РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

з теорії ймовірностей

на тему **: «Випадкові вектори»**

Виконав студент групи КА-22

ЧЕРТОК МИКОЛА

Київ 2023

ЗМІСТ

Завдання 1

Нехай дискретний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ задано таблицею розподілу (див. табл. 1)

Таблиця 1 – Таблиця розподілу вектора $\vec{\xi}$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-9	-6	-1	2
-5	0,2	0,07	0,04	0,02
-2	0,12	0,02	0,06	0,05
2	0,08	0,03	0,05	0,26

Бачимо, що $n = 3$, $m = 4$, $x_1 = -5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $y_1 = -9$, $y_2 = -6$, $y_3 = -1$, $y_4 = 2$. Значення $p_{kj} = P\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_j\}$, $k = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$ занесені у таблицю 1.

1. Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

$P\{\xi_1 = x_k\} = P(A_k)$, $k = \overline{1,3}$. Подія A_k відбувається разом із гіпотезами $B_j = \{\xi_2 = y_j\}$, $j = \overline{1,4}$ причому B_1, B_2, B_3 , B_4 утворюють повну групу подій($\bigcup_{j=1}^{4} B_j = \Omega$, $B_{j_1} \cap B_{j_2} = \emptyset$ при $j_1 \neq j_2$).

За формулою повної ймовірності:

$$P(A_k) = \sum_{j=1}^{4} P(B_j)P(A_k/B_j) = \sum_{j=1}^{4} P(A_k \cap B_j) = \sum_{j=1}^{4} p_{kj}$$

Тепер розуміємо що аналогічно і A_1, A_2, A_3 утворюють повну групу подій($\bigcup_{k=1}^{3} A_k = \Omega$, $A_{k_1} \cap A_{k_2} = \emptyset$ при $j = k_1 \neq k_2$).

$$P(B_j) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B_j/A_k) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k \cap B_j) = \sum_{k=1}^{3} p_{kj}$$

Тепер починаємо розрахунки $P\{\xi_1 = x_k\}$, $k = \overline{1,3}$:

$$P\{\xi_1 = -5\} = 0{,}2 + 0{,}07 + 0{,}04 + 0{,}02 = 0{,}33$$

$$P\{\xi_1 = -2\} = 0{,}12 + 0{,}02 + 0{,}06 + 0{,}05 = 0{,}25$$

$$P\{\xi_1 = 2\} = 0{,}08 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}26 = 0{,}42$$

Перевірка, на те що $\sum_{k=1}^{3} P(A_k) = 1$ (оскільки A_1, A_2, A_3 утворюють повну групу):

$\sum_{k=1}^{3} P\{\xi_1 = x_k\} = P\{\xi_1 = -5\} + P\{\xi_1 = -2\} + P\{\xi_1 = 2\} = 0{,}33 + 0{,}25 + 0{,}42 = 1$

Аналогічно починаємо розрахунки $P\{\xi_1 = y_j\}$, $j = \overline{1,4}$:

$$P\{\xi_2 = -9\} = 0{,}2 + 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}4$$

$$P\{\xi_2 = -6\} = 0{,}07 + 0{,}02 + 0{,}03 = 0{,}12$$

$$P\{\xi_2 = -1\} = 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}05 = 0{,}15$$

$$P\{\xi_2 = 2\} = 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}26 = 0{,}33$$

Перевірка, на те що $\sum_{j=1}^{4} P(B_j) = 1$ (оскільки B_1, B_2, B_3, B_4 утворюють повну групу):

$$\sum_{j=1}^{4} P\{\xi_2 = y_j\} = P\{\xi_2 = -9\} + P\{\xi_2 = -6\} + P\{\xi_2 = -1\} + P\{\xi_2 = 2\}$$
$$= 0{,}4 + 0{,}12 + 0{,}15 + 0{,}33 = 1$$

Отримуємо

□1	-5	-2	2
p	0,33	0,25	0,42

ξ_2	-9	-6	-1	2
P	0,4	0,12	0,15	0,33

2. Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

Означення. $F_{\xi_i}(x) = P\{\xi_i < x\}$ $(i = 1, 2)$, $x \in \mathbb{R}$, а

ξ_1	-5	-2	2
P	0,33	0,25	0,42

З цього маємо:

$$F_{\xi_1}(x) = P\{\xi_1 < x\} =$$

$$= \begin{cases} P(\emptyset) = 0, & \text{при } x \le -5; \\ P\{\xi_1 = -5\} = 0{,}33, & \text{при } -5 < x \le -2; \\ P\big\{\{\xi_1 = -5\} \cup \{\xi_1 = -2\}\big\} = P\{\xi_1 = -5\} + P\{\xi_1 = -2\} = \\ = 0{,}33 + 0{,}25 = 0{,}58, & \text{при } -2 < x \le 2; \\ P\big\{\{\xi_1 = -5\} \cup \{\xi_1 = -2\} \cup \{\xi_1 = 2\}\big\} = \\ = P\{\xi_1 = -5\} + P\{\xi_1 = -2\} + P\{\xi_1 = 2\} = \\ = 0{,}32 + 0{,}25 + 0{,}42 = 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Нарешті :

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -5; \\ 0{,}33, & \text{при } -5 < x \le -2; \\ 0{,}58, & \text{при } -2 < x \le 2; \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо функцію розподілу другої координати.

