Equações modelo Simaan

1 Equações do modelo sem LVAD

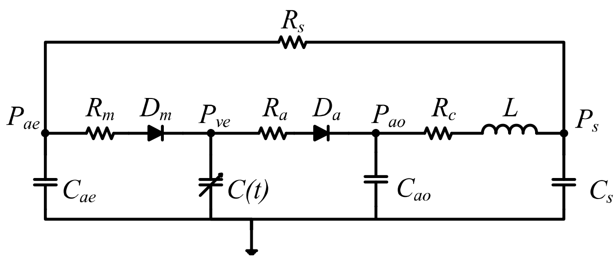

Figura 1: Modelo do SCH de 5ª ordem utilizando modelo windkessel de 4 elementos para representação da circulação sistêmica desenvolvido por Simaan.

Os autores desse trabalho utilizaram a pressão no ventrículo esquerdo ($P_{ve}(t)$) como variável de estado do sistema. Entretanto, a equação diferencial referente a esta variável utiliza a derivada da complacência do ventrículo esquerdo, $\dot{C}(t)$, o que pode gerar instabilidade numérica dependendo do método de integração e do valor do passo de integração utilizados. Por esse motivo, essa variável foi substituída pelo volume no ventrículo esquerdo ($V_{ve}(t)$) de acordo com a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{ve}(t) =& Q_m(t) - Q_a(t)\\ =& \frac{D_m}{R_m}(P_{ae}(t) - P_{ve}(t)) - \frac{D_a}{R_a}(P_{ve}(t) - P_{ao}(t))\\ =& \frac{D_a}{R_a}P_{ao}(t) - \left[\frac{D_m}{R_m} + \frac{D_a}{R_a}\right] P_{ve}(t) + \frac{D_m}{R_m}P_{ae}(t)\\ =& \frac{D_a}{R_a}P_{ao}(t) - \left[\frac{D_m}{R_m} + \frac{D_a}{R_a}\right] E(t)V_{ve}(t) + \frac{D_m}{R_m}P_{ae}(t) + \left[\frac{D_m}{R_m} + \frac{D_a}{R_a}\right] E(t)V_o \qquad (1)\end{aligned}$$

sendo Q_m o fluxo sanguíneo (corrente elétrica) que sai do átrio esquerdo para o ventrículo esquerdo durante a fase de enchimento e Q_a o fluxo que sai do ventrículo esquerdo em direção à aorta (saída cardíaca) durante a fase de ejeção.

De posse da equação do volume ventricular, podemos calcular o valor da pressão no ventrículo esquerdo da seguinte maneira:

$$P_{ve}(t) = E(t)\,(V_{ve}(t) - V_o) \tag{2}$$

sendo $E(t)$ dado por:

$$E(t) = (E_{max} - E_{min})E_n(t_n) + E_{min} \tag{3}$$

onde E_{max} e E_{min} são constantes relacionadas à amplitude da função elastância, ou seja, à condição fisiológica do paciente, mais especificamente à contratilidade do ventrículo esquerdo. O termo $E_n(t_n)$ consiste em uma função elastância normalizada no tempo e na amplitude e foi representada pela chamada função *double hill*, a qual possui valor mínimo igual a zero e alcança o valor máximo $E_n(t_n) = 1$ em $t_n = 1$, sendo representada pela seguinte expressão analítica:

$$E_n(t_n) = 1,55.\left[\frac{\left(\frac{t_n}{0,7}\right)^{1,9}}{1+\left(\frac{t_n}{0,7}\right)^{1,9}}\right].\left[\frac{1}{1+\left(\frac{t_n}{1,17}\right)^{21,9}}\right] \tag{4}$$

onde $t_n = t/T_{max}$ é o tempo normalizado para um ciclo cardíaco, $T_{max} = 0,2 + 0,15T$, sendo T o intervalo de tempo referente à duração de um ciclo cardíaco, o qual pode ser calculado como $T = 60/FC$, sendo FC igual à frequência cardíaca.

