Lect 1: Probability 12/4/25

→ Economics, ML এ probability use হয়

Law and History: authencity, reliability র জন্য probability theory use হয়

↳ Mosteller – Wallace

Father of probability: Fermat, Pascal, Newton

Statistics is the logic of uncertainty.

Sample space: The set of all possible outcomes of an experiment.

Experiment: Flip a coin twice.

HH
HT
TH
TT

all possible outcomes.
Each of them is equally likely.
↳ Assumption: unbiased coin

Event: Event is a subset of the sample space.

↳ কোন কোনটা আলাদা আলাদা face o/p দিচ্ছে? HT, TH

event যার probability compute করতে চাই

Naive defn of probability: P(A)

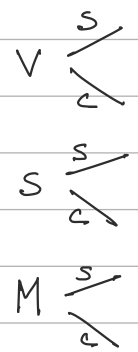
$$P(A) = \frac{\#\text{ favourable outcomes}}{\#\text{ total outcomes}}$$

Assumes all outcomes are equally likely.

experiment কিভাবে define করছি এর উপর probability depend করে।

<u>Counting</u>: Multiplication Rule: If one experiment has n_1 outcomes and for each outcome of 1st experiment there are n_2 possible outcomes for 2nd experiment .... n_r possible outcomes for rth experiment, then there are $n_1 n_2 \dots n_r$ overall possible outcomes.

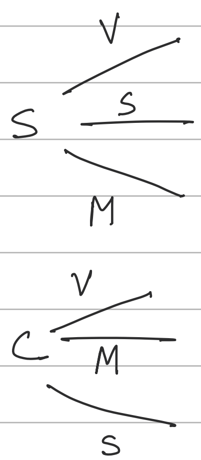
৩ type ice cream → vanilla, mango, strawbarry
২ভাবে নিতে পারি → cone, soft serve



১ম experiment — flavour — possible outcomes: 3

2nd experiment — possible outcomes 2

Total: $3 \times 2 = 6$ outcomes



$2 \times 3 \rightarrow 6$

এখানে ordering matter করে না।

application of multiplication rule:

Ex: Probability of full house in poker with a 5 card hand. → A

spade, heart, diamond, club — total 52 cards deck

13, 13, 13, 13

$\underbrace{\text{13 cards}}_{\text{suit}} \longrightarrow$ 1 to 10

King, Queen, Jack

Full house: 3 cards of one kind, 2 cards of another kind

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

total outcome: $^{52}C_5$

$$P(A) = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

subexperiments:

1. কোন kind এর চাই।
   13 টা option আছে

2. 4 টা same kind এর cards থাকে।
   3 টা draw করা লাগবে।
   $^4C_3$

3. আরেকটা kind লাগবে।
   12 টা option আছে। ১ম টা নিতে পারবো না।

4. 4 টা থেকে 2 টা draw.
   $\binom{4}{2}$

16.04.25

Lect 2: Counting and story proofs

Sampling table: Choose K objects out of n

	Order (Y)	Order (N)
Replace (✓)	n^K	$\binom{n+K-1}{K}$
No replace (✗)	$\frac{n!}{(n-K)!}$	$\binom{n}{K}$

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-K+1)$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-K+1)(n-K)\cdots 1}{(n-K)\cdots 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-K)!}$$

Pick K times from n objects where order doesnot matter.

$$\left.\begin{matrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{matrix}\right\}$$ order matter করেনা। So ২টাই same.

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

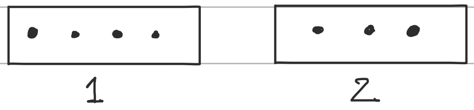
Base cases:

$K=0 \Rightarrow$ কিছুই নিচ্ছিনা। একভাবেই করা যায়।

$$\binom{n-1}{0} = 1$$

$$K=1 \Rightarrow \binom{n}{1} = n$$

$$n=2 \Rightarrow \binom{2+K-1}{K} = \binom{K+1}{K} = K+1$$



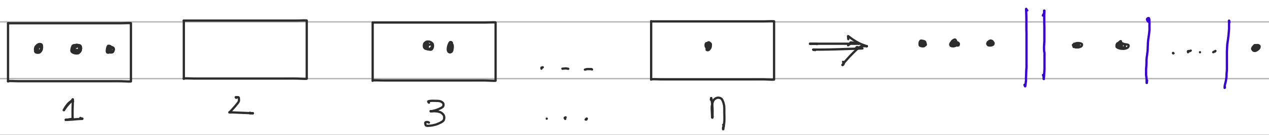
$n=2$
$K=7$

• → indistinguishable

কারন order matter করে না।

programmer যদি বলে তার করা sample এ 1 আছে 4 বার তাহলে আমরা বলতে পারবো 2 আছে 3 বার। কারন $n=2$ and $K=7$ জানি। আর option আছে 2টাই 1 আর 2।