ξ_2	-9	-6	-1	2
P	0,4	0,12	0,15	0,33

$$F_{\xi_2}(y) = P\{\xi_2 < y\} =$$

$$= \begin{cases} P(\emptyset) = 0, & \text{при } y \le -9; \\ P\{\xi_2 = -9\} = 0{,}4, & \text{при } -9 < y \le -6; \\ P\big\{\{\xi_2 = -9\} \cup \{\xi_2 = -6\}\big\} = P\{\xi_2 = -9\} + P\{\xi_2 = -6\} = \\ = 0{,}4 + 0{,}12 = 0{,}52, & \text{при } -6 < y \le -1; \\ P\big\{\{\xi_2 = -9\} \cup \{\xi_2 = -6\} \cup \{\xi_2 = -1\}\big\} = \\ = P\{\xi_2 = -9\} + P\{\xi_2 = -6\} + P\{\xi_2 = -1\} = \\ = 0{,}4 + 0{,}12 + 0{,}15 = 0{,}67, & \text{при } -1 < y \le 2; \\ P\big\{\{\xi_2 = -9\} \cup \{\xi_2 = -6\} \cup \{\xi_2 = -1\} \cup \{\xi_2 = 2\}\big\} = \\ = P\{\xi_2 = -9\} + P\{\xi_2 = -6\} + P\{\xi_2 = -1\} + P\{\xi_2 = 2\} = \\ = 0{,}4 + 0{,}12 + 0{,}15 + 0{,}33 = 1, & \text{при } y > 2. \end{cases}$$

Нарешті:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \le -9; \\ 0{,}4, & \text{при } -9 < y \le -6; \\ 0{,}52, & \text{при } -6 < y \le -1; \\ 0{,}67, & \text{при } -1 < y \le 2; \\ 1, & \text{при } y > 2. \end{cases}$$

Графіки функцій розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ зображені на рис. 1 та рис. 2

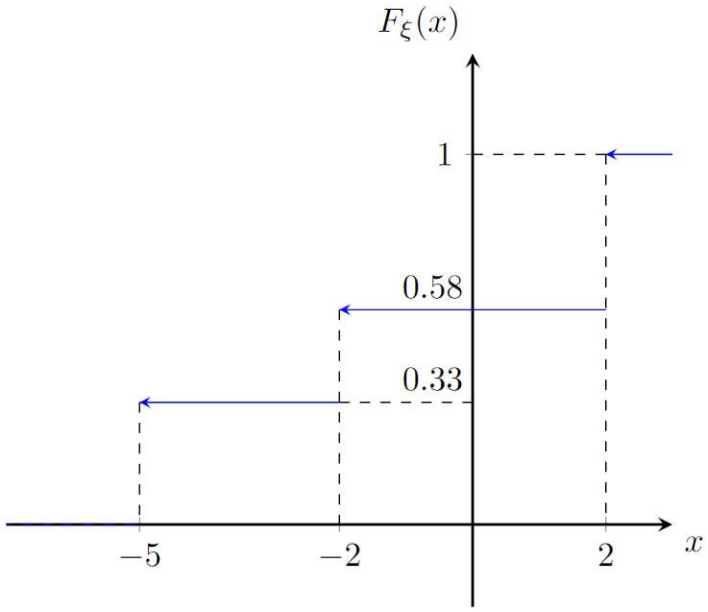

Рисунок 1 – Графік функції $F_{\xi_1}(x)$

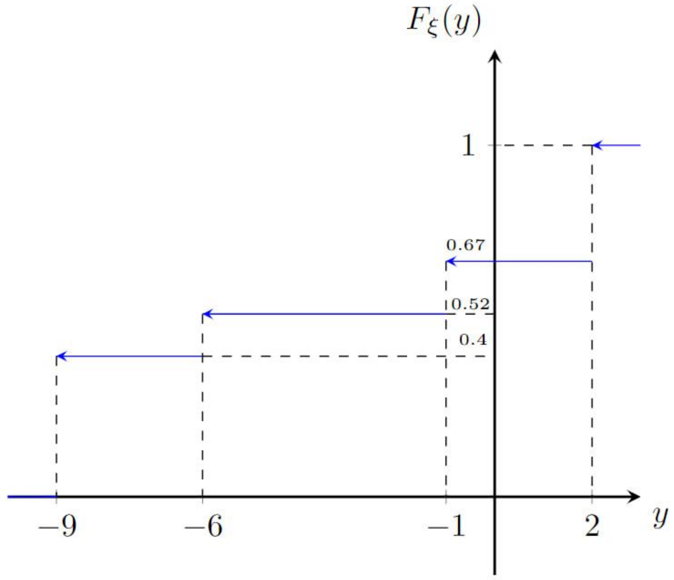

Рисунок 2 – Графік функції $F_{\xi_2}(y)$

3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$.

Як відомо, за означенням $F_{\vec{\xi}}(x,\ y) = P\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$. Це ймовірність потрапляння випадкового вектора усередину нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y)

Використаємо формулу :

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \sum_{k:x_k<x} \sum_{j:y_j<y} p_{kj}$$

Зрозуміло, що значення сумісної функції розподілу в кожній точці координатної площини залежить від множини точок, які потрапили в квадрант. Зрозуміло, що $F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$, якщо $x \le x_1$, або $y \le y_1$. Іншу частину координатної площини розіб'ємо на області $D_{k,j} = \left\{ \begin{matrix} (x, y) | x_k < x \le x_{k+1}, \\ y_j < y \le y_{j+1} \end{matrix} \right\}$, $k = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ (рис. 3). При $k = n$ матимемо умову $x > x_n$, а при $j = m$ маємо $y > y_m$.

