

Transformaty Fouriera. Analiza przypadków jedno i dwuwymiarowych.

Krzysztof Chołys

Uniwersytet Łódzki,
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej,
Zaawansowane Metody Obliczeniowe
1 grudnia 2023

Spis treści

1	Wstęp	3
1.1	Dlaczego?	3
1.2	Cel pracy	3
2	Podstawy teoretyczne	4
2.1	Kluczowe pojęcia	4
2.2	Wzory	5
3	Metodologia	7
3.1	Program i biblioteki	7
3.2	Działanie programu	7
3.3	Jednowymiarowe transformaty Fouriera	7
3.4	Dwuwymiarowa szybka transformata Fouriera	8
4	Wyniki	8
4.1	Analiza danych jednowymiarowych - DFT i FFT	8
4.2	Analiza danych dwuwymiarowych - FFT	12
5	Podsumowanie	15
5.1	Co udało się zbadać?	15
5.2	Jakie są następne kroki?	15
6	Bibliografia	16

1 Wstęp

1.1 Dlaczego?

Transformata Fouriera, zarówno w swej dyskretniej (DFT) jak i szybkiej formie (FFT), jest kluczowym narzędziem w analizie sygnałów, umożliwiającym przejście z domeny czasu do domeny częstotliwości. Za tym technicznym opisem kryje się całe spektrum rzeczywistych zastosowań: od przetwarzania sygnałów i projektowania filtrów, przez obrazowania medyczne, analizę częstotliwościową instrumentów i analizy sygnałów świetlnych ciał niebieskich, aż po badanie wzorców danych ekonomicznych czy projektowanie układów optycznych. Wszystko to możliwe jest dzięki pogłębionemu zrozumieniu struktury sygnałów, odkrywanie fundamentalnych składowych harmonicznich oraz identyfikację i filtrowanie zakłóceń.

1.2 Cel pracy

Praca oferuje wgląd w teoretyczne podstawy transformat Fouriera oraz eksploruje ich ujęcie praktyczne w postaci symulacji numerycznych. Akcent postawiono również na analizę złożoności obliczeniowej zarówno dyskretniej, jak i szybkiej wersji algorytmu. Prezentowana jest też metodologia wykorzystana do realizacji symulacji i analizy wyników, pokazując, jak transformaty Fouriera umożliwiają oddzielenie istotnych informacji od szumu oraz jak przyczynia się to do poprawy jakości danych.

Praca rzuca światło na niezwykle możliwości, jakie oferuje analiza częstotliwościowa, od odkryć w fizyce i inżynierii po zastosowania w medycynie i sztuce, stanowiąc most między teorią a szerokim przekrojem zastosowań w świecie rzeczywistym.

2 Podstawy teoretyczne

2.1 Kluczowe pojęcia

Dyskretna transformata Fouriera (DFT) - Matematyczne narzędzie pozwalające na analizę sygnałów dyskretnych w dziedzinie częstotliwości. DFT przekształca ciąg wartości czasowych, takich jak sygnały cyfrowe, na składniki o określonych częstotliwościach, ujawniając składniki sinusoidalne i ich amplitudy. Jej złożoność czasowa wynosi wysokie $O(N^2)$. Zastosowanie DFT umożliwia głębsze zrozumienie zachowania sygnałów, ich składowych harmonicznym i szumów, co jest kluczowe w przetwarzaniu sygnałów cyfrowych, kompresji danych oraz innych aplikacjach inżynierskich i naukowych.

Szybka transformata Fouriera (FFT) - Algorytm optymalizujący obliczanie dyskretnych transformaty Fouriera, ze znacząco zredukowaną złożonością czasową równą $O(N \log_2 N)$. FFT jest wykorzystywana do szybkiego i efektywnego analizowania sygnałów w celu identyfikacji ich składowych częstotliwościowych i amplitud. Przełomowa w swej wydajności, FFT stała się podstawowym narzędziem w inżynierii dźwięku, radiokomunikacji i wielu innych dziedzinach wymagających analizy częstotliwościowej.

Amplituda - Amplituda sygnału definiuje jego maksymalną wartość osiąganą w trakcie cyklu. W kontekście analizy czasowej jest miarą siły lub poziomu sygnału, natomiast w analizie częstotliwościowej odnosi się do wielkości komponentu sinusoidalnego w przestrzeni częstotliwości. W przypadku przetwarzania sygnałów, amplituda odpowiada za intensywność reprezentowanego zjawiska, takiego jak dźwięk, światło czy fala elektromagnetyczna.

