y|X=x_i$ ，其值域记为

$$\Omega_{Y|X=x_i}=\left\{y_j:P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}\neq0\left(x_i\text{固定}\right),j=1,2,\cdots\right\}$$

定义2

设 $f(x,y)$ 为二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数,

当$y\in\Omega_Y$ 时，在给定条件$\{Y=y\}$下 X 的**条件密度函数**为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad -\infty<x<+\infty，\text{其中}f_Y(y)>0$$

对固定的 $y\in\Omega_Y$，记在给定条件 $\{Y=y\}$ 下的随机变量 X 为 $X|Y=y$

其值域记为 $\Omega_{X|Y=y}=\{x:f(x,y)\neq 0(y\text{固定})\}$

二、二维连续型随机变量的条件密度函数

条件密度函数 $f_{X|Y}(x\mid y)$满足密度函数的两条性质:

1 非负性 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}>0,x\in\Omega_{X|Y=y}$

2 规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|Y}(x|y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx=\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx}{f_Y(y)}=1$

二、二维连续型随机变量的条件密度函数

当 $x \in \Omega_X$ 时，在给定条件 $\{X = x\}$ 下 Y 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad -\infty < y < +\infty, \quad \text{其中} f_X(x) > 0$$

对固定的 $x \in \Omega_X$，记在给定条件 $\{X = x\}$ 下的随机变量 Y 为 $Y|X = x$，

其值域记为 $\Omega_{Y|X=x} = \{y : f(x,y) \neq 0 (x\text{固定})\}$

同理可以验证条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$ 满足密度函数的 两条性质.

定义 3

设 $f(x,y)$ 为二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数,

当 $y\in\Omega_Y$时，在给定条件 $\{Y=y\}$下 $f(x,y)$的条件 分布函数为

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}u \qquad -\infty<x<+\infty; \quad 其中f(y)>0$$

当 $f(x,y)$时，在给定条件$\{X=x\}$ 下Y的条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(u|x)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,u)}{f_X(x)}\mathrm{d}u \qquad -\infty<y<+\infty; \quad 其中f(x)>0$$

二、二维连续型随机变量的条件密度函数

例1 在第一节例4中

01 OPTION

写出给定条件 $\{X=1\}$ 下 Y 的条件值域 $\Omega_{Y|X=1}$；

02 OPTION

求条件密度函数 $f_{Y|X}(y|1)$ ；

03 OPTION

写出给定条件 $\{X=x\}$ 下 Y 的条件值域 $\Omega_{Y|X=x}$ 及 $f_{Y|X}(y|x)$ ；

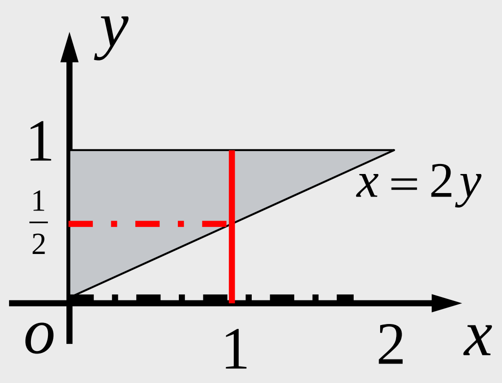
04 OPTION

求条件分布函数 $F_{Y|X}(y|1)$.

解 (1) 例4中随机变量的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2y^2, & 0<x<2y, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在给定条件 $\{X=1\}$ 下 Y 的条件值域为 $\Omega_{Y|X=1}=\left(\frac{1}{2},1\right)$