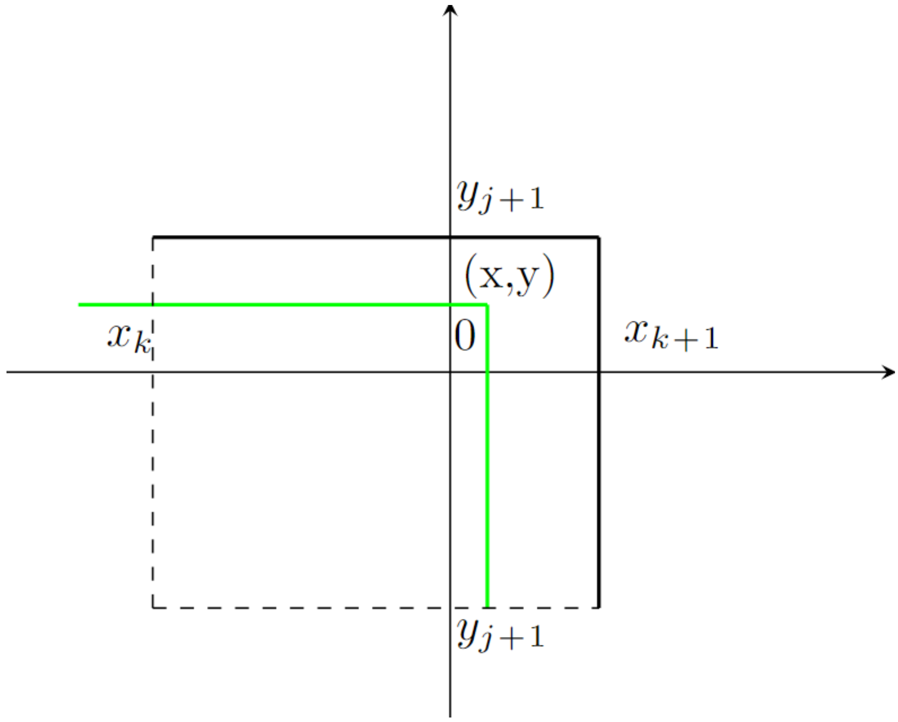

Рисунок 3

Для полегшення знаходження $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ намалюємо в декартовій системі координат усі точки, що відповідають значенню вектора $\vec{\xi}$ (рис. 4) та обчислимо значення сумісної функції розподілу в кожній області $D_{k,j}$, $k=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$. Для наочності кожен випадок супроводжується малюнком (рис. 5 – 17).

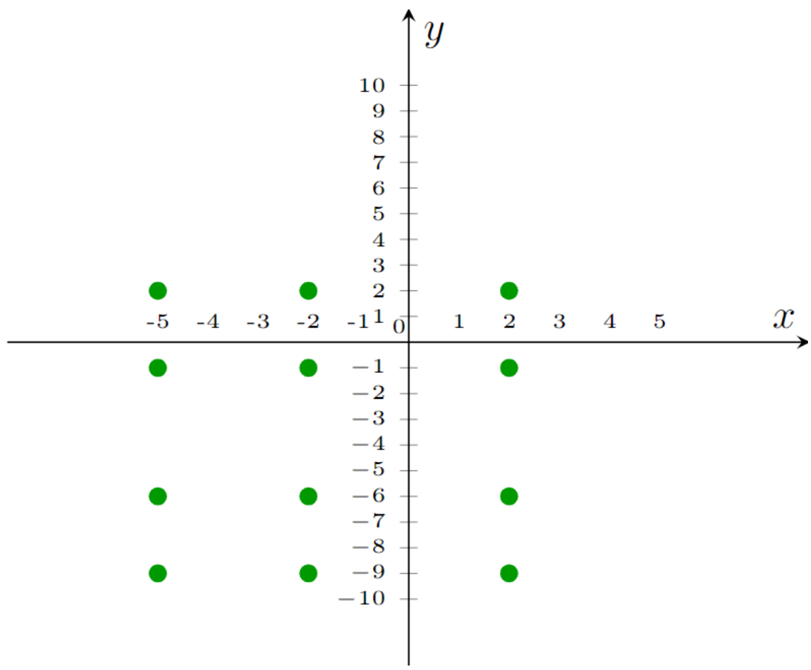

Рисунок 4

1. $(x \le -5) \vee (y \le -9)$;

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$.

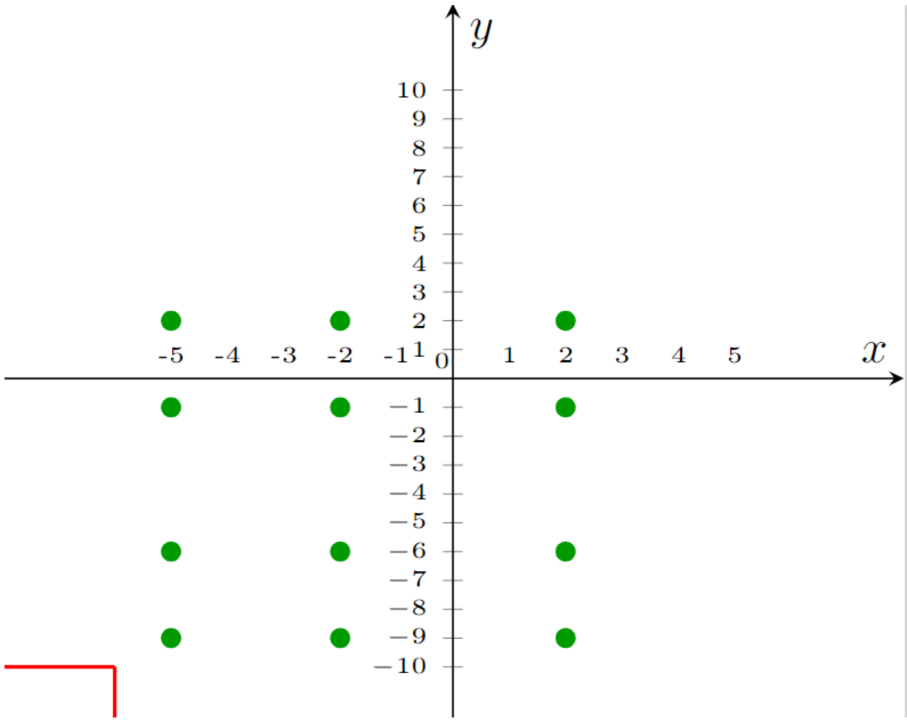

Рисунок 5

2. $D_{1,1} = \left\{(x, y) \middle| \begin{matrix} -5 < x \le -2, \\ -9 < y \le -6 \end{matrix} \right\}$;

