

三角比と比

かめさん @cogitoergosumkm

三角形 ABC についてそれぞれの角 A, B, C の対辺を a, b, c とする. $C = 90^\circ$ のとき, $0^\circ < A < 90^\circ$ に対して

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad (1)$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \quad (2)$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \quad (3)$$

と定義され, $\sin(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ で定義を拡張すると, 正弦定理から,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (4)$$

となる. したがって

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C \quad (5)$$

である.

ところで,

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

を満たすように $0^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲で $\sin \theta$ を定義することもできる. つまり,

$$a : b : c = f(A) : f(B) : f(C) \quad (6)$$

をみたす f は \sin の定数倍しかない. なぜなら,

$$g(\theta) = \frac{f(\theta)}{\sin \theta} \quad (7)$$

とすると,

$$a : b : c = g(A) \sin A : g(B) \sin B : g(C) \sin C = \sin A : \sin B : \sin C \quad (8)$$

となり, $g(\theta)$ は定数であるからである. g を定めるため $f(90^\circ) = 1$ と定めればよい.

定義 1. $0^\circ < \theta < 180^\circ$ に対して $\sin \theta$ が以下の二つを満たすように定義する.

(1) 三角形 ABC についてそれぞれの角 A, B, C の対辺を a, b, c とするとき,

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

である.

(2) $\sin 90^\circ = 1$.

と定義してもよいということである.

$C = 90^\circ, A = \theta$ とすると,

$$a : b : c = \sin \theta : \sin(90^\circ - \theta) : 1 \quad (9)$$

$$= \sin \theta : \cos \theta : 1 \quad (10)$$

$$= \tan \theta : 1 : \sec \theta \quad (11)$$

$$= 1 : \cot \theta : \csc \theta \quad (12)$$

である.