新確率統計 問題集 模範解答

第 1 章　確率

§1.1　確率の定義と性質

Basic

1　数字が 2 であるカードは 4 枚あるから

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

数字が 8 以下であるカードは 32 枚あるから

$$P(B) = \frac{32}{52} = \frac{8}{13}.$$

ハートの絵札は 3 枚 (ハートの Jack, Queen, King) あるから

$$P(C) = \frac{3}{52}.$$

2

(1) それぞれの硬貨が表である確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であり，求める確率はこれが同時に起こる確率だから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

(2) 4 枚の硬貨のうち，1 枚だけ表である場合は:

表, 裏, 裏, 裏
裏, 表, 裏, 裏
裏, 裏, 表, 裏
裏, 裏, 裏, 表

の 4 通りである．それぞれが起こる確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}$$

であるから

$$4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}.$$

3　1 回のジャンケンの A の結果は，勝ち，あいこ，負け の 3 通りだから $\frac{1}{3}$.

4

(1) 2 個のさいころの出る目の差は表のようになるから，$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	**4**	5
2	1	0	1	2	3	**4**
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	**4**	3	2	1	0	1
6	5	**4**	3	2	1	0

(2) 2 個のさいころの出る目の和は表のようになるから，$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	**10**
5	6	7	8	9	**10**	11
6	7	8	9	**10**	11	12

5　袋から同時に 4 個の玉を取り出す取り出し方は ${}_8\mathrm{C}_4 = 70$ 通りである．

(1) 取り出した 4 個の玉がすべて白玉である場合は ${}_5\mathrm{C}_4 = 5$ 通りだから $\frac{5}{70} = \frac{1}{14}$.

(2) 取り出した 4 個の玉に白玉が 1 個だけ含まれる場合は

$${}_5\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 = 5$$

より 5 通りだから $\frac{5}{70} = \frac{1}{14}$.

(3) 取り出した 4 個の玉に白玉が 2 個だけ含まれる場合は

$${}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 = 10 \cdot 3 = 30$$

より 30 通りだから $\frac{30}{70} = \frac{3}{7}$.

6

(1) 800 以上の奇数ができるのは，1 枚目に 8 のカードを引き，3 枚目に 1, 3, 5, 7 のいずれかのカードを引いた場合である．
1 枚目に 8 のカードを引き，2 枚目に偶数，3 枚目に奇数のカードを引く確率は

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{28}.$$

1 枚目に 8 のカードを引き，2 枚目に奇数，3 枚目に奇数のカードを引く確率は

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{28}.$$

すなわち，求める確率はこれらの和をとって

$$\frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{1}{14}.$$

(2) 200 以下の奇数ができるのは，1 枚目に 1 のカードを引き，3 枚目に 3, 5, 7 のいずれかのカードを引いた場合である．
1 枚目に 1 のカードを引き，2 枚目に偶数，3 枚目に奇数のカードを引く確率は

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{28}.$$

1 枚目に 1 のカードを引き，2 枚目に奇数，3 枚目に奇数のカードを引く確率は

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{56}.$$

すなわち，求める確率はこれらの和をとって

$$\frac{1}{28} + \frac{1}{56} = \frac{3}{56}.$$

7　4 個のさいころのうち，3 個だけ同じ目になる場合は:

同, 同, 同, 異
同, 同, 異, 同
同, 異, 同, 同
異, 同, 同, 同

のような組み合わせの場合である．それぞれが起こる確率は

$$6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$$

であるから

$$4 \cdot \frac{5}{216} = \frac{5}{54}.$$

8

$$\frac{4623}{10000} = 0.4623 \simeq 0.46.$$

9

(1) $A \cap B$　大きいさいころの目が奇数かつ, 出る目の和が偶数である事象 $\Leftrightarrow$ 大きいさいころの目が奇数, 小さいさいころの目が奇数である事象.

$\overline{B}$　出る目の和が奇数である事象.

$\overline{A} \cap B$　大きいさいころの目が偶数かつ, 出る目の和が偶数である事象 $\Leftrightarrow$ 大きいさいころの目が偶数, 小さいさいころの目が偶数である事象.

$A \cup \overline{B}$　大きいさいころの目が奇数または出る目の和が奇数.

(2) $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ より $C = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ とすればよいから, 大きいさいころの目が偶数かつ, 出る目の和が奇数である事象 $\Leftrightarrow$ 大きいさいころの目が偶数, 小さいさいころの目が奇数.