Aplicando-se as leis de Kirchhoff no circuito da Fig. 1, podemos extrair o restante das equações diferenciais do SCH, como vemos a seguir:

- **Pressão na aorta** ($P_{ao}(t)$)

$$\begin{aligned}
\frac{D_a}{R_a}(P_{ve}(t) - P_{ao}(t)) =& C_{ao}\dot{P_{ao}}(t) + Q_a(t)\\
C_{ao}\dot{P_{ao}}(t) =& -\frac{D_a}{R_a}P_{ao}(t) - Q_a(t) + \frac{D_a}{R_a}P_{ve}(t)\\
=& -\frac{D_a}{R_a}P_{ao}(t) - Q_a(t) + \frac{D_a}{R_a}E(t)(V_{ve}(t) - V_o)\\
\dot{P_{ao}}(t) =& -\frac{D_a}{R_aC_{ao}}P_{ao}(t) - \frac{1}{C_{ao}}Q_a(t) + \frac{D_a}{R_aC_{ao}}E(t)V_{ve}(t) - \frac{D_a}{R_aC_{ao}}E(t)V_o
\end{aligned} \tag{5}$$

- **Fluxo na Aorta** ($Q_a(t)$)

$$\begin{aligned}
P_{ao}(t) =& R_cQ_a(t) + L\dot{Q}_a(t) + P_s(t)\\
L\dot{Q}_a(t) =& P_{ao}(t) - R_cQ_a(t) - P_s(t)\\
\dot{Q}_a(t) =& \frac{1}{L}P_{ao}(t) - \frac{R_c}{L}Q_a(t) - \frac{1}{L}P_s(t)
\end{aligned} \tag{6}$$

- **Pressão arterial sistêmica ($P_s(t)$)**

$$\begin{aligned}
Q_a(t) =& C_s\dot{P}_s(t) + \frac{P_s(t) - P_{ae}(t)}{R_s} \\
C_s\dot{P}_s(t) =& Q_a(t) - \frac{1}{R_s}P_s(t) + \frac{1}{R_s}P_{ae}(t) \\
\dot{P}_s(t) =& \frac{1}{C_s}Q_a(t) - \frac{1}{R_sC_s}P_s(t) + \frac{1}{R_sC_s}P_{ae}(t) \qquad (7)
\end{aligned}$$

- **Pressão no átrio esquerdo ($P_{ae}(t)$)**

$$\begin{aligned}
\frac{(P_s(t) - P_{ae}(t))}{R_s} =& C_{ae}\dot{P_{ae}}(t) + \frac{D_m}{R_m}(P_{ae}(t) - P_{ve}(t)) \\
C_{ae}\dot{P_{ae}}(t) =& \frac{1}{R_s}P_s(t) - \frac{1}{R_s}P_{ae}(t) - \frac{D_m}{R_m}P_{ae}(t) + \frac{D_m}{R_m}P_{ve}(t) \\
C_{ae}\dot{P_{ae}}(t) =& \frac{1}{R_s}P_s(t) - \left[\frac{1}{R_s} + \frac{D_m}{R_m}\right]P_{ae}(t) + \frac{D_m}{R_m}E(t)V_{ve}(t) - \frac{D_m}{R_m}E(t)V_o \\
\dot{P_{ae}}(t) =& \frac{D_m}{R_mC_{ae}}E(t)V_{ve}(t) + \frac{1}{R_sC_{ae}}P_s(t) - \frac{1}{C_{ae}}\left[\frac{1}{R_s} + \frac{D_m}{R_m}\right]P_{ae}(t) \\
& - \frac{D_m}{R_mC_{ae}}E(t)V_o \qquad (8)
\end{aligned}$$

2 Equações do modelo com LVAD

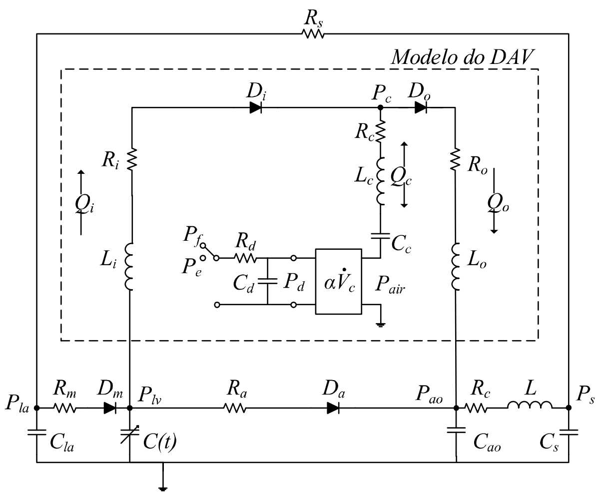

Figura 2: Modelo 0D do SCH acoplado a um modelo 0D do DAV pulsátil PVAD Thoratec, utilizado para assistência ao ventrículo esquerdo.

