比と射影空間

かめさん　@cogitoergosumkm

1　比を満たす集合

比 $p : q$ について以下のような集合を考えてみよう．

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x : y = p : q\} \tag{1}$$

この集合はなにか？これを知るために $x : y = p : q$ を変形してみる．内項の積と外項の積が等しいことをつかって，

$$py = qx \tag{2}$$

$$p \neq 0 \text{ なら } \ y = \frac{q}{p}x \tag{3}$$

$$p = 0 \text{ であっても } qx - py = 0 \tag{4}$$

である．$q \neq 0$ なら，

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q} \tag{5}$$

$$x = \frac{p}{q}y \tag{6}$$

$$qx - py = 0 \tag{7}$$

などと考えてもよかった．いずれにしてもこれは原点 $(0, 0)$ 直線である．
このままでは実は問題がある．$0 : 0$ を考えてしまうと任意の実数 p_1, q_1, p_2, q_2 に対して，

$$(0, 0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x : y = p_1 : q_1\} \tag{8}$$

$$(0, 0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x : y = p_2 : q_2\} \tag{9}$$

だから，

$$p_1 : q_1 = 0 : 0 = p_2 : q_2 \tag{10}$$

である．さすがにこれはまずいので $0 : 0$ は考えないこととしている．これをふまえて今後は

$$[p : q] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid x : y = p : q\} \tag{11}$$

を考えよう[*1]．$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ は座標平面 $\mathbb{R}^2$ から原点 $(0, 0)$ を抜いたものである．

$$p : q = (-p) : (-q) \tag{12}$$

[*1] この集合を $[p, q]$ と書くことにした．

のように負になる場合は問題ないのか？との疑問がでるかもしれないが，これは $0:0$ のような問題をおこさない．なぜなら，$(-p,-q)$ は $qx-py=0$ 上にあり，ほかのどの原点をとおる直線上にもないからである．逆に言えば原点はどの原点をとおる直線の上にもある*2から問題を起こしたわけである．$(-p):(-q)$ は特に問題がないので取り除くようなことはせずこのまま進める．$(p,q)\neq(0,0)$ に対して，

$$[p:q]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\mid qx-py=0\} \tag{13}$$

と書き直すができて，$p_1:q_1=p_2:q_2$ であるとき $[p_1:q_1]=[p_2:q_2]$ であり，逆に $[p_1:q_1]=[p_2:q_2]$ であるとき $p_1:q_1=p_2:q_2$ である．直線の式として $y=\frac{q}{p}x$ ではなく，$qx-py=0$ をあえてとってあるのは，$p=0$ となるような比も考えたいからである*3．二次元であれば直線の一般形が $qx-py=0$ のように書けるが，三次元以上の直線は媒介変数表示で書くほうがわかりやすい．$p:q:r$ のような比も考えたいから，まずは直線 $qx-py=0$ も媒介変数表示に書き直しておく．$t\in\mathbb{R}$ として，

$$\begin{cases} x=pt \\ y=qt \end{cases} \tag{14}$$

が媒介変数

$$[p:q]=\{(pt,qt)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\mid t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\} \tag{15}$$

三つの比は，

$$[p:q:r]=\{(pt,qt,rt)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\mid t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\} \tag{16}$$

とすれば，$p_1:q_1:r_1=p_2:q_2:r_2$ であるとき $[p_1:q_1:r_1]=[p_2:q_2:r_2]$ であり，逆に $[p_1:q_1:r_1R]=[p_2:q_2:r_2]$ であるとき $p_1:q_1=p_2:q_2:r_2$ である．四つ以上の比も同様に考えればよい．

2　内分・外分

話を二つの比に戻して，$(-1):2$ のように片方が負になるものの利用について見ておく．点 A,B についてそれぞれの位置ベクトルを $\vec{a},\vec{b}$ とすると，線分 AB を $p:q$ で内分する点と外分する点の位置ベクトルはそれぞれ，

$$\frac{q\vec{a}+p\vec{b}}{q+p} \tag{17}$$

$$\frac{q\vec{a}-p\vec{b}}{q-p} \tag{18}$$

と書くことができるが，つまり AB の外分点は $(-p):q$ に内分する点とみなすことができる．同様に AB を $0:1$ に内分する点は A で，$1:0$ に内分する点は B といえる．
ここで，集合 $[p:q]=\{(pt,qt)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\mid t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ で表される直線 $qx-py=0$ と $y=-x+1$ の交点 C の座標を求めてみよう．連立方程式を解けば，

$$x=\frac{p}{q+p} \tag{19}$$

$$y=\frac{q}{q+p} \tag{20}$$

*2 あまりに当然である．

*3 $p=0$ やなんなら $p<0$ も考えてよい形になっていて，このほうが便利なこともある．考えたくなければ $p>0$ かつ $q>0$ という条件をつけてもよい．

この点 $C(\frac{p}{q+p}, \frac{q}{q+p})$ は $A(0,1), B(1,0)$ としたとき線分 AB を $p:q$ に内分する点[*4]である．$p:q=(-1):1$ となるもの以外について，この点 C は 1 つに定まり $[p:q]$ を代表する点といえる．

3　実射影空間

　この節では n 次実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ を定義する[*5]．まず，$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0,\dots,0)\}$ 上に同値関係[*6]$\sim$ を，ある実数 $t \neq 0$ が存在して，

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) = (ty_0, ty_1, \dots, ty_n) \tag{21}$$

のとき，

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (y_0, y_1, \dots, y_n) \tag{22}$$

と定義する．これを用いて各 $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0,\dots,0)\}$ に対して次の集合を考える．

$$\{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0,\dots,0)\} \mid (x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (a_0, a_1, \dots, a_n)\} \tag{23}$$

これは R^{n+1} 上の直線から原点 $(0,0,\dots,0)$ を除いたものである．つまり，

$$[a_0 : a_1 : \dots : a_n] = \{(ta_0, ta_1, \dots, ta_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0,\dots,0)\} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \tag{24}$$

と等しいことがわかる．この集合を元とする集合

$$\{[a_0 : a_1 : \dots : a_n] \mid (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0,\dots,0)\}\} \tag{25}$$

を $\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0,\dots,0)\}\right)/\sim$ とかき，商集合とよぶ．この集合は比の集合とみなせる．

[*4] もちろん，ここでは p, q の片方が負なら外分する点とする．

[*5] 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ もある．P は projective space の P だろう．また，射影空間には位相が定められているがここでは無視することにする．

[*6] 集合 X に定められた関係 $\sim$ が同値関係であるとは，任意の X の元に対して，

(i) $x \sim x$

(ii) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

(iii) $x \sim y$ かつ $y \sim z \Leftrightarrow x \sim z$

が成り立つことである．