10

(1) トランプ 52 枚のうち, 奇数のカードは 28 枚あるから

$$P(A) = \frac{28}{52} \cdot \frac{27}{51} = \frac{63}{221}.$$

(2) カードの数の和が 9 となるのは, 2 枚のカードの数が $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$ の 8 通りであり, 2 枚のカードのスートの組み合わせが $4^2 = 16$ 通りであるから

$$P(B) = \frac{8 \cdot 16}{52 \cdot 51} = \frac{32}{663}.$$

(3) 奇数の和は偶数であり, 9 は奇数だから A と B は互いに排反であるから

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{63}{221} + \frac{32}{663} = \frac{1}{3}.$$

11

(1) トランプ 52 枚のうち, 絵札のカードは 12 枚あるから

$$\frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} = \frac{11}{221}.$$

(2) “少なくとも 1 枚は絵札でない” 事象の余事象は “2 枚とも絵札である” 事象であるから, (1) より

$$1 - \frac{11}{221} = \frac{210}{221}.$$

12　A, B の確率はそれぞれ $P(A) = \dfrac{5}{10}$, $P(B) = \dfrac{4}{10}$ である.

(1) 10 枚のカードのうち, 奇数かつ素数であるカードは 3, 5, 7 だから, $A \cap B$ の確率は $P(A \cap B) = \dfrac{3}{10}$ である. すなわち

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

(2) 10 枚のカードのうち, 偶数かつ素数であるカードは 2 のみだから, $\overline{A} \cap B$ の確率は $P\left(\overline{A} \cap B\right) = \dfrac{1}{10}$ である. すなわち

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A} \cup B\right) &= P\left(\overline{A}\right) + P(B) - P\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &= \left(1 - \frac{5}{10}\right) + \frac{4}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

(3) 10 枚のカードのうち, 奇数かつ素数でないカードは 1, 9 だから, $A \cap \overline{B}$ の確率は $P\left(A \cap \overline{B}\right) = \dfrac{2}{10}$ である. すなわち

$$\begin{aligned} P\left(A \cup \overline{B}\right) &= P(A) + P\left(\overline{B}\right) - P\left(A \cup \overline{B}\right) \\ &= \frac{5}{10} + \left(1 - \frac{4}{10}\right) - \frac{2}{10} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

13

(1) 3 枚の硬貨を投げ, 1 枚も表が出ない確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$, 1 枚だけ表が出る確率は $3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{3}{8}$, 2 枚だけ表が出る確率は $3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{3}{8}$, 3 枚表が出る確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$ である. すなわち

$$0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

(2) 2 個のさいころの出る目の差は表のようになる.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

すなわち

$$0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} = \frac{35}{18}.$$

14　500 円の当たりくじを引く確率は $\dfrac{1}{12}$, 200 円の当たりくじを引く確率は $\dfrac{2}{12}$, はずれくじを引く確率は $\dfrac{9}{12}$ だから

$$500 \cdot \frac{1}{12} + 200 \cdot \frac{2}{12} + 0 \cdot \frac{9}{12} = 75$$

より, 75 円.

15　取り出した 2 枚のカードから x の値を計算すると表のようになる.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	-	1	2	3	4	5	6	7	8
3	2	1	-	1	2	3	4	5	6	7
4	3	2	1	-	1	2	3	4	5	6
5	4	3	2	1	-	1	2	3	4	5
6	5	4	3	2	1	-	1	2	3	4
7	6	5	4	3	2	1	-	1	2	3
8	7	6	5	4	3	2	1	-	1	2
9	8	7	6	5	4	3	2	1	-	1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-

(1) 表より, $x = 2$ となる確率は

$$\frac{16}{90} = \frac{8}{45}.$$

(2) 表より, $x = 6$ となる確率は

$$\frac{8}{90} = \frac{4}{45}.$$

(3) 表より, x の期待値は

$$\begin{aligned}&1\cdot\frac{18}{90}+2\cdot\frac{16}{90}+3\cdot\frac{14}{90}+4\cdot\frac{12}{90}+5\cdot\frac{10}{90}\\&\quad+6\cdot\frac{8}{90}+7\cdot\frac{6}{90}+8\cdot\frac{4}{90}+9\cdot\frac{2}{90}\\&=\frac{11}{3}.\end{aligned}$$

Check

16

(1) 偶数の玉は 2, 4, 6, 8 の 4 個だから $\frac{4}{9}$.