As equações do modelo acoplado (SCH+PVAD) estão listadas abaixo:

- **Pressão na aorta** ($P_{ao}(t)$)

$$\dot{P_{ao}}(t) = \left(Q_o - \frac{D_a}{R_a}P_{ao}(t) - Q_a(t) + \frac{D_a}{R_a}E(t)V_{ve}(t) - \frac{D_a}{R_a}E(t)V_o\right)/C_{ao} \tag{9}$$

- **Fluxo na Aorta** ($Q_a(t)$)

$$\dot{Q}_a(t) = \left(P_{ao}(t) - R_c Q_a(t) - P_s(t)\right)/L \tag{10}$$

- **Volume no ventrículo esquerdo** ($V_{ve}(t)$)

$$\dot{V}_{ve}(t) = -\,Q_i(t) + \frac{D_a}{R_a}P_{ao}(t) - \left[\frac{D_m}{R_m} + \frac{D_a}{R_a}\right]E(t)V_{ve}(t) + \frac{D_m}{R_m}P_{ae}(t) + \left[\frac{D_m}{R_m} + \frac{D_a}{R_a}\right]E(t)V_o \tag{11}$$

- **Pressão arterial sistêmica** ($P_s(t)$)

$$\dot{P}_s(t) = \left(Q_a(t) - \frac{1}{R_s}P_s(t) + \frac{1}{R_s}P_{ae}(t)\right)/C_s \tag{12}$$

- **Pressão no átrio esquerdo** ($P_{ae}(t)$)

$$\dot{P_{ae}}(t) = \left(\frac{D_m}{R_m}E(t)V_{ve}(t) + \frac{1}{R_s}P_s(t) - \left[\frac{1}{R_s} + \frac{D_m}{R_m}\right]P_{ae}(t) - \frac{D_m}{R_m}E(t)V_o\right)/C_{ae} \tag{13}$$

- **Fluxo de entrada do PVAD** ($Q_i(t)$)

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i(t) = \Big\{ & \beta_i E(t)V_{ve}(t) - \beta_i E(t)V_o - (\beta_i - \gamma)\frac{1}{C_p}V_c(t) - (\beta_i - \gamma)\Big[P_{ex}(t) + \alpha\dot{V}_c(t)\Big] - \\ & \Big[\beta_i R_p + \theta_i(t) + \gamma R_p\Big]Q_i(t) + (\beta_i - \gamma)\frac{1}{C_p}V_{d-vad} + \Big[\beta_i R_p - \gamma R_p - \beta_i L_p\theta_o(t)\Big]Q_o(t) \\ & - \gamma P_{ao}(t)\Big\}/(1 - \gamma L_p)\end{aligned} \tag{14}$$

sendo $\gamma = \beta_i L_p \beta_o$, $\beta_i = \frac{D_i}{L_i + D_i L_p}$, $\beta_o = \frac{D_o}{L_o + D_o L_p}$, $\theta_i(t) = \frac{R_i(t)}{L_i + D_i L_p}$ e $\theta_o(t) = \frac{R_o(t)}{L_o + D_o L_p}$.

- **Fluxo de saída do PVAD** ($Q_o(t)$)

$$\begin{aligned}\dot{Q}_o(t) = \Big\{ & (\beta_o - \gamma)\frac{1}{C_p}V_c(t) + (\beta_o - \gamma)\Big[P_{ex}(t) + \alpha\dot{V}_c(t)\Big]) + \Big[\beta_o R_p - \gamma R_p - \beta_o L_p\theta_i(t)\Big]Q_i(t) - \\ & (\beta_o - \gamma)\frac{1}{C_p}V_{d-vad} - \Big[\beta_o R_p + \theta_o(t) - \gamma R_p\Big]Q_o(t) - \beta_o P_{ao}(t)\Big\}/(1 - \gamma L_p)\end{aligned} \tag{15}$$

- **Volume na câmara de sangue do PVAD ($V_c(t)$)**

$$\dot{V}_c(t) = Q_i(t) - Q_o(t) \tag{16}$$

- **Pressão pneumática ($P_{ex}(t)$)**

$$\dot{P_{ex}}(t) = -\left(\frac{1}{R_d C_d}\right) P_{ex}(t) + \left(\frac{1}{R_d C_d}\right) P_d \tag{17}$$