Equiv: How many ways to put K indistinguishable objects into n distinguishible boxes?



sample draw করতে চাই → dot বসাই
এ যে number টা আসবে সেটার box এ।

boundary / separator দিয়ে বোঝাই → একটা box শেষ পরের box শুরু

dot থাকবে K টা, seperator থাকবে $(n-1)$ সংখ্যক

total element $= (n+K-1)$
$\# \text{dots} = K$
$\# \text{seperators} = n-1$

$$\frac{(n-K+1)!}{K!\,(n-1)!}$$ → overcount হচ্ছে। repeatation eliminate করা লাগবে।

original problem কে known problem এ one to one mapping করলাম।

Story proofs :

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ basic story

2. $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$ [Pick k people out of n, designate a president]

ex: n জন student থেকে k জনের group চাই।

added condition একজনকে captain হিসাবে designate করবো।

(i) শুরুতে captain choose $\rightarrow n$
বাকি $(n-1)$ জন থেকে $(k-1)$ জন choose $\rightarrow \binom{n-1}{k-1}$

(ii) শুরুতে team choose $\rightarrow \binom{n}{k}$

k জন থেকে একজন captain $\rightarrow k$

3. $\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$ [Vandermonde's identity]

j (fixed করে দিচ্ছি)

male student 0 1 ... k

female student k k-1 ... 0

male student = m
female student = n
choose k

ছোট non-overlapping problem এ divide করছি।

Non-naive defn: A probability space consists of S and P, where

S → sample space (all possible outcomes)

P → probability func.

S is a sample space and P is a function which takes an event $A \subseteq S$ as input and gives $P(A) \in [0,1]$ such that

1. $P(\phi) = 0$, $P(S) = 1$

ϕ → এমন ঘটনা যারা sample space এ নাই।

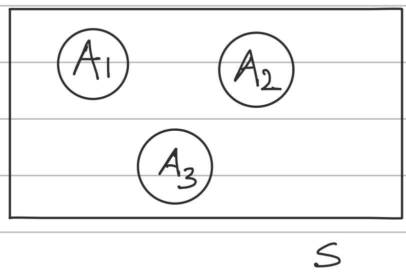
2. $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$; if A_n are disjoint.

1 − 10 পর্যন্ত বল আছে। 1টা draw করা হলো। ≥ 11 হওয়ার probability = 0

≥ 0 and < 11 → probability = 1

ছক্কায় $\underbrace{2 \text{ or } 3 \text{ or } 4}_{\text{non overlapping event}}$ → probability = individual probability র sum. (disjoint হলে)

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$



Lect-03 : Birthday Problem 19.04.25

$K \to$ arbitrary number

at least 2 জনের same birthday হবে সেটার probability কত?

মাত্র 23 জন থাকলেই এটা guarrenteed যে at least 2জনের birthday same দিনে।

K people find the probability that two have same birthday.

If $K > 365$, then probability $p = 1$ (Pigeonhole principle)

Let $K \leq 365$, at least 2জনের birthday match করে

complement event: কারোরই match করে না।

$$p(\text{no match}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots\ldots (365-K+1)}{365^K}$$

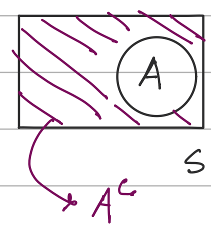
[Assume equally likely, independent birthdays]

twin case বাদ দিয়ে চিন্তা করবো। একজনের birthday র উপর অন্য জনেরটা depend করে না।

$$P(\text{match}) = \begin{cases} 50.7\% & ; K = 23 \\ 97\% & ; K = 50 \\ 99.999\% & ; K = 100 \end{cases}$$

at least 2জনের same

Properties of probability: (1) $P(A^c) = 1 - P(A)$



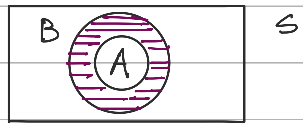
Proof: $P(S) = P(A \cup A^c)$

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$A, A^c \to$ non overlapping region