(2) 3 の倍数の玉は 3, 6, 9 の 3 個だから $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

17

(1) 出る目の積が 12 となるのは $(2,6)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(6,2)$ の 4 通りだから $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

(2) 出る目の和が 10 となるのは $(4,6)$, $(5,5)$, $(5,6)$, $(6,4)$, $(6,5)$, $(6,6)$ の 6 通りだから $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

18

(1) 5 本の当たりくじのうち 3 本を同時に引ければよいから

$$\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}=\frac{1}{114}.$$

(2) 2 本が当たり 1 本が外れる場合は $\frac{{}_3\mathrm{P}_3}{{}_2\mathrm{P}_2}=3$ 通りあり, それぞれが起こる確率は

$$\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{15}{18}=\frac{5}{114}$$

であるから, 求める確率は

$$3\cdot\frac{5}{114}=\frac{5}{38}.$$

19

(i) “偶-偶-偶” の順にカードを取り出す確率は

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{24}{504}.$$

(ii) “偶-奇-偶” または “奇-偶-偶” の順にカードを取り出す確率は

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{120}{504}.$$

(iii) “奇-奇-偶” の順にカードを取り出す確率は

$$\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{80}{504}.$$

以上より

$$\frac{24}{504}+\frac{120}{504}+\frac{80}{504}=\frac{4}{9}.$$

20 “男-男” が選ばれる確率は

$$\frac{8}{14}\cdot\frac{7}{13}=\frac{56}{182}$$

であり, “女-女” が選ばれる確率は

$$\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}=\frac{30}{182}$$

であるから

$$\frac{56}{182}+\frac{30}{182}=\frac{43}{91}.$$

21

(1) (i) 赤玉が 0 個である確率は

$$\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{120}{11880}.$$

(ii) 赤玉が 1 個である場合は $\frac{{}_4\mathrm{P}_4}{{}_3\mathrm{P}_3}=4$ 通りあり, それぞれが起こる確率は

$$\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{420}{11880}$$

であるから, 赤玉が 1 個である確率は

$$4\cdot\frac{420}{11880}=\frac{1680}{11880}.$$

以上より, 求める確率は

$$\frac{120}{11880}+\frac{1680}{11880}=\frac{5}{33}.$$

(2) “少なくとも 1 個は赤玉である” 事象の余事象は “赤玉が 0 個である” 事象であるから, (1)-(i) より

$$1-\frac{120}{11880}=\frac{98}{99}.$$

22 A, B の確率はそれぞれ $P(A)=\frac{50}{100}$, $P(B)=\frac{33}{100}$ である.

(1) カードの数字が 6 の倍数である確率だから

$$P(A\cap B)=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}.$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{50}{100}+\frac{33}{100}-\frac{16}{100}=\frac{67}{100}.\end{aligned}$$

(3) $A\cap\overline{B}$ は 2 倍数のうち 6 の倍数を除いた事象だから, その確率は

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{50}{100}-\frac{16}{100}=\frac{34}{100}.$$

よって

$$\begin{aligned}P\left(A\cup\overline{B}\right)&=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)\\&=\frac{50}{100}+\left(1-\frac{33}{100}\right)-\frac{34}{100}=\frac{83}{100}.\end{aligned}$$

23

(i) 赤玉をちょうど 1 個取り出す取り出し方は $\frac{{}_3\mathrm{P}_3}{{}_2\mathrm{P}_2}=3$ 通りあり, それぞれの確率は

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{126}{720}$$

だから, 赤玉をちょうど 1 個取り出す確率は

$$3\cdot\frac{126}{720}=\frac{378}{720}.$$

(ii) 赤玉をちょうど 2 個取り出す取り出し方は $\frac{{}_3\mathrm{P}_3}{{}_2\mathrm{P}_2}=3$ 通りあり, それぞれの確率は

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{42}{720}$$

だから, 赤玉をちょうど 2 個取り出す確率は

$$3\cdot\frac{42}{720}=\frac{126}{720}.$$

(iii) 赤玉を 3 個取り出す確率は

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{6}{720}.$$

以上より, 賞金額の期待値は

$$100\cdot\frac{378}{720}+200\cdot\frac{126}{720}+300\cdot\frac{6}{720}=90$$

より, 90 円.

24 2 個のさいころの出た目から x の値を計算すると表のようになる.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	0	1	2	3
2	3	0	1	2	3	0
3	0	1	2	3	0	1
4	1	2	3	0	1	2
5	2	3	0	1	2	3
6	3	0	1	2	3	0

(1) 表より, $x=0$ となる確率は

$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}.$$

(2) 表より, x の期待値は

$$0\cdot\frac{9}{36}+1\cdot\frac{8}{36}+2\cdot\frac{9}{36}+3\cdot\frac{10}{36}=\frac{9}{14}.$$