5 章 大数の法則と中心極限定理

1. 期待値

期待値とはなんだっただろうか。何をいまさらと思うかもしれないが確認しておこう。6 面のサイコロの出る目の期待値 E は、すべての目の出る確率が等しく $\frac{1}{6}$ であるとすれば、

$$E = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = 3.5$$

である。一般的には、確率変数[*1]を X とし、X は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ という値をとるとすると、X が x_i という値をとる確率を $P(X = x_i)$ と書き[*2]、X の期待値を $E[X]$ とすれば、

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

数学的にはこれでよい。しかし、目の前にサイコロがあるとして、どうしてすべての目の出る確率が等しく $\frac{1}{6}$ であるなどといえるだろうか。目の出る確率がそれぞれどうなっているかはわからない、そのような状況はよくあるし、統計とは本来そのようなものを扱いたかったはずだ。

そこで考えてほしい。目の前にサイコロが一つある。このサイコロは目の出る確率に偏りがないとは限らない。そのようなとき正確な値でなくてよいが、近似的にこのサイコロの出る目の期待値を知るにはどうしたらよいだろうか[*3]。目の前にあるのだから振ってみたらよい。サイコロを N 回ふったとき、出た目の値が $a_1, a_2, , \cdots, a_N$ だったなら、期待値 E は

$$E \simeq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} a_k$$

となっていると思われる。より正確に知りたければ N を増やす、つまり 1000 回でも 10000 回でもサイコロを振ればよいはずだ。この直観を保証してくれているのが大数の法則である。

2. 直観の確認と大数の法則の主張

実際に直観を確認してみよう。とはいっても、サイコロを 10000 回も振っていては日が暮れてしまう[*4]。ここでは文明の利器に頼ることにする。コンピュータで 1 から 6 までの整数をランダムに出力することでサイコロを振ったということにしよう。とりあえず 10 回振ってみた。

投げた回数 N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
出た目の数 x	3	1	5	6	3	1	1	3	2	6
x の N 回目までの平均 $\overline{x}$	3.000	2.000	3.000	3.750	3.600	3.167	2.857	2.875	2.778	3.100

表 1　$N = 10$ まで

[*1] 確率変数とは、まさにサイコロの目のように、ある値が確率的に与えられるものをいう。例えば、人をランダムに連れて来た時の身長や体重なんかも確率変数といえる。また、確率的に起こる事象に数を対応させたもの、例えばコインの表が出れば 1、裏が出たら 0 のように定めたものともいえる。

[*2] サイコロの例でいけば $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ という値をとり、x の値が $1, 2, 3, 4, 5, 6$ のどれであっても、$P(X = x) = \frac{1}{6}$

[*3] 期待値がわかるなら、実は確率自体も同じ方法でわかるはずである。例えば、1 の目が出る確率を知りたければ、目の値として 1 が出たときは $X = 1$、目の値として 2,3,4,5,6 が出たときは $X = 0$ となる確率変数 X を考えればよい。

[*4] 筆者は深夜にこの部分を書いていた。実は 1 秒に 1 回サイコロを振れるなら、3 時間もあれば 10000 回振れる。さすがに 1 秒に 1 回は無理でも 1 日あればできなくはない。暇な読者は挑戦してみてはいかがだろうか。

3 行目は例えば $N=3$ なら $\overline{x}=\frac{3+1+5}{3}=3$ のように、3 回目までに出た目の平均を書いてある。たまたま 1 がたくさん出たらしく 10 回目までの平均 $\overline{x}=\frac{3+1+5+6+3+1+1+3+2+6}{10}=3.1$ は 3.5 より結構小さく出ているが、まあ 10 回程度ではこんなものだろう。次は 100 回と 10000 回振ってみた。もはや表にはできないので、横軸を振った回数 N、縦軸をそれまでの値の平均 $\overline{x}$ としてグラフにした。