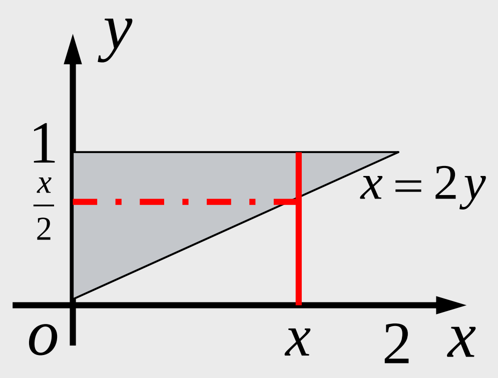


(2) 当$\frac{1}{2}<y<1$时，$f_{Y|X}(y|1)=\dfrac{f(1,y)}{f_X(1)}=\dfrac{2y^2}{\frac{7}{12}}=\dfrac{24}{7}y^2$

所以 $f_{Y|X}(y|1)=\begin{cases}\dfrac{24}{7}y^2, & \dfrac{1}{2}<y<1. \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

(3) 当$0<x<2$时，在给定条件$\{X=x\}$下

Y的条件值域为 $\Omega_{Y|X=x}=\left(\dfrac{x}{2},1\right)$



二、二维连续型随机变量的条件密度函数

当$0<x<2$且$\frac{x}{2}<y<1$时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{2y^2}{\frac{2}{3}\left(1-\frac{x^3}{8}\right)}=\frac{3y^2}{1-\frac{x^3}{8}}=\frac{24y^2}{8-x^3}$$

故当$0<x<2$时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{24y^2}{8-x^3}, & \dfrac{x}{2}<y<1;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

（4）因为$\Omega_{Y|X=1}=\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以当$\frac{1}{2}<y<1$时，

$$F_{Y|X}(y|1)=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}(v|x)dv=\int_{\frac{1}{2}}^{y}\frac{24}{7}y^2dy=\frac{8}{7}y^3-\frac{1}{7}$$

故 $$F_{Y|X}(y|1)=\begin{cases}0, & y<\frac{1}{2},\\ \frac{8}{7}y^3-\frac{1}{7}, & \frac{1}{2}\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$$

二、二维连续型随机变量的条件密度函数

例2 已知 $X \sim U(1,2)$, 当$1<x<2$ 时, $Y|X=x \sim N(x,\sigma^2)$

求 (X,Y) 的联合密度函数.

解 由已知得 $f(x)=\begin{cases} 1 & 1<x<2, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$ 当$1<x<2$时,

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}},-\infty<y<+\infty.$$

由条件密度函数的定义知 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)$.

所以 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}, & 1<x<2,-\infty<y<+\infty, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

目录/Contents

目录/Contents

3.5 二维随机变量函数的分布

一、二维离散型随机变量函数的分布

二、二维连续型随机变量函数的分布

一、二维离散型随机变量函数的分布

定理 1 (二项分布及泊松分布的可加性)

设 X与Y相互独立，则

(1)设$X\sim B(m,p), Y\sim B(n,p)$，且$X$与$Y$相互独立，则

$$X+Y\sim B(m+n,p);$$

(2) 设$X\sim P(\lambda_1), Y\sim P(\lambda_2)$， 且$X$与$Y$相互独立，则

$$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2).$$

定理1可推广到 n个相互独立的随机变量的和.

证明

（1）因为$X\sim B(m,p),Y\sim B(n,p)$，那么，$X$与$Y$分别表示$m$与$n$重贝努利试验中"成功"的次数。可设 $U_i=\begin{cases}1 & 第i次试验“成功”；\\ 0 & 否则.\end{cases}$

$U_i \sim B(1,p), i=1,2,\cdots,m,\cdots,m+n$，则 $X=\sum_{i=1}^{m}U_i$, $Y=\sum_{i=m+1}^{m+n}U_i$ 。

