角の位相的性質

かめさん　@cogitoergosumkm

概要

角の位相 (topology) 的性質について考えた．

１節ではユークリッド空間上の角が満たすべき性質からはじめて，角の空間と $[-1,1]$ の同相を示した．２節では角の満たすべき条件を少し強めた場合を考え，特にこの定義では 2 次元の場合の平面角が円周 S^1 と同相となることを示した．３節では平面角について演算を定め $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ との間で同相かつ演算が群同型となる写像があることを示した．

ユークリッド空間上の等長変換については [1] を参考にした．

かなり煩雑となった部分や省略もあり誤っているかもしれないが大枠の流れは正しいはずだ．さらに三角関数やラジアンについても考察したかったがどのように定義してもうまく証明できなかったため断念した．今後思いつけば書き加えたい．

1　n 次元ユークリッド空間上の角

ユークリッド空間上の二つの始点を同じくする半直線 SX, SY によって決まり，等長変換[*1]によって保存するものを角という．以下厳密に定義する．

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の半直線は始点 $S \in \mathbb{R}^n$ ともう一つの S と異なる通る点 $X \in \mathbb{R}^n$ によって定まる．ここで X として S との距離が $|SX| = 1$ となるものをとることとして $\Lambda_n = \{(X; S) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid |SX| = 1\}$ を考える．半直線上で始点からの距離が 1 となる点はただ一つ存在するから，Λ_n は n 次元ユークリッド空間上の半直線の集合とみなすことができる．以下では $n \geq 2$ の場合のみ考える．

半直線の定義と同様にして，二つの始点を同じくする半直線の集合を定義する．

定義 1.1 (二つの始点を同じくする半直線)**.**
n 次元ユークリッド空間上の二つの始点を同じくする半直線の集合 Ξ_n を以下のように定義する．

$$\Xi_n = \{(X, Y; S) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid |SX| = |SY| = 1\} \tag{1}$$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ の位相は $\mathbb{R}^{3n}$ の距離位相 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{3n}}$ とし，Ξ_n の位相は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ の部分集合とみたときの相対位相[*2]として与えられる．

n 次元ユークリッド空間上の角は Ξ_n の元を一つ与えればそれに伴って一つに定まるが，それは等長変換によって変化しないものとしたい．そこで以下のように定義する．

[*1] 等長変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とは，任意の $X, Y \in \mathbb{R}^n$ に対して距離 $|f(X)f(Y)| = |XY|$ となるものである．

[*2] 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ があるとき，X の部分集合 Y に対して，$\{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$ として定められる位相を相対位相という．

定義 1.2 (角の定義 (1))**.**
n 次元ユークリッド空間上の等長変換 f が存在して，

$$(f(X'), f(Y'); f(S')) = (X, Y; S) \tag{2}$$

となるとき $(X', Y'; S') \sim (X, Y; S)$ とすると，これは同値関係となる*3．商集合 $\Theta_n = \Xi_n/\sim$ を n 次元ユークリッド空間上の角の集合であると定義する．このとき，$\Theta_n = \Xi_n/\sim$ の位相は商位相*4として定める．

$\theta \in \Theta$ が，

$$\theta = \{(X', Y'; S') \in \Xi_n \mid \text{等長変換 } f \text{ が存在して } (f(X'), f(Y'); f(S')) = (X, Y; S)\} \tag{3}$$

であるとき，$g\colon \Theta_n \to [-1, 1]$ を

$$g(\theta) = \overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SY} \tag{4}$$

と定義する．$\overrightarrow{SX}, \overrightarrow{SY} \in \mathbb{R}^n$ であり，$\cdot$ は内積*5である．これが well-defined であることを示す．
ユークリッド空間の等長変換 f は $f = f_T \circ f_L$ のように平行移動 f_T と線形変換 f_L との合成としてかけることが知られている [1].

$$\overrightarrow{\{f_T \circ f_L(S)\}\{f_T \circ f_L(X)\}} = \overrightarrow{f_L(S) f_L(X)} = f_L\left(\overrightarrow{SX}\right) \tag{5}$$

となるが，f_L は線形な等長変換であるから直交変換 $O(n)$ の元である．直交変換によって内積は保存するから，

$$\overrightarrow{f(S)f(X)} \cdot \overrightarrow{f(S)f(Y)} = f_L\left(\overrightarrow{SX}\right) \cdot f_L\left(\overrightarrow{SY}\right) = \overrightarrow{SX}\overrightarrow{SY} \tag{6}$$

となるから，g は well-defined である．
閉区間 $[-1, 1]$ の位相は $\mathbb{R}$ の部分集合として相対位相によって定められているとする．

定理 1.1. $g(\theta) = \overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SY}$ と定められた $g\colon \Theta_n \to [-1, 1]$ は同相写像であり，

$$\Theta_n \simeq [-1, 1] \tag{7}$$

つまり，角の集合 Θ_n と閉区間 $[-1, 1]$ は同相である．

Proof. まず，逆写像 g^{-1} がとれることを証明する．

$$g(\theta_1) = g(\theta_2) \tag{8}$$

$$\overrightarrow{S_1X_1} \cdot \overrightarrow{S_1Y_1} = \overrightarrow{S_2X_2} \cdot \overrightarrow{S_2Y_2} \tag{9}$$

と仮定する．$f_{L1} \in O(n)$ を $f_{L1}\left(\overrightarrow{S_2Y_2}\right) = \overrightarrow{S_1Y_1}$ を満たすようにとる．これは S_1Y_1, S_2Y_2 がともに長さが 1 であるから可能である．

$$\overrightarrow{S_2X_2} \cdot \overrightarrow{S_2Y_2} = f_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) \cdot f_{L1}\left(\overrightarrow{S_2Y_2}\right) \tag{10}$$

$$= f_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) \cdot \overrightarrow{S_1Y_1} \tag{11}$$