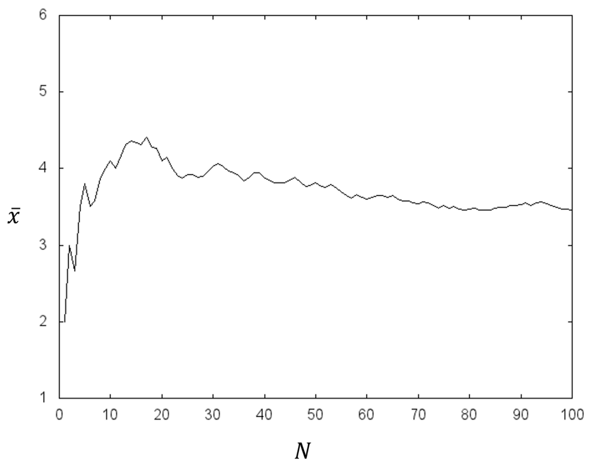

図 1　$N=100$ まで

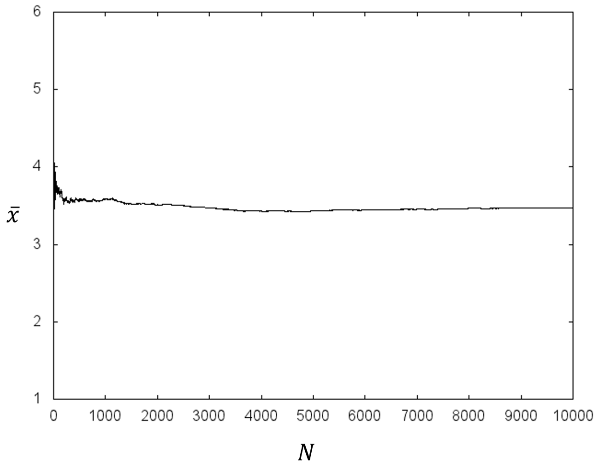

図 2　$N=10000$ まで

ちなみに 100 回目で出た目の合計は 346 であり $\overline{x}=3.46$ となった。10000 回では $\overline{x}=3.4726$ だ。[*5]理論的な期待値 3.5[*6]に近づいている。さて、ここまでくれば経験的に大数の法則の主張をまとめられる。

経験的な大数の法則 (注意:厳密ではない)

確率的に値を得る操作[a]を「まったく同じように」何度も繰り返して、得られた値を平均する。N 回繰り返して、N 回目までの平均値 $\overline{x}_N$ を得たとしよう。また期待値を μ [*7]とすると

$$\lim_{N\to\infty}\overline{x}_N=\mu$$

[a] 今回はサイコロを振るという操作だった。

とりあえず、大数の法則とはこんなものだと思ってもらって差し支えない。とはいったものの、厳密にはこれは間違っている。たとえどの目が出る確率も等しく $\frac{1}{6}$ であったとしても、もし 1 の目が出続けたなら平均も 1 になってしまうはずだ。一応状況としては想定できるはずだ。ありえない？そのありえないとは確率が 0 という意味でなら、まさにその通りである。1 の目が出続ける確率は、$\frac{1}{6^N}\to 0(N\to\infty)$ のように 0 へと向かう。

[*5] 今回は平均値が 100 と 10000 の両方とも 3.5 より値が小さいが、グラフからもわかるように常に平均値が期待値より小さいわけではない。

[*6] 何度も言うように確率を知らない以上、期待値が本当に 3.5 かはわからない。コンピュータで出した乱数が完全にランダムとも限らないのだから、今回も本当のところはわからない。ただ、どの目の値が出る確率も理論上 $\frac{1}{6}$ になるようにはプログラムを組んでいる。

[*7] 期待値はここまで μ ではなく E や $E[X]$ のようにあらわしていた。同じものと思ってもらって構わない。$E[X]$ が確率変数 X から導かれる値というイメージであることに対して、μ は母集団 (ざっくり言って調べたい対象全体のこと) や確率分布 (4 章参照) がもっている性質といったイメージである。

3. 大数の強法則と大数の弱法則[*8]

大数の法則

期待値を μ、分散[a]を σ^2 とする同じ確率分布に独立[*9]に従う[b] N 個の確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_N$ があるとき、確率変数 $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ とすると以下の二つが成り立つ。
($P(A)$ は A が起きる確率という意味である。)

1. 大数の強法則

$$P\left(\lim_{N\to\infty} \overline{X}_N = \mu\right) = 1$$

2. 大数の弱法則

$$\text{任意の}\varepsilon > 0 \text{ に対して} \quad \lim_{N\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_N - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