Harmoniczna - Składowa sinusoidalna o częstotliwości, która jest całkowitą wielokrotnością fundamentalnej częstotliwości sygnału. Odpowiada za charakterystyczne cechy tonu w muzyce i kształtuje jakość dźwięku. W analizie Fouriera harmoniczne tworzą serię komponentów, które sumując się, odtwarzają pierwotny sygnał czasowy. Ich amplitudy i fazy są kluczowe w zrozumieniu struktury i właściwości sygnału.

Szum - W teorii sygnałów, szum odnosi się do niepożądanych lub przypadkowych fluktuacji w sygnale elektrycznym lub innym medium transmisyjnym. Jest to zazwyczaj nieistotna informacja, która zakłóca lub maskuje sygnał użyteczny. Szum może mieć charakter stały lub zmienny i może pochodzić z różnych źródeł, takich jak zakłócenia elektroniczne, termiczne lub zewnętrzne interakcje. W analizie sygnałów, szum jest często analizowany w celu optymalizacji procesów filtracji i wyodrębnienia sygnałów od zakłóceń.

Widmowa gęstość mocy (ang. Power Spectral Density - PSD) - Funkcja opisująca rozkład mocy sygnału względem częstotliwości. Używana głównie do analizy sygnałów w dziedzinie częstotliwości, PSD pokazuje, gdzie energia sygnału koncentruje się w skali częstotliwości. W kontekście analizy widmowej, gęstość mocy jest użyteczna do identyfikacji dominujących częstotliwości oraz do oceny stabilności i szumów systemu. W praktyce pozwala to na wykrywanie regularnych oscylacji w danych oraz charakterystykę szumów.

2.2 Wzory

Dyskretna transformata Fouriera

$$C_n = \sum_{i=0}^{N-1} f_i \exp(-j \frac{2\pi}{N} \cdot i \cdot n); \quad (1)$$

gdzie:

$$n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

C_n = Amplituda sygnałów cząstkowych,

f_i = Dyskretny punkt z dziedziny czasu

Szybka transformata Fouriera, parzyste indeksy sygnału

$$C_n = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2i} \exp(-j \frac{2\pi}{N} \cdot i \cdot n) + \exp(-j \frac{2\pi}{N} \cdot n) \cdot \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2i+1} \exp(-j \frac{2\pi}{N} \cdot i \cdot n); \quad (2)$$

gdzie:

$$n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Szybka transformata Fouriera, nieparzyste indeksy sygnału

$$C_{n+\frac{N}{2}} = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2i} \exp(-j \frac{2\pi}{N} \cdot i \cdot n) - \exp(-j \frac{2\pi}{N} \cdot n) \cdot \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2i+1} \exp(-j \frac{2\pi}{N} \cdot i \cdot n); \quad (3)$$

gdzie:

$$n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Odwrotna dyskretna transformata Fouriera

$$f_i = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp(j \frac{2\pi}{N} \cdot i \cdot n); \quad (4)$$

gdzie:

$$n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Odwrotna szybka transformata Fouriera, parzyste indeksy sygnału

$$f_i = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} C_{2n} \exp(j \frac{2\pi}{N} \cdot i \cdot n) + \exp(j \frac{2\pi}{N} \cdot n) \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} C_{2n+1} \exp(j \frac{2\pi}{N} \cdot i \cdot n); \quad (5)$$

gdzie:

$$n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Odwrotna szybka transformata Fouriera, nieparzyste indeksy sygnału

$$f_{i+\frac{N}{2}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} C_{2n} \exp(j \frac{2\pi}{N} \cdot i \cdot n) - \exp(j \frac{2\pi}{N} \cdot n) \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} C_{2n+1} \exp(j \frac{2\pi}{N} \cdot i \cdot n); \quad (6)$$

gdzie:

$$i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Amplituda składowej sygnału

$$A(f) = |X(f)|; \quad (7)$$

gdzie:

$X(f)$ = Wynik transformacji Fouriera w punkcie f będący zespoloną wartością o części rzeczywistej Re i urojonej Im

Dwumymiarowa szybka transformata Fouriera

$$C_n = \sum_{i=0}^N \left(\exp(-j2\pi \frac{i \cdot n}{N}) \sum_{k=0}^M f_{ik} \exp(-j2\pi \frac{k \cdot m}{M}) \right); \quad (8)$$

gdzie:

$$i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

3 Metodologia

3.1 Program i biblioteki

Program wykorzystany w analizie został napisany w języku Python 3.12.0.

Wykorzystano biblioteki: numpy, matplotlib, sys.

Numer zestawów danych wykorzystanych w programie = 2.