---

*3 ユークリッド空間上の等長変換は群をなしていることからわかる．恒等変換の存在，f の逆変換の存在，等長変換を繰り返しても等長変換であることを言えばよい．

*4 商集合 $X/\sim$ に対して $\{U \subset X/\sim \mid \bigcup_{u \in U} u \in O_X\}$ を商位相という．ただし，同値類 u が $u \in U \subset X/\sim$ でも $u \subset X$ でもあることを用いた．

*5 $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y}(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ の内積は $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ と定める．$(\vec{x} + t\vec{y})^2 = 0$ の t についての判別式を考えることで $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ を示す証明は有名である．

したがって，

$$\left(\overrightarrow{S_1X_1} - f_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right)\cdot\overrightarrow{S_1Y_1} = 0 \tag{12}$$

$\overrightarrow{S_1X_1} - f_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) = \vec{0}$ のとき，f_{L2} を恒等変換とする．$\overrightarrow{S_1X_1} - f_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) \neq \vec{0}$ のとき，$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底を $e_1,\ldots,e_n$ として，

$$e_1 = \overrightarrow{S_1Y_1} \tag{13}$$

$$e_2 = \frac{\overrightarrow{S_1X_1} - f_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)}{\left|\overrightarrow{S_1X_1} - f_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|} \tag{14}$$

として，

$$f_{L2}(e_i) = \begin{cases} e_i & (i \neq 2) \\ -e_i & (i = 2) \end{cases} \tag{15}$$

と定めれば，$f_{L2}\left(\overrightarrow{S_1Y_1}\right) = \overrightarrow{S_1Y_1}$ であり，$f_{L2}\circ f_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) = \overrightarrow{S_1X_1}$ である．$f_L = f_{L2}\circ f_{L1}$ とすれば，$\overrightarrow{S_1X_1} = \overrightarrow{f_L(S_2)f_L(X_2)}$ かつ $\overrightarrow{S_1Y_1} = \overrightarrow{f_L(S_2)f_L(Y_2)}$ である．平行移動を $f_T(S_2) = S_1$ となるようにとれば，$(X_1,Y_1;S_1) = (f_T\circ f_L(X_2), f_T\circ f_L(Y_2); f_T\circ f_L(S_2))$ となる．したがって $(X_1,Y_1;S_1)\sim(X_2,Y_2;S_2)$ となり $\theta_1 = \theta_2$ がいえる．これで g の単射性が示された．一方全射性は任意の $\gamma\in[-1,1]$ に対して適当な正規直交基底 $e_1,\ldots e_n$ に対して $(\gamma e_1 + \sqrt{1-\gamma^2})\cdot e_1 = \gamma$ となることからわかる．したがって，g は全単射であり，g^{-1} をとることができる．

次に，g が同相写像であることを示す．閉区間 $[-1,1]$ の開集合はすべて $[-1,a),(b,1],(a,b) = [-1,a)\cup(b,1]\ (a,b\in[-1,1])$ のいずれかで書ける開集合の和集合としてあらわすことができる．したがって，$g^{-1}([-1,a)), g^{-1}((b,1])$ の二つの場合について開集合であることを確認すれば g が連続写像であるといえる．

$$\bigcup_{\theta\in g^{-1}([-1,a))}\theta = \left\{(X,Y;S)\in\Xi_n \,\middle|\, \overrightarrow{SX}\cdot\overrightarrow{SY} < a\right\} \tag{16}$$

$$= \left\{(\vec{x}+\vec{s},\vec{y}+\vec{s};\vec{s})\in\mathbb{R}^{3n} \,\middle|\, \vec{x}\cdot\vec{y} < a|\vec{x}||\vec{y}|\right\}\cap\Xi_n \tag{17}$$

$\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$ は $\vec{x}\neq\vec{0}$かつ$\vec{y}\neq\vec{0}$ において連続だから，$\mathbb{R}^{3n}$ のある開集合 U があって，

$$\left\{(\vec{x}+\vec{s},\vec{y}+\vec{s};\vec{s})\in\mathbb{R}^{3n} \,\middle|\, \vec{x}\cdot\vec{y} < a|\vec{x}||\vec{y}|\right\} = U\cap\left\{(\vec{x}+\vec{s},\vec{y}+\vec{s};\vec{s})\in\mathbb{R}^{3n} \,\middle|\, \vec{x}\neq\vec{0}\text{かつ}\vec{y}\neq\vec{0}\right\} \tag{18}$$

$\left\{(\vec{x}+\vec{s},\vec{y}+\vec{s};\vec{s})\in\mathbb{R}^{3n} \,\middle|\, \vec{x}\neq\vec{0}\text{かつ}\vec{y}\neq\vec{0}\right\}$ は $\mathbb{R}^{3n}$ 上の開集合だから，$\left\{(\vec{x}+\vec{s},\vec{y}+\vec{s};\vec{s})\in\mathbb{R}^{3n} \,\middle|\, \vec{x}\cdot\vec{y} < a|\vec{x}||\vec{y}|\right\}$ も $\mathbb{R}^{3n}$ の開集合であり，したがって $g^{-1}([-1,a))$ は $[-1,1]$ 上の開集合である．同様にして

$$\bigcup_{\theta\in g^{-1}((b,1])}\theta = \left\{(X,Y;S)\in\Xi_n \,\middle|\, \overrightarrow{SX}\cdot\overrightarrow{SY} > b\right\} \tag{19}$$

$$= \left\{(\vec{x}+\vec{s},\vec{y}+\vec{s};\vec{s})\in\mathbb{R}^{3n} \,\middle|\, \vec{x}\cdot\vec{y} > b|\vec{x}||\vec{y}|\right\}\cap\Xi_n \tag{20}$$

