差分・微分

かめさん　@cogitoergosumkm

まず，$n = 0, 1, 2, \ldots$ として数列 a_n を考える．差分 Δ を以下のように定める．

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n \tag{1}$$

シフト演算 $\hat{s} a_n = a_{n+1}$ を用いると，

$$\Delta = \hat{s} - 1 \tag{2}$$
$$\hat{s} = 1 + \Delta \tag{3}$$

となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \hat{s}^n a_0 && (4)\\
&= (1+\Delta)^n a_0 && (5)\\
&= {}_n\mathrm{C}_0 a_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \Delta a_0 + {}_n\mathrm{C}_2 \Delta^2 a_0 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_k \Delta^k a_0 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \Delta^n a_0 && (6)\\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \Delta^k a_0 && (7)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k a_0}{k!} n^{\underline{k}} && (8)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k a_0}{k!} n^{\underline{k}} && (9)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，

$$n^{\underline{k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (n - j) \tag{10}$$

であり，下降階乗冪という．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k a_0}{k!} x^{\underline{k}} \tag{11}$$

と定義すると，$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $f(n) = a_n$．

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\Delta^k a_0}{k!} x^{\underline{k}} \tag{12}$$

は $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ として，$m + 1$ 個の点 (k, a_k) をとおる $m + 1$ 次関数となり，$f(x)$ は点を無限に増やしていった極限だと考えることができる．

次に，

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{13}$$

$$\hat{s}_h f(x) = f(x+h) \tag{14}$$

と定義する．このとき，

$$\Delta_h = \frac{\hat{s}_h - 1}{h} \tag{15}$$

$$\hat{s}_h = 1 + h\Delta_h \tag{16}$$

である．

$$f(nh) = \hat{s}_h^n f(0) \tag{17}$$

$$= (1 + h\Delta_h)^n f(0) \tag{18}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k h^k \Delta_h^k f(0) \tag{19}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k \Delta_h^k f(0)}{k!} n^{\underline{k}} \tag{20}$$

ここで，$x = nh$ は一定として，$h \to 0$ を考える．形式的に計算すると，

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \hat{s}_h^{\frac{x}{h}} f(0) \tag{21}$$

$$= \lim_{h \to 0} (1 + h\Delta_h)^{\frac{x}{h}} f(0) \tag{22}$$

$$= \lim_{h \to 0} (1 + hx\Delta_h)^{\frac{1}{h}} f(0) \tag{23}$$

$$= \exp\left(x \frac{d}{dx'}\right) f(x')\Big|_{x'=0} \tag{24}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \tag{25}$$

このようにして，テイラー展開を得られた．収束について注意しておくと，$h \to 0$ で $(h\Delta_h)^n f(0) \to 0$ とならなければいけないから，無限階微分可能である必要がある．