[a] 式にあらわれないが σ^2 が発散していないということが大事なのである。後述の中心極限定理を見れば納得してもらえると思う。平均をとることで誤差を小さくしているが、そもそも分散が ∞ ならば、平均をとっても誤差を小さくできないということが起こる。

[b] 同じ確率分布に独立に従うというのが経験的な大数の法則で言った「まったく同じように」ということである。

これまでは一つの確率分布 X を考えていたが、あえて N 個の同じ確率変数と考えることで、X で言えば N 回試行して、初めて一つの値が確定する確率変数 $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1} NX_n$ が定義できるというご利益がある[*10]。大数の強法則はこれまで述べた大数の法則のイメージ通りであるが、弱法則は少しわかりにくいかもしれない。弱法則を考えるのは証明が強法則に比べて簡単[*11]で、また適用範囲も広げられるからだろう。ここでは、厳密なことは気にしないことにして弱法則のイメージだけつかんでおく。確率 $P(X)$ がわかっていて、ϵ をきめてやれば、$P\left(\left|\overline{X}_N - \mu\right| > \epsilon\right)$ を計算できる。N が小さいうちは簡単だからやってみるとよい。しかし、少し N を大きくするとすぐにしんどくなるだろう。残念ながらそれはコンピュータでも同様である。また、確率を知らない建前を崩したくないということもあるので、ここでは図 1 や図 2 と同じことを l パターン計算して N 回目で ϵ を超えたものの数を m とし $\frac{m}{l}$ を確率と考えることにした。l を大きくとれば実際の確率と思ってよいはずだ[*12]。図 3、図 4 はそれぞれ、弱法則における ε をそれぞれ 0.1,0.05 と定めて、$P\left(\left|\overline{X}_N - \mu\right| > \varepsilon\right)$ を計算している。ε が小さいほど、この確率は大きくなるが、N を大きくしていけばこの確率は 0 に収束することが見て取れる。

大数の法則についてここまで語ってきたが、大数の法則がそのまま試験に出ることはあまりないだろう。ただし、大数の法則というものがあり、何度も何度も同じことを繰り返せば、その平均は期待値に近づいていくことが保証されているとわかっていることは、試験を受けるうえでも、問題を解くときの直観に役立つだろう。

[*8] この強い、弱いとは、強い主張が成り立つなら弱い主張も成り立つという意味である (逆は必ずしも成り立たない)。実際強法則が成り立つときは弱法則も成り立つ。つまり弱法則の前提条件はここで紹介するよりも弱めることができる。

[*9] 事象 A と B が独立であるとは $P(A \wedge B) = P(A)P(B)$ であることを言う。ようは A と B が関係ない、A であろうとなかろうと B が起こる確率は変わらない、というようなことである。もう一つの筆者担当の章である 8 章でもう少し詳しく述べるつもりだ。

[*10] 確率変数一つのままでは $\frac{1}{N}\sum_{n=1} NX = X$ となってしまう。なお、$\overline{X}_N = \overline{x}_N$ と思ってもらって構わない。確率変数とそれを実際にはかった値というニュアンスで使い分けた。