由 n 重贝努利试验的独立性及重复性知，这里 $U_1,U_2,\cdots,U_m$ 相互独立同分布，$U_{m+1},U_{m+2},\cdots,U_{m+n}$ 也相互独立同分布。又因为 X 与 Y 相互独立，所以 $U_1,U_2,\cdots,U_m$，$U_{m+1},U_{m+2},\cdots,U_{m+n}$ 相互独立。那么，$X+Y=\sum_{i=1}^{m+n}U_i$ 表示着 $m+n$ 重的贝努利试验中"成功"的次数，由此得到，

$$X+Y\sim B(m+n,p)$$

(2) 因为

$$P(X+Y=k)=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=n)P(X+Y=k|X=n)=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=n)P(Y=k-n|X=n)$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=n)P(Y=k-n)=\sum_{n=0}^{k}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{\,n}}{n!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{\,n-k}}{(k-n)!}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{n=0}^{k}C_k^n\lambda_1^{\,n}\lambda_2^{\,n-k}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k,\quad k=0,1,\cdots$$

所以

$$X+Y\sim B(m+n,p)$$

一、二维离散型随机变量函数的分布

例1

在第一节例2中，讨论得优的科目数 $Z = X + Y$ 的分布情况，求 Z 的分布律

解 直接在 (X, Y) 的联合分布律表格中每格左上角标出 Z 的值，有

$X \backslash Y$	0	1
0	$^{0}0.78$	$^{1}0.02$
1	$^{1}0.12$	$^{2}0.08$

将 Z 取值相同格子中的概率相加，即得

Z	0	1	2
Pr	0.78	0.14	0.08

一、二维离散型随机变量函数的分布

因此，有如下结论：

如果二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P(X=a_i,Y=b_j)=p_{ij},\qquad i,j=1,2,\cdots,$$

则随机变量 (X,Y) 的函数$Z=g(X,Y)$ 的分布律为

$$P\left(Z=g(a_i,b_j)\right)=p_{ij},\qquad i,j=1,2,\cdots,$$

且取相同$g(a_i,b_j)$ 值对应的那些概率应合并相加。

例2 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的密度函数.

解 （1）因为 $\Omega_Z=(0,2)$ 则 $0\le z<1$ 时

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

$$=\int_0^{\frac{z}{2}}dx\int_x^{z-x}6xdy=\int_0^{\frac{z}{2}}6x(z-2x)dx=\frac{1}{4}z^3$$

二、二维连续型随机变量函数的分布

当 $1\le z<2$ 时 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$$1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}dy\int_{z-y}^{y}6x\,dx=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}3y^2-3(z-y)^2dy$$

$$=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}6zy-3z^2dy=1-3\left[zy^2-z^2y\right]_{\frac{z}{2}}^{1}=1-3z+3z^2-\frac{3}{4}z^3,$$

整理得

$$F(x)=\begin{cases}0, & z<0;\\ \frac{1}{4}z^3, & 0\le z<1;\\ 1-3z+3z^2-\frac{3}{4}z^3, & 1\le z<2;\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$

定理 2

设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$，

则随机变量 (X,Y) 的函数 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x \quad 或 \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

特别地，当 X 与 Y 相互独立时，上式成为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x \quad 或 \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

该公式称为卷积公式.

二、二维连续型随机变量函数的分布

证明 对任意的 $z \in R$,

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z) = \iint\limits_{x+y\le z} f(x, y)dxdy$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} f_X(v, u - x)dudv = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v, u - v)dvdu$$

由 Z 的任意性知 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)dx$

同理得 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)dy.$

显然，当随机变量 X 与 Y 相互独立时，

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)dx \qquad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y) f_Y(y)dy.$$

定理 3 正态分布的可加性:

设$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且X 与 Y相互独立,

$$则X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

更一般地，有

$$kX+lY+b\sim N(k\mu_1+l\mu_2+b,k^2\sigma_1^2+l^2\sigma_2^2)$$

其中 k,l,b 均为常数，且 k,l不全为零.