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = - - 9\} = 0{,}2$

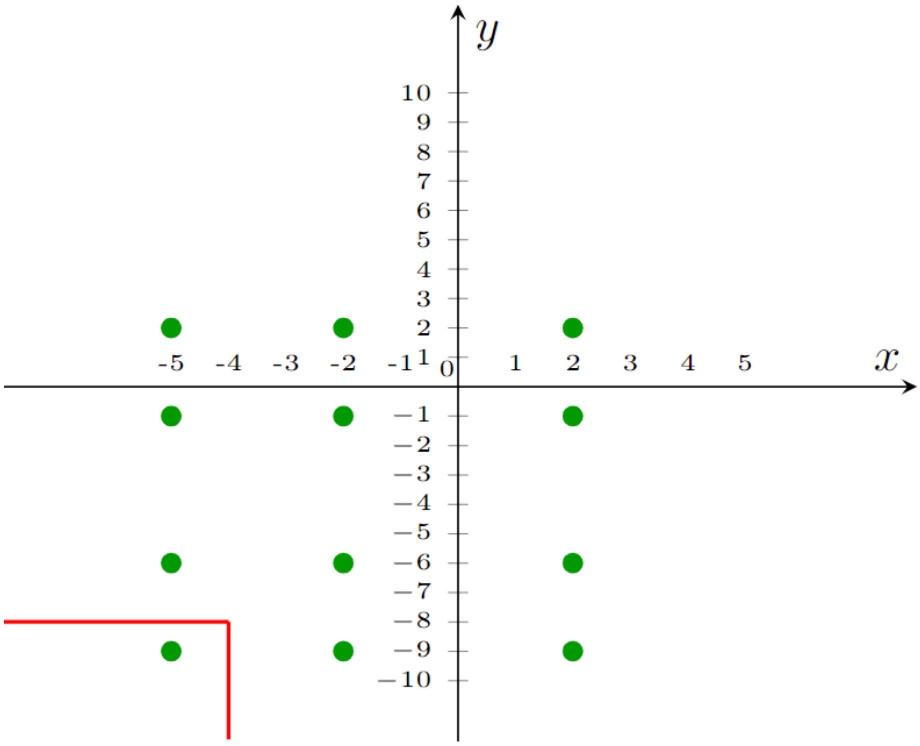

Рисунок 6

3. $D_{2,1} = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}-2 < x \le 2,\\ -9 < y \le -6\end{matrix}\right\};$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -9\} +$
$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -9\} =$
$= 0{,}2 + 0{,}12 = 0{,}32$

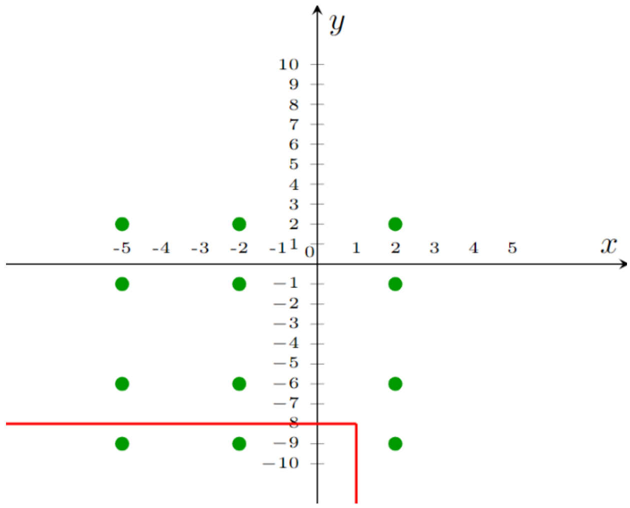

Рисунок 7

4. $D_{3,1} = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}x > 2,\\ -9 < y \le -6\end{matrix}\right\};$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -10\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -9\} +$

$+P\{\xi_1 = 2, \xi_2 = -9\} =$

$= 0{,}2 + 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}4$

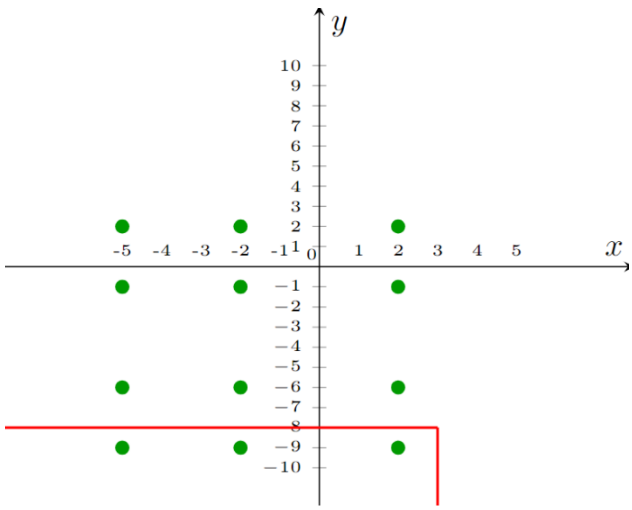

Рисунок 8

5. $D_{1,2} = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}-5 < x \le -2,\\ -6 < y \le -1\end{matrix}\right\};$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -9\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -6\} = 0{,}27$

