三角比

かめさん　@cogitoergosumkm

三角形の合同や相似がわかれば，角度と辺の長さまたは長さの比が決まる．その角度や辺の長さまたは長さの比の値はどのように決まるかを考えたい．円周角の定理でも弦の長さと角度の対応があるはずであるから，これも考える．最も考えやすい円周角の定理から考える．

0　円周角の定理

円周角の定理から，円の直径が決まっていれば，角 θ に対応する弦の長さは 1 つに決まる．円の直径をいくつにとってもよいが，円の直径が弦の長さの最大値であるから，最大値が 1 となるように直径 1 で定義することにする．

定義 0.1. 直径 1 の円において，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の円周角が切り取る弧が張る弦の長さを $\sin\theta$ と定義する．sin のことを正弦と呼ぶ．*(図 1)*

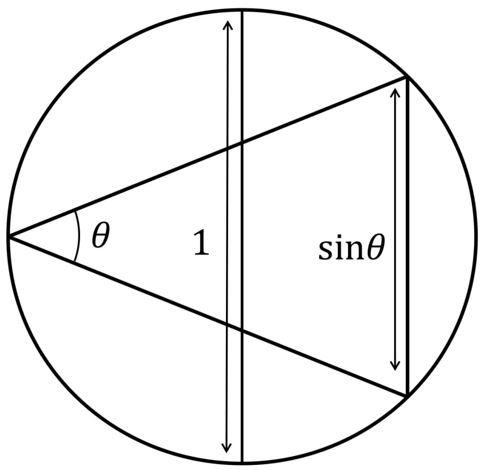

図 1　正弦 sin の定義

半径 R の円で，角 θ に対応する弦の長さは $l = 2R\sin\theta$ である．そもそも円周角の定理によらず，中心角 2θ に対して弦の長さを定義すればよいが，円周角で定義することによって半径 R の円を外接円とする任意の三

角形について考えられる．

1　二角とその間の辺が等しい合同，二角が等しい相似

三角形の二つの角がわかれば三つの辺の長さの比が決まる．この比を知るため以下の定理を示す．

定理 1.1 (正弦定理)**.** 三角形 $\triangle ABC$ について角 A, B, C の対辺をそれぞれ a, b, c とする．また，$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると，

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{1}$$

である．

Proof. sin の定義から，$a = 2R\sin A$ だから，$2R = \frac{a}{\sin A}$ となる．B, C についても同様にして証明できる．□

三角形の二つの角がわかれば三つ目の角も計算できる．この定理から三角形の辺の比が次のようにわかる．

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C \tag{2}$$

2　二辺とその間の角が等しい合同，二辺の比とその間の角が等しい相似

合同を考えると，角度 C と長さ a, b がわかったとき角度 A, B と長さ c が決まる．A, B または c のうち一つがわかれば残りの辺と角は前節か次節の方法でわかる．ここでは c を求め，三辺がわかることから角度 A, B を求めることは次節にゆずる．

(1) 角 C が直角のとき，三平方の定理より $c^2 = a^2 + b^2$ である．

(2) 角 C が鋭角のとき，角 A から直線 BC に垂線を下ろし，その垂線の足を H とする．(図 2)

$$CH = b\sin(90^\circ - C) \tag{3}$$
$$BH = |a - CH| \tag{4}$$

直角三角形 $\triangle ACH$ について三平方の定理を適用すると，$b^2 = AH^2 + CH^2$ である．次に直角三角形 $\triangle ABH$ について三平方の定理を適用すると以下のように c が求められる．

$$\begin{aligned} c^2 &= AH^2 + BH^2 && (5)\\ &= AH^2 + (a - CH)^2 && (6)\\ &= AH^2 + a^2 - 2aCH + CH^2 && (7)\\ &= a^2 + b^2 - 2ab\sin(90^\circ - C) && (8) \end{aligned}$$

(3) 角 C が鈍角のとき，同様に角 A から直線 BC に垂線を下ろし，その垂線の足を H とする．(図 3)

$$CH = b\sin(180^\circ - (90^\circ - C)) = b\sin(C - 90^\circ) \tag{9}$$
$$BH = |a + CH| \tag{10}$$