3.2 Działanie programu

Program zbudowany w zgodzie z paradygmatem obiektowym programowania - wszelkie niezbędne metody wywoływane są w metodzie `run()` klasy `FFT`. Jej zachowanie podyktowane jest wymiarowością danych wejściowych, które są wczytywane po uruchomieniu. Metoda obsługuje przypadki zarówno jedno, jak i dwuwymiarowe, szczegółowo opisane poniżej. Wczytywanie i wypisywanie danych odbywa się przez wejście/wyjście standardowe.

3.3 Jednowymiarowe transformaty Fouriera

Wczytane dane poddawane są dyskretniej transformacie Fouriera. Jej ręczna implementacja bazowana była na wzorze (1). Równolegle wykonuje się szybka transformata Fouriera obliczana ze wzorów (2, 3), które wykorzystując podział na elementy parzyste i nieparzyste (algorytm Cooley'a-Tukey'ego), zmniejszają złożoność czasową działania algorytmu do $O(N \log_2 N)$. Do osiągnięcia wspomnianej złożoności konieczne jest operowanie na liczbie próbek $N = 2^k$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną. Zliczane są operacje dominujące - odpowiednio dodawanie i dodawanie wraz z mnożeniem. Warto przy tym zaznaczyć, że wynik DFT jest symetryczny: dla $N = 64$, unikalne są jedynie pierwsze 32 wartości. Ich druga połowa jest symetryczna względem pierwszej. Wartości, które uzyskano po transformacji sygnału z domeny czasu do domeny częstotliwości są zapisywane, a następnie wykorzystywane do ich ponownej transformacji z wykorzystaniem odpowiednio dyskretniej (4) i szybkiej odwrotnej transformaty Fouriera (5, 6). Następnie wyliczane są amplitudy składowych sygnału (7), ich wartości są zaokrąglane do dwóch miejsc po przecinku, a harmoniczne zapisywane w osobnej strukturze danych. Sposób wyodrębnienia harmonicznych z pozostałych danych dla zaszumionego zestawu danych bazowany jest na obserwacji, że szum nie przekracza wartości większej niż 5. Analizowane jednowymiarowe zestawy danych zawierają ten sam sygnał, który w jednym wypadku jest czysty, w drugim jego pomiary są lekko zakłócone. Ekstrahując szum, który jest poddawany późniejszej analizie, pominięto wartości 4 harmonicznych, które występowały dla pierwszych 32 wartości. Przedostatnia metoda programu służy do znalezienia parametrów prostej dopasowującej się do szumu na liniowo-logarytmicznym wykresie zależności szumu od widmowej gęstości mocy. Finalnym elementem programu jest szereg wywołanych metod, służących do renderowania wykresów odpowiednio: inicjalnego sygnału, amplitud, szumu, sygnału po IDFT i sygnału po IFFT, które zaprezentowane będą w rozdziale 4.

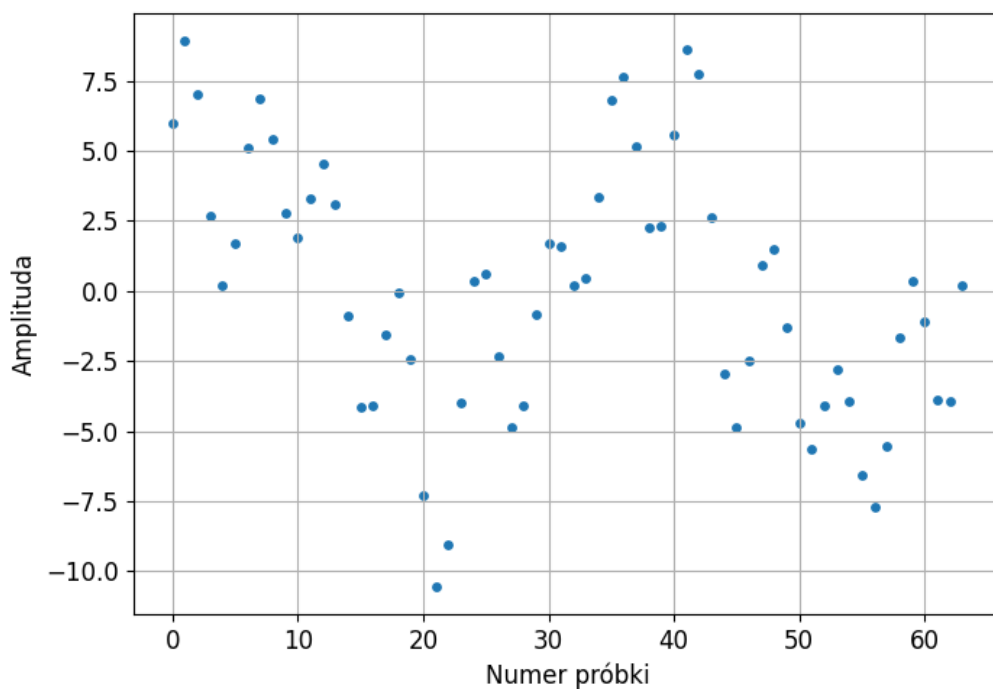
3.4 Dwuwymiarowa szybka transformata Fouriera

