三次方程式の解の公式から複素数へ

かめさん　@cogitoergosumkm

虚数を定義することの理由は三次方程式の解の公式をみると納得しやすい．
三次方程式の解の公式はカルダーノが最初に発表したことから，カルダーノの公式と呼ばれる．それ以前にデルフェッロ，タルタリアによって発見されており，カルダーノはタルタリアから解法を聞いて発表したとされる．

1　三次方程式

三次方程式

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a_3 \neq 0) \tag{1.1}$$

問． $X = x + r$ とおくことで，$X^3 + pX + q = 0$ と方程式 (1.1) を変形する．p, q, r を a_0, a_1, a_2, a_3 を用いて表せ．
答． 方程式 (1.1) を $a_3 \neq 0$ でわる．

$$x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3} = 0 \tag{1.2}$$

$r = \frac{a_2}{3a_3}$ としてみると，

$$X = x + \frac{a_2}{3a_3} \tag{1.3}$$

$$X^3 = x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 x + \frac{1}{27}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 \tag{1.4}$$

$$\tag{1.5}$$

よって，

$$X^3 + pX + q = x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 + p\right\}x + \left\{\frac{1}{27}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 + \frac{a_2}{3a_3}p + q\right\} \tag{1.6}$$

したがって p, q, r は以下のように定めればよい．

$$p = \frac{a_1}{a_3} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{a_0}{a_3} - \frac{1}{27}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 - \frac{a_2}{3a_3}\left\{\frac{a_1}{a_3} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2\right\} \\ &= \frac{a_0}{a_3} - \frac{a_1a_2}{3a_3^2} + \frac{8}{27}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$r = \frac{a_2}{3a_3} \tag{1.9}$$

$X^3 + pX + q = 0$ をとけば，$x = X - r$ として x の解がわかる．以降は X を x で置き換え，$x^3 + px + q = 0$ の解の公式を考える．

2　因数分解

ここで，いったん三次方程式を忘れて因数分解を解く．

問． $x^3+y^3+z^3-3xyz$ を実数の範囲で因数分解せよ．

答．

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \tag{2.1}$$
$$x^3+y^3 = (x+y)^3-3xy(x+y) \tag{2.2}$$

を 2 回用いる．2 回目は $(x+y)$ を x，z を y とみて用いる．

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z) && (2.3)\\ &= (x+y+z)^3-3z(x+y)(x+y+z)-3xy(x+y+z) && (2.4)\\ &= (x+y+z)\{(x+y+z)^2-3xy-3yz-3zx\} && (2.5)\\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) && (2.6)\end{aligned}$$

因数分解すると $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

3　二次方程式

$x^3+px+q=0$ で $p=-3yz, q=y^3+z^3$ と置き換えると，$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ となる．

問． $p=-3yz, q=y^3+z^3$ とおく．y^3, z^3 を p, q を用いてあらわせ．(y, z の順序はどちらでもよい．)

答． $p^3=-27y^3z^3$ だから，解と係数の関係から，y^3, z^3 は以下の二次方程式の解である．

$$t^2-qt-\frac{p^3}{27}=0 \tag{3.1}$$

二次方程式の解の公式から，

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}\left(q \pm \sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right) && (3.2)\\ &= \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} && (3.3)\end{aligned}$$

したがって，

$$y^3 = \frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{3.4}$$
$$z^3 = \frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{3.5}$$

これが答えである．

もし，$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3 \geqq 0$ ならば，y^3, z^3 は実数である．実数の三乗根のうち実数であるものは存在して，一意に定まるから，

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{3.6}$$
$$z = \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{3.7}$$

4　$x^3 + px + q = 0$ の解

問. $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geqq 0$ のとき，$x^3 + px + q = 0$ の解を一つ求めよ.
答. $p = -3yz, q = y^3 + z^3$ とおけば，式 (2.6) より，

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz & (4.1)\\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) & (4.2)\\ &= 0 & (4.3) \end{aligned}$$

したがって，$x^3 + px + q = 0$ のある解は，

$$\begin{aligned} x &= -(y + z) & (4.4)\\ &= -\left[\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right] & (4.5) \end{aligned}$$

である.
　実際には，三次関数 $y = x^3 + px + q$ は，x が十分大きければ $y > 0$ であり，x が十分小さければ $y < 0$ であるから，必ず 1 つは実数解が存在するはずである．$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geqq 0$ を満たさなくても実数解が得られなくてはならない.

5　$x^3 - 15x - 4 = 0$ の解 (高次方程式として)

問. $x^3 - 15x - 4 = 0$ の解を求めよ.
答. $p = -15, q = -4$ とすると，

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 4 - 125 = -121 < 0 \tag{5.1}$$

となっており，ここまでの議論では解の公式 (4.5) は適用できない．そこで，$f(x) = x^3 - 15x - 4$ とおく．$f(4) = 4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$ だから，

$$\begin{aligned} x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1) &= 0 & (5.2)\\ x &= 4, -2 \pm \sqrt{3} & (5.3) \end{aligned}$$

三つの実数解をもつ.

6　虚数

　$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ となると，$y^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$，$z^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ は，平方根の中に負の数が入ってしまい，実数ではなくなる．しかし，先ほどの $x^3 - 15x - 4 = 0$ は，$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -121 < 0$ であるものの，三つの実数解を持っており，y, z は実数ではないが，それらの和は実数となっていることが期待される.
ここで，$i^2 = -1$ を満たす虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を定義する.
問. 以下の値を計算せよ．ただし，$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする.

(1). ω^2	(2). ω^3
(3). $(2 - i)^3$	(4). $(2 + i)^3$

答.

$$(1).\ \omega^2 = \frac{1-3-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \tag{6.1}$$

$$(2).\ \omega^3 = \omega^2 \times \omega = \frac{1+\sqrt{3}i-\sqrt{3}+3}{4} = 1 \tag{6.2}$$

$$(3).\ (2-i)^3 = 8-12i-6+i = 2-11i \tag{6.3}$$

$$(4).\ (2+i)^3 = 8+12i-6-i = 2+11i \tag{6.4}$$

7　$x^3 - 15x - 4 = 0$ の解 (解の公式から)

問. $x^3 - 15x - 4 = 0$ の解を求めよ．

答. $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -121 < 0$ となっているから，前提条件を満たさないが強引に解の公式 (4.5) を適用してみる．

$$x = -\left[\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{-2-\sqrt{-121}}\right] \tag{7.1}$$

$$= \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} \tag{7.2}$$

$$= \sqrt[3]{2-11i} + \sqrt[3]{2+11i} \tag{7.3}$$

$y = \sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}, z = \sqrt[3]{-2-\sqrt{-121}}$ であるから，$u = \sqrt[3]{2-11i}, v = \sqrt[3]{2+11i}$ とおくと，$u = -y, v = -z$ である．6 節の問と答を参考にすると，$u^3 = 2-11i, v^3 = 2+11i$ を満たす複素数はそれぞれ三つある．

$$u = 2-i,\ \omega(2-i),\ \omega^2(2-i) \tag{7.4}$$

$$v = 2+i,\ \omega(2+i),\ \omega^2(2+i) \tag{7.5}$$

$x = u+v$ と考えると，u, v の組み合わせ方は $3\times 3 = 9$ パターンあるが，$u = -y, v = -z$ であることと，$p = -3yz$ の条件に注意すれば，$(u, v) = (2-i, 2+i), (\omega(2-i), \omega^2(2+i)), (\omega^2(2-i), \omega(2+i))$ の 3 組である．これらについて $u+v$ を計算してみると，

$$(2-i)+(2+i) = 4 \tag{7.6}$$

$$\omega(2-i)+\omega^2(2+i) = -2+\sqrt{3} \tag{7.7}$$

$$\omega^2(2-i)+\omega(2+i) = -2-\sqrt{3} \tag{7.8}$$

このようにして，解が求まる．

8　因数分解 part2

問. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ を複素数の範囲で因数分解せよ．

答. 2 節の答から $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ である．

$$x^2 - (y+z)x + y^2 - yz + z^2 = 0 \tag{8.1}$$

$$x = \frac{y+z \pm \sqrt{(y+z)^2 - 4(y^2-yz+z^2)}}{2} \tag{8.2}$$

$$= \frac{y+z \pm \sqrt{-3y^2+6xy-3z^2}}{2} \tag{8.3}$$

$$= \frac{y+z \pm \sqrt{-3(y-z)^2}}{2} \tag{8.4}$$

$$= \frac{y+z \pm |y-z|\sqrt{3}i}{2} \tag{8.5}$$

$$= -\omega y - \omega^2 z,\ -\omega^2 y - \omega z \tag{8.6}$$

したがって，$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ である．これは 7 節の答と整合している．

9　まとめ

問． 一般の三次方程式 $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0\ (a_3\neq 0)$ の解の公式を求めよ．
答． 1 節より，$p=\frac{a_1}{a_3}-\frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2, q=\frac{a_0}{a_3}-\frac{a_1a_2}{3a_3^2}+\frac{8}{27}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3, r=\frac{a_2}{3a_3}, X=x+r$ とおくと，$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=X^3+pX+q$ である．
8 節より，$X^3+y^3+z^3-3Xyz=(X+y+z)(X+\omega y+\omega^2 z)(X+\omega^2 y+\omega z)$ だから，3 節，7 節から，

$$x=-r-\left[\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right], \tag{9.1}$$

$$-r-\left[\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right] \tag{9.2}$$

$$-r-\left[\omega^2\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right] \tag{9.3}$$

ただし，$\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$，$\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ の三乗根は，これらの積が $-\frac{p}{3}$ となるようにとる．

参考文献

[1] 抽象代数の歴史，I・クライナー，斎藤正彦 訳，2011，日本評論社