を考えれば $g^{-1}((b,1])$ も開集合であり，g は連続写像であるとわかる．

標準的な射影[*6]$p\colon \Xi_n\to\Theta_n$ とすると，Θ_n の開集合 T に対して $p^{-1}(T) = \bigcup_{\theta\in W}\theta$ は開集合であるから，$\mathbb{R}^{3n}$

[*6] 標準的な射影 $p\colon X\to X/\sim$ は任意の $x\in X$ について $x\in p(x) = \{x'\in X | x'\sim x\}$ となる写像である．

の開集合 U として，

$$p^{-1}(T) = U \cap \Xi_n \tag{21}$$

$$T = p\left(\bigcup_i U \cap \Xi_n\right) = \bigcup_i p(U \cap \Xi_n) \tag{22}$$

となる．したがって，$\{p(U \cap \Xi_n)\}$ は Θ_n の開集合である．つまり，$g(p(U \cap \Xi_n))$ が開集合であることを示せば g^{-1} が連続であるとわかる．

$$g_1((X, Y; S)) = \left(\overrightarrow{SX}, \overrightarrow{SY}\right) \tag{23}$$

$$g_2\left(\overrightarrow{SX}, \overrightarrow{SY}\right) = \overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SY} \tag{24}$$

とすると，$g \circ p = g_2 \circ g_1$ である．$(X_0, Y_0, S_0) \in U$ のまわりでこの開集合 U の部分集合になるような $\mathbb{R}^{3n}$ 上の開球をとることを考えると，$S = S_0$ と固定した時，$U \cap \{(X, Y, S_0) | X, Y \in \mathbb{R}^n\}$ を $(X, Y) \in \mathbb{R}^{2n}$ となるように射影した集合は $\mathbb{R}^2$ 上の開集合である必要がある．この開集合をそれぞれ $W(S_0)$ とかき，$f_{T_{S_0}}$ を $-S_0$ だけ平行移動する写像とすると，

$$g_1(U) = \bigcup_{S_0 \in \mathbb{R}^n} f_{T_{S_0}}(W(S_0)) \tag{25}$$

$\mathbb{R}^{2n}$ 上で開集合を平行移動しても開集合だから $g_1(U)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上の開集合である．$g_1(\Xi_n) = \{(\vec{x}, \vec{y}) \mid |\vec{x}| = |\vec{y}| = 1\}$，$g_1(\mathbb{R}^{3n} \setminus \Xi_n) = \mathbb{R}^{2n} \setminus \{(\vec{x}, \vec{y}) \mid |\vec{x}| = |\vec{y}| = 1\}$ だから，

$$g_1(U \cap \Xi_n) = \left\{\bigcup_{S_0 \in \mathbb{R}^n} f_{T_{S_0}}(W(S_0))\right\} \cap \{(\vec{x}, \vec{y}) \mid |\vec{x}| = |\vec{y}| = 1\} \tag{26}$$

これは $\{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |\vec{x}| = |\vec{y}| = 1\}$ 上の相対位相での開集合である．$(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in U'$ のまわりで開集合 U' の部分集合である開球をとることを考えると，$\vec{y} = \vec{y}_0$ と固定した時，$U' \cap \{(\vec{x}, \vec{y}_0) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ を $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ となるように射影した集合は $\mathbb{R}^n$ 上の開集合である必要がある．$|\vec{y}_0| = 1$ となるものに固定したとして，$h_{\vec{y}_0} \colon \mathbb{R}^n \to \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \geq 0\}$ を

$$h_{\vec{y}_0}(\vec{x}) = \left(\vec{x} \cdot \vec{y}_0,\ \sqrt{|\vec{x}|^2 - \vec{x} \cdot \vec{y}_0}\right) \tag{27}$$

と定義する．$\mathbb{R}^n$ 上の開球は $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \geq 0\}$ 上の開集合に写される．さらに，$h_{\vec{y}_0}(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x}| = 1\}) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1$ かつ $b \geq 0\}$，$h_{\vec{y}_0}(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x}| \neq 1\}) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 \neq 1$ かつ $b \geq 0\}$ だから，U'' を $\mathbb{R}^n$ 上の開集合として，

$$h_{\vec{y}_0}(U'' \cap \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x}| = 1\}) = h_{\vec{y}_0}(U'') \cap \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1 \text{ かつ } b \geq 0\} \tag{28}$$

となる．$h \colon \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1$ かつ $b \geq 0\} \to [-1, 1]$ を $h(a, b) = a$ と定めると $h^{-1}(a) = (a, \sqrt{1 - a^2})$ となるから全単射で相対位相を考えると h, h^{-1} ともに連続だから同相写像である．したがって，$\mathbb{R}^{2n}$ 上の開集合 U' について以下のようになる．

$$g_2(U' \cap \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |\vec{x}| = |\vec{y}| = 1\}) = \bigcup_{|\vec{y}_0| = 1} h \circ h_{\vec{y}_0} \circ q(U' \cap \{(\vec{x}, \vec{y}_0) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |\vec{x}| = 1\}) \tag{29}$$

ただし $q(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}$ とした．ここまでの議論から $h \circ h_{\vec{y}_0} \circ q(U' \cap \{(\vec{x}, \vec{y}_0) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |\vec{x}| = 1\})$ は開集合だから $g_2(U' \cap \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |\vec{x}| = |\vec{y}| = 1\})$ も開集合である．したがって，$g_2 \circ g_1(U \cap \Xi_n) = g \circ p(U \cap \Xi_n)$ も開集合であることがわかり，g^{-1} も連続である．よって g は同相写像であり，$\Theta_n \simeq [-1, 1]$ である． □

実 n 次元内積空間 V の二つのゼロベクトルでない元 v, w に対して，$\{sv \in V \mid s \geq 0\}, \{tw \in V \mid t \geq 0\}$ はともに原点を通る半直線とみなすことができ，これらがつくる角を v, w がなす角と定義できる．写像 g を用いると以下のように定義できる．