[*11] 本書の趣旨とずれるため省略するが、マルコフの不等式、チェビシェフの不等式を辿ると弱法則は証明できる。

[*12] お気づきかもしれないが、ここですでに大数の法則を使っている。気に入らないが、これ以外には思いつかなかった。なお $l = 10000$ とした。

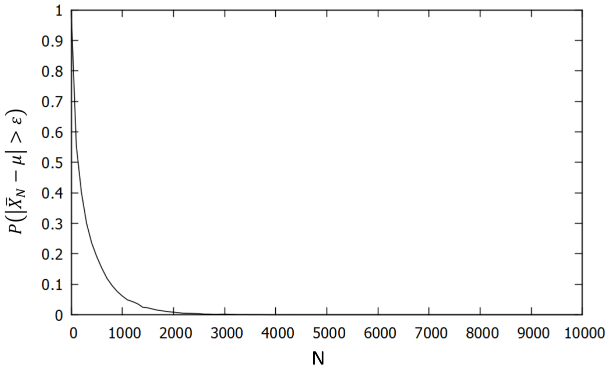

図 3　$\varepsilon = 0.1$

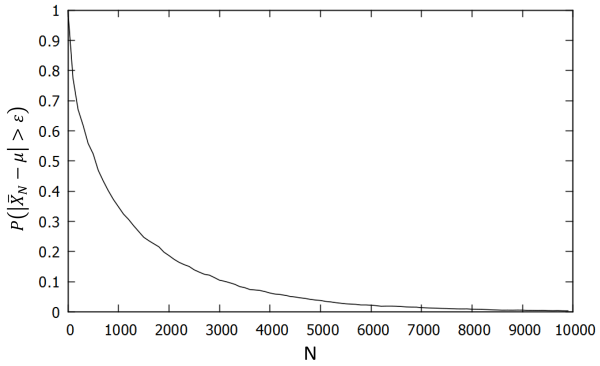

図 4　$\varepsilon = 0.05$

4. 大数の法則と中心極限定理

サイコロにまた登場してもらう。サイコロで何か双六などをして遊ぶとしよう。しかし、遊んでいると相手が勝負を有利に進めている。どうやら相手が持ってきたサイコロが偏っていて、それを相手は知っていて利用していると思われるとする。かといって、「偏ったサイコロをつかっているだろう」と相手に言ったところで「そんなことないだろう」と、とぼけられる。さて、どうしたらそのサイコロが偏ったサイコロだと言っても良いだろうか。

さきほどまでやっていた大数の法則から言えば、何度も何度もサイコロを振って、1 から 6 までの目が均等に出ているとはいえないとわかれば、偏ったサイコロだとわかると思うだろう。そこで、相手に「そのサイコロを見せてみろ」と言って、100 回でも 1000 回でも振ってみればよい。そうすれば、偏ったサイコロであるなら、1 から 6 までの目が均等に出ないはずだ。しかし、それを見た相手は何というだろうか。筆者ならこう言う。「でも、均一なサイコロを振ったとしても、ばらついて出ることはあるよね。たとえ、ずっと 1 の目が出続けたって、それはただの偶然だ」

無限に振り続ければ、確かに均一かどうかわかるのだが、現実には無限にサイコロを振ることはできない。ただ、無限に振らなくても、このような状況はほぼ起こらない。具体的には確率 5% 未満でしか起こらないというように言う方法があった。検定である。中心極限定理は、特にこのような N が大きく[*13]、期待値[*14]が、帰無仮説[*15]とは異なると言いたいときの検定の正当性を保証してくれる定理である。N 個の独立同分布[*16]$X_1, X_2, \ldots, X_N$ があるとき、$\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ と新しい確率分布を定めると、大数の法則は、$\overline{X}_N$ が N を大きくしたときの値が期待値に収束していくことを述べているが、中心極限定理は、$\overline{X}_N$ の従う確率分布が正規分布に近づくということを述べている。と言ったところで、具体的にどういうものなのか説明されなければわからないだろう。ここでわからなくても嫌にならずに次の節を読んでほしい。次の節で中心極限定理について詳しく述べよう。

[*13] 実際 $N = 100$ もあれば十分成立する。検定に N が小さい場合は t 検定という検定になる。
[*14] 前にも言ったが、例えば目の値として 1 が出たときは $X = 1$、目の値として 2,3,4,5,6 が出たときは $X = 0$ となる確率変数 X を考えれば、その確率変数の期待値は 1 の目が出る確率である。
[*15] 検定において、最終的に誤りとしたい仮説。今回の偏っているかもしれないサイコロの例で言えば、サイコロは均一であるというのが帰無仮説である。
[*16] 同じ確率分布に独立に従うをまとめて言っただけ。

5. 中心極限定理

まずは、定理を述べておこう。

中心極限定理

期待値を μ、分散を σ^2 とする同じ確率分布に独立に従う N 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ があるとき、確率変数 $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ とすると以下のことが成り立つ。
($P(A)$ は A が起きる確率という意味である。

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{\overline{X}_N - \mu}{\sigma} \leq \frac{a}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