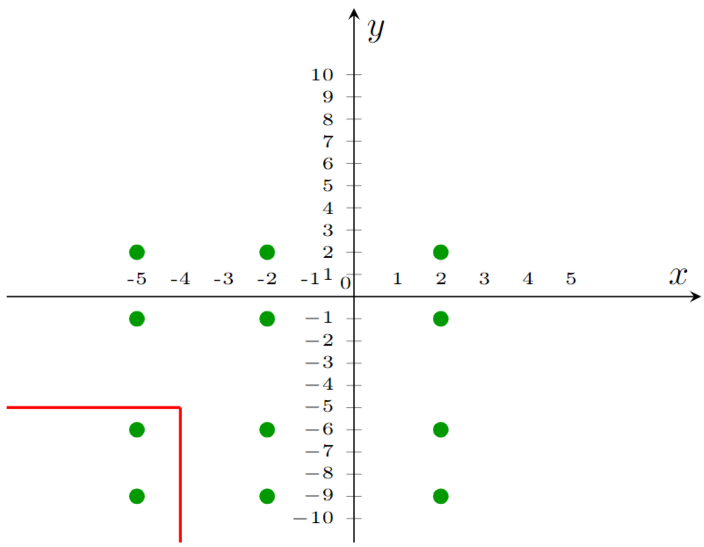

Рисунок 9

6. $D_{2,2} = \left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} -2 < x \le 2, \\ -6 < y \le -1 \end{matrix}\right\};$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -9\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -9\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} = 0{,}41$

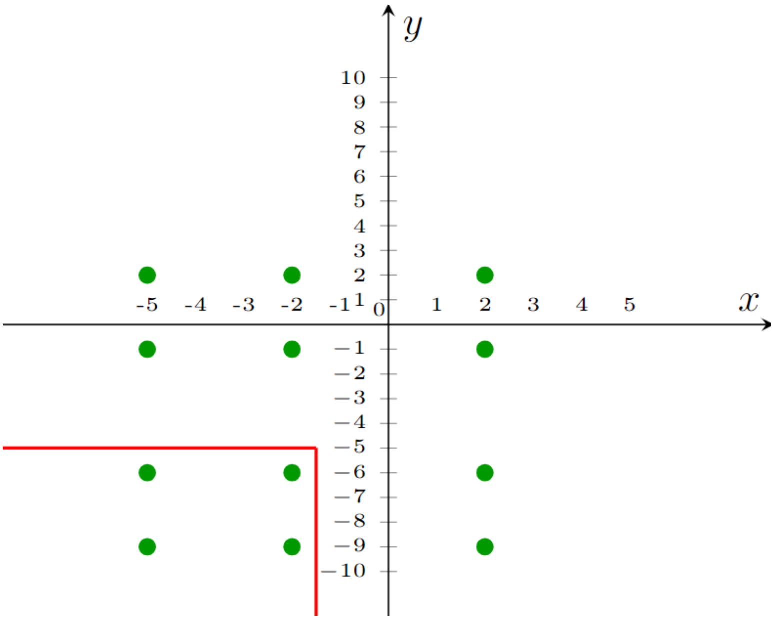

Рисунок 10

7. $D_{3,2} = \left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} x > 2, \\ -6 < y \le -1 \end{matrix}\right\};$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -9\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -9\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} +$

$P\{\xi_1 = 2, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = 2, \xi_2 = -9\} = 0{,}52$

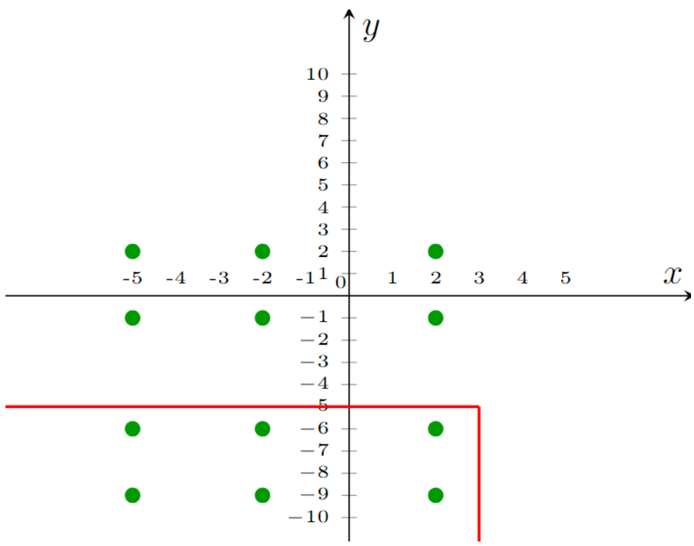

Рисунок 11

8. $D_{1,3} = \left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} -5 < x \leq -2, \\ -1 < y \leq 2 \end{matrix}\right\}$;

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -1\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -9\} = 0{,}31$

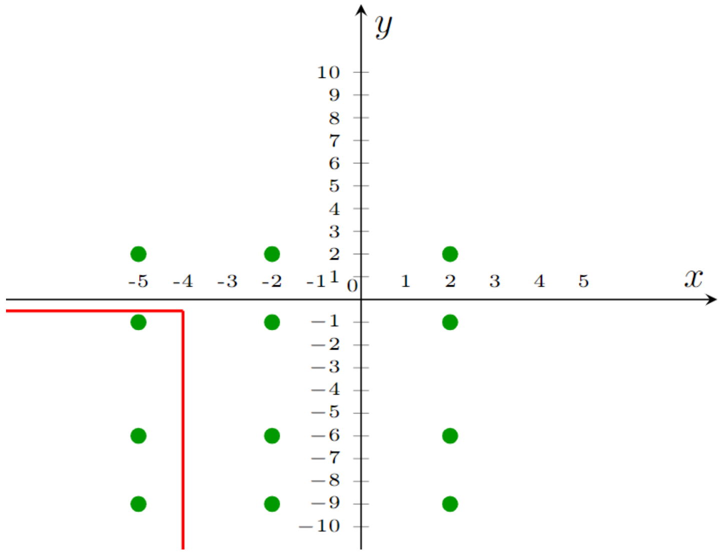

Рисунок 12

9. $D_{2,3} = \left\{(x,y)\middle| \begin{matrix} -2 < x \leq 2, \\ -1 < y \leq 2 \end{matrix}\right\}$;