定義 1.3. 実 n 次元内積空間 V の二つのゼロベクトルでない元 v, w に対して，

$$\theta = g^{-1}\left(\frac{v \cdot w}{|v||w|}\right) \tag{30}$$

と角を定義する．

2 平面角の特殊性

2 次元ユークリッド空間上の二つの始点を同じくする半直線 SX, SY によって決まり，向きを保つ等長変換[*7]によって保存するものを平面角という．

定義 2.1.
n 次元ユークリッド空間上の向きを保つ等長変換 $\tilde{f}$ が存在して，

$$(\tilde{f}(X'), \tilde{f}(Y'); \tilde{f}(S')) = (X, Y; S) \tag{31}$$

となるとき $(X', Y'; S') \equiv (X, Y; S)$ とすると，これは同値関係となる[*8]商集合 $\tilde{\Theta}_n = \Xi_n/\equiv$ を n 次元ユークリッド空間上の角の集合であると定義する．このとき，$\tilde{\Theta}_n = \Xi_n/\equiv$ の位相は商位相として定める．特に $n = 2$ のとき $\tilde{\Theta}_2$ を平面角と定義する．

$n \geq 3$ の場合は以下の定理から特別に考える必要がないことがわかる．

定理 2.1. $n \geq 3$ のとき，定義 *1.2* で定義された Θ_n と定義 *2.1* で定義された $\tilde{\Theta}_n$ は同相 $\Theta_n \simeq \tilde{\Theta}_n$ である．

Proof. $g' : \tilde{\Theta}_n \to [-1, 1]$ を，

$$g'(\tilde{\theta}) = \overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SY} \tag{32}$$

と定義する．ユークリッド空間の向きを保つ等長変換 $\tilde{f}$ は $\tilde{f} = \tilde{f}_T \circ \tilde{f}_L$ のように平行移動 $\tilde{f}_T$ と線形変換 $\tilde{f}_L$ との合成としてかけて，$\tilde{f}_L$ は特殊直交変換である，つまり $\tilde{f}_L \in SO(n)$ である．g と同様に考えれば，特殊直交変換 $SO(n)$ でも内積は保たれるから g' は well-defined である．
g' の全射性は g と同様に示すことができ，単射性は $f_L = f_{L2} \circ f_{L1}$ と分解したのと同様に $\tilde{f}_L = \tilde{f}_{L2} \circ \tilde{f}_{L1}$ と分解する．$\tilde{f}_{L1}$ については f_{L1} が満たすのと同じ条件でとることができる．
$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底を $e_1, \ldots, e_n$ として，$\tilde{f}_{L2}$ については以下のように取り直す．

[*7] 二組の正規直交基底に対して一方をもう一方に変換する直交行列の行列式が 1 のとき基底の向きが等しいと言い，-1 のとき基底の向きが異なると言う．多様体の向きもその接ベクトル空間の向きを利用して定義できることがある．ユークリッド空間の等長変換 f が向きを保つというのは $f = f_T \circ f_L$ のように平行移動と線形変換に分解したとき，直交変換 f_L の表現行列の行列式が 1 である，つまり f_L が特殊直交変換であることと定義する．

[*8] ユークリッド空間上の向きを保つ等長変換は群をなしていることからわかる．基本的には等長変換の場合と同じであるが，向きについてはあらかじめ正規直交基底 $e_1, \ldots e_n$ をとっておき，変換後の基底 $\tilde{f}(e_1) - \tilde{f}(0), \ldots, \tilde{f}(e_n) - \tilde{f}(0)$ と向きが同じであるかを考えればよい．

$\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) = \vec{0}$ のとき，$\tilde{f}_{L2}$ を恒等変換とする．
$\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) \neq \vec{0}$ のとき，$\overrightarrow{S_1X_1} + \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) = 0$ であれば，

$$e_1 = \overrightarrow{S_1Y_1} \tag{33}$$

$$e_2 = \overrightarrow{S_1X_1} \tag{34}$$

となるようにとり，

$$\tilde{f}_{L2}(e_i) = \begin{cases} e_i & (i \neq 2 \text{ かつ } i \neq 3) \\ -e_i & (i = 2 \text{ または } i = 3) \end{cases} \tag{35}$$

とする．$\overrightarrow{S_1X_1} + \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) \neq 0$ であれば，

$$e_1 = \overrightarrow{S_1Y_1} \tag{36}$$

$$e_2 = \frac{\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)}{\left|\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|} \tag{37}$$

$$e_3 = \frac{\overrightarrow{S_1X_1} + \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)}{\left|\overrightarrow{S_1X_1} + \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|} \tag{38}$$

となるようにとり，

$$\tilde{f}_{L2}(e_i) = e_i \ (i \neq 2 \text{ かつ } i \neq 3) \tag{39}$$

$$\tilde{f}_{L2}(e_2) = \alpha e_2 - \beta e_3 \tag{40}$$

$$\tilde{f}_{L2}(e_3) = \beta e_2 + \alpha e_3 \tag{41}$$

とする．ただし，$\alpha^2 + \beta^2 = 1$ である．さらに $\tilde{f}_{L2} \circ \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) = \overrightarrow{S_1X_1}$ を満たすように α,β を定める．左辺を計算すると，

$$\tilde{f}_{L2} \circ \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) \tag{42}$$

$$= \tilde{f}_{L2}\left(-\frac{\left|\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|}{2} e_2 + \frac{\left|\overrightarrow{S_1X_1} + \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|}{2} e_3\right) \tag{43}$$

$$= \alpha \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) + \frac{\beta}{2}\left(\frac{\left|\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{S_1X_1} + \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|}\left(\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right) + \frac{\left|\overrightarrow{S_1X_1} + \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|}\left(\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right)\right) \tag{44}$$

$$= \alpha \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) + \beta \frac{\left(\left|\overrightarrow{S_1X_1}\right|^2 + \left|\tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|^2\right)\overrightarrow{S_1X_1} - 2\left(\overrightarrow{S_1X_1} \cdot \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right)\tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)}{\left|\overrightarrow{S_1X_1} + \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|\left|\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|} \tag{45}$$

$$= \frac{\beta\left(\left|\overrightarrow{S_1X_1}\right|^2 + \left|\tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|^2\right)}{\left|\overrightarrow{S_1X_1} + \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|\left|\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|}\overrightarrow{S_1X_1} + \left(\alpha - \frac{2\beta\left(\overrightarrow{S_1X_1} \cdot \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right)}{\left|\overrightarrow{S_1X_1} + \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|\left|\overrightarrow{S_1X_1} - \tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|}\right)\tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) \tag{46}$$

となるから，

$$\alpha = \frac{2\,\overrightarrow{S_1X_1}\cdot\tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)}{\left|\overrightarrow{S_1X_1}\right|^2+\left|\tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|^2} \tag{47}$$

$$\beta = \frac{\left|\overrightarrow{S_1X_1}+\tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|\left|\overrightarrow{S_1X_1}-\tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{S_1X_1}\right|^2+\left|\tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)\right|^2} \tag{48}$$

とすればよい．$\alpha^2+\beta^2$ も成り立っている．
このように基底と $\tilde{f}_{L2}$ を定めればいずれの場合でも，$\tilde{f}_{L2}\left(\overrightarrow{S_1Y_1}\right)=\overrightarrow{S_1Y_1}$ であり，$\tilde{f}_{L2}\circ\tilde{f}_{L1}\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right)=\overrightarrow{S_1X_1}$ である．$\tilde{f}_L=\tilde{f}_{L2}\circ\tilde{f}_{L1}$ とすれば，$\overrightarrow{S_1X_1}=\overrightarrow{\tilde{f}_L(S_2)\tilde{f}_L(X_2)}$ かつ $\overrightarrow{S_1Y_1}=\overrightarrow{\tilde{f}_L(S_2)\tilde{f}_L(Y_2)}$ である．平行移動については定理 1.1 と同様にすれば g' の単射性が言える．g' が $\tilde{\Theta}_n\simeq[-1,1]$ という同相を定めることも定理 1.1 と同様に示すことができる．したがって，$\tilde{\Theta}_n\simeq[-1,1]\simeq\Theta_n$ である． □

$n=2$ の場合にも $g'\colon\tilde{\Theta}_2\to[-1,1]$ を考えると，上の定理 2.1 の証明で基底が e_1,e_2,e_3 と三つ必要になった部分の議論が成立せず g' は単射ではない．
$v_1=(x_1,y_1),v_2=(x_2,y_2)\mathbb{R}^2$ とするとき，外積[*9]$v_1\times v_2$ を次のように定義する．

$$v_1\times v_2 = x_1y_2-x_2y_1 \tag{49}$$

$v_1\times v_2=-v_2\times v_1$ であることに注意する．さらに，$\eta(x,y)=(y,-x)$ と定義すると，

$$v_1\times v_2 = v_1\cdot\eta v_2 \tag{50}$$

である．

定理 2.2. 円周 $S^1\simeq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ とする．$\tilde{g}\colon\tilde{\Theta}_2\to\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ を，

$$\tilde{g}(\tilde{\theta})=(\overrightarrow{SX}\cdot\overrightarrow{SY},\overrightarrow{SX}\times\overrightarrow{SY}) \tag{51}$$

は同相写像であり，$\tilde{\Theta}_2\simeq S^1$ である．

Proof. 内積は特殊直交変換 $\tilde{f}_L$ に対して保存する．
$\tilde{f}_L$ が二次元の特殊直交変換 $SO(2)$ であるとき適当な $a^2+b^2=1$ を満たす実数 a,b があって $\tilde{f}_L(x,y)=(ax-by,bx+ay)$ と書ける．このとき，

$$\begin{aligned}\eta\circ\tilde{f}_L(x,y)&=\eta(ax-by,bx+ay) &(52)\\&=(ay+bx,by-ax) &(53)\\&=\tilde{f}_L(y,-x) &(54)\\&=\tilde{f}_L\circ\eta(x,y) &(55)\end{aligned}$$

[*9] 外積と呼ばれる演算はいくつか存在し，一般的に最もよく見るのは三次元のベクトル積 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ だろう．ここで定義した $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ となる外積は $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ に対して三次元の外積 $(x_1,y_1,0)\times(x_2,y_2,0)$ の z 成分をとることと同じことである．

であり，$v_1 \times v_2 = v_1 \cdot \eta v_2$ だから，外積も保存する．よって，$\tilde{g}$ が well-defined である．
$\tilde{g}$ の全射性は $\overrightarrow{SX} = (1,0)$ の場合に $\overrightarrow{SY}$ を変化させて考えればわかる．

$$\tilde{g}(\tilde{\theta}_1) = \tilde{g}(\tilde{\theta}_2) \tag{56}$$

$$\left(\overrightarrow{S_1X_1} \cdot \overrightarrow{S_1Y_1}, \overrightarrow{S_1X_1} \times \overrightarrow{S_1Y_1}\right) = \left(\overrightarrow{S_2X_2} \cdot \overrightarrow{S_2Y_2}, \overrightarrow{S_2X_2} \times \overrightarrow{S_2Y_2}\right) \tag{57}$$

$\tilde{f}_T(S_1) = \tilde{f}'_T(S_2) = (0,0) = O$，$\tilde{f}_L\left(\overrightarrow{S_1X_1}\right) = \tilde{f}'_L\left(\overrightarrow{S_2X_2}\right) = (1,0)$ ととると，

$$\left((1,0) \cdot \overrightarrow{O\left\{\tilde{f}_L \circ \tilde{f}_T(Y_1)\right\}}, (1,0) \times \overrightarrow{O\left\{\tilde{f}_L \circ \tilde{f}_T(Y_1)\right\}}\right) = \left((1,0) \cdot \overrightarrow{O\left\{\tilde{f}'_L \circ \tilde{f}'_T(Y_2)\right\}}, (1,0) \times \overrightarrow{O\left\{\tilde{f}'_L \circ \tilde{f}'_T(Y_2)\right\}}\right) \tag{58}$$

$(1,0) \cdot (x,y) = x$，$(1,0) \times (x,y) = y$ だからそれぞれ v の x, y 座標である．したがって，

$$\tilde{f}_L \circ \tilde{f}_T(Y_1) = \tilde{f}'_L \circ \tilde{f}'_T(Y_2) \tag{59}$$

である．また，$\tilde{f}_L(O) = \tilde{f}'_L(O) = O$ だから，

$$\tilde{f}_L \circ \tilde{f}_T(S_1) = \tilde{f}'_L \circ \tilde{f}'_T(S_2) \tag{60}$$

$$\tilde{f}_L \circ \tilde{f}_T(X_1) = \tilde{f}'_L \circ \tilde{f}'_T(X_2) \tag{61}$$

だから，$\tilde{g}(\tilde{\theta}_1) = \tilde{g}(\tilde{\theta}_2)$ であり，$\tilde{g}$ は単射である．
$\tilde{W}_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ かつ } x < a\}, \tilde{W}_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ かつ } x > b\}$ とすると，

$$\bigcup_{\tilde{\theta} \in \tilde{g}^{-1}(\tilde{W}_a)} \tilde{\theta} = \bigcup_{\theta \in g^{-1}([-1,a))} \theta \tag{62}$$

$$\bigcup_{\tilde{\theta} \in \tilde{g}^{-1}(\tilde{W}_b)} \tilde{\theta} = \bigcup_{\theta \in g^{-1}((b,1])} \theta \tag{63}$$

となるから，$\tilde{g}^{-1}(\tilde{W}_a), \tilde{g}^{-1}(\tilde{W}_b)$ は開集合であり，
$\tilde{W}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ かつ } y > 0\}, \tilde{W}_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ かつ } y < 0\}$ とすると，

$$\bigcup_{\tilde{\theta} \in \tilde{g}^{-1}(\tilde{W}_+)} \tilde{\theta} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2; x_0, y_0) \in \mathbb{R}^6 \mid (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) > 0\} \cap \{(x_1, y_1, x_2, y_2; x_0, y_0) \in \mathbb{R}^6 \mid (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - \tag{64}$$

$$\bigcup_{\tilde{\theta} \in \tilde{g}^{-1}(\tilde{W}_-)} \tilde{\theta} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2; x_0, y_0) \in \mathbb{R}^6 \mid (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) < 0\} \cap \{(x_1, y_1, x_2, y_2; x_0, y_0) \in \mathbb{R}^6 \mid (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - \tag{65}$$

だから，$\tilde{g}^{-1}(\tilde{W}_+), \tilde{g}^{-1}(\tilde{W}_-)$ も開集合である．$\tilde{W}_a, \tilde{W}_b, \tilde{W}_+, \tilde{W}_-$ の 3 個以内の共通部分で $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ の開基を作ることができから，g が連続であるとわかる．

$$g_1((X, Y; S)) = \left(\overrightarrow{SX}, \overrightarrow{SY}\right) \tag{66}$$

$$g_3\left(\overrightarrow{SX}, \overrightarrow{SY}\right) = (\overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SY}, \overrightarrow{SX} \times \overrightarrow{SY}) \tag{67}$$

標準的な射影 $\tilde{p} \colon \Xi_n \to \tilde{\Theta}_2$ とすると，$\tilde{g} \circ \tilde{p} = g_3 \circ g_1$ である．$g_1(U\Xi_n)$ が開集合となることは定理 1.1 の証明で示されている．$v, w \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ として，

$$\tilde{h}_w(v) = (v \cdot w, v \times w) \tag{68}$$

とする．$|w|=1$ とすると，$\tilde{h}_w(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\})=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$，かつ，$\tilde{h}_w(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\neq 1\})=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\neq 1\}$ となる．$\tilde{q}\colon (v,w)\to v$ とし，U' を $\mathbb{R}^4$ 上の開集合とすれば，

$$g_3(U'\cap\{(v,w)\in\mathbb{R}^4 \mid |v|=|w|=1\}) = \bigcup_{w_0\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\}} \tilde{h}_{w_0}\circ\tilde{q}(U'\cap\{(v,w_0)\in\mathbb{R}^4 \mid |v|=1\}) \tag{69}$$

$$\tag{70}$$

$\tilde{q}(U'\cap\{(v,w_0)\in\mathbb{R}^4 \mid |v|=1\})$ は $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\}$ 上の開集合であり，よって $\tilde{h}_{w_0}\circ\tilde{q}(U'\cap\{(v,w_0)\in\mathbb{R}^4 \mid |v|=1\})$ も $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\}$ の開集合であり，したがって $g_3(U'\cap\{(v,w)\in\mathbb{R}^4 \mid |v|=|w|=1\})$ も $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\}$ の開集合である．$\tilde{g}^{-1}$ も連続であるといえたから，$\tilde{g}$ は同相写像であり，$\tilde{\Theta}_2\simeq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}\simeq S^1$ である．□

3 平面角に定められる二項演算

定義 3.1. $\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2\in\tilde{\Theta}_2$ の代表元として $(X,Y;S),(Y,Z;S)$ となるものがとれたとき，

$$\tilde{\theta}_1\oplus\tilde{\theta}_2=\tilde{\theta}_3\ni(X,Z;S) \tag{71}$$

と定義する．

適当な代表元 $(X,Y;S)$ に対して平行移動 $\tilde{f}_T(S)=(0,0)$ となるようにとり，$\tilde{f}_T(X)=(a,b)$ であれば，$\tilde{f}_L((x,y))=(ax+by,-bx+ay)$ をとることで，$\tilde{f}_L\circ\tilde{f}_T(X)=(1,0)$ とできる．$\tilde{f}_T,\tilde{f}_L$ で $\tilde{f}_L\circ\tilde{f}_T(X)=(1,0)$，$\tilde{f}_L\circ\tilde{f}_T(S)=(0,0)$ となる変換はこれしかないから次のことが言える．
$O=(0,0),A=(1,0)$ とすると，$\tilde{\theta}\in\tilde{\Theta}_2$ の代表元として $(A,B(\tilde{\theta});O)$ をとることができ，$B(\tilde{\theta})$ はただ一つに定まる．
したがって，$\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2\in\tilde{\Theta}_2$ の代表元として $(A,B(\tilde{\theta}_1);O),(A,B(\tilde{\theta}_2);O)$ をとることができ，$B(\tilde{\theta}_1)=(c,d)$ のとき，$\tilde{f}'_L((x,y))=(cx-dy,dx+cy)$ とすると $\tilde{f}'_L(A)=B(\tilde{\theta}_1)$ であり，$(B(\tilde{\theta}_1),\tilde{f}'_L(B(\tilde{\theta}_2));O)$ も $\tilde{\theta}_2$ の代表元である．$\tilde{f}'_L(A)=B(\tilde{\theta}_1)$ となる特殊直交変換[*10]は上で定義した $\tilde{f}'_L((x,y))=(cx-dy,dx+cy)$ しかないから $B(\tilde{\theta}_1),O$ を固定した $\tilde{\theta}_2$ の代表元も $(B(\tilde{\theta}_1),\tilde{f}'_L(B(\tilde{\theta}_2)),O)$ に定まる．
したがって，必ず，$\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2\in\tilde{\Theta}_2$ の代表元として $(A,B(\tilde{\theta}_1);O),(B(\tilde{\theta}_1),\tilde{f}'_L(B(\tilde{\theta}_2));O)$ をとることができることから，$\oplus$ は任意の $\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2\in\tilde{\Theta}_2$ に対して定義されている．さらに，O,A を固定した二つの代表元はこの組み合わせしかないから，$(A,\tilde{f}'_L(B(\tilde{\theta}_2));O)\in\tilde{\theta}_3$ となる $\tilde{\theta}_3$ はただ一つに決まる．よって $\oplus$ は well-defined である．
$\tilde{\Theta}_2$ の元を一対一対応のある $B(\tilde{\theta})=\tilde{g}(\tilde{\theta})\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\}$ と同一視して，$\tilde{f}'_L$ を考えると，

$$\tilde{\theta}_1\simeq(x_1,y_1),\ \tilde{\theta}_2\simeq(x_2,y_2) \tag{72}$$

$$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)\simeq\tilde{\theta}_3 \tag{73}$$

であることがわかる．このことから $\oplus$ は可換であるといえる．さらに，

$$((x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2))\oplus(x_3,y_3) \tag{74}$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)\oplus(x_3,y_3) \tag{75}$$

$$=(x_1x_2x_3-x_1y_2y_3-y_1x_2y_3-y_1y_2x_3,y_1x_2x_3+x_1y_2x_3+x_1x_2y_3-y_1y_2y_3) \tag{76}$$

[*10] 二次元の特殊直交変換 $SO(2)$ は $f((x,y))=(ax-by,bx+ay)$，$(a^2+b^2=1)$ と表されるもののみである．直交変換 $O(2)$ としては $f((x,y))=(ax+by,bx-ay)$，$(a^2+b^2=1)$ もゆるされる．

となるから，結合則も成り立つ．
$\tilde{G}\colon \mathbb{R} \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\} \simeq \tilde{\Theta}_2$ を以下を満たすように定義する．

$$\tilde{G}(s+s') = \tilde{G}(s) \oplus \tilde{G}(s') \tag{77}$$

つまり，$\mathbb{R}$ 上の $+$ と $\tilde{\Theta}_2$ 上の $\oplus$ が群準同型となるように $\tilde{G}$ を定義する．$\tilde{G}(0+s) = \tilde{G}(0) \oplus \tilde{G}(s)$ より $\tilde{G}(0) = (1,0)$ である．$\tilde{G}(s) = (x,y)$ を定めれば，$m \in \mathbb{Z}$ に対して $\tilde{G}(ms)$ が定義される．ここで $m < 0$ は $\tilde{G}(s+(-s)) = (1,0)$ を利用して定めることができる．
ここで $\tilde{G}(1) = (1,0)$ と定義すると $\tilde{G}(m) = (1,0)$ となる．さらに，定義を $\tilde{G}(1/2) = (-1,0)$ ととりかえると，$\tilde{G}(m) = (1,0)$ はやはり成り立ち，$\tilde{G}(m+1/2) = (-1,0)$ である．
$r \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\tilde{G}(1/2^r)$ が定義されているとき，

$$\tilde{G}(1/2^{r+1}) = \left(\sqrt{\frac{1+(1,0)\cdot\tilde{G}(1/2^r)}{2}}, \sqrt{\frac{1-(1,0)\cdot\tilde{G}(1/2^r)}{2}}\right) \tag{78}$$

を新たな定義とすると，

$$\tilde{G}\left(\frac{1}{2^r}\right) = \tilde{G}\left(\frac{1}{2^{r+1}}\right) \oplus \tilde{G}\left(\frac{1}{2^{r+1}}\right) \tag{79}$$