左辺の意味は大数の弱法則とも似ており問題はないかと思う。では、右辺は何かといえば期待値が 0、分散が 1 である正規分布を意味している。期待値が μ、分散が σ^2 である正規分布は、確率密度関数が $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ となるものであった。これを $N(\mu, \sigma^2)$ と書き、[*17]確率分布 Y が期待値が μ、分散が σ^2 である正規分布に従うとき、$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ と書く。

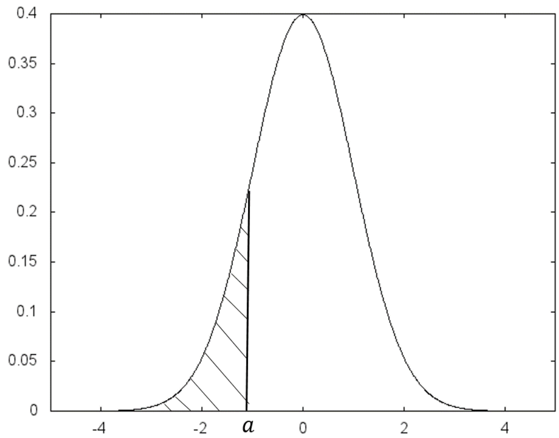

図 5　$N(0,1)$ と中心極限定理の式の右辺の積分範囲

中心極限定理は以下のようにも言い換えられる。

中心極限定理

期待値を μ、分散を σ^2 とする同じ確率分布に独立に従う N 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ があるとき、確率変数 $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ とする。さらに、確率変数 Y_N を

$$Y_N = \frac{\sqrt{N}(X_N - \mu)}{\sigma}$$

とすると、$N \to \infty$ の極限で $Y_N \sim N(0,1)$ である。つまり、N が十分大きければ、Y_N は期待値が 0、分散が 1 である正規分布に従うと考えてよい。

[*17] N は正規分布の英語 nomal distribution の頭文字である。ちなみに、数学では normal の訳語として正規が、regular の訳語として正則が使われる。

また、$t=\frac{\sqrt{N}u}{\sigma}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\sigma a}{\sqrt{N}}} \exp\left(-\frac{Nu^2}{2\sigma^2}\right)\frac{\sqrt{N}}{\sigma}du\\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2}}\int_{-\infty}^{\alpha_N} \exp\left(-\frac{u^2}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2}\right)du
\end{aligned}
$$

よって、以下のようにも言える。

中心極限定理

期待値を μ、分散を σ^2 とする同じ確率分布に独立に従う N 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ があるとき、確率変数 $\overline{X}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ とする。
N が十分大きければ

$$
P\left(\overline{X}_N-\mu \le \alpha_N\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2}}\int_{-\infty}^{\alpha_N} \exp\left(-\frac{u^2}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2}\right)du \qquad \text{ただし } \alpha_N=\frac{\sigma a}{\sqrt{N}}
$$

つまり、N が十分大きければ、$\overline{X}_N-\mu$ は期待値が 0、分散が $\frac{\sigma^2}{N}$ である正規分布に従うと考えてよい。さらに、$v=u+\mu$ と変換することで、$\overline{X}_N$ は期待値が μ、分散が $\frac{\sigma^2}{N}$ である正規分布に従うと言い換えることもできる。

中心極限定理から、大数の弱法則を導くことができる。任意の正数 ε に対して、

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_N-\mu\right| > \varepsilon\right) &= 1-\lim_{N\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_N-\mu\right| \le \varepsilon\right)\\
&= 1-\lim_{N\to\infty} P\left(-\varepsilon \le \overline{X}_N-\mu \le \varepsilon\right)\\
&= 1-\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{u^2}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2}\right)du\right\}\\
&= 1-\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sigma}}^{\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}\\
&= 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\frac{\sqrt{N}u}{\sigma}=t$ と変数変換をした。また、$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ は確率密度関数を実数全体で積分しているから 1 である。[*18]

[*18] もしくはガウス積分を考える。

6. 中心極限定理の確認

中心極限定理もここでは証明しない[19]。ただ、なにもせずにそういうものだと言われても、なかなかイメージが付きにくいであろうから、またサイコロで試してみよう。確率がどの目も $\frac{1}{6}$ であるサイコロを、まず一回振った場合と二回振った場合を見てみる。曲線でかかれている正規分布は、$(-\infty, \infty)$ の積分が 1 になるように規格化されている。ヒストグラムもこれに合わせて、長方形の面積の和が 1 となるように規格化してあるので高さではなく面積が確率となることに注意してほしい。