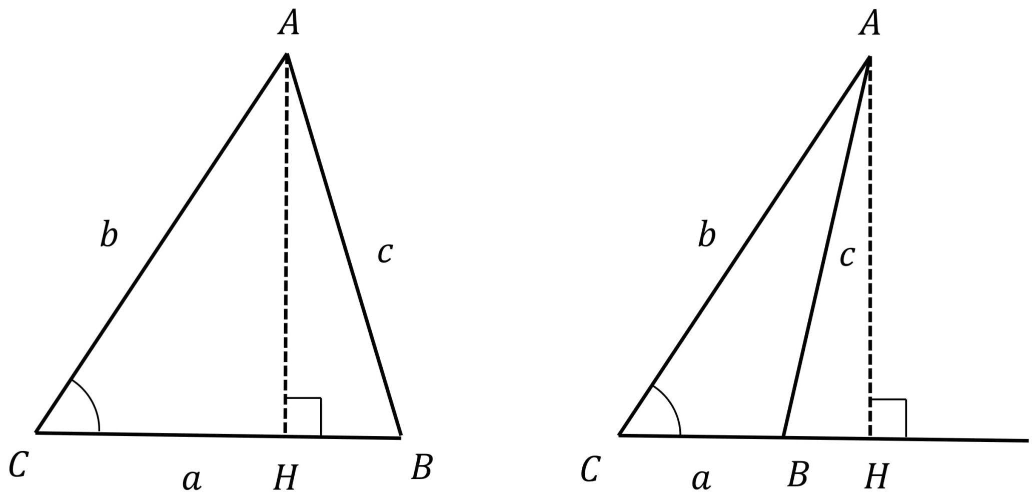

図 2　鋭角の場合

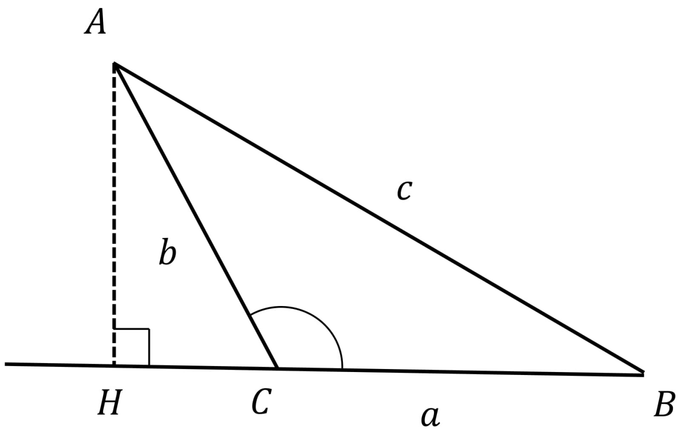

図 3　鈍角の場合

直角三角形 $\triangle ACH$ について三平方の定理を適用すると，$b^2 = AH^2 + CH^2$ である．次に直角三角形 $\triangle ABH$ について三平方の定理を適用すると以下のように c が求められる．

$$\begin{aligned} c^2 &= AH^2 + BH^2 && (11)\\ &= AH^2 + (a + CH)^2 && (12)\\ &= AH^2 + a^2 + 2aCH + CH^2 && (13)\\ &= a^2 + b^2 + 2ab\sin(C - 90^\circ) && (14) \end{aligned}$$

ここでこれらを整理するために余弦 $\cos\theta$ を定義する．

定義 2.1. $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の角について $\cos\theta$ を次の式で定義する．cos のことを余弦と呼ぶ．

$$\cos\theta = \begin{cases} \sin(90^\circ - \theta) & (0^\circ \leqq \theta < 90^\circ) \\ 0 & (\theta = 90^\circ) \\ -\sin(\theta - 90^\circ) & (90^\circ < \theta \leqq 180^\circ) \end{cases} \tag{15}$$

余弦を用いると，

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C && (16)\\ c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} && (17) \end{aligned}$$

となる．相似の場合は角 C と比 $a : b$ がわかっているが，この場合は比 $a : b : c$ は次のようになる．

$$a : b : c = a : b : \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} \tag{18}$$

3　三辺が等しい合同，三辺の比が等しい相似

前節の結果を定理としてまとめる．

定理 3.1 (余弦定理)**.** 三角形 $\triangle ABC$ について角 A, B, C の対辺をそれぞれ a, b, c とすると，

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A && (19)\\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B && (20)\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C && (21) \end{aligned}$$

となる．

これらを変形することで，辺の長さ a, b, c がわかっているときや，辺の比 $a : b : c$ がわかっているときの角度がわかる．

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} && (22)\\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} && (23)\\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && (24) \end{aligned}$$

$\cos\theta$ は $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において単調減少するから，$\cos\theta$ が計算できれば角 θ がわかる．