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -1\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -9\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -1\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -9\} = 0{,}51$

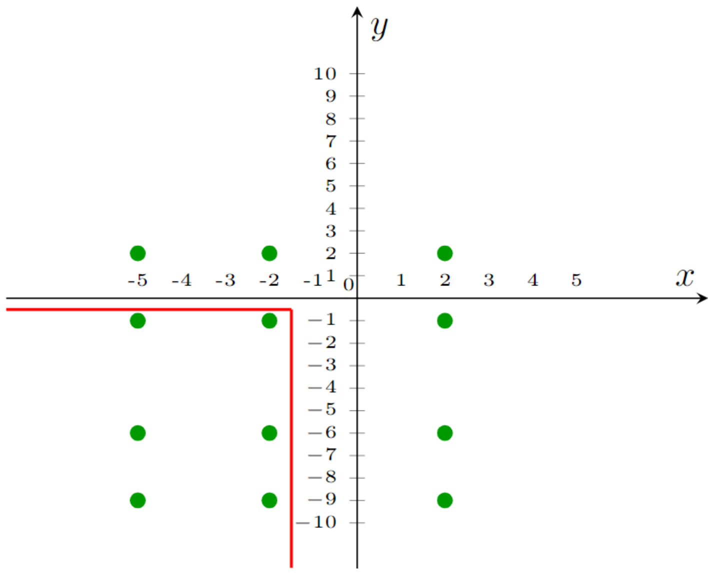

Рисунок 13

10. $D_{3,3} = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix} x > 2, \\ -1 < y \le 2 \end{matrix}\right\};$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) =$

$P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -1\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -9\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -1\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -9\} +$

$P\{\xi_1 = 2, \xi_2 = -9\} +$

$P\{\xi_1 = 2, \xi_2 = -6\} +$

$P\{\xi_1 = 2, \xi_2 = -1\} = 0{,}67$

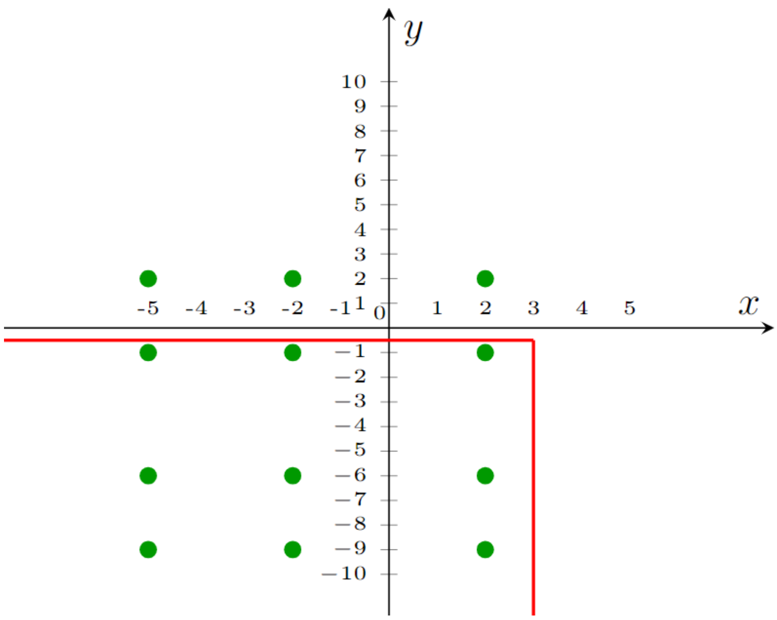

Рисунок 14

11. $D_{1,4} = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix} -5 < x \le -2, \\ y > 2 \end{matrix}\right\};$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = 2\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -1\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -9\} = 0{,}33$

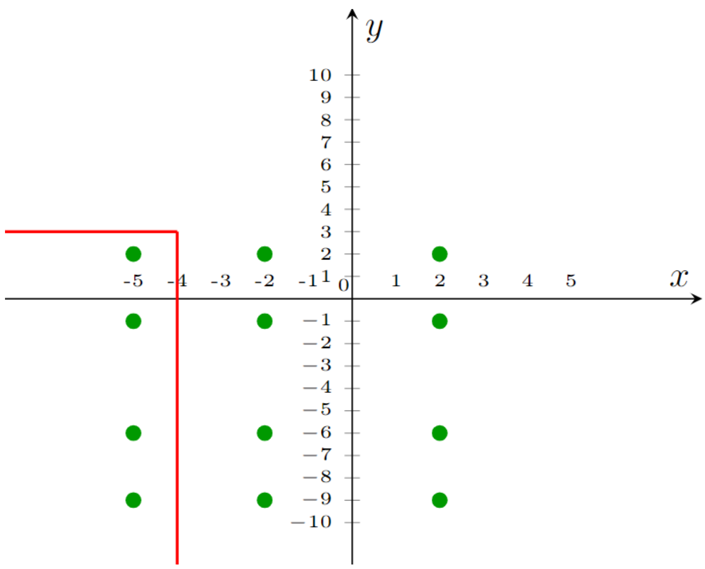

Рисунок 15

12. $D_{2,4} = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}-2 < x \leq 2, \\ y > 2\end{matrix}\right\};$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = 2\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -1\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -9\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = 2\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -1\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -9\} = 0{,}58$