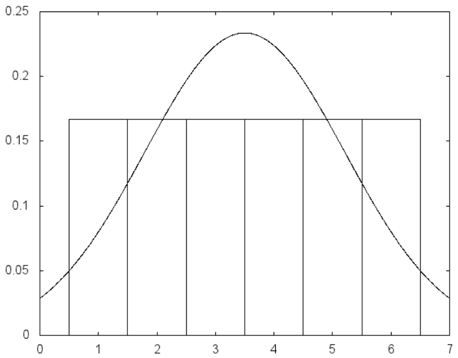

図 6　1 回振ったときのヒストグラムと $N(3.5, \frac{17.5}{6})$

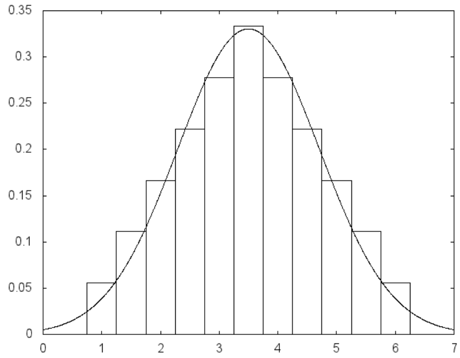

図 7　2 回振ったときのヒストグラムと $N(7, \frac{17.5}{6\times 2})$

一回振った場合は 1 から 6 までの整数の値をとり、がそれぞれ $\frac{1}{6}$ の確率で起こる。この確率変数を X_i とおく。ただし、i は正整数。X_i の期待値は 3.5 であり、分散は $\frac{17.5}{6}$ である。また、二回振った和は 2 から 12 までの整数の値をとり、7 となる確率が最大となる。ヒストグラムは $\overline{X}_2 = \frac{X_1+X_2}{2}$ の確率を表したものである。長方形の幅が 0.5 となっていることに注意してほしい。二回くらいでは、さすがにまだまだ正規分布には近づいていない。そこで五回、十回の平均、$\overline{X}_5 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i$, $Y_{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$ を描いてみる。

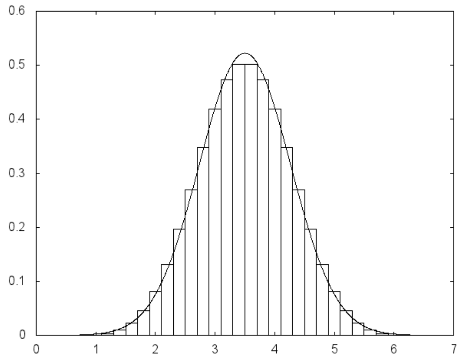

図 8　5 回振ったときのヒストグラムと $N(3.5, \frac{17.5}{6\times 5})$

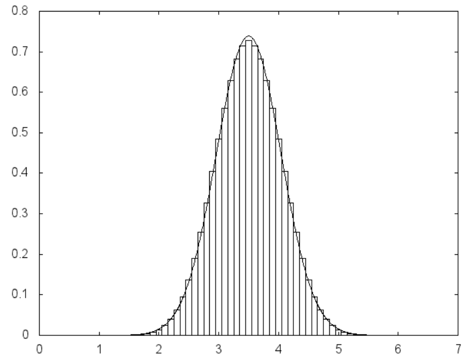

図 9　10 回振ったときのヒストグラムと $N(3.5, \frac{17.5}{6\times 10})$

このようにしてみると、思ったよりも少ない数の平均でかなり正規分布に近づいているのがわかるだろう。しかし、すべて確率が等しく $\frac{1}{6}$ というのも都合が良すぎるような気もするだろう。そこで、1 の出る確率が 0.5、2 から 6 の整数が出る確率はそれぞれ 0.1 となるようにする。期待値は 2.5、分散は 3.25 である。このとき

[19] 特性関数を用いる証明が一般的と思うが、特性関数はこの本では扱っていないはずなので証明できない。また、おそらく数学的に詳しく書くことを目的とした本にしか載っていないと思われる。ネット上には証明が上がっているので、正しいかは保証しないが、気になるようなら、よくよくステップを確認しながら読んでみるとよいだろう。

