続・角の位相的性質
–ラジアンと三角関数–

かめさん　@cogitoergosumkm

角の位相的性質で書き逃したラジアンと三角関数についてかく．ここでは，微分同相を扱う．
$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とする．

$$U_+ = S^1 \setminus \{(-1, 0)\} \tag{1}$$
$$U_- = S^1 \setminus \{(1, 0)\} \tag{2}$$

と定義し，

$$\phi_+ : U_+ \ni (x, y) \mapsto \frac{y}{x+1} \in \mathbb{R} \tag{3}$$
$$\phi_- : U_- \ni (x, y) \mapsto \frac{y}{x-1} \in \mathbb{R} \tag{4}$$

逆写像は，ϕ_+ については，

$$\begin{cases} t = \dfrac{y}{x+1} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \tag{5}$$

を解くことでわかる．$x \neq -1$ だから，

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1 \tag{6}$$
$$(x+1)((t^2+1)x + (t^2-1)) = 0 \tag{7}$$
$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{8}$$
$$y = t\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = \frac{2t}{1+t^2} \tag{9}$$

ϕ_- も同様にして，

$$\phi_+^{-1} : \mathbb{R} \ni t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \in U_+ \tag{10}$$
$$\phi_-^{-1} : \mathbb{R} \ni t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{-2t}{t^2+1}\right) \in U_- \tag{11}$$

よって全単射であり，また連続性からこれらは同相写像である．
$t \neq 0$ とすると，

$$\phi_- \circ \phi_+^{-1}(t) = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1} \tag{12}$$
$$= -\frac{1}{t} \tag{13}$$

となる．よって $\phi_+\circ\phi_-^{-1}(t)=-\frac{1}{t}$ もいえる．$S^1=U_+\cup U_-$ であるから，$\{(U_+,\phi_+),(U_-,\phi_-)\}$ は C^∞ 級アトラスである．

$p_x((x,y))=x, p_y((x,y))=y$ とすると，$p_x\circ\phi_\pm^{-1}, p_y\circ\phi_\pm^{-1}$ は無限階微分可能である．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)=\frac{-4t}{(1+t^2)^2} \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \tag{15}$$

だから，無限階微分可能関数 (C^∞ 級関数)u で，微分方程式

$$\frac{d}{ds}u(s)=\frac{1+u(s)^2}{2} \tag{16}$$

の解となるものをとれば，

$$\frac{d}{ds}p_x\circ\phi_+^{-1}(u(s))=\frac{-2u(s)}{1+u(s)^2}=-p_y\circ\phi_+^{-1}(u(s)) \tag{17}$$

$$\frac{d}{ds}p_y\circ\phi_+^{-1}(u(s))=\frac{1-u(s)^2}{1+u(s)^2}=p_x\circ\phi_+^{-1}(u(s)) \tag{18}$$

である．そこで $u(s)$ を求めてみたい．変数分離型の微分方程式だから，

$$s=\int\frac{2}{1+u^2}du \tag{19}$$

だが，$|u|<1$ では $\frac{2}{1+u^2}<2$，$|u|>1$ では $\frac{2}{1+u^2}<\frac{2}{u^2}$ を利用すれば $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+u^2}du<\infty$ である．そこで，

$$\pi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2} \tag{20}$$

と定数 π を定義しておき，$g\colon\mathbb{R}\to(-\pi,\pi)$ を

$$f(k)=\int_0^k\frac{2}{1+u^2}du \tag{21}$$

と定義する．これは連続かつ狭義単調増加であり，$k\to\pm\infty$ の極限をそれぞれ考えれば全単射である．$u=f^{-1}$ とすればこれは微分方程式 (16) の解となる．さらに，$s\in\mathbb{R}\setminus\{2\pi(n+1)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ にたいして，$s+2\pi n\in(-\pi,\pi)$ となるような整数 n をとることができるから，これを $n=\nu(s)$ とかくことにすると，

$$u(s)=f^{-1}(s+2\pi\nu(s)) \tag{22}$$

によって，$u\colon\mathbb{R}\setminus\{2\pi(n+1)\mid n\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$ を定めることができる．$\xi(s)=p_x\circ\phi_+^{-1}(u(s)),\eta(s)=p_y\circ\phi_+^{-1}(u(s))$ は，連続性を仮定して $s=\pi+2\pi n$ にも定めることができ，

$$\xi(\pi+2\pi n)=-1 \tag{23}$$

$$\eta(\pi+2\pi n)=0 \tag{24}$$

である．ここでは別の方針をとり，ϕ_- を利用して定義することにしよう．

$k>0$ のとき，$u=-1/v$ と変換すると，

$$\int_0^k\frac{2}{1+u^2}du=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{k}}\frac{2}{1+v^2}dv=\pi+\int_0^{-\frac{1}{k}}\frac{2}{1+v^2}dv \tag{25}$$

となり，$k<0$ のとき，$u=-1/v$ と変換すると，

$$\int_0^k \frac{2}{1+u^2}du = \int_\infty^{-\frac{1}{k}} \frac{2}{1+v^2}dv = -\pi + \int_0^{-\frac{1}{k}} \frac{2}{1+v^2}dv \tag{26}$$

となる．よって，$n\in\mathbb{Z}$ として，

$$u(s+\pi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{u(s)} & (s \neq \pi + 2\pi n) \\ 0 & (s = \pi + 2\pi n) \end{cases} \tag{27}$$

とである．$s \neq \pi + 2\pi n$ のとき，

$$\begin{aligned} & p_x \circ \phi_-^{-1}(u(s+\pi)) && (28) \\ =& \frac{\frac{1}{u(s)^2} - 1}{\frac{1}{u(s)^2} + 1} && (29) \\ =& \frac{1-u(s)^2}{1+u(s)^2} && (30) \\ =& p_x \circ \phi_+^{-1}(u(s)) && (31) \\ & p_y \circ \phi_-^{-1}(u(s+\pi)) && (32) \\ =& \frac{\frac{2}{u(s)}}{\frac{1}{u(s)^2+1}} && (33) \\ =& \frac{2u(s)}{1+u(s)^2} && (34) \\ =& p_y \circ \phi_+^{-1}(u(s)) && (35) \end{aligned}$$

となるから，

$$\xi(s) = \begin{cases} p_x \circ \phi_+^{-1}(u(s)) & (s \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi(n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}) \\ p_x \circ \phi_-^{-1}(u(s+\pi)) & (s \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}) \end{cases} \tag{36}$$

$$\eta(s) = \begin{cases} p_y \circ \phi_+^{-1}(u(s)) & (s \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi(n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}) \\ p_y \circ \phi_-^{-1}(u(s+\pi)) & (s \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}) \end{cases} \tag{37}$$

と定義すれば，場合分けの重複した部分では同じ関数である．これで，無限階微分可能な関数 $\xi,\eta\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ が定義できた．式 (17)(18) から $\xi'(s) = -\eta(s), \eta'(s) = \xi(s)$ であり，$u(0)=0$ で定めたから $\xi(0)=1, \eta(0)=0$ である．微分方程式の解の一意性から $\cos = \xi, \sin = \eta$ と定めてよい．