证明 由卷积公式得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(z-x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)x^2-2\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2}+\frac{z-\mu_2}{\sigma_2^2}\right)x+\left(\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{(z-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]\right\}dx$$

令 $a=\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}, b=\frac{\mu_1}{\sigma_1^2}+\frac{z-\mu_2}{\sigma_2^2}, c=\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{(z-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$ 代入课前导读中的公式结论得

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}}e^{-\frac{\left[z-(\mu_1+\mu_2)\right]^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}}$$

所以，$X+Y\sim(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

定理3可推广至 n 个独立正态分布随机变量的情形。

例3

已知$(X,Y)\sim N(1,2,3,4,0)$,求$Z=-X+2Y+3$的密度函数.

解

由第三节定理1得 $X\sim N(1,3)$，$Y\sim N(2,4)$

因为 $\rho=0$， 由第三节的定理4可知，X 与 Y 相互独立.

又由定理3得，$Z=-X+2Y+3\sim N(6,19)$，所以

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{38\pi}}\exp\left\{-\frac{(z-6)^2}{38}\right\},\ -\infty<z<+\infty$$

定理 4

设 X 与 Y相互独立，且X 的分布函数为$F_X(x)$，Y的分布函数为 $F_Y(y)$，则

(1)$U=\max(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_U(u)=F_X(u)F_Y(u)$$

(2)$V=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_V(v)=1-(1-F_X(v))(1-F_Y(v))$$

由分布函数的定义及X与Y相互独立得

$$F_U(u)=P(\max(X,Y)\le u)=P(X\le u,Y\le u)$$

$$=P(X\le u)P(Y\le u)=F_X(u)F_Y(u)$$

$$F_V(v)=P(V\le v)=P\left(\min(X,Y)\le v\right)$$

$$=1-P\left(\min(X,Y)>v\right)=1-P(X>v,Y>v)$$

$$=1-\left(1-P(X\le v)\right)\left(1-P(Y\le v)\right)$$

$$=1-\left(1-F_X(v)\right)\left(1-F_Y(v)\right)$$

定理4可推广至n个相互独立的随机变量情形。

设连续型随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$互相独立，且X_i的分布函数为$F_{X_i}(x)$，$i=1,2,\cdots,n$，则

（1）随机变量 $U=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为 $F_U(u)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(u)$

（2）随机变量 $V=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为 $F_V(v)=1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-F_{X_i}(v)\right)$

例4

设 X_1与 X_2是相互独立的随机变量, $X_1 \sim E(\lambda_1)$, $X_2 \sim E(\lambda_2)$

记 $U=\max(X,Y), V=\min(X,Y)$, 分别 求 U, V 的密度函数.

解 因为 $\Omega_U=[0,+\infty)$，那么由定理4得，当 $0\le u<+\infty$ 时，

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0;\\ \left(1-e^{-\lambda_1 u}\right)\left(1-e^{-\lambda_2 u}\right), & u\ge 0.\end{cases}$$

所以

$$f_U(u)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\left(1-e^{-\lambda_2 u}\right)+\lambda_2 e^{-\lambda_2 u}\left(1-e^{-\lambda_1 u}\right), & u>0;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

因为 $\Omega_V=[0,+\infty)$，那么由定理4得 $F_V(v)=\begin{cases}0, & v<0;\\ 1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)v}, & v\ge 0.\end{cases}$

知 $V\sim E(\lambda_1+\lambda_2)$， 故 $f_V(v)=\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)v}, & v>0;\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$

总结/summary

理解　二维随机变量的定义
了解　二维随机变量的联合分布函数的定义、性质及计算
掌握　联合概率函数和联合密度函数的定义、性质及计算
掌握　二维随机变量相关事件概率的计算

掌握　二维随机变量的边缘分布函数的定义及计算
熟练　两个随机变量相互独立的定义及判别方法
了解　个随机变量相互独立的定义及判别方法
理解　随即变量独立的概念
掌握　随机变量独立的判断方法

掌握　二维随机变量的条件分布函数的定义及计算

掌握　二维随机变量函数分布的计算
熟练　相互独立的随机变量的最大值最小值分布函数的计算

了解 二维正态分布的密度函数
理解 二维正态分布的密度函数中参数的概率意义。
掌握 二维正态分布的性质