漸化式を行列で解く

かめさん　@cogitoergosumkm

1　ジョルダン標準形

$k \times k$ 行列であり，対角成分がすべて λ，$(i, i+1)$ 成分 $(1 \leq i \leq k-1)$ がすべて 1，その他の成分はすべて 0 であるような行列 $J(\lambda, k)$ をジョルダン細胞という．

$$J(\lambda, k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{1}$$

となっている．また，ジョルダン細胞 $J_1, \ldots, J_m$ が対角にあらわれ，それ以外の成分は 0 である行列 J をジョルダン標準形という．

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

である．
任意の複素係数の正方行列 A に対して，

$$A = PJP^{-1} \tag{3}$$

を満たす正則行列 P とジョルダン標準形 J が存在することが知られている．このことを利用して A^n を計算できる．

$$\begin{aligned} A^n &= \left(PJP^{-1}\right) && (4) \\ &= PJ^nP^{-1} && (5) \\ &= P \begin{pmatrix} J_1^n & & & \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m^n \end{pmatrix} P^{-1} && (6) \end{aligned}$$

である．ジョルダン細胞 $J(\lambda, k)$ のべき乗は上三角行列であり，$(i, i+j)$ 成分は，$\dfrac{n!\lambda^{n-j}}{(n-j)!j!}$ である．ただし，$n < j$ では 0 である．たとえば，

$$\{J(\lambda, 2)\}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\{J(\lambda, 3)\}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \tag{8}$$

のようになる．

2　等比数列とその発展としての行列の利用

漸化式 $x_{n+1} = ax_n$ で定められる数列 x_n の一般項は初項 x_0 を用いて $x_n = a^n x_0$ である．これは等比数列である．
この一般化として，ベクトル $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ が行列 A を用いて $v_{n+1} = Av_n$ という漸化式を満たす場合を考える．一般項は $v_n = A^n v_0$ である．等比数列の場合はベクトルが 1 次元の特殊な場合である．
たとえば二次元の時は

$$v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{10}$$

とすると，

$$\begin{cases} x_{n+1} &= ax_n + by_n \\ y_{n+1} &= cx_n + dy_n \end{cases} \tag{11}$$

という漸化式により与えられる二つの数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が求められる．

3　隣接三項間漸化式 (フィボナッチ数列)

漸化式 $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ を満たし，$x_0 = 0, x_1 = 1$ である数列をフィボナッチ数列という．$n \geq 1$ にたいして $y_n = x_{n-1}$ とすると，

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{cases} \tag{12}$$

である．よって，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

とすると，

$$v_n = A^{n-1} v_1 \tag{15}$$

A の固有多項式は $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ である．これが隣接三項間漸化式を解くときに使われる特性方程式の正体である．固有値は $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である．$\varphi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とおくと，$\lambda = \varphi, \varphi^{-1}$ である．対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$w(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$w(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} \varphi^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

である．$v_1 = (w(\varphi) - w(\varphi^{-1}))/(\varphi - \varphi^{-1})$ だから，

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^{n-1} w(\varphi) - \varphi^{-(n-1)} w(\varphi^{-1}) \right) \tag{18}$$

$$x_n = \frac{\varphi^n - \varphi^{-n}}{\sqrt{5}} \tag{19}$$

と一般項が求められる．

4　等差数列と $x_{n+1} = px_n + q$ の形の漸化式

等差数列の漸化式は $x_{n+1} = x_n + q$ である．$y_n = y_0 = q$ と考えると，

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \\ y_{n+1} &= y_n \end{cases} \tag{20}$$

だから，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \tag{22}$$

とすると，

$$v_n = A^n v_0 \tag{23}$$

である．$A = J(1, 2)$ であるから，

$$v_n = A^n v_0 \tag{24}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ q \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 + nq \\ q \end{pmatrix} \tag{26}$$

つまり，$x_n = x_0 + nq$ である．$+q$ という線形でない平行移動を線形変換で表すという発想は合同変換などにみられる．

$x_{n+1} = px_n + q$ という漸化式 ($p \neq 1$ かつ $q \neq 0$) でも $y_n = y_0 = q$ とすれば，

$$A = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

の n 乗を考えればよい．固有値は $p, 1$ である．固有値 p に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ であるから，固有値 1 に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}\alpha\\q\end{pmatrix}$ とかける．

$$A\begin{pmatrix}\alpha\\q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\alpha+q\\q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\q\end{pmatrix} \tag{28}$$

より，$p\alpha + q = \alpha$ を解けばよいが，これは特性方程式である．

$$A^n\begin{pmatrix}x_0\\q\end{pmatrix} = A^n(x_0-\alpha)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + A^n\begin{pmatrix}\alpha\\q\end{pmatrix} \tag{29}$$

$$= \begin{pmatrix}p^n(x_0-\alpha)+\alpha\\q\end{pmatrix} \tag{30}$$

だから，$\alpha = q/(1-p)$ として，$x_n = p^n(x_0-\alpha)+\alpha$ である．

5　階差数列

$x_{n+1} = x_n + y_n$ という漸化式を考える．$*$ には適当な値が入るとして，

$$\begin{pmatrix}y_n\\ *\\ \vdots\\ *\end{pmatrix} = B^n\begin{pmatrix}y_0\\ *\\ \vdots\\ *\end{pmatrix} \tag{31}$$