も、十回平均を描いてみる。

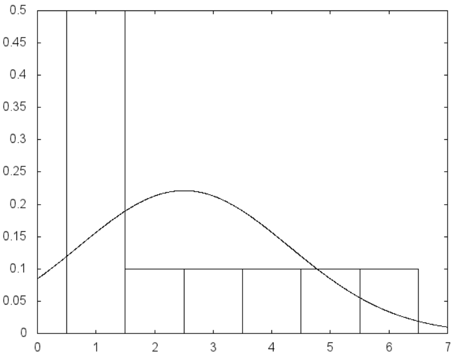

図 10　1 回分のヒストグラムと $N(2.5, 3.25)$

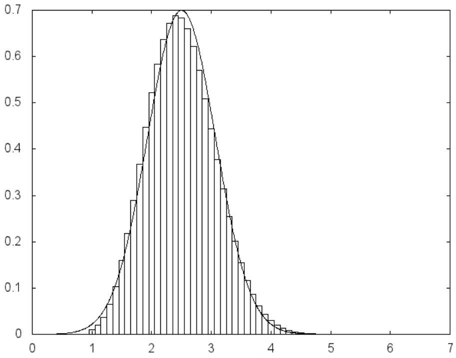

図 11　10 回平均のヒストグラムと $N(2.5, \frac{3.25}{10})$

この場合も十回平均ですでにかなり正規分布に近づいていることがわかる。

7. 中心極限定理の利用

実際に使ってみよう。4 節を思い出してもらいたい。ただし、説明を簡単にするためにサイコロではなくコインで考えよう[*20]。コインを一万回投げたとき、表が 6000 回出たとする。帰無仮説は、コインの裏表は等し確率、つまり $\frac{1}{2}$ で出るという主張である。表が出れば 1、裏が出れば 0 をとる確率変数を X_i とする。i は正の整数で、それぞれ独立で同じ確率変数であるとする。さて、帰無仮説が正しいと仮定しておく。
つまり、任意の i に対して、X_i の期待値 μ、分散 σ^2 とすると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 \\
&= \frac{1}{2} \\
\sigma^2 &= \frac{1}{2} \times (1-\mu)^2 + \frac{1}{2} \times (0-\mu)^2 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$\overline{X}_{10000} = \frac{1}{10000}\sum_{i=1}^{10000} X_i$ という確率変数について、中心極限定理が成り立つには 10000 は十分大きいので、近似的に、$\overline{X}_{10000} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{10000})$ である。N が十分大きければ

$$P\left(\frac{\overline{X}_N - \mu}{\sigma} \leq \frac{a}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

であった。正規分布で近似できていれば、

$$P\left(-\frac{a}{\sqrt{N}} \leq \frac{\overline{X}_N - \mu}{\sigma} \leq \frac{a}{\sqrt{N}}\right) = 0.95$$

となるとき、$a \simeq 1.96$ であることがわかっている。つまり、95% の確率で期待値の前後 $\frac{1.96\sigma}{\sqrt{N}}$ 以内におさま

[*20] 例えばサイコロの 1 の目が出やすいと思えば、1 の目に注目して、1 が出れば 1、それ以外の目が出れば 0 となるような確率変数を考えれば、実質コインの問題と同じである。ただし、帰無仮説が 1 の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ となるので注意。

るといえる。今回の場合は、95% の確率で

$$
\begin{aligned}
-\frac{1.96}{\sqrt{10000}} \leq & \left(\overline{X}_{10000} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{2} \leq \frac{1.96}{\sqrt{10000}} \\
-0.0098 \leq & \quad \overline{X}_{10000} - \frac{1}{2} \quad \leq 0.0098 \\
0.4902 \leq & \quad \overline{X}_{10000} \quad \leq 0.5098
\end{aligned}
$$

である。しかし、$\overline{X}_{10000} = \frac{6000}{10000} = 0.6$ である。これは $0.4902 \leq \overline{X}_{10000} \leq 0.5098$ の範囲に入っていないから、帰無仮説は有意水準 5% で棄却される。このようにして、中心極限定理は利用される。