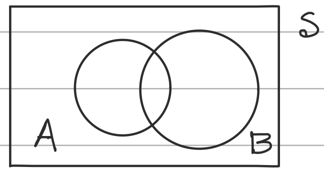
(2) If $A \subseteq B$, $P(A) \leq P(B)$



<u>Proof:</u> $B = A \cup (B \cap A^c)$

$\rightarrow P(B) = P(A) + \underbrace{P(B\cap A^c)}_{0 \leq P(B\cap A^c) \leq 1} \geq P(A)$

(3) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$



Proof: $P(A\cup B) = P(A\cup(B\cap A^c))$

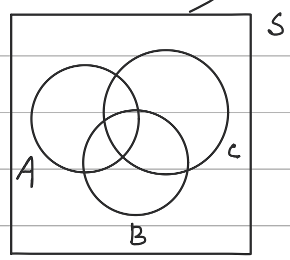
$= P(A) + P(B\cap A^c)$

We need to prove, $P(B) - P(A\cap B) = P(B\cap A^c)$

$\longrightarrow P(B) = \underbrace{P(B\cap A) + P(B\cap A^c)}_{\text{Disjoint union}}$, which is true

$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(C\cap A) + P(A\cap B\cap C)$

Principle of inclusion and exclusion.



<u>generalized format:</u>

$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i\cap A_j)$ যেন overcounting না হয়।

$i<j \rightarrow$ $A_1\cap A_2$ আসবে। $A_2\cap A_1$ আসবে না।

$+ \sum_{i<j<k} P(A_i\cap A_j\cap A_k) \;\ldots\ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$

যতরকম combination আছে তাদের মধ্যে একটাই যেন include হয়।

n জোড় হলে → (−ve)
n বিজোড় হলে → (+ve)
} তাই $(-1)^{n+1}$ দিবো

deMont Mort's problem (1713) : matching problem.

n সংখ্যক numbering করা card.
initially sort করা।

→ at least একটা card original position এ থাকার probability

shuffle করে i তম position এ i number এর card পাওয়ার probability = ?

n cards. 1, 2, 3 ... n. Let A_j be the event that j^{th} card matches.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

$$P(A_j) = \frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2.1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots 2.1}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

j তম card এর জন্য choice ১টাই (original position এই যাওয়া লাগবে)
২য় card এর জন্য choice (n-1)
৩য় (n-2)

⋮ ⋮

last 1

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

→ ১ম and ২য় card তাদের জায়গায় থাকে। বাকিগুলোতে no restrictions.
→ choice ১ টাই

possible choice 1 টাই

$$P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_K) = \frac{(n-K)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-K+1)}$$

Lect-04 : 23.04.25

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \ldots\ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

initially (card গুলো sorted)

$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$
1	2	3	4	5

random shuffle

$\underline{3}$	$\underline{1}$	$\underline{5}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$
1	2	3	4	5

↳ 4 নং position এর card টা position এর সাথে match করছে

Let A_j be the event that jth card matches.

$$P(A_j) = \frac{1\cdot(n-1)(n-2)\ldots 1}{n(n-1)(n-2)\ldots 1} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$j = 0, 1, 2 \ldots\ldots \longrightarrow P(A_j) = \frac{1}{n}$$

$$P(\underset{i}{A_1} \cap \underset{j}{A_2}) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

↳ যেকোনো i, j এর জন্যই true হবে।

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_K) = \frac{(n-K)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-K+1)}$$

→ i,j choose → ${}^nC_2$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n \cdot \frac{1}{n} - \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \cdots$$

total term n সংখ্যক।
প্রতিটার probability $\frac{1}{n}$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

$$\approx 1 - e^{-1}$$

$$\left[e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \right]$$

$$\rightarrow 1 - e^{-1} = \underbrace{\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots}_{\text{infinite series}}$$

(but খুব দ্রুত converge করে)

