フーリエ変換はわかってる人向けラプラス変換

かめさん (@cogitoergosumkm)

まず、フーリエ変換にはいくつか定義があるので、ここで使う定義を書いておく。

$$\mathcal{F}[f(x)](k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$
$$\mathcal{F}^{-1}[g(k)](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx}dk$$

この積分が直接定義できるためには、$f(x)$ が絶対可積分 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$ である必要があった。実際それでは不便であるから、可積分である $f(x), g(x)$ に対し、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{F}[g](x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(k)e^{-ikx}dkdx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f](k)g(k)dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f](x)g(x)dx\end{aligned}$$

であることを一般化して、急減少関数[*1] $\phi(x)$ を用いて、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f](x)\phi(x)dx := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{F}[\phi](x)dx$$

と定義することで、フーリエ変換のできる $f(x)$ の範囲を広げたりしていた。しかし、直接 $\mathcal{F}[f](x)$ の形で関数を得ることはできない。そこでラプラス変換を見てみると

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$
$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds$$

ラプラス変換では s は複素数の範囲である。わかりやすく $s = \sigma + i\omega$ と書いてみると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) &= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{0}^{\infty}\left(f(t)e^{-\sigma t}\right)e^{-i\omega t}dt\end{aligned}$$

フーリエ変換が見えてきた気がする。どうやら $\sigma > 0$ とすれば、$e^{-\sigma t}$ をかけることで可積分にしているらしい[*2]。積分範囲がフーリエ変換では $(-\infty, \infty)$ のところ、ラプラス変換は $[0, \infty)$ だから、単位ステップ関数

$$U(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0)\end{cases}$$

を用いて、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)U(t)e^{-\sigma t}\right)e^{-i\omega t}dt \\ &= \mathcal{F}[f(t)U(t)e^{-\sigma t}](\omega)\end{aligned}$$

つまり、$f(t)$ のラプラス変換とは $f(t)U(t)e^{-\sigma t}$ のフーリエ変換であるということだ。例えば $f(t) = t$ なんかは絶対可積分ではないが、$tU(t)e^{-\sigma t}$ は $\sigma > 0$ なら絶対可積分になるので、フーリエ変換を直接はできないがラプ

[*1] 定義は書くの面倒くさいからやめとく。$|x|$ が大きいところで速く 0 に落ちるから、$f(x)\phi(x)$ が絶対可積分になるような f の範囲が広くなることが大事。

[*2] $e^{-\sigma t}$ 自体は、$\sigma > 0$ でも $t \to -\infty$ で発散するから $\mathbb{R}$ 上の急減少関数ではない。

ラス変換はできるということである。
逆変換を確認したい。見ればわかる通り、ラプラス変換では $t < 0$ の情報は変換後に残っていない。逆変換で復元できるのも当然 $t \geq 0$ のみである。そこで、$f(t)$ の定義域は $t \geq 0$ としておく。$s = \sigma + i\omega$ として、

$$\begin{aligned}
F(s) &\coloneqq \mathcal{L}[f(t)](s) \\
&= \mathcal{F}[f(t)U(t)e^{-\sigma t}](\omega) \\
&\eqqcolon \tilde{F}_\sigma(\omega)
\end{aligned}$$

とすると、フーリエ逆変換から、

$$\begin{aligned}
f(t)U(t)e^{-\sigma t} &= \mathcal{F}^{-1}[\tilde{F}_\sigma(\omega)](t) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_\sigma(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
f(t)U(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_\sigma(\omega)e^{(\sigma+i\omega)t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds
\end{aligned}$$

$f(t)$ の定義域は $t \geq 0$ としておいたので、定義域内では $f(t) = f(t)U(t)$ である。よって、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds$$

となり、ラプラス逆変換が導かれた。