となるような行列 B が存在するとする．

$$A = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ \cdots \\ 0 \\ \vdots \quad\quad B \end{pmatrix} \tag{32}$$

と A を定めれば，

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\\ *\\ \vdots\\ *\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ *\\ \vdots\\ *\end{pmatrix} \tag{33}$$

となるから，A のジョルダン標準形を求めればよくなる．

$x_{n+1} = x_n + t^n$ を解く．$(t \neq 1)$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & t\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}x_0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_n\\t^n\end{pmatrix} \tag{34}$$

$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & t\end{pmatrix}$ の固有値は $1, t$ であり，固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\t-1\end{pmatrix}$ である．

$$\begin{pmatrix}x_n\\t^n\end{pmatrix} = \left(x_0 - \frac{1}{t-1}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{t^n}{t-1}\begin{pmatrix}1\\t-1\end{pmatrix} \tag{35}$$

よって，$x_n = x_0 + \dfrac{t^n - 1}{t - 1}$ である．
次に，$x_{n+1} = x_n + n^2$ を解く．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + nb + \frac{n(n-1)}{2}c \\ b + nc \\ c \end{pmatrix} \tag{36}$$

$a + nb + \frac{n(n-1)}{2}c = n^2$ が n によらず成り立つように a, b, c を定めれば，$a = 0,\ b = 1,\ c = 2$ である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ n^2 \\ 2n + 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{37}$$

したがって，$x_n = x_0 + \dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$ である．

6 一次分数型

$x_{n+1} = x_n^2$ のような漸化式は線形ではないが両辺の対数をとることで，$\log x_{n+1} = 2 \log x_n$ というように線形に変形できる．このような変形ができれば線形代数の問題に帰着できる．
ここでは，

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d} \tag{38}$$

という漸化式を考える．一見，線形代数に持ち込むのは難しく見えるが $x_n = y_n / z_n$ としてみると，

$$\frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} = x_{n+1} = \frac{ay_n + bz_n}{cy_n + dz_n} \tag{39}$$

となるから，分母と分子を別々に見れば，

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} \tag{40}$$

と考えることができる．分数を表すので 0 でない定数倍の違いを無視することになるが，これは射影空間を考えていることになる．これは，連分数展開による無理数の近似を考えるときなどにも用いることができる．たとえば，

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 2} \tag{41}$$

という漸化式があれば，適当な初項から始めることで $\sqrt{2} - 1$ に収束するはずである．$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値は $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$ であり，固有ベクトルはそれぞれ，$\begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．初項 $x_0 = 0$ とすると，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(1 + \sqrt{2})^n}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(1 - \sqrt{2})^n}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

である．

$$x_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n-1} + (1 - \sqrt{2})^{n-1}}{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n} \to \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \ (n \to \infty) \tag{43}$$

というように収束先を求めることもできる．

7　確率漸化式

点がいくつかあり，その上を一定の確率で動くという操作を繰り返したとき，ある点にいる確率を求めるというタイプの確率漸化式は行列で解くことができる．確率であることから行列の成分が非負であることや任意の列の成分の和が 1 となることがわかり，固有値 1 が存在しすべての固有値の絶対値が 1 以下であることなどもわかる．

点 X, Y があり，1 ステップで，X, Y にいるとき X, Y にとどまる確率をそれぞれ a, b とする ($a = b = 1$ ではないとする)．x_n, y_n はそれぞれこの操作を n ステップ繰り返したときに X, Y にいる確率とする．最初 X にいたとすると，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$\begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$ の固有値は $1, a+b-1$ であり，固有ベクトルはそれぞれ，$\begin{pmatrix} 1-b \\ 1-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．よって，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2-a-b} \left\{ \begin{pmatrix} 1-b \\ 1-a \end{pmatrix} + (a+b-1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \to \frac{1}{2-a-b} \begin{pmatrix} 1-b \\ 1-a \end{pmatrix} \ (n \to \infty) \tag{45}$$

である．

次に X, Y, Z の三点があり，n ステップ後にそれぞれの点にいる確率は x_n, y_n, z_n で，

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} z_n \\ y_{n+1} &= \frac{1}{3} z_n + \frac{2}{3} x_n \\ z_{n+1} &= \frac{1}{3} x_n + \frac{2}{3} y_n \end{cases} \tag{46}$$

を満たすとする．このとき，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

である．確率過程ではすべての点が対称である場合もよくある．そのような場合，漸化式に対応する n 次正方行列 A の成分が $A_{ij} = a_{i-j}$ である．ただし，任意の整数 k にたいして $a_{k+n} = a_k$ である．この場合，固有値を固有多項式から計算しなくても固有ベクトルが直接わかる．1 の原始 n 乗根を ϕ_n とすると，固有ベクトルは $m = 0, 1, \ldots, n-1$ として，${}^t\begin{pmatrix} 1 & \phi_n^m & \phi_n^{2m} & \cdots & \phi_n^{nm} \end{pmatrix}$ である．今回は 3 次なので，固有ベクトルは ω を 1 の三乗根として，$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}$ である．初項は $x_0 = 1, y_0 = z_0 = 0$ だとすると，

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(w_1 + w_2 + w_3) \tag{48}$$

それぞれの固有値を考えると，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left\{ w_1 + \left(\frac{\omega + 2\omega^2}{3} \right)^n w_2 + \left(\frac{2\omega + \omega^2}{3} \right)^n w_3 \right\} \tag{49}$$

である．