となり，$\oplus$ の結合則を用いれば，$\tilde{G}(1/2^r)$ から式 (77) によって定義されていたものは $\tilde{G}(1/2^{r+1})$ から式 (77) によって定義されるものと一致するといえる．
このようにして $\{m/2^r \in \mathbb{R} \mid m,r \in \mathbb{Z}\}$ の元について $\tilde{G}$ を定義できる．$\mathbb{R} \setminus \{m/2^r \in \mathbb{R} \mid m,r \in \mathbb{Z}\}$ の元 s について，

$$\frac{m_r - 1}{2^r} < s < \frac{m_r}{2^r} \tag{80}$$

となる m_r をそれぞれの r にたいして取ることができ，実数の完備性を利用すると，

$$\tilde{G}(s) = \lim_{r\to\infty} \tilde{G}\left(\frac{m_r}{2^r}\right) \tag{81}$$

と定義できる．このとき，

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(s) \oplus \tilde{G}(s') &= \lim_{r\to\infty} \tilde{G}\left(\frac{m_r}{2^r}\right) \oplus \lim_{r\to\infty} \tilde{G}\left(\frac{m'_r}{2^r}\right) &(82)\\
&= \lim_{r\to\infty} \tilde{G}\left(\frac{m_r + m'_r}{2^r}\right) &(83)\\
&= \tilde{G}(s+s') &(84)
\end{aligned}$$

である．なぜなら，$(m''_r - 1)/2^r < s + s' < m''_r/2^r$ とすると，$m''_r = m_r + m'_r$ または $m''_r = m_r + m'_r - 1$ が成り立ち，$\lim_{r\to\infty} \tilde{G}(1/2^r) = (1,0)$ となるからである．$|\tilde{G}(1/2^r) - (1,0)| \to 0$ が成り立つことは，$x = (1,0)\cdot\tilde{G}(1/2^r)$ として，

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} - 1\right)^2 \sqrt{\frac{1-x}{2}}^2 &= \frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} - \sqrt{2(1+x)} + 1 &(85)\\
&= 2 - \sqrt{2(1+x)} &(86)\\
&\leq 2 - 2x \ \ (x \in [-1,1]) &(87)\\
&= (x-1)^2 + \sqrt{1-x^2}^2 &(88)
\end{aligned}$$

となることからわかる．したがって，$\tilde{G}$ は $\mathbb{R}$ 全体で定義できた．
$\tilde{G}(s) = \tilde{G}(s')$ とすると，$\tilde{G}(s - s') = (1, 0)$ となる．このとき，$s - s' \in \mathbb{Z}$ である．これ以外にないことは以下のことからわかる．$m - m' \leq 1/2$ となるようにとれば，

$$\tilde{G}((m + m')/2^{r+1}) = \tilde{G}(m/2^{r+1}) \oplus \tilde{G}(m'/2^{r+1}) \tag{89}$$

$$= \frac{\tilde{G}(m/2^r) + \tilde{G}(m/2^r)}{|\tilde{G}(m/2^r) + \tilde{G}(m/2^r)} \tag{90}$$

証明は $\tilde{G}(m/2^{r+1}) = \tilde{f}_L((1, 0)), \tilde{G}(m'/2^{r+1}) = \tilde{f}'_L((1, 0))$ となる特殊直交変換を考えてそれぞれ計算することでわかる[*11]．
$s - s' \in \mathbb{Z}$ であるとき，$s \sim_{\mathbb{Z}} s'$ と同値関係を定め $\mathbb{R}/{\sim_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と書くこととする．標準的な射影 $pr\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を用いて $G = \tilde{G} \circ pr$ となるように G を定めることができ，このとき $G\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は単射である．さらに，$|\tilde{G}(1/2^r) - (1, 0)| \to 0$ だから，任意の $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に対して，これに収束する点列 $\tilde{G}(m_r/2^r)$ をとることができ，$pr(m_r/2^r)$ の代表元をうまくとれば，実数上の収束列 $m_r/2^r$ がとれる．この収束先を s とすれば $\tilde{G}(s) = (x, y)$ となるから $\tilde{G}$ は全射であり，G も全射である．したがって，G は全単射である．さらに，$pr \circ \tilde{G}^{-1}(U) = G^{-1}(U)$ であり，開区間 (a, b) のとき $\bigcup_{\bar{s} \in pr((a,b))} \bar{s} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (a + m, b + m)$ だから，G は連続である．
商位相の定義から W が開集合なら $pr^{-1}(W)$ も開集合であり，$G(W) = G(pr \circ pr^{-1}(W)) = \tilde{G}(pr^{-1}(W))$ だから $\tilde{G}$ が開写像であれば G も開写像である．
$\delta < 1/4$ に対して $\tilde{G}(-\delta, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x > 0$ かつ$\tilde{G}(-\delta) < y < \tilde{G}(\delta)\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ となり，$\Phi(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta} \oplus \phi$ となる写像 Φ は自己同相写像であるから，$\tilde{G}$ が開写像である．
したがって，G は同相写像であり $\tilde{\Theta}_2 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ という同相[*12] が $\tilde{g}^{-1} \circ G$ が同相写像であることからわかる．しかも $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の演算 $+$ を $pr(s) + pr(s') = pr(s + s')$ と定めれば，$\tilde{g}^{-1} \circ G$ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の演算 $+$ を $\tilde{\Theta}_2$ 上の演算 $\oplus$ にうつす群同型でもある．

参考文献

[1] 岩堀長慶,「初学者のための合同変換群の話 幾何学の形での群論演習」，現代数学社，(2000)

*11 ベクトルを幾何的に考えればほぼ明らかであるし，ここではまだ定義していないことになっている三角関数を使えば比較的簡単に示せる．

*12 この同相自体は m を整数として，$s \in [m, m + 1/2]$ に対して $f(s) = (-2(s - m), \sqrt{1 - 4(s - m)^2}$，$s \in [m - 1/2, m]$ に対して $f(s) = (2(s - m), -\sqrt{1 - 4(s - m)^2})$ となる $f\colon \mathbb{R} \to \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ をとればわかる．