অনেকগুলো event এর মধ্যে অন্তত একটা ঘটবে।

ex: at least একটা card original position এ

complement event: কোনোটাই তার original position এ নাই

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots A_n^c) \approx \frac{1}{e} = 0.367$$

Hash table এ ২টো key same জায়গায় যাবেনা তার probability $\frac{1}{e}$

Fast matrix multiplication $\tilde{O}^{(n+\frac{1}{2})}$

Conditional probability:

Defn: Events A, B are independent if $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

A, B, C are independent if $\underbrace{P(A, B, C)}_{A \cap B \cap C} = P(A)\,P(B)\,P(B)$,

$P(A, B) = P(A)\ P(B)$
$P(B, C) = P(B)\ P(C)$
$P(C, A) = P(C)\ P(A)$

এটাই enough না। pairwise independence ও test করা লাগবে।

Newton - Pepys problem (1967):

Have fair dice, which is more likely?

(A) at least 1 six with 6 dice
(B) at least 2 sixes with 12 dice
(C) at least 3 sixes with 18 dice

(independently rolled হচ্ছে)

complement নিয়ে কাজ করা easier.

(A) __ __ __ __ __ __

complement → no 6
6টা probability individually বের করে multiply

$5/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6$

$\therefore P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.665$

(B) complement : একটা 6 অথবা no 6

$$P(B) = 1 - \left\{ \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{12}}_{\text{no 6}} + 12\left(\frac{1}{6}\right)\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{11}}_{\text{1টা 6}} \right\}$$

12টা position এর যেকোনোটায় 6 আসতে পারে।

$= 0.119$

$$P(C) = 1 - \underbrace{\sum_{K=0}^{2} \binom{18}{K} \left(\frac{1}{6}\right)^K \left(\frac{5}{6}\right)^{18-K}}_{\text{0, 1 or 2 sixes} \longrightarrow \text{complement event of C}}$$

$= 0.597$

Conditional Probability :

coin দিয়ে বলা হলো biased নাকি fair? → verdict দিবো না but bias/fair হবার probability বের করবো

fair ধরে নিলে probability $\frac{1}{2}$

How should we update prob./belief/ uncertainty based on new evidence?

Def^n: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$

event B ঘটে গেলে A ঘটার probability

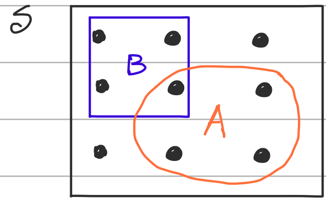
B ঘটে গিয়েছে so non-zero probability.

impossible event, $P(B) = 0$

Lect-05 : Conditioning cont. 26-04-25

<u>Defn:</u> $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$

Intuition :



• → outcomes (equally likely) → $\frac{1}{9}$ probability assigned

↳ for the sake of simplicity

A, B → events

from figure , $P(A) = \frac{4}{9}$

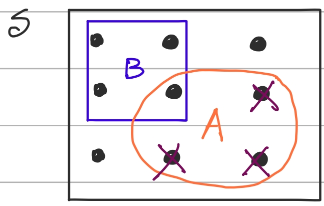
$P(B) = \frac{4}{9}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

B event ঘটে গিয়েছে. so rectangle এর বাইরের outcome গুলোর probability এখন 0, sample space restricted.

↳ (B)

B এর outcome গুলোর probability এখন $\frac{1}{4}$



$\frac{1}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$

$P(A\cap B)$

probability এখন P(B) দিয়ে normalize করবো

Thm 1: $P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$ B free variable

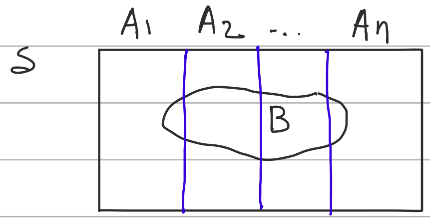
$= P(B|A)\,P(A)$ A free variable

Thm 2: $P(A_1, A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1,A_2) \ldots \ldots P(A_n|A_1,A_2 \cdots A_{n-1})$

কোন variable free রাখবো? → problem দেখে decide

Thm 3: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$ [Bayes' rule]

Thinking Conditionally, how to solve a problem



complex event B এর total probability বের করা target

sample space কে n−1 সংখ্যক vertical line দিয়ে n সংখ্যক ভাগ করলাম। mutually exclusive partition (no overlapping) and sum করলে পুরো sample space টা পাবো।

Let $A_1, A_2 \cdots A_n$ be a partition of S

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots\ldots + P(B \cap A_n)$$

$$= P(B|A_1)\,P(A_1) + P(B|A_2)\,P(A_2) + \ldots\ldots + P(B|A_n)\,P(A_n)$$

Law of total probability

Ex: Get random 2-card hand from a standard deck. (order imp. না)

Find $P(\text{both aces} \mid \text{have ace})$; $P(\text{both aces} \mid \text{have ace of spades})$

$$P(\text{both aces} \mid \underline{\text{have ace}})$$

অন্তত একটা ace আছে

$$= \frac{P(\text{both aces}, \cancel{\text{have ace}})}{P(\text{have ace})}$$

---→ dominated

both aces, have ace → ২টা event

super event sub

p (both ace) বের করলেই হবে

$$P(\text{both aces}) = \binom{4}{2} \Big/ \binom{52}{2}$$

$$P(\text{have ace}) = 1 - \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}}$$

} → non ace cards গুলো থেকে choose

$$P(\text{both aces} \mid \text{have ace}) = \frac{\binom{4}{2} \Big/ \binom{52}{2}}{1 - \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}}}$$

$$= \frac{1}{33} = 3.03\%$$

$P(\text{both aces} \mid \text{have ace of spades})$

$$= \frac{P(\text{both aces, have ace of spades})}{P(\text{have ace of spades})}$$

$$= \frac{3}{51} = \frac{1}{17} = \underline{5.88\%}$$

52 থেকে 2টা draw,
একটা ace of spades

$\boxed{As}$ $\boxed{}$

total possible → 51

ace আছে আরো $\underline{3টা}$

favourable choice

probability almost double
(আগেরটার তুলনায়)

→ কারণ extra info add হওয়া।

2nd problem এ additional info থাকায় confidence আগের তুলনায় বেশি হবে।

Disease affects 1% population →

Suppose test is 95% $\underline{\text{accurate}}$.

disease যদি হয়ে থাকে 95% case এ result positive
5% case এ negative
না হয়ে থাকে 5% case এ positive
95% case এ negative

D : Patient has disease
T : Tests positive

$$P(D) = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$P(D^c) = 0.99$$

$P(T|D) = 0.95 = P(T^c|D^c)$

$P(T^c|D) = 0.05 = P(T|D^c)$

$P(D|T) = ?$

$$P(D|T) = \frac{P(D\cap T)}{P(T)} = \frac{P(D\cap T)}{\underbrace{P(T\cap D) + P(T\cap D^c)}_{\text{law of total probability}}}$$

$$= \frac{P(T|D)\cdot P(D)}{P(T|D)P(D) + P(T|D^c)P(D^c)}$$

$$= \frac{0.95\times 0.01}{0.95\times 0.01 + 0.05\times 0.99}$$

$$= 0.16$$

1000 জন population $\longrightarrow$ 10জন affected
তাদের test করলে 9জন positive
1 জন negative

990 জন unaffected
50জনের test positive আসবে।
wrong diagnosis

$\longrightarrow$ confidence low

because test যতই accurate হোক population ও consideration এ আনা লাগবে।

Lect-06 Monty Hall Problem 28.04.25

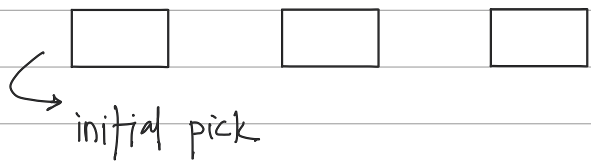
Defn: Events A and B are conditionally independent given C if

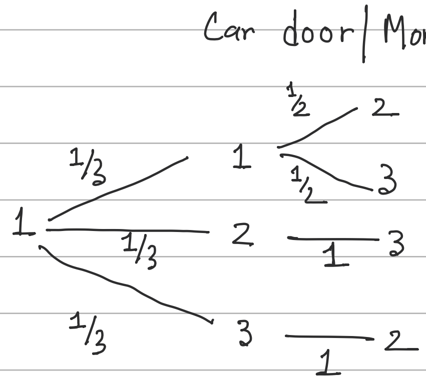
$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)\, P(B \mid C)$$

C event ঘটে গিয়েছে তার উপর base করে A, B এর independence check.

3টা door। ২টার পিছনে ছাগল আছে। একটার পিছনে car আছে। প্রথমে একটা door pick করবো। Host যেটা বাদ দিয়ে অন্য একটা door খুলবে যেটার পিছনে ছাগল আছে। এরপর host choice দিবে initial choose করা door change করতে চাই কিনা।

1 door has car, other 2 has goats, Monty knows which is which. After picking a door, Monty always opens a goat door. If he has a choice which door to open, he opens with equal probability. Should we switch



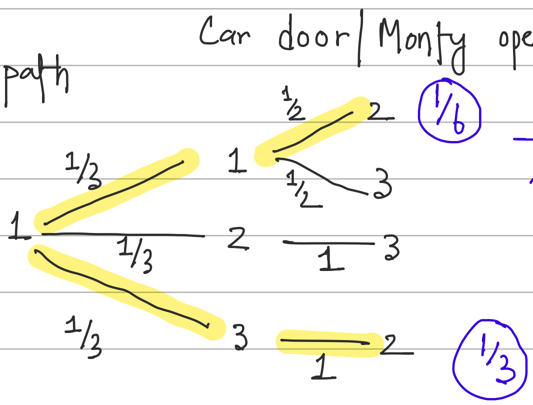


1 নং ই car door। Monty 2,3 যেকোনোটা equal probability তে pick করতে পারে।

2 যদি car door হয়। Monty কে অবশ্যই 3 নং door open করা লাগবে।

$$P(\text{success of switching} \mid \text{Monty opens } 2) = \frac{2}{3}$$

এই দুই path ছাড়া অন্য path choose করতে পারবো না।



$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ কে এমনভাবে renormalize করবো যেন এদের probability র যোগফল 1 হয়।

১ম case এ switch করলে success পাবো না।

2nd case এ switch করলে success পাবো।

$$P(\text{success of switching} \mid \text{Monty opens } 2) = \frac{2}{3}$$

S : success (assuming switch)

যে জিনিসটা জানতে চাই তার একটা event তৈরি করে সেটার উপর conditioning করবো।

D_j : Door j has car, $j \in \{1, 2, 3\}$

$$P(S) = P(S \cap D_1) + P(S \cap D_2) + P(S \cap D_3)$$

$$= P(S|D_1)P(D_1) + P(S|D_2)P(D_2) + P(S|D_3)P(D_3)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

originally pick করলাম 1। 2এ car আছে। Monty 3নং open করবে। switch করলে 2এ যাবো। success এর probability 1.

door গুলো identical। তাই conditional/ unconditional 2 case এই same probability পাচ্ছি।

Simpson's paradox :

২জন surgeon, multiple surgery

individual surgery তে প্রথম জন ২য় জনের থেকে better.

overall surgery তে ১ম জন কি সবসময় better হবে?

Hibbert

	heart	bandage
S	70	10
F	20	0
	77%	100%

overall success rate $= \dfrac{80}{100}$

$= 80\%$

Nick

	heart	bandage
S	0	81
F	10	9
	0%	90%

overall success rate $= \dfrac{81}{100}$

$= 81\%$

individual probability better হলেও
total probability " নাও হতে পারে

A : Successful surgery

B : treated by Dr. Nick

B^c : treated by Dr. Hibbert

C : heart surgery

C^c : bandage

$P(A \mid B, C) < P(A \mid B^c, C)$

$P(A \mid B, C^c) < P(A \mid B^c, C^c)$

but $P(A \mid B) > P(A \mid B^c)$

$P(A \mid B, C) \rightarrow$ Dr. Nick heart surgery করেছেন যেগুলোতে success হওয়ার chance.

$$P(A \mid B) = P(C \mid B)\, P(A \mid B, C) + P(C^c \mid B)\, P(A \mid B, C^c)$$

Law of total probability induce করে C কে incorporate করছি।

$$P(A \mid B) = P(C \mid B)\, \underbrace{P(A \mid B, C)}_{< P(A \mid B^c, C)} + P(C^c \mid B)\, \underbrace{P(A \mid B, C^c)}_{< P(A \mid B^c, C^c)}$$

✓ CT-syllabus

counting smartly

story proofs

conditioning (imp.)