Po wczytaniu danych wejściowych i rozpoznaniu ich wymiarowości, program wykonuje szybką transformatę Fouriera korzystając ze wzoru (8). Otrzymane w ten sposób częstotliwości zaokrąglane są do zera, jeśli ich wartość absolutna jest mniejsza od $\epsilon = 0.0005$. Wartości wszystkich częstotliwości zaokrąglono również do drugiego miejsca po przecinku. Obliczane następnie amplitudy częstotliwości wykorzystywane są w metodzie np.fft.fftshift, umożliwiającą przesunięcie zerowej harmonicznej na środek widma 2D. Wartości amplitud zlogarytmowano, by lepiej zilustrować intensywność wartości na renderowanym następnie widmie 2D sygnału. Dla możliwości analizy i porównania, wyświetlany jest również dwuwymiarowy wykres danych wzorcowych.

4 Wyniki

4.1 Analiza danych jednowymiarowych - DFT i FFT

Podczas działania metod symulujących dyskretną i szybką transformatę Fouriera, zsumowana liczba dominujących operacji wyniosła odpowiednio: 4096 i 384. Złożoność czasowa wspomnianych transformat to odpowiednio: $O(N^2)$ i $O(N \log_2 N)$, zakładając, że liczba danych wejściowych dla FFT wynosi $N = 2^k$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną. Rzeczywiście, po podstawieniu $N = 64$ otrzymujemy wspomniane wartości. Warto przy tym wspomnieć o pewnej zależności. Większość sygnałów wejściowych DFT traktuje się jako rzeczywiste, tj. o zerowej wartości urojonej próbki. Jeśli ciąg wejściowy $x(m)$ jest rzeczywisty, to zespolone wartości wyjściowe DFT dla argumentów $m \geq (N/2)$ są nadmiarowe w stosunku do wartości wyjściowych dla argumentów od $m = 0$ do $m = (N/2) - 1$. Wynika to bezpośrednio z symetrii danych wyjściowych, co widać na rysunku 1. m -ta wartość wyjściowa DFT będzie miała taką samą amplitudę, jak $(N - m)$ -ta wartość wyjściowa DFT. Kąt fazowy m -tej wartości wyjściowej DFT jest równy kątowi fazowemu $(N - m)$ -tej wartości wyjściowej DFT, ze znakiem ujemnym. [1]

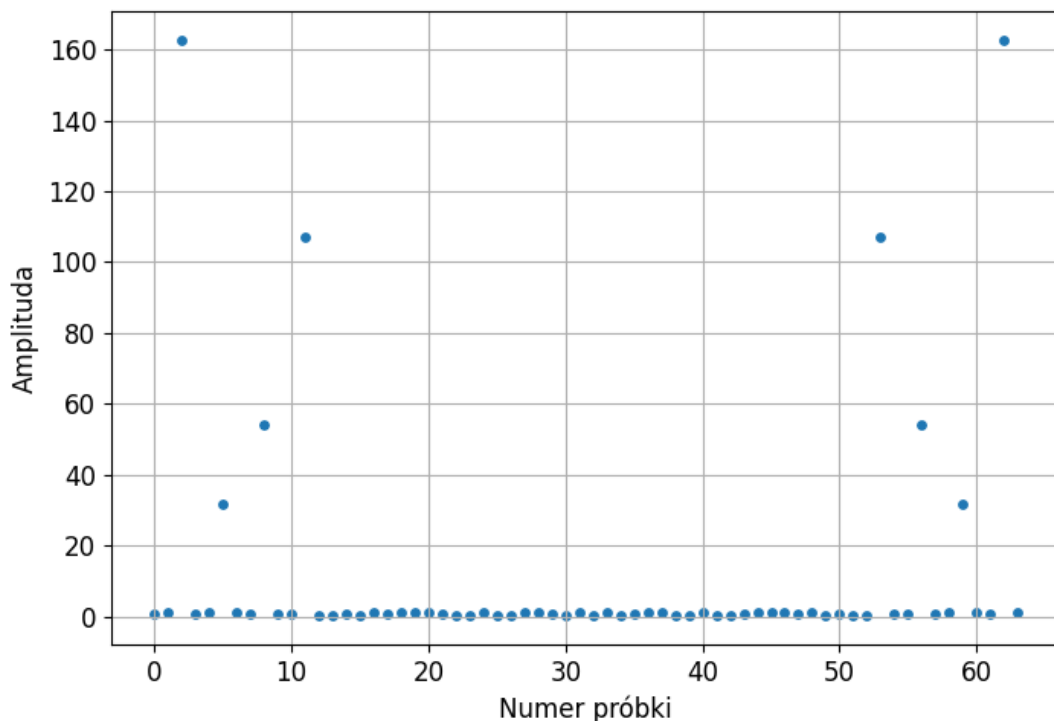


Rysunek 1: Zależność sygnału wejściowego od czasu

Zestawiając ze sobą wartości harmonicznych, które wyodrębniono z niezaszumionego i zaszumionego zestawu danych, jak w tabeli 1., można zauważyć, że różnica między sygnałami nie przekracza 1.5%.

n	Sygnał czysty	Sygnał zaszumiony
2	163.17	162.67
5	32.0	31.81
8	53.26	54.22
11	108.28	107.12

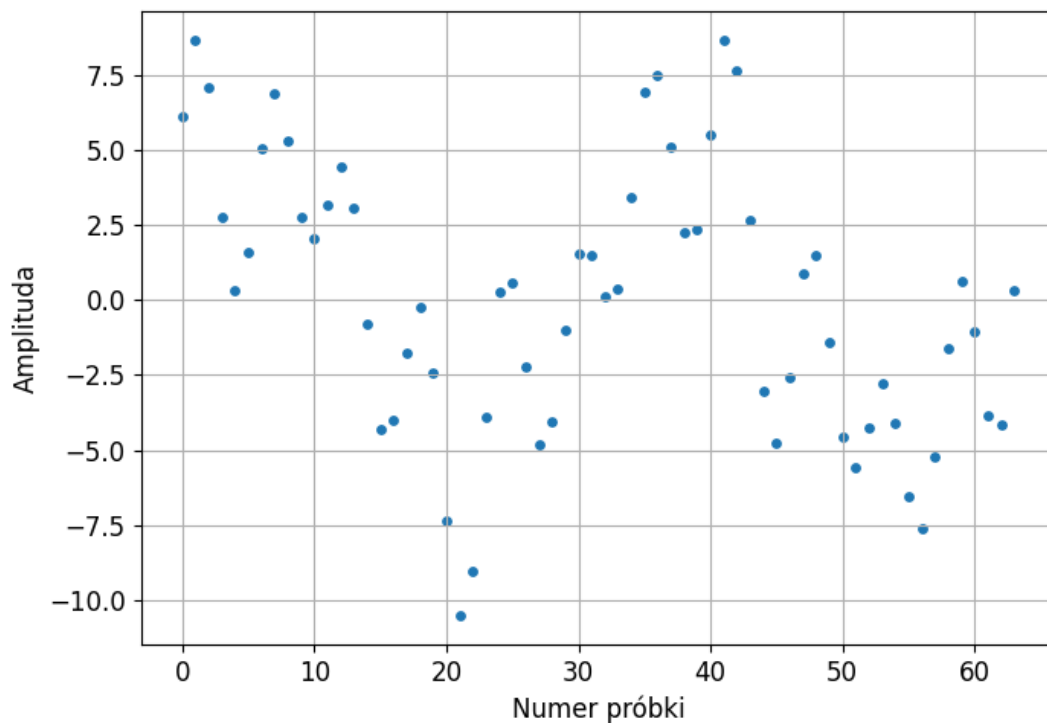
Tabela 1: Wartości kolejnych harmonicznych dla danych niezaszumionych i zaszumionych



Rysunek 2: Amplitudy częstotliwości składowych sygnału zaszumionego

Na rysunku 2. można zauważyć symetrię amplitud składowych częstotliwości dla $N \geq 32$. To ważna obserwacja. Dzięki tej informacji wiadomym jest, że w celu dalszej analizy pełnię informacji są w stanie dostarczyć pierwsze 32 próbki. Co ciekawe, jeśli próbki wejściowe FFT byłyby zespolone, to wszystkie N wartości wyjściowych FFT byłyby niezależne [1] i stosownym byłoby obliczenie bezwzględnych częstotliwości prążków FFT dla m w pełnym zakresie $0 \leq m \leq N - 1$

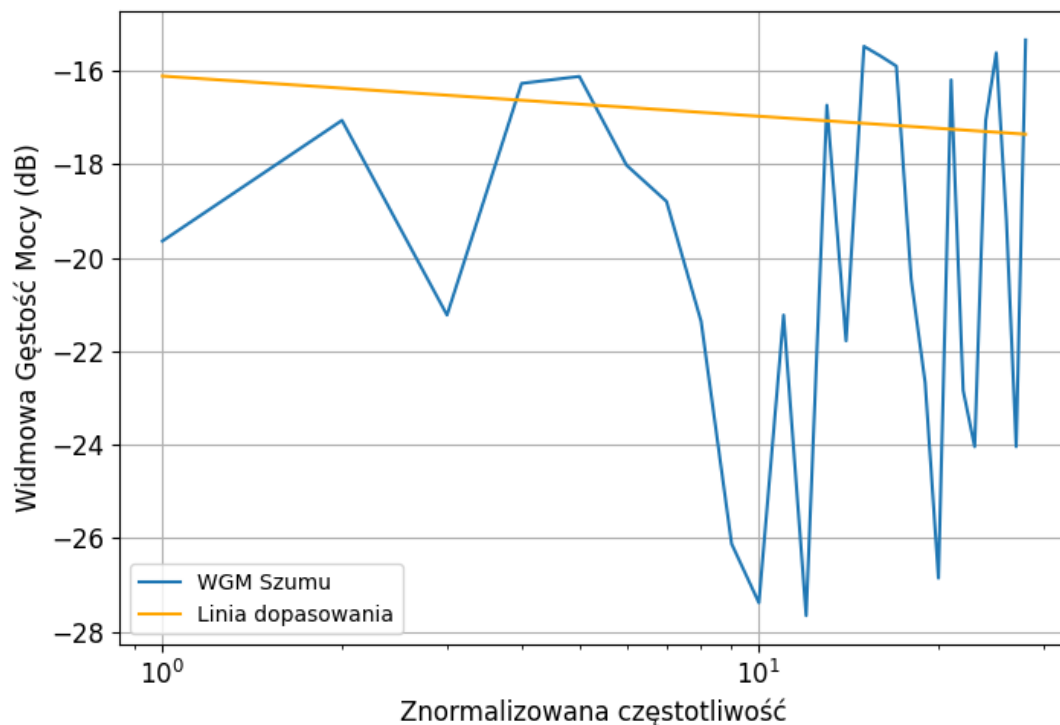
Przeprowadzenie DFT bądź FFT na sygnale umożliwia przeniesienie go z domeny czasu do domeny częstotliwości. Jeden sygnał przetwarzany jest na wiele sygnałów składowych, które razem stanowią jego całość. Odwrotne założenie spełnia, jak sama nazwa wskazuje, odwrotna transformata Fouriera, zarówno w dyskretniej jak i szybkiej wersji algorytmu. Częstotliwości składowe przetwarzane są ponownie na inicjalny sygnał wejściowy. Następuje wtórne przeniesienie z domeny częstotliwości do domeny czasu. Mówiąc mniej werbalnie, a bardziej obrazowo - wykres amplitud sygnałów składowych po IFFT bądź IDFT powinien być identyczny jak wykres inicjalnego, nieprzetworzonego sygnału. Zjawisko można zaobserwować na rysunku 3. poniżej.



Rysunek 3: Zależność sygnału wejściowego od czasu - zaszumiony sygnał po IFFT

Przedstawiony na rysunku 3. sygnał, poddawany odwrotnej szybkiej transformacie Fouriera zawsze będzie idealnym odzwierciedleniem sygnału, którego inicjalnie poddano działaniu FFT bądź DFT. Transformowany i przedstawiony sygnał pochodzi z zaszumionego zbioru danych. Po jego porównaniu z rysunkiem 1. łatwo zauważyć drobne odchylenia w wartościach poszczególnych częstotliwości.

Obserwując pierwsze 28 (32 – 4 harmoniczne) unikalnych wartości szumu widocznych na rysunku 2. przydatnym narzędziem jest analiza widmowej gęstości mocy i częstotliwości.

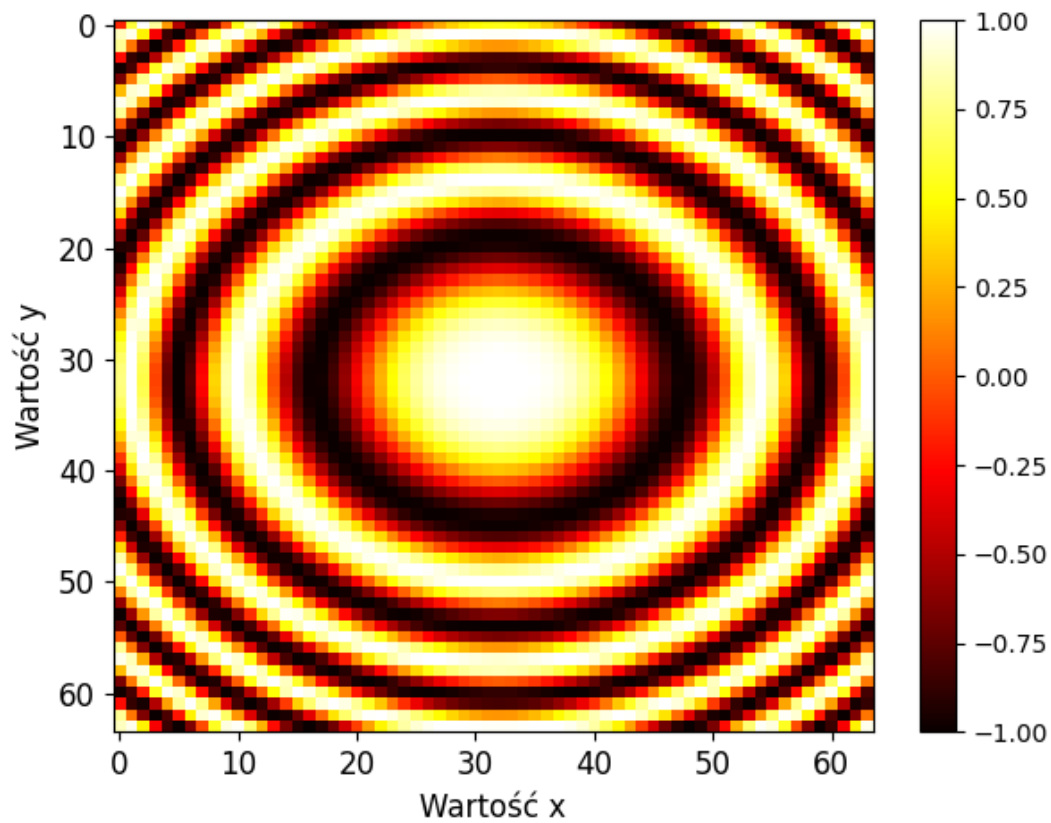


Rysunek 4: Zależność szumu od Widmowej Gęstości Mocy

Rysunek 4. przedstawia linię dopasowania do szumu. Wartości jej parametrów, tj. współczynnika kierunkowego $a = -0.86$, parametru $b = -16.11$ umożliwia wyliczenie spadku równego 1 dB na dekadę, tj. jeden rząd wielkości. Spadek ten pasuje badany szum między szumem białym a różowym, których spadki decybeli na dekadę wynoszą odpowiednio: 0 i -10. Bliższą z tych wartości jest oczywiście 0, stąd badany szum uznano za biały.

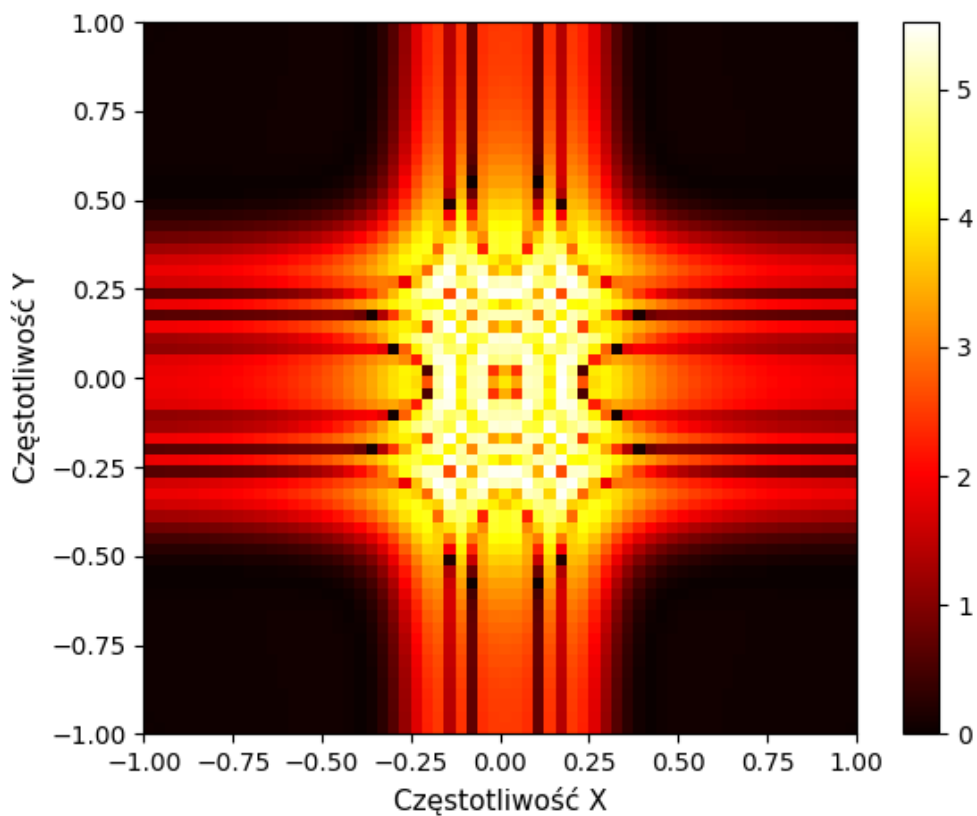
4.2 Analiza danych dwuwymiarowych - FFT

Transformaty Fouriera danych jednowymiarowych koncentrują się na rozkładzie częstotliwościowym sygnałów, takich jak dźwięk, gdzie każdy punkt danych jest funkcją jednej zmiennej, np. czasu. Z kolei przy analizie transformaty dwuwymiarowej, jak w obrazach lub mapach powierzchni, każdy punkt danych jest funkcją dwóch zmiennych, np. pozycji x i y . Transformata 2D bada zmienność przestrzenną [2]. Pozwala na identyfikację i analizę okresowych wzorców i struktur w dwóch wymiarach, takich jak kierunek i skala wzorców teksturalnych.



Rysunek 5: Wejściowy sygnał 2D

Rysunek 5. przedstawia dane wejściowe transformaty Fouriera z wyraźnym wzorcem okręgów, co wskazuje na okresowe zmiany amplitudy w zależności od odległości od centrum. Centralna jaśniejsza część sygnalizuje obszar z silniejszymi wahaniami wartości sygnałów. Symetryczny wzorec przekłada się na wyraźne cechy w domenie częstotliwości (przestrzennej) zauważalne w danych wyjściowych. Przybierają one postać symetrycznych linii wzdłuż obu osi widma amplitudy.



Rysunek 6: Sygnał 2D w domenie przestrzennej

Rysunek 6 przedstawia wynik dwuwymiarowej szybkiej transformaty Fouriera danych wejściowych z rysunku 5., które charakteryzują się regularnymi oscylacjami. Jasne linie krzyżujące się w centrum wskazują dominujące częstotliwości w danych, a zachowana z oryginału symetria względem centrum przedstawia jak te częstotliwości są rozłożone w przestrzeni dwuwymiarowej. Wynik transformaty dostarcza szereg informacji o częstotliwościach występujących w danych oraz o ich intensywności, reprezentowanej przez jasność poszczególnych punktów.

5 Podsumowanie

5.1 Co udało się zbadać?

W pracy przedstawiono podstawową analizę dyskretną transformaty Fouriera i jej zoptymalizowaną wersję, szybką transformatę Fouriera. Zbadano ich zastosowanie w analizie sygnałów, podkreślając znaczenie FFT w efektywnym rozróżnianiu komponentów sygnału oraz identyfikacji i ekstrahowaniu szumów.

Omówiono również zastosowanie FFT do analizy dwuwymiarowych danych, co znajduje zastosowanie w przetwarzaniu obrazów i innych zastosowaniach przestrzennych. Wykazano, jak dwuwymiarowa FFT umożliwia wizualizację i interpretację skomplikowanych wzorców częstotliwościowych, które są niewidoczne w domenie czasu lub przestrzeni.

5.2 Jakie są następne kroki?

Pomimo relatywnie szczegółowego opisu badań, zagadnienie transformat Fouriera zdaje się przypominać studnię bez dna. Po omówieniu większości podstawowych jej aspektów, odpowiedzią na nasuwające się badawcze *quo vadis*, byłoby eksplorowanie zachowania transformat dla danych trój-, bądź nawet czterowymiarowych. Ponadto, istnieje szereg nieomówionych w niniejszej pracy konceptów, zarówno niskopoziomowych, pokroju próbkowania równomiernego, filtrów cyfrowych, splotów, czy uśredniania sygnału, jak i wysokopoziomowych, sugerujących eksplorację transformat Fouriera w dziedzinach innych niż analiza sygnałów.

6 Bibliografia

- [1] Richard G Lyons. *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności Warszawa, 2010.
- [2] Gilbert. *What is meant by 2D fourier transform of an image?* Stack Exchange. <https://physics.stackexchange.com/questions/683831/what-is-meant-by-2d-fourier-transform-of-an-image> 2021. Dostęp: 06.12.2023.