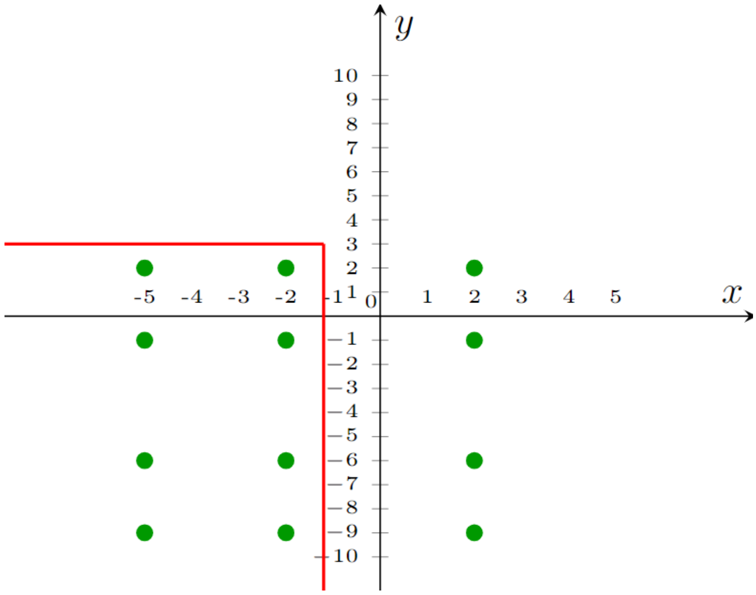

Рисунок 16

13. $D_{3,4} = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}x > 2, \\ y > 2\end{matrix}\right\};$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = 2\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -1\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -5, \xi_2 = -9\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = 2\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -1\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -9\}$

$+P\{\xi_1 = 2, \xi_2 = -9\} +$

$+P\{\xi_1 = 2, \xi_2 = -6\} +$

$+P\{\xi_1 = 2, \xi_2 = -1\} +$

$+P\{\xi_1 = 2, \xi_2 = 2\} = 1$

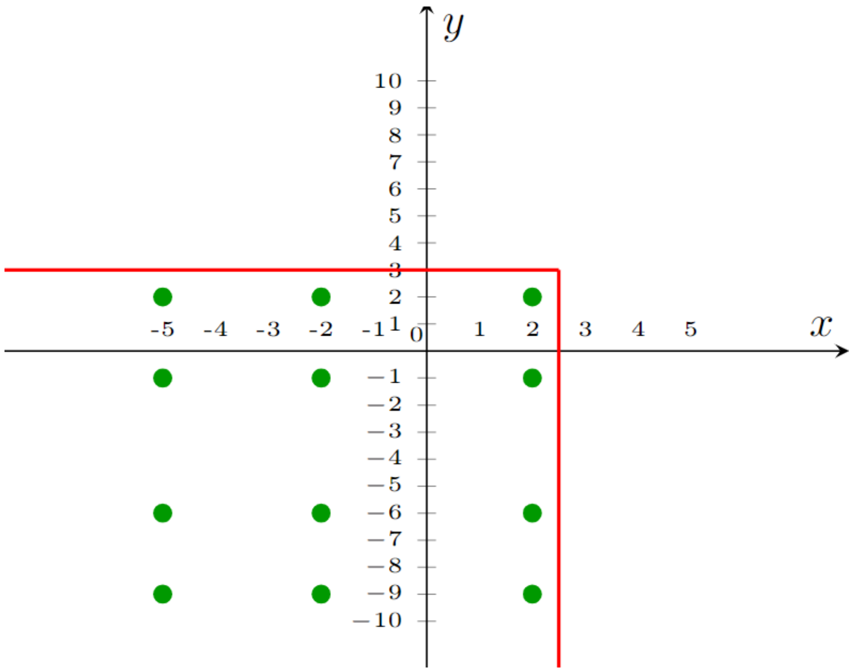

Рисунок 17

Отримали сумісну функцію розподілу, яку можна записати у вигляді таблиці 2.

Таблиця 2 – Функція $F_{\vec{\xi}}(x, y)$

y \ x	$x \le -5$	$-5 < x \le -2$	$-2 < x \le 2$	$x > 2$
$y \le -9$	0	0	0	0
$-9 < y \le -6$	0	0,2	0,32	0,4
$-6 < y \le -1$	0	0,27	0,41	0,52
$-1 < y \le 2$	0	0,31	0,51	0,67
$y > 2$	0	0,33	0,58	1

Або записати у вигляді кусково-заданої функції:

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } (x \le -5) \vee (y \le -9); \\ 0{,}2, & \text{при } (-5 < x \le -2) \wedge (-9 < y \le -6); \\ 0{,}32, & \text{при } (-2 < x \le 2) \wedge (-9 < y \le -6); \\ 0{,}4, & \text{при } (x > 2) \wedge (-9 < y \le -6); \\ 0{,}27, & \text{при } (-5 < x \le -2) \wedge (-6 < y \le -1); \\ 0{,}41, & \text{при } (-2 < x \le 2) \wedge (-6 < y \le -1); \\ 0{,}52, & \text{при } (x > 2) \wedge (-6 < y \le -1); \\ 0{,}31, & \text{при } (-5 < x \le -2) \wedge (-1 < y \le 2); \\ 0{,}51, & \text{при } (-2 < x \le 2) \wedge (-1 < y \le 2); \\ 0{,}67, & \text{при } (x > 2) \wedge (-1 < y \le 2); \\ 0{,}33, & \text{при } (-5 < x \le -2) \wedge (y > 2); \\ 0{,}58, & \text{при } (-2 < x \le 2) \wedge (y > 2); \\ 1, & \text{при } (x > 2) \wedge (y > 2). \end{cases}$$

4. Математичні сподівання координат. Кореляційна та нормована кореляційна матриця.

а) Знайдемо математичне сподівання координати ξ_1, яка має наступний ряд розподілу :

ξ_1	-5	-2	2
P	0,33	0,25	0,42

$$E\xi_1 = \sum_{k=1}^{3} x_k p_k. = (-5)\cdot 0{,}33 + (-2)\cdot 0{,}25 + 2\cdot 0{,}42 =- 1{,}31$$

Також знайдемо і для ξ_2:

ξ_2	-9	-6	-1	2
P	0,4	0,12	0,15	0,33

$$E\xi_2 = \sum_{k=1}^{4} y_j p_j = (-9)\cdot 0{,}4 + (-6)\cdot 0{,}12 + (-1)\cdot 0{,}15 + 2\cdot 0{,}33 =- 3{,}81$$

Отже, центр розсіювання вектора $\vec{\xi}$ – точка $(-1{,}31;\ -3{,}81)$.

б) Побудуємо кореляційну та нормовану кореляційну матриці.

Побудуємо таку матрицю $K_1 = \begin{pmatrix} E\xi_1^2 & E\xi_1\xi_2 \\ E\xi_1\xi_2 & E\xi_2^2 \end{pmatrix}$

Далі вона полегшить побудову кореляційної матриці:

$$E\xi_1\xi_2 = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_k y_j p_{kj} = (-9)\cdot(-5)\cdot(0{,}2) + (-9)\cdot(-2)\cdot(0{,}12)$$
$$+(-9)\cdot(2)\cdot(0{,}08) + (-5)\cdot(-6)\cdot(0{,}07) + (-6)\cdot(-2)\cdot(0{,}02) + (-6)\cdot(2)$$
$$\cdot(0{,}03) + (-1)\cdot(-5)\cdot(0{,}04) + (-1)\cdot(-2)\cdot(0{,}06) + (-1)\cdot(2)$$
$$\cdot(0{,}05) + (2)\cdot(-5)\cdot(0{,}02) + (2)\cdot(-2)\cdot(0{,}05) + (2)\cdot(2)$$
$$\cdot(0{,}26)+$$
$$= 9 + 2{,}16 - 1{,}44 + 2{,}1 + 0{,}24 - 0{,}36 + 0{,}2 + 0{,}12 - 0{,}1 - 0{,}2 - 0{,}2$$
$$+ 1{,}04 = 12{,}56$$

$$E\xi_1^2 = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 p_{k\cdot} = 25 \cdot 0,33 + 4 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,42 = 10,93$$

$$E\xi_2^2 = \sum_{j=1}^{4} y_j^2\, p_j = 81 \cdot 0,4 + 36 \cdot 0,12 + 1 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,33 = 38,19$$

Отримали наступну матрицю:

$$K_1 = \begin{pmatrix} E\xi_1^2 & E\xi_1\xi_2 \\ E\xi_1\xi_2 & E\xi_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,93 & 12,56 \\ 12,56 & 38,19 \end{pmatrix}$$

Тепер з допомогою цієї матриці можна легко побудувати наступну :

$$K_2 = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K(\xi_1,\xi_2) \\ K(\xi_1,\xi_2) & D\xi_2 \end{pmatrix},$$

де $D\xi_i$ – дисперсія випадкової величини ξ_i, $i = 1,2$.

$K(\xi_1,\xi_2)$ – кореляційний момент ξ_1 та ξ_2.

$$K(\xi_1,\xi_2) = E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2$$
$$= 12,56 – (–1,31)(–3,81) = 7,5689$$
$$D\xi_1 = E(\xi_1 - E\xi_1)^2 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = 10,93 - 1,31^2 = 9,2139$$
$$D\xi_2 = E(\xi_2 - E\xi_2)^2 = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = 38,19 - 3,81^2 = 23,6739$$

Отримуємо кореляційну матрицю :

$$K_2 = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K(\xi_1,\xi_2) \\ K(\xi_1,\xi_2) & D\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,2139 & 7,5689 \\ 7,5689 & 23,6739 \end{pmatrix}$$

Оскільки $K(\xi_1,\xi_2) \neq 0$, випадкові величини ξ_1 та ξ_2 є корельованими. Перевіримо додатну визначеність K_2 ($\det K_2 > 0$).

$$\det K_2 = 9{,}2139 \cdot 23{,}6739 - 7{,}5689^2 = 160{,}8407 > 0.$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r(\xi_1, \xi_2) \\ r(\xi_1, \xi_2) & 1 \end{pmatrix},$$

де коефіцієнт кореляції $r(\xi_1, \xi_2) = \frac{K(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 \cdot D\xi_2}} = \frac{7{,}5689}{\sqrt{9{,}2139 \cdot 23{,}6739}} \approx 0{,}512479$

Отож:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}512479 \\ 0{,}512479 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Умовні ряди розподілу для кожної координати

Для початку обчислимо умовні ймовірності за формулами :

$$\begin{cases} P\left\{\xi_1 = x_k / \xi_2 = y_j\right\} = \frac{P\left\{\xi_1 = x_k,\ \xi_2 = y_j\right\}}{P\left\{\xi_2 = y_j\right\}} = \frac{p_{kj}}{p_{k\cdot}}; \\ P\left\{\xi_2 = y_j / \xi_1 = x_k\right\} = \frac{P\left\{\xi_1 = x_k,\ \xi_2 = y_j\right\}}{P\left\{\xi_1 = x_k\right\}} = \frac{p_{kj}}{p_{\cdot j}}. \end{cases} (k = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4})$$

Будемо користуватися таблицею розподілу , формулами і рядами розподілