Lect 1: Probability 12/4/25

→ Economics, ML এ probability use হয়

Law and History: authencity, reliability র জন্য probability theory use হয়

↳ Mosteller – Wallace

Father of probability: Fermat, Pascal, Newton

Statistics is the logic of uncertainty.

Sample space: The set of all possible outcomes of an experiment.

Experiment: Flip a coin twice.

HH
HT
TH
TT

all possible outcomes.
Each of them is equally likely.
↳ Assumption: unbiased coin

Event: Event is a subset of the sample space.

↳ কোন কোনটা আলাদা আলাদা face o/p দিচ্ছে? HT, TH

event যার probability compute করতে চাই

Naive defn of probability: $P(A)$

$$P(A) = \frac{\#\ \text{favourable outcomes}}{\#\ \text{total outcomes}}$$

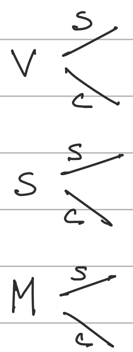
Assumes all outcomes are equally likely.

experiment কিভাবে define করছি এর উপর probability depend করে।

Counting: Multiplication Rule: If one experiment has n_1 outcomes and for each outcome of 1st experiment there are n_2 possible outcomes for 2nd experiment .... n_r possible outcomes for rth experiment, then there are $n_1 n_2 \dots n_r$ overall possible outcomes.

৩ type ice cream → vanilla, mango, strawbarry

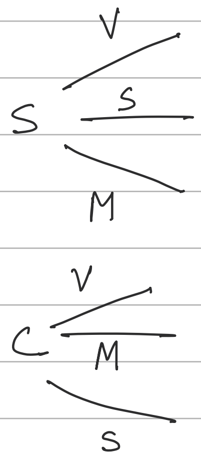
২ভাবে নিতে পারি → cone, soft serve



১ম experiment — flavour — possible outcomes: 3

2nd experiment — possible outcomes 2

Total: $3 \times 2 = 6$ outcomes



$2 \times 3 \rightarrow 6$

এখানে ordering matter করে না।

application of multiplication rule:

Ex: Probability of full house in poker with a 5 card hand. → A

spade, heart, diamond, club — total 52 cards deck

13 13 13 13

$\underbrace{\text{13 cards}}_{\text{suit}}$ → 1 to 10
King, Queen, Jack

Full house: 3 cards of one kind, 2 cards of another kind

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

total outcome: $^{52}C_5$

$$P(A) = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

subexperiments: 1. কোন kind এর চাই।
13 টা option আছে

2. 4টা same kind এর cards থাকে।
3 টা draw করা লাগবে।
$^4C_3$

3. আরেকটা kind লাগবে।
12 টা option আছে। ১ম টা নিতে পারবো না।

4. 4টা থেকে 2টা draw.
$\binom{4}{2}$

16.04.25

Lect 2: Counting and story proofs

Sampling table: Choose K objects out of n

	Order (Y)	Order (N)
Replace (✓)	n^K	$\binom{n+K-1}{K}$
No replace (X)	$\frac{n!}{(n-K)!}$	$\binom{n}{K}$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-K+1)$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-K+1)(n-K) \cdots 1}{(n-K) \cdots 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-K)!}$$

Pick K times from n objects where order doesnot matter.

2 2 1 1
1 2 2 1 } order matter করে না, So ২টাই same.
2 1 1 1

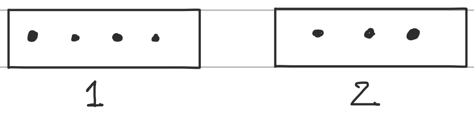
Base cases:

$K=0 \Rightarrow$ কিছুই নিচ্ছি না। একভাবেই করা যায়।

$$\binom{n-1}{0} = 1$$

$$K=1 \Rightarrow \binom{n}{1} = n$$

$$n=2 \Rightarrow \binom{2+K-1}{K} = \binom{K+1}{K} = K+1$$



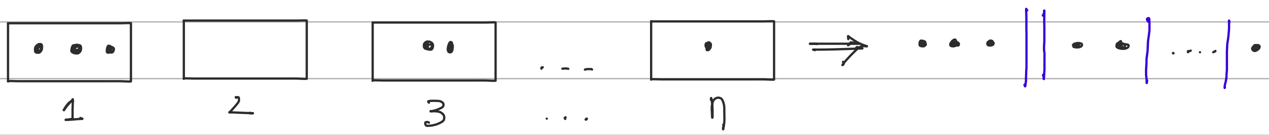
$n=2$
$K=7$

• → indistinguishable

কারন order matter করেনা।

programmer যদি বলে তার করা sample এ 1 আছে 4 বার তাহলে আমরা বলতে পারবো 2 আছে 3 বার। কারন $n=2$ and $K=7$ জানি। আর option আছে 2টাই 1 আর 2।

Equiv: How many ways to put K indistinguishable objects into n distinguishable boxes?



sample draw করতে চাই → dot বসাই
এ যে number টা আসবে সেটার box এ।

boundary / separator দিয়ে বোঝাই → একটা box শেষ পরের box শুরু

dot থাকবে K টা, seperator থাকবে $(n-1)$ সংখ্যক

total element $= (n+K-1)$

$\#\text{dots} = K$

$\#\text{seperators} = n-1$

$$\binom{n+K-1}{K} \leftarrow \frac{(n+K-1)!}{K!\,(n-1)!}$$

⟶ overcount হচ্ছে। repeatation eliminate করা লাগবে।

original problem কে known problem এ one to one mapping করলাম।

Story proofs :

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ basic story

2. $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$ [Pick k people out of n, designate a president]

ex: n জন student থেকে k জনের group চাই।

added condition একজনকে captain হিসাবে designate করবো।

(i) শুরুতে captain choose $\rightarrow n$
বাকি $(n-1)$ জন থেকে $(k-1)$ জন choose $\rightarrow \binom{n-1}{k-1}$

(ii) শুরুতে team choose $\rightarrow \binom{n}{k}$

k জন থেকে একজন captain $\rightarrow k$

3. $\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$ [Vandermonde's identity]

j (fixed করে দিচ্ছি)

male student 0 1 ... k

female student k k-1 ... 0

male student = m
female student = n
choose k

ছোট non-overlapping problem এ divide করছি।

Non-naive def^n: A probability space consists of S and P, where

sample space (all possible outcomes)

probability func.

S is a sample space and P is a function which takes an event $A \subseteq S$ as input and gives $P(A) \in [0, 1]$ such that

1. $P(\phi) = 0$, $P(S) = 1$

$\phi \rightarrow$ এইসব ঘটনা যারা sample space এ নাই।

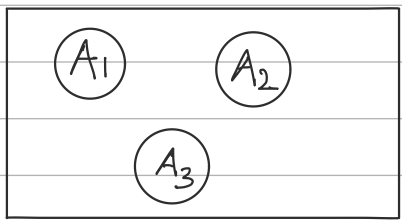
2. $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$; if A_n are disjoint.

1 − 10 পর্যন্ত বল আছে। 1 টা draw করা হলো। ≥ 11 হওয়ার probability = 0

≥ 0 and < 11 $\longrightarrow$ probability = 1

ছক্কায় $\underbrace{2 \text{ or } 3 \text{ or } 4}_{\text{non overlapping event}}$ $\longrightarrow$ probability = individual probability র sum. (disjoint হলে)

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$



S

Lect-03 : Birthday Problem 19.04.25

K → arbitrary number
at least 2 জনের same birthday হবে সেটার probability কত?

মাত্র 23 জন থাকলেই এটা guarrenteed যে at least 2জনের birthday same দিনে।

K people find the probability that two have same birthday.

If $K > 365$, then probability $p = 1$ (Pigeonhole principle)

Let $K \leq 365$, at least 2জনের birthday match করে

complement event: কারোরই match করে না।

$$p(\text{no match}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \ldots (365-K+1)}{365^K}$$

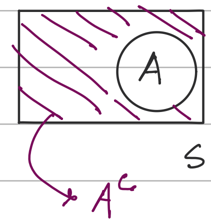
[Assume equally likely, independent birthdays]

twin case বাদ দিয়ে চিন্তা করবো, একজনের birthday র উপর অন্য জনেরটা depend করে না।

$$P(\text{match}) = \begin{cases} 50.7\% & ; K = 23 \\ 97\% & ; K = 50 \\ 99.999\% & ; K = 100 \end{cases}$$

at least 2জনের same

Properties of probability: (1) $P(A^c) = 1 - P(A)$



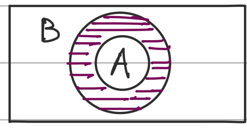
Proof: $P(S) = P(A \cup A^c)$

$1 = P(A) + P(A^c)$

$A, A^c \rightarrow$ non overlapping region

$P(A^c) = 1 - P(A)$

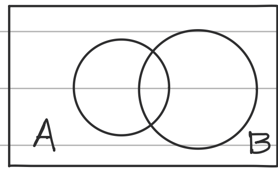
(2) If $A \subseteq B$, $P(A) \leq P(B)$



Proof: $B = A \cup (B \cap A^c)$

$\rightarrow P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \cap A^c)}_{0 \leq P(B \cap A^c) \leq 1} \geq P(A)$

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Proof: $P(A \cup B) = P(A \cup (B \cap A^c))$

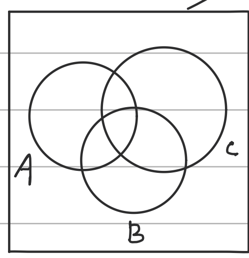
$= P(A) + P(B \cap A^c)$

We need to prove, $P(B) - P(A \cap B) = P(B \cap A^c)$

$\longrightarrow P(B) = \underbrace{P(B \cap A) + P(B \cap A^c)}_{\text{Disjoint union}}$, which is true

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

Principle of inclusion and exclusion.



generalized format:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j)$$

যেন overcounting না হয়।

$i<j \rightarrow A_1 \cap A_2$ আসবে। $A_2 \cap A_1$ আসবেনা।

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \ldots\ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

যতরকম combination আছে তাদের মধ্যে একটাই যেন include হয়।

n জোড় হলে → (−ve)
n বিজোড় হলে → (+ve)

তাই $(-1)^{n+1}$ দিবো

deMont Mort's problem (1713) : matching problem.

n সংখ্যক numbering করা card.
initially sort করা।

shuffle করে i তম position এ i number এর card পাওয়ার probability = ?
at least একটা card original position এ থাকার probability

n cards. $1, 2, 3 \ldots n$. Let A_j be the event that j^{th} card matches.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

$$P(A_j) = \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2.1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots 2.1}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

j তম card এর জন্য choice ১টাই (original position এই যাওয়া লাগবে)
২য় card এর জন্য choice $(n-1)$
৩য় $(n-2)$

⋮ ⋮

last 1

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

১ম and ২য় card তাদের জায়গায় আছে। বাকিগুলোতে no restrictions.
choice ১টাই
possible choice 1টাই

$$P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_K) = \frac{(n-K)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-K+1)}$$

Lect-04 : 23.04.25

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \;\ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

initially
(card গুলো sorted)

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

random shuffle

3	1	5	4	2
1	2	3	4	5

↳ 4 নং position এর card টা position এর সাথে match করছে

Let A_j be the event that jth card matches.

$$P(A_j) = \frac{1\cdot(n-1)(n-2)\ldots 1}{n(n-1)(n-2)\ldots 1} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$j = 0, 1, 2 \ldots\ldots \longrightarrow P(A_j) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

(A_1 → i, A_2 → j) যেকোনো i, j এর জন্যই true হবে।

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_k) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n \cdot \frac{1}{n} - \overbrace{\frac{n(n-1)}{2}}^{i,j \text{ choose} \to {}^nC_2} \frac{1}{n(n-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \cdots$$

total term n সংখ্যক।
প্রতিটার probability $\frac{1}{n}$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

$$\approx 1 - e^{-1}$$

$$\left[e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots\right]$$

$$\rightarrow 1 - e^{-1} = \underbrace{\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots}_{\text{infinite series}}$$

(but খুব দ্রুত converge করে)

অনেক গুলো event এর মধ্যে অন্তত একটা ঘটবে।

ex: at least একটা card original position এ

complement event: কোনোটাই তার original position এ নাই

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots A_n^c) \approx \frac{1}{e} = 0.367$$

Hash table এ ২টো key same জায়গায় যাবেনা তার probability $\frac{1}{e}$

Fast matrix multiplication $\tilde{O}^{(n+\frac{1}{2})}$

Conditional probability:

Defn: Events A, B are independent if $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

A, B, C are independent if $P(\underbrace{A, B, C}_{A \cap B \cap C}) = P(A)\, P(B)\, P(C)$,

এটাই enough না। pairwise independence ও test করা লাগবে।

$P(A, B) = P(A)\, P(B)$
$P(B, C) = P(B)\, P(C)$
$P(C, A) = P(C)\, P(A)$

Newton – Pepys problem (1967):

Have fair dice, which is more likely?

(A) at least 1 six with 6 dice
(B) at least 2 sixes with 12 dice
(C) at least 3 sixes with 18 dice

(independently rolled হচ্ছে)

complement নিয়ে কাজ করা easier.

(A) _ _ _ _ _ _

complement → no 6

6টা probability individually বের করে multiply.

$5/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6$

$\therefore P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.665$

(B) complement : একটা 6 অথবা no 6

$$P(B) = 1 - \left\{ \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{12}}_{\text{no } 6} + 12 \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{11}}_{1\text{টা } 6} \right\}$$

12টা position এর যেকোনোটায় 6 আসতে পারে।

$= 0.619$

$$P(C) = 1 - \underbrace{\sum_{K=0}^{2} \binom{18}{K} \left(\frac{1}{6}\right)^K \left(\frac{5}{6}\right)^{18-K}}_{0,1 \text{ or } 2 \text{ sixes} \longrightarrow \text{complement event of } C}$$

$= 0.597$

Conditional Probability :

coin দিয়ে বলা হলো biased নাকি fair? → verdict দিবো না but bias/fair হবার probability বের করবো

fair ধরে নিলে probability $\frac{1}{2}$

How should we update prob./belief/uncertainty based on new evidence?

Defn: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$

event B ঘটে গেলে A ঘটার probability

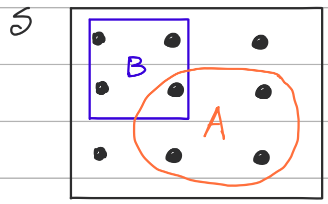
B ঘটে গিয়েছে so non-zero probability.

impossible event, $P(B) = 0$

Lect-05 : Conditioning cont. 26.04.25

<u>Defn:</u> $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$

Intuition :



• → outcomes → $\frac{1}{9}$ probability assigned
(equally likely)
↪ for the sake of simplicity

A, B → events

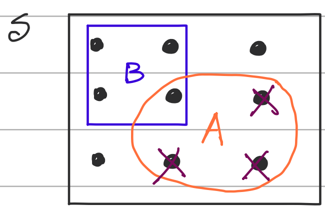
from figure, $P(A) = \frac{4}{9}$

$P(B) = \frac{4}{9}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B event ঘটে গিয়েছে. so rectangle এর বাইরের outcome গুলোর probability এখন 0। sample space restricted.
↪ (B)

B এর outcome গুলোর probability এখন $\frac{1}{4}$



$$\frac{1}{4} \times \underbrace{\frac{4}{9}}_{P(B)} = \frac{1}{9}$$

probability এখন P(B) দিয়ে normalize করবো

$\underline{\text{Th}^m 1}$: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ B free variable

$= P(B|A)\,P(A)$ A free variable

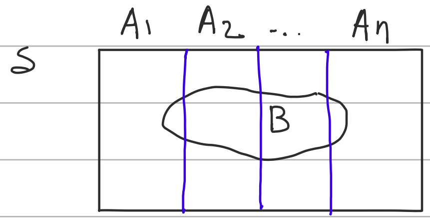
$\underline{\text{Th}^m 2}$: $P(A_1, A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1, A_2) \ldots\ldots$

$P(A_n|A_1, A_2 \cdots A_{n-1})$

কোন variable free রাখবো? → problem দেখে decide

$\underline{\text{Th}^m 3}$: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$ [Bayes' rule]

Thinking Conditionally, how to solve a problem



complex event B এর total probability বের করা target

sample space কে n−1 সংখ্যক vertical line দিয়ে n সংখ্যক ভাগ করলাম, mutually exclusive partition (no overlapping) and sum করলে পুরো sample space টা পাবো।

Let $A_1, A_2 \cdots A_n$ be a partition of S

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots\ldots + P(B \cap A_n)$$

$$= P(B|A_1)\,P(A_1) + P(B|A_2)\,P(A_2) + \ldots\ldots + P(B|A_n)\,P(A_n)$$

Law of total probability

Ex: Get random 2-card hand from a standard deck. (order imp. না)

Find P(both aces | have ace) ; P (both aces | have ace of spades)

$P(\text{both aces} \mid \underline{\text{have ace}})$

অন্তত একটা ace আছে

$$= \frac{P(\text{both aces}, \cancel{\text{have ace}})}{P(\text{have ace})}$$ → dominated

$\underline{\text{both aces}}$, have ace → ২টা event

super event   sub

p (both ace) বের করলেই হবে

$$P(\text{both aces}) = \binom{4}{2} \Big/ \binom{52}{2}$$

$$P(\text{have ace}) = 1 - \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}}$$ } → non ace cards গুলো থেকে choose

$$P(\text{both aces} \mid \text{have ace}) = \frac{\binom{4}{2} \Big/ \binom{52}{2}}{1 - \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}}}$$

$$= \frac{1}{33} = 3.03\%$$

P (both aces | have ace of spades)

$$= \frac{P\text{ (both aces, have ace of spades)}}{P\text{(have ace of spades)}}$$

$$= \frac{3}{51} = \frac{1}{17} = 5.88\%$$

probability almost double

(আগেরটার তুলনায়)

52 থেকে 2টা draw, একটা ace of spades

$\boxed{\text{As}}$ $\boxed{}$

total possible → 51

ace আছে আরো 3টা

favourable choice

→ কারণ extra info add হওয়া।

2nd problem এ additional info থাকায় confidence আগের তুলনায় বেশি হবে।

Disease affects 1% population →

Suppose test is 95% accurate.

disease যদি হয়ে থাকে 95% case এ result positive
5% case এ negative
না হয়ে থাকে 5% case এ positive
95% case এ negative

D : Patient has disease
T : Tests positive

$$P(D) = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$P(D^c) = 0.99$$

$$P(T|D) = 0.95 = P(T^c|D^c)$$

$$P(T^c|D) = 0.05 = P(T|D^c)$$

$$P(D|T) = ?$$

$$P(D|T) = \frac{P(D\cap T)}{P(T)} = \frac{P(D\cap T)}{\underbrace{P(T\cap D) + P(T\cap D^c)}_{\text{law of total probability}}}$$

$$= \frac{P(T|D)\cdot P(D)}{P(T|D)P(D) + P(T|D^c)P(D^c)}$$

$$= \frac{0.95\times 0.01}{0.95\times 0.01 + 0.05\times 0.99}$$

$$= 0.16$$

1000 জন population → 10জন affected
তাদের test করলে 9জন positive
1 জন negative

990 জন unaffected
50জনের test positive আসবে।
wrong diagnosis

→ confidence low

because test যতই accurate হোক population ও consideration এ আনা লাগবে।

Lect-06 Monty Hall Problem 28.04.25

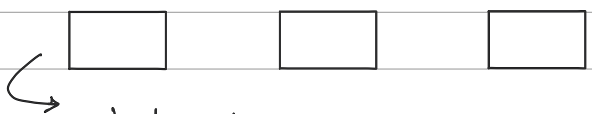
Defn: Events A and B are conditionally independent given C if

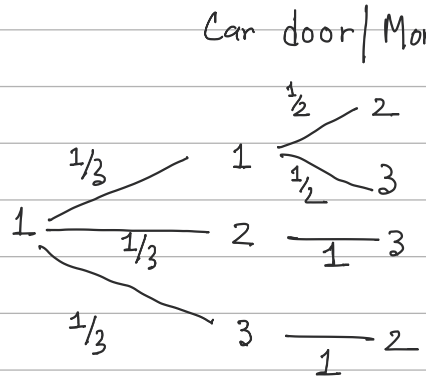
$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)\, P(B \mid C)$$

C event ঘটে গিয়েছে তার উপর base করে A, B এর independence check.

3টা door। 2টার পিছনে ছাগল আছে। একটার পিছনে car আছে। প্রথমে একটা door pick করবো। Host সেটা বাদ দিয়ে অন্য একটা door খুলবে যেটার পিছনে ছাগল আছে। এরপর host choice দিবে initial choose করা door change করতে চাই কিনা।

1 door has car, other 2 has goats, Monty knows which is which. After picking a door, Monty always opens a goat door. If he has a choice which door to open, he opens with equal probability. Should we switch



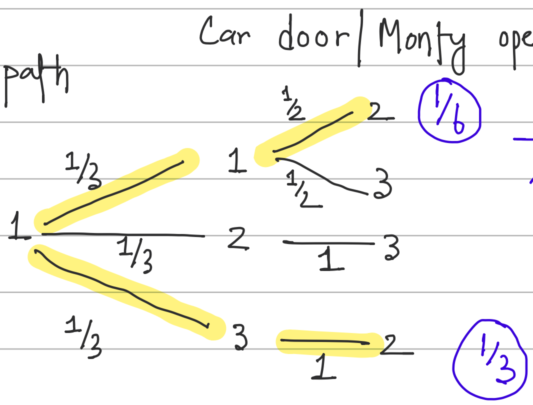


1 নং ই car door। Monty 2, 3 যেকোনোটা equal probability তে pick করতে পারে।

2 যদি car door হয়। Monty কে অবশ্যই 3 নং door open করা লাগবে।

$$P(\text{success of switching} \mid \text{Monty opens } 2) = \frac{2}{3}$$

এই দুই path ছাড়া অন্য path choose করতে পারবো না।



$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ কে এমনভাবে renormalize করবো যেন এদের probability র যোগফল 1 হয়।

১ম case এ switch করলে success পাবো না।

2nd case এ switch করলে success পাবো।

$$P(\text{success of switching} \mid \text{Monty opens } 2) = \frac{2}{3}$$

S: success (assuming switch)

যে জিনিসটা জানতে চাই তার একটা event তৈরি করে সেটার উপর conditioning করবো।

D_j : Door j has car, $j \in \{1, 2, 3\}$

$$P(S) = P(S \cap D_1) + P(S \cap D_2) + P(S \cap D_3)$$

$$= P(S|D_1)P(D_1) + P(S|D_2)P(D_2) + P(S|D_3)P(D_3)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

originally pick করলাম 1। 2এ car আছে। Monty 3নং open করবে। switch করলে 2এ যাবো। success এর probability 1.

door গুলো identical। তাই conditional/ unconditional 2 case এই same probability পাচ্ছি।

Simpson's paradox:

২জন surgeon, multiple surgery

individual surgery তে প্রথম জন ২য় জনের থেকে better.

overall surgery তে ১ম জন কি সবসময় better হবে?

	Hibbert heart	Hibbert bandage		Nick heart	Nick bandage
S	70	10	S	0	81
F	20	0	F	10	9
	77%	100%		0%	90%

overall success rate $= \frac{80}{100}$

$= 80\%$

overall success rate $= \frac{81}{100}$

$= 81\%$

individual probability better হলেও
total probability " না ও হতে পারে

A: Successful surgery

B: treated by Dr. Nick

B^c: treated by Dr. Hibbert

C: heart surgery

C^c: bandage

$P(A|B,C) < P(A|B^c,C)$

$P(A|B,C^c) < P(A|B^c,C^c)$

but $P(A|B) > P(A|B^c)$

$P(A|B,C) \rightarrow$ Dr. Nick heart surgery করেছেন এক্ষেত্রে success হওয়ার chance.

$$P(A|B) = P(C|B)\, P(A|B,C) + P(C^c|B)\, P(A|B,C^c)$$

Law of total probability induce করে C কে incorporate করছি।

$$P(A|B) = P(C|B)\, \underbrace{P(A|B,C)}_{< P(A|B^c,C)} + P(C^c|B)\, \underbrace{P(A|B,C^c)}_{< P(A|B^c,C^c)}$$

✓ CT-syllabus

counting smartly

story proofs

conditioning (imp.)

30.04.25

Lect-07: Gambler's Ruin and Random variables

২জন gambler আছে। একটা coin toss করা হবে। head পড়লে gambler A ; B এর থেকে একটা coin নিয়ে নিবে।

initially

A	B
10	10

head পড়লো →

A	B
11	9

tail পড়লো →

A	B
9	11

independent coin toss

→ biased/unbiased হতে পারে

A, B কেউ একজন bankrupt হলে, game ends.

Gambler's Ruin: Two gamblers, A & B, sequence of rounds, bet 1\$ per round

$$p = P(A \text{ winning a round})$$

$$q = P(B \text{ winning a round}) = 1-p$$

Find probability that A wins the game (B is bankrupt) assuming A starts with i\$, B with $(N-i)$\$

total coin always $= N$

২জনের cumulative sum → fixed number হবে।

A হেরে গেলে →

A এর coin $i-1$

B এর coin $N-i+1$

visually interpret করতে number line form করবো

$0 \quad 1 \quad 2 \cdots (i-1) \quad i \quad (i+1) \cdots (N-1) \quad N$

→ যখন game শুরু হয় এখানে আছি

game এর state কে number line এর উপরে point চিন্তা করবো।

game end হবে যদি 0 বা N এ পৌঁছাই।

random walk point গুলোকে move করছি

path: A — B — C
তিনটা node 2টা edge

edge repeat হলোনা

A – B, B – C → A থেকে C তে যেতে এটা path

walk: path এর general version যেখানে একটা edge repeat করতে পারি।

probability র উপর base করে movement গুলো করছি + এখানে randomness associated.

Random walk: number line → 1D random walk

p = Probability of moving right

$1-p$ = Probability of moving left

absorbing state, 0 or N → ওসব state এ পৌঁছালে move করার সুযোগ নেই

$P_i = P(A \text{ winning the game} \mid A \text{ starts with } i\$)$

একজন observer 1ম move হওয়ার পরে আসলো।

সে দেখবে game আছে $(i-1)$ বা $(i+1)$ এ।

$P_i = \boxed{p P_{i+1} + \boxed{(1-p)}^{\,q} P_{i-1}}$; $1 \le i \le N-1$; $\boxed{P_0 = 0 \;;\; P_N = 1}$

p: i থেকে i+1 এ move করা probability

→ Law of total probability

A Bankrupt
B win

boundary condition

B bankrupt
A win

recursive eqn or recurrances

P_{i-1} → observer এর কাছে A এর জেতার সম্ভাবনা। যদি game টা left এ move করে।

solve করার technique → differential eqn

difference eqn: differential eqn এর discrete form

$P_i = x^i$ is the soln of the following recurrance relation

$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$ linear eqn

$x^i = p\,x^{i+1} + q\,x^{i-1}$

$\rightarrow px^2 - x + q = 0$ (x^{i+1} দিয়ে divide and rearrange)

$\rightarrow x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4pq}}{2 \cdot p}$

$= \dfrac{1 \pm (2p-1)}{2p}$

$1 - 4pq = 1 - 4p(1-p)$
$= 1 - 4p + 4p^2$
$= (2p-1)^2$

$= 1, \ \dfrac{1-p}{p}$

$= 1, \ q/p$

multiple soln আছে। So actual soln হবে এই দুই soln এর linear combination.

$P_i = A\,1^i + B\,(q/p)^i$

boundary condition plug in:

$i=0 \Rightarrow$

$P_0 = A \cdot 1^0 + B(q/p)^0$

$\rightarrow 0 = A + B$

$\rightarrow B = -A$

$i = N \Rightarrow$

$P_N = A \cdot 1^N + B(q/p)^N$

$1 = A + (-A)(q/p)^N$

$\rightarrow A(1-(q/p)^N) = 1$

$\rightarrow A = \dfrac{1}{1-(q/p)^N}$

$$P_i = A - A\left(\frac{q}{p}\right)^i$$

$$= A\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^i\right)$$

$$= \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}$$

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, & p \neq q \\ i/N, & p = q \end{cases}$$

$p = q \Rightarrow \frac{0}{0}$ so limiting value নিবো

$$P_i = \frac{1-y^i}{1-y^N} \qquad y = q/p$$

$$\lim_{y \to 1} \frac{1-y^i}{1-y^N} = \frac{-i\,y^{i-1}}{-N\,y^{N-1}}$$

$$= i/N$$

say, initially A 60 \$, B 40 \$, $N = 100\$$

unbiased coin (50-50 chance)

Probability $= i/N = 60\%$

Let, $i = N-i$; coin unfair $P(H) = 0.49$ (সামান্য biased)

২জন gambler ই সমান amount নিয়ে খেলা শুরু করলো

$N = 20$

$\Rightarrow P_i = 0.4$

$N = 100$

$\Rightarrow P_i = 0.12$

$N = 200$

$\Rightarrow P_i = 0.02$

So coin fair হওয়া বড় একটা factor.

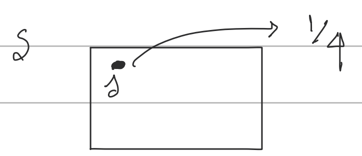
$$\underbrace{i/N}_{\text{A জিতবে}} + \underbrace{N-i/N}_{\text{B জিতবে}} = 1$$

fair coin হলে N যত বড়ই হোক না কেন either A জিতবে বা B জিতবে তার probability 1 (probability that game finishes)। কেউই জিতবে না and game টা চলতেই থাকবে তার probability = 0

Random Variable:

Q. What is a random variable? → multiple value assume করতে পারবে and প্রতিটার সাথে একটা probability assigned থাকবে।

→ It's a function that maps the sample space S to $\mathbb{R}$.



$P(X = s) = \frac{1}{4}$ → X হলো random variable. Event এর outcome কে represent করছি।

$s \to$ event / outcome

ex একটা coin এর এক পিঠে 1 অন্য পিঠে 0। Toss করলে কোন value উপর পিঠে দেখতে পারো। random variable declare করলাম। কোনটা আসবে তার উপর একটা probability assign করলাম।

deterministic variable → value fixed. $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\rightarrow x = 1$

variable এর মান হলো deterministic

Think it of as a numerical summary of an aspect of the experiment.

Defn (Bernoulli): A r.v. X is said to have a Bernoulli distribution if X has two possible values, 0 and 1, and $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p=q$

↳ event $\{s : X(s) = 1\}$

03.05.25

lect-08: Random variables and their Distributions

Binomial Distribution $\text{Bin}(n,p)$. $X \sim \text{Bin}(n,p)$

↳ random variable X binomial distribution follow করে

Random variable কে 3 উপায়ে প্রকাশ করা যায়।

(1) Story: Bernoulli trial ex: single coin toss

n সংখ্যক independent Bernoulli trial করবো। কতবার success/head পাবো → random variable.

X is # successes in n independent Bern(p) trials.

(2) Sum of indicator R.V.s:

indicator random variable → X কে decompose করবো smallest unit এ। এই smallest unit গুলোই indicator random variable

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \qquad X_j = \begin{cases} 1, & \text{if } j\text{th trial is success} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

তখন যতবার head পড়বে sum (+1) হবে।

Indicator variable কিছু $cond^n$ মেনে চলে →

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ are iid (independent & identical distribution) r.v.s

↳ distribution same

(3) PMF (Probability Mass Function) use করে →

T T T H H H H

coin toss 7 বার

$\binom{7}{4} p^4 q^3$

in general:

n সংখ্যক trial, K বার Heads পড়বে → $\binom{n}{K} p^K q^{n-K}$

$$P(X=K) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K} \; ; \; K \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

PMF এ random variable একটা fixed value নিবে।

CDF (Cumulative Distribution Function)

$X \leq x$ is an event then $F(x) = P(X \leq x)$ is the CDF of X.

discrete function এ → PMF

continuous distribution এ → CDF বেশি helpful

property 1: $\binom{n}{K} p^K q^{n-K}$ → always positive

$\boxed{P_j \geq 0}$

so property 1 follow করে।

properties:

Discrete: All possible values of X are $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

$$P_j = P(X = a_j) \; \forall j \; ; \; P_j \geq 0 \; , \; \sum_{j=1}^{n} P_j = 1$$

proved already

$$\sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} p^K q^{n-K} = (p+q)^n = 1^n = 1 \quad \text{[Binomial Thm]}$$

$X \sim Bin(n, p)$, $Y \sim Bin(m, p)$

difference : # trials n for X
m for Y

$X+Y \rightarrow$ নতুন random variable generate হবে।

এটা কোন distribution follow করে and parameters কি হবে?

$\rightarrow X+Y \sim Bin(m+n, p)$

(1) # successes in n independent Bern (p) trials and then # successes in m independent Bern (p) trials $\Rightarrow Bin(m+n, p)$

story $\rightarrow$ # successes in fixed number of trials

(২) $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$

$$X+Y = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j \Rightarrow Bin(m+n, p)$$

(3) $$P(X+Y=K) = \sum_{j=0}^{K} P(X+Y=K \mid X=j)\, P(X=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{K} P(Y=K-j \mid X=j)\, P(X=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{K} P(Y=K-j)\, P(X=j)$$

$X, Y \rightarrow$ dependency নাই।

A, B independent হলে
$P(A|B) = P(A)$ এর মতো হবে

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j} p^{k-j} q^{m-k+j} \binom{n}{j} p^{j} q^{n-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \underbrace{p^{k} q^{m+n-k}}_{\text{j এর কোনো term নেই}} \binom{m}{k-j}\binom{n}{j}$$

$$= p^{k} q^{m+n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j}\binom{n}{j}$$

$$= \binom{m+n}{k} p^{k} q^{m+n-k} \rightarrow \text{Bin}(m+n, p)$$

05.05.25

Lect-09:

Hypergeometric random variable and its distribution.

Ex: 5 card hand, find the distribution of # aces. X = # aces

card এর order করে না। # aces হতে পারে 0, 1, 2, 3, 4। বাকিগুলোর probability 0.
5.6....

$$P(X=k) = 0 \quad \text{if} \quad k \notin \{0,1,2,3,4\}$$

$$P(X=k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{5-k}}{\binom{52}{5}}, \quad \forall k \in \{0,1,2,3,4\}$$

numerator এ combination so negative হতে পারবেনা। property 1)

Have b black marbles, w white marbles. Pick random sample of n marbles.

Find the distribution of # white marbles in sample.

Let, X = # white marbles

$$P(X=K) = \frac{\binom{w}{K}\binom{b}{n-K}}{\binom{b+w}{n}} \; ; \quad \sum P(X=K) = \frac{1}{\binom{b+w}{n}} \sum_{K=0}^{w} \binom{w}{K}\binom{b}{n-K}$$

K driver variable (Vandermonde's identity)

hypergeometric distribution

$$= \frac{1}{\binom{b+w}{n}} \times \binom{b+w}{n} = 1$$

(property 2)

Independence of R.V.s:

X, Y are independent when

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)\, P(Y \le y) \; ; \quad \text{continuous}$$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y) \quad \text{discrete}$$

Average: 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 5 → একটা program run এ এই o/p গুলো পেলাম

$$\frac{5}{8} \times 1 + \frac{2}{8} \times 3 + \frac{1}{8} \times 5$$

Expectation of a random variable X: $E(X) = \sum_x x\, P(X = x)$

sum এ x এর যে valid value সেগুলো চিন্তা করবো। বাকিগুলোর contribution 0। যেমন: 5টা ace পাওয়ার probability.

Expectation of Bernoulli random varible :

$X \sim \text{Bern}(p)$ success rate p, failure rate q

$$E(X) = 1\, P(X=1) + 0\, P(X=0) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

indicator random variable, $X = \begin{cases} 1, & \text{if } A \text{ occurs} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

$E(X) = p = P(A)$ → fundamental bridge

probability কে Expectation
Expectation কে probability তে convert করতে পারি

Expectation of Binomial random variable :

$X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$E(X) = \sum_{K=0}^{n} K \binom{n}{K} p^K q^{n-K}$$

$$= \sum_{K=0}^{n} n \binom{n-1}{K-1} p^K q^{n-K}$$

$$\sum_{K=0}^{n} K \binom{n}{K} = \sum_{K=0}^{n} n \binom{n-1}{K-1}$$

$$= np \sum_{K=0}^{n} \binom{n-1}{K-1} p^{K-1} q^{n-K}$$

$K=0$ মানে $(n-1)$ থেকে -1 জনকে pick করছি। possible না। 0 contribute করবে।

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j} q^{n-1-j} \qquad j = k-1 \Rightarrow k = j+1$$

$$= np (p+q)^{n-1} = np \qquad \because p+q = 1$$

Linearity :

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ even if X, Y are dependent

$E(cX) = c\,E(X)$

$X \sim \text{Bin}(n, p)$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \cdots + E(X_n)$$
$$= p + p + \cdots + p$$
$$= np$$

Ex: 5 card hand, $X = \#$ aces

Let X_j be an indicator random variable of j^{th} card being an ace, $1 \le j \le 5$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_5) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_5)$$
$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} + \cdots + \frac{4}{52} = \frac{5}{13}$$

১ম card ace হলে $X_1 = 1$
আগের card ace ছিল কিনা সেটার উপর 2nd card ace কিনা dependent. But expectation এ কোনো effect থাকবেনা। dependent হলেও same expectation.

Lect : 10 07.05.25

Geometric distribution(p) :

story: অনেকগুলো independent Bernoulli trial নেওয়া হবে যতক্ষণ পর্যন্ত না success হচ্ছে তার আগে পর্যন্ত যতগুলো failure হচ্ছে — random variable

Independent Bern(p) trials # trials until the first success → $X \sim Geom(p)$

H, TH, TTH, TTTH

$p \quad qp \quad q^2p \quad q^3p$

১ম বারই head পড়লো → H (done)

no failure

random variable এ 0 assign.

TH → r.v. = 1

TTH → r.v = 2

TTTH → r.v. = 3

PMF : $P(X=K) = q^K p$; $K \in \{0, 1, \dots\}$

non-negative &

total probability 1 হওয়া লাগবে

$$\sum_{K=0}^{\infty} q^K p = 1$$

K → driver variable

infinity পর্যন্ত long হতে পারে

$$\sum_{K=0}^{\infty} q^K p = p \times \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{K=0}^{\infty} q^K = \frac{1}{1-q}$$

$$= p \times \frac{1}{p}$$

$$= 1$$ (valid PMF)

$$E(X) = \sum_{K=0}^{\infty} K q^K p = p \sum_{K=0}^{\infty} K q^K$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} q^K = \frac{1}{1-q}$$

differentiating w.r.t. K

$$\sum_{K=0}^{\infty} K q^{K-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} K q^{K} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Algebraic manipulation

$$E(X) = \sum_{K=0}^{\infty} K q^K p = p \sum_{K=0}^{\infty} K q^K = p \times \frac{q}{p^2} = \frac{q}{p}$$

Story proof: coin flip

let, $c = E(X)$

all possible outcome কে ২ ভাগে ভাগ করবো।

(1) 1st এ head — initial টা থাকবে শুধু
(2) 1st এ T → rest of every thing

১ম বার ই success, random variable = 0

$$c = 0 \cdot p + \boxed{}$$

rest of everything এর জন্য → $c = q(1+c)$

→ (শুরুতে failure থাকবেই)
যদি ১ম flip এর পর observer আসে
সে দেখবে original যে outcome গুলো
তার মতোই

TH, TTH, TTTH → H, TH, TTH . . .
observer দেখবে ।

so expection আবার c হবে

$\therefore c = 0 \cdot p + q(1+c)$

$c = \frac{q}{p}$

$X \sim FS(p)$ # trials until first success

let $Y = X - 1 \Rightarrow Y \sim Geom(p)$

$$E(X) = E(Y) + 1$$

$$= \frac{q}{p} + 1 = \frac{1}{p}$$

coin flip

1% H

99% T

on average success পেতে 100 বার flip করা লাগবে।
1 বার success পেতে

1/4 হলে 4 বার করা লাগবে।

Negative Binomial Distribution: (extension of geometric distribution)

Parameters are → r & p

Story: অনেকগুলো independent Bernoulli trial success rate p
যতক্ষণ পর্যন্ত না একটা নির্দিষ্ট সংখ্যক success পাবো ততক্ষণ
flip করতেই থাকবো।

Independent Bern(p) trials, # failures before the r^{th} success

geometric distribution এটার একটা special case যখন $r=1$

1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 r successes, n failures $= p^r q^n$

$1 \rightarrow H$ ↳ $p^5 q^{11}$

$0 \rightarrow T$

last এ অবশ্যই success থাকা লাগবে। তাহলে এর আগে $(r-1)$ সংখ্যক success থাকবে।
∴ n সংখ্যক failure and $(r-1)$ সংখ্যক success এর যেকোনো combination নিতে পারি।

target 5 বার success করা।

PMF: $P(X=n) = \binom{n+r-1}{r-1} p^r q^n$

$n \in \{0, 1, 2 \ldots\}$

sum করলে 1 পাবো।

random variable দিয়ে decomposition গুলো geomeric distribution follow করবে।

1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1

ভাগ হবে → r সংখ্যক because until success partition নিচ্ছি

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_r)$; X_j is # failures between $(j-1)$th and jth success.

$X_j \sim Geom(p)$

$= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_r)$

$= \frac{q}{p} + \frac{q}{p} + \dots + \frac{q}{p} = \frac{rq}{p}$

Ex: 1, ... n randomly permute and find the local maxima

Random permutation of $1, 2, \dots n$; $n \geq 2$

Find the expected number of local maxima, 3 2 1 4 7 6 5

একটা number তার neighbour দের থেকে বড় হলে → local maxima

$\left.\begin{matrix} 3 \\ 7 \end{matrix}\right\}$ local maxima

I be the # local maxima

$E(I) = E(I_1 + I_2 + \dots + I_n)$; I_j be the i.r.v of position j having a local maxima, $1 \leq j \leq n$

I_1 → 1st position এ যে number টা সেটা যদি local maxima হয় তাহলে 1 হবে।

$E(I) = E(I_1) + E(I_2) + \dots + E(I_n)$

boundary case 2টা। ① 1st টার left এ কিছু নাই

② last টার right এ " "

$$E(I) = E(I_1) + E(I_2) + \dots\dots + E(I_n)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(n-2) + \frac{1}{2}$$

$a > b$

$a < b$

intermediate জায়গাগুলোতে 3! এর মাঝে ২টা case এ মাঝের টা বড় হবে

so $2/3! = 1/3$

intermediate জায়গা আছে n-2 টা।

St. petersburg paradox: coin এর H → $\frac{1}{2}$

until the heads যতগুলো flip $2^{\text{ততসংখ্যক}}$ \$ পাবো

5 বার flip তারপর H → 6 টা flip total

X is # coin flips until you land H. Get $\$2^x$ Find $E(2^x)$; $Y = 2^x \Rightarrow E(Y)$.

Lec : 11 The Poisson Distribution 12.05.25

St. Petersburg Paradox : $E(Y) = \sum_{K=1}^{\infty} 2^K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^K$

K সংখ্যক flip
১ম তে K−1 সংখ্যক tails $(1/2)^{K-1}$
last এ head
so $(1/2)^K$ (multiplication rule)

$$= \sum_{K=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Gambling house এর কাছে যদি $2^{30} \approx 1B$ \$ থাকে তাহলে এই game এ কত invest করা উচিত?

$$\sum_{K=1}^{30} 2^K \cdot \frac{1}{2^K} = \sum_{K=1}^{30} 1 = 30$$

lottery/gambling এ কত invest? overall যত expect করি তার সমান বা তার থেকে একটু কম।

Poisson distribution PMF : $P(X=K) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^K}{K!}$; $K \in \{0, 1, 2 \ldots \infty\}$; non-negative number

λ is the rate parameter, $\lambda > 0$

validity check : whether PMF or not

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^K}{K!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^K}{K!}}_{\text{Taylor's expansion of } (e^{\lambda})}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$$E(X) = \sum_{K=0}^{\infty} K \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^K}{(K-1)!}$$

$K=0 \longrightarrow$ denominator $(-1)! \longrightarrow$ invalid

discard করে ফেলবো

$$= e^{-\lambda} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\lambda^K}{(K-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\lambda^{K-1}}{(K-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{J=0}^{\infty} \frac{\lambda^J}{J!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda}$$

$$= \lambda$$

rate parameter average/expectation এর সমান

Poisson distribution $\longrightarrow$ mostly used.

Often used for applications for counting # successes where there are a large number of trials and each with small probability of success.

ex: (1) # emails in an hour $\longrightarrow$ specific person থেকে আসার chance কম। But যাদের থেকে email পেতে পারি সেই set টা large

(2) # earthquakes in a year in a region. $\longrightarrow$ কোনো নির্দিষ্ট second এ হওয়ার chance কম। কিন্তু time এর set অনেক বড়।

Poisson paradigm:

Events $A_1, A_2, \dots, A_n$; $P(A_j) = p_j$, n large, p_j's small.

Events are independent or dependent then # A_j's that occur is approx $\sum_{j=1}^{n} p_j$

$\left.\begin{array}{l}\text{একজন person থেকে mail পেলে reply} \\ \text{then আবার সেই person mail এর reply}\end{array}\right\}$ dependent

যদি dependency না থাকে and প্রতিটা event এর success probability same হয়

$\longrightarrow$ binomial distribution follow করছে

binomial distribution $\longrightarrow$ হাজার হাজার বার biased coin ($1/1000$) flip

সেটা poisson দিয়ে approximate করতে পারি।

$X \sim \text{Bin}(n, p)$, Let $n \to \infty$, $p \to 0$, $\lambda = np \longrightarrow p = \frac{\lambda}{n}$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \left(1-\lambda/n\right)^n \left(1-\lambda/n\right)^{-k}$$

Let $\begin{cases} n = 1M \\ k = 6/7 \end{cases}$ $\quad n-k \approx n$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n^k}{n^k} \cdot e^{-\lambda} \cdot 1$$

limiting case এ

$k =$ finite value

$$\left(1 - \frac{\text{smth}}{\text{large value}}\right)^{\text{finite value}} = (1-0)^{\text{finite value}} = 1$$

আবার, $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad \text{(Taking limits)}$$

<u>Ex:</u> Have n people, find approximate probability of 3 people having same birthday (n sufficiently large)

$\lambda = ? \rightarrow$ expectation বের করতে হবে

$\binom{n}{3}$ triplets of people, indicator random variable. I_{ijk}; $i<j<k$

প্রতিটা triplet এর জন্য

$(1, 2, 3)$ একটা combination ই যেন আছে।

b. day match করলে $I = 1$

$$E(\#\text{ triplet matches}) = \binom{n}{3} \, 1 \cdot \frac{1}{365} \cdot \frac{1}{365}$$

← poisson distribution এর average

১ম জনের b. day যেকোনো একদিন assign করে দিলাম

2nd জনের b. day ১ম জনের সাথে match করার probability

৩য় জনের জন্য।

$$= \binom{n}{3} \Big/ 365^2$$

$X = \#$ triplet matches , $\lambda = \binom{n}{3} / 365^2$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda}$$

at least একটা triplet এর b.day same দিনে

$n = 10$

$\binom{n}{3} = \underline{\underline{120}}$

sufficiently large

n যত fast rise করবে $\binom{n}{3}$ তার চেয়েও fast rise করবে।

$\hookrightarrow O(3)$

$n(n-1)(n-2)$

14/05/24

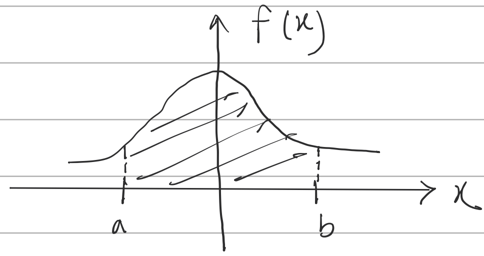
Lect-12: Continuous distribution, Uniform distribution

Discrete (X)	Continuous (X)	PDF (Probability Density Function)
PMF: $P(X=x)$	PDF $f_X(x)$ $[P(X=x)=0]$	Def^n: Random variable X has
CDF: $F(x)=P(X\le x)$	CDF $F_X(x) = P(X\le x)$	PDF $f(x)$ if
Cumulative distribution function	cumulative density function	$P(a\le x\le b) = \int_a^b f(x)\,dx$

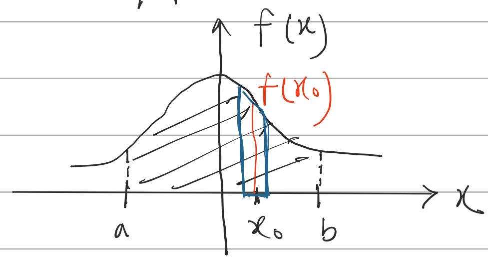
(কোনো একটা region এর মধ্যে random var. থাকলে তার probability

ex: line a to b span করছে তার মধ্যে r.v. থাকবে তার probability.

$$\left[a=b \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = 0\right]$$



a, b এর মধ্যে random variable টা থাকার chance.



যেকোনো point এ PDF zero. একটা ছোট rectangle চিন্তা করি। এ small range এ r.v. পড়ার probability.

random variable x_0 হওয়ার probability → খুবই ছোট প্রস্থ ε এর একটা rectangle চিন্তা করছি

$$f(x_0)\,\epsilon \approx P\left(X \in \left(x_0 - \epsilon/2,\ x_0 + \epsilon/2\right)\right)$$

rectangle width

for $\epsilon > 0 \to$ very small

To be valid, $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

CDF কে PDF দিয়ে represent $\to$

If X has PDF f, then CDF $= F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

If X has CDF F, (and X is continuous random) $f(x) = F'(x)$

derivative of $F(x)$

fundamental thm of calculus

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

CDF evaluated at b

Variance: একটা random variable এর মধ্যে কি পরিমান variance থাকতে পারে

$$Var(X) = E\left(X - E(X)\right)^2 \qquad E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X)$$

$= 0$

→ on average এর average থেকে কতটুকু differ করে।

তাই square নিবো

X random variable

$E(X) \longrightarrow$ constant

$E(E(X)) \longrightarrow E(X)$

Standard Deviation: $SD(X) = \sqrt{Var(X)}$

$$Var(X) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right)$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2$$

2, $E(X) \longrightarrow$ constant

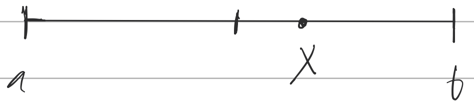
বাইরে আনবো। X এর expectation নিবো

$2E(X)\ E(X)$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

Uniform Random Distribution

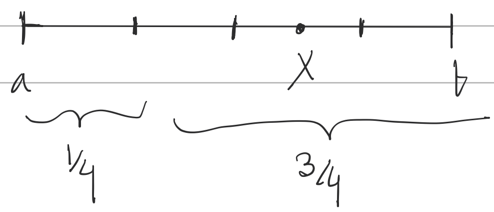
Unif (a, b) :



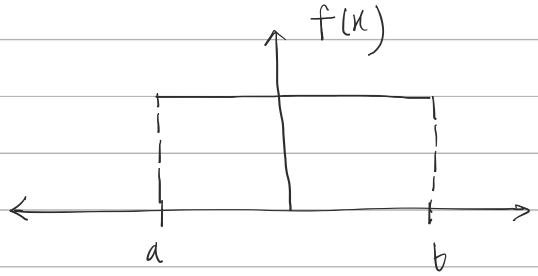
completely random point on $[a, b]$

X left half এ পড়ার probability $= \frac{1}{2}$

probability



probability $\propto$ length



domain a to b $\rightarrow$ $<a, >b$ তে no value

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{if } a \le x \le b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$c \Rightarrow$ non negative number

$c = ?$ probability র axiom use করে বের করা লাগবে ।

Total probability র sum = 1

$$\int_a^b c\,dx = 1 \Longrightarrow c \cdot [x]_a^b = c(b-a) = 1$$

$$\Longrightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}\,dx = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}[x]_a^x = \frac{1}{b-a}(x-a)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{if } a \le x \le b \\ 1 & \text{if } x > b \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b x \times \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$ [Law of the unconscious statistician (LOTUS)]

$U \sim \text{Unif}(0,1)$, $E(U) = \frac{1}{2}$, $E(U^2) = \int_0^1 u^2 f(u)\, du = \frac{1}{3}$

$f(u) = 1$

$Var(U) = E(U^2) - E(U)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ [$\frac{(a-b)^2}{12}$ general case]

standard deviation $= \frac{1}{\sqrt{12}}$

Lect. 13 : Normal Distribution 17.05.25

যেকোনো distribution

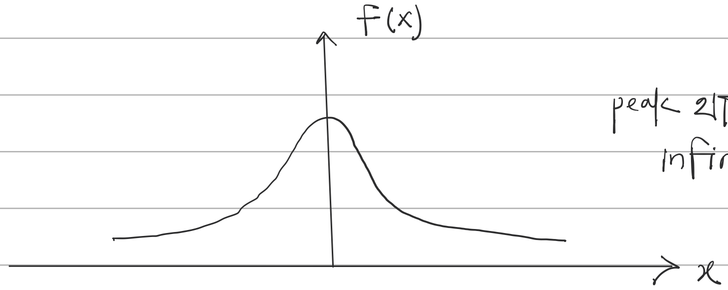
Central limit thrm: large number of IID r.v. নিয়ে যদি add করি নতুন যে r.v হবে সেটা অবশ্যই normal distribution follow করবে।

Central Limit Theorem: sum of lots of iid random variables looks normal

$Z \sim N(0,1)$ has PDF, $f(z) = c e^{-z^2/2}$ → normalizing constant

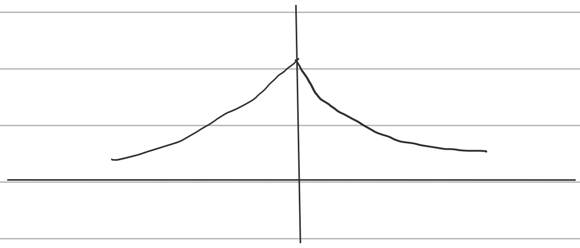
mean $= 0$
variance $= 1$ } standard normal distribution follow করছে

$c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz = 1$ হবে।



peak থাকবে $x = 0$ বরাবর
infinity তে গিয়ে $y = 0$ হবে।

$e^{-|x|}$



problem: 0 তে spike পাচ্ছি derivate করা ঝামেলা

আবার modulus ও আছে।

তাই square নিবো → $e^{-x^2/2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{PDF} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz = 1$$ পাবো sure না।

constant পেতে পারি।

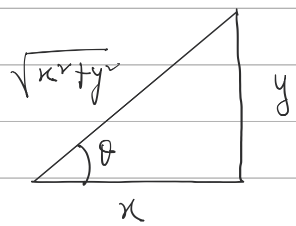
তাই সামনে c দিয়ে multiply.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy} \rightarrow = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz$$

→ যেটা বের করতে চাই তার square পাবো

$\int e^{-z^2/2}\, dz$ → indefinite integral নেই

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy$$



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta$$

↳ positive x axis এর সাথে angle

$dx\, dy \longrightarrow dr \cdot d\theta$

$$dx \cdot dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\, d\theta$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\, d\theta$$

$$= (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)\; dr\, d\theta$$

$$= r\, dr\, d\theta$$

$$\longrightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta \qquad u = \frac{r^2}{2}$$

$$du = r\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-u}\, du\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| -e^{-u} \right|_0^{\infty} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-0+1)\, d\theta$$

$$= 2\pi$$

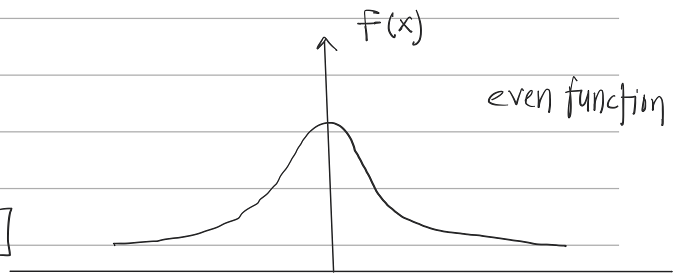
$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz = \sqrt{2\pi}$$

$$\therefore c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}$$

$$E(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2/2} \, dz$$

$= 0$ [By symmetry of odd function]



$z \rightarrow$ straight line
odd function

even function $\times$ odd function = odd function

$$Var(z) = E(z^2) - E(z)^2$$

$$E(z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{z^2 e^{-z^2/2}} \, dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} \, dz$$

$\rightarrow$ even function

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1$$

integration by parts $\int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot \left(z e^{-z^2/2}\right) dz$

$$= z \int z e^{-z^2/2} \, dz - \int \frac{dz}{dz} \left(\int z e^{-z^2/2} \, dz \right) dz$$

$u = z^2/2 \rightarrow du = z \, dz$

$$= \left[-z e^{-z^2/2} \right]_0^{\infty} + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-z^2/2} \, dz}_{\sqrt{2\pi}}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} \, dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1$$

Notation: Φ is the standard normal CDF, $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-z^2/2}\, dz$

যেকোনো arbitrary mean আর variance থাকতে পারে → non-standard

Let $X = \underbrace{\mu}_{\text{shift}} + \sigma z$

$\mu \in \mathbb{R}$ (mean, location)

$\sigma > 0$ (SD, scale) → standard deviation

$X \sim N(\mu, \underbrace{\sigma^2}_{\text{variance}})$

$E(X) = E(\mu + \sigma z) = E(\mu) + \sigma E(z) = \mu$

$Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2$

$Var(X+c) = E(X + c - E(X+c))^2 = E(X - E(X))^2 = Var(X)$

left right shift করলেও signal এর variance change হয় না।

$Var(cX) = E(cX - E(cX))^2 = E(cX - cE(X))^2 = c^2 E(X - E(X))^2$
$= c^2\, Var(X)$

$Var(X+Y) \neq Var(X) + Var(Y)$ → linearity property follow করে না
[Equal if X, Y are independent]

Find PDF of $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X = \mu + z\sigma$

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

non-standard variable কে standardize করলাম।

CDF বের করবো।
derivative নিলে PDF পাবো।

CDF: $P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$= P\left(z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

PDF: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2/2} \cdot \frac{1}{\sigma}$

$\hookrightarrow$ chain rule apply $\frac{d}{dx}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

15.05.25

Lect-14: Variance contd. & Exponential Distribution

$X \sim Pois(\lambda)$. $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 P(X=x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}(1+\lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$$

ম্যাকলারিন series

differentiating w.r.t. λ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1}}{k!} = e^{\lambda}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} = \lambda e^{\lambda} \quad \text{(multiplying } \lambda\text{)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\lambda^{k-1}}{k!} = \lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\lambda^k}{k!} = \lambda e^{\lambda}(1+\lambda) \quad \text{(multiplying } \lambda\text{)}$$

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \underbrace{\lambda^2}_{E(X)^2} = \lambda$$

$X \sim Bin(n, p)$. $Var(X)$: $X = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n \overset{iid}{\sim} Bern(p)$

$E(X) = np$

$X^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2 + 2I_1 I_2 + 2I_2 I_3 + \dots + 2I_{n-1} I_n$

$E(X^2) = E(I_1^2) + E(I_2^2) + \dots + 2E(I_1 I_2) + \dots + 2E(I_{n-1} I_n)$

$\hookrightarrow$ linear property follow করে

যেহেতু $I_1, I_2 \dots I_n \to$ iid

$E(I_1^2) = E(I_2^2)$

$\therefore E(X^2) = nE(I_1^2) + 2\binom{n}{2} E(I_1 I_2) = np + n(n-1)p^2 = np + n^2p^2 - np^2$

$I_1 \to 0$ or 1

$I_1 = I_1^2 \qquad E(I_1) = E(I_1^2) = p$

$E(I_1 I_2) = 1$ if $I_1 = 1$ and $I_2 = 1$

$\hookrightarrow$ indicator of success on both trials

$Var(X) = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 = np(1-p) = npq$

<u>Ex:</u> on avg. per hour এ λ সংখ্যক email আসে

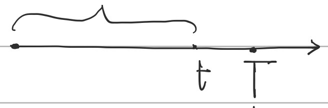
প্রতি unit time এ λ সংখ্যক mail ,,

t time এ λt ,,

\# Emails I get in time t. $N_t \sim Pois(\lambda t)$

Find PDF of T. time of the first email (or CDF)

এই সময়ে λ সংখ্যক mail আসে



↳ time of the first email

$P(T \le t) \to$ CDF ; $P(T > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$

complement event
এর probability নিচ্ছি

$T > t \to 0 - t$ time এ কোনো mail ই আসে নাই।
প্রথম mail পাই T তে

CDF $P(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$; PDF $= \lambda e^{-\lambda t}$

Exponential Distribution, rate parameter λ, $X \sim \text{Expo}(\lambda)$

PDF $= \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ valid $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1$

CDF $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$ → 0 থেকে start আসতে আসতে 1 এ যাবে

↳ not valid for <0 so 0 থেকে শুরু করবো
এই distribution টা

$Y = \lambda X$; then $Y \sim \text{Expo}(1)$ since $P(Y \le y) = P(\lambda X \le y) = P\left(X \le \frac{y}{\lambda}\right)$

↳ (standard exponential random variable)

X এর CDF at y/λ
(exponential)

$$= 1 - e^{-\lambda \, y/\lambda} = 1 - e^{-\lambda}$$
$$= 1 - e^{-1\cdot\lambda}$$

$Y \sim \text{Expo}(1)$

E(Y) and Var(Y) : $E(Y) = \int_0^\infty y e^{-y}\, dy = 1$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 \; ; \; E(Y^2) = \int_0^\infty y^2 e^{-y}\, dy = 2$$

$$= 2 - 1$$
$$= 1$$

$$E(X) = E(Y/\lambda) = \frac{1}{\lambda} E(Y) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = Var(Y/\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$$

standard এর বের করে scale করে non-standard এরটা পেলাম।

Memoryless Property: $P(X \geq s + t \mid (X \geq s)) = P(X \geq t) : \forall s, t \geq 0$

একটা experiment যদি s পরিমান চলে
এরপর আরো t পরিমান time চলে → সেটা আগের কোনো memory dependent না। শুরু থেকে t পরিমান time চলার probability র সমান।

Continuous → exponential
Discrete → Geometric

memiryless property মেনে চলে

<u>continuous:</u>

$$P(X \geq s) = 1 - P(X \leq s) = 1 - 1 + e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x}$$

$$= \frac{P(X \geq s+t, X \geq s)}{P(X \geq s)}$$

s+t এর চেয়ে বড় হলে অবশ্যই >s

$$= \frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq s)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X \geq t)$$

∴ memoryless property follow

Geometric → self study.

Lect-15:

21.05.25

Memoryless Property : $P(X \geq s+t \mid X \geq s) = P(X \geq t)$

s unit time wait করলাম। দেখলাম কোনো mail পাই নাই। What is the probability that I have to wait another t unit to get the first mail.

$X \sim \text{Expo}(\lambda)$, $E(X \mid X>a) = E(a + X - a \mid X > a)$

$= E(a \mid X>a) + E(X-a \mid X>a)$

$= a + E(Y \mid Y>0) = a + 1/\lambda$

$\downarrow$ a fixed constant

$X - a = Y$

$X - a > 0$

$Y > 0$

X → exponential random variable
একে a পরিমান right shift Y পাবো।
So Y ও random variable.
exponential 0 থেকে infinity পর্যন্ত defined.
Y exponential r.v.
$\therefore$ expectation $= 1/\lambda$

Moment Generating Functions: (MGF)

$E(X^n) \rightarrow$ nth moment of X

$n \rightarrow$ non-negative integer

MGF (Defn) : A random variable X has MGF $M(t) = E(e^{tX})$ as a function of t, if this is finite on $(-a, a)$ for some $a > 0$

Book keeping Device

$t \rightarrow$ function এর input parameter

MGF একটা পর্যায়ে গিয়ে converge করবে।

$E(e^{tX}) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} X^n t^n/n!\right)$

using linearity property of expectation $\rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(X^n)\, t^n/n!$$

(1) The nth moment $E(X^n)$ is the coefficient of $\frac{t^n}{n!}$; $M^n(0) = E(X^n)$

n বার derivative $\rightarrow$ lower power (0 to n-1 remove)
then $x=0 \longrightarrow$ higher power remove
শুধু x^n এর constant টা থাকবে।

(2) MGF determines the distribution i.e. X, Y have the same MGF then they have the same PDF/CDF.

(3) If a random variable X has MGF M_X, Y has MGF M_Y and X, Y are independent then $M_{X+Y} = M_X \cdot M_Y$ [If X, Y are independent then

$$E(XY) = E(X)E(Y)]$$

product এ distributive property satisfy করতে হলে independent হওয়া জরুরী

$M_{X+Y} = E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E\left[e^{tX} \cdot e^{tY}\right] = E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) = M_X M_Y$

Ex: $X \sim \text{Bern}(p)$ $\quad M(t) = E(e^{tX})$

$$= e^{t\cdot 1} p + e^{t\cdot 0} \cdot q = pe^t + q$$

$X \sim \text{Bin}(n,p) \Rightarrow M(t) = (pe^t + q)^n$

$Z \sim N(0,1) \Rightarrow M(t) = E(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz - z^2/2} \, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz + t^2)} \, dz \cdot e^{t^2/2}$$

$$= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} \, dz$$

→ value 1

→ standard normal
t amount right shifted

$$= e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$X \sim Expo(1)$, $M(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} e^{-x} \, dx$

$$= \int_0^\infty e^{(t-1)x} \, dx$$

$$= \left. \frac{e^{(t-1)x}}{t-1} \right|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{t-1}(0-1) = \frac{1}{1-t}, \quad t<1$$

$t>1 \rightarrow 1-t \rightarrow$ negative value

$e^{-x \boxed{-ve}} = e^{+ve}$ হয়ে যাবে।

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \qquad t<1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n! \, t^n/n!$$

$E(X^n) = n! \quad n \geq 0$

→ coeffecient of $\frac{t^n}{n!}$

H.W. non-standard normal MGF

$Y \sim Expo(\lambda)$: $X = \lambda Y$

non-standard X তার parameter $\rightarrow$ standard

$$\rightarrow Y^n = \frac{X^n}{\lambda^n}$$

$$\rightarrow E(Y^n) = \frac{1}{\lambda^n} E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

$$X \sim Pois(\lambda),\ M_X = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

$$= e^{\lambda(e^t - 1)}$$

let $Y \sim Pois(\mu)$; X & Y are independent

Find the distribution of $X+Y$, $M_{X+Y} = M_X M_Y$

$$= e^{\lambda(e^t-1)} \cdot e^{\mu(e^t-1)}$$

$$= e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}$$

MGF of Poisson Random Variable

$$X+Y \sim Pois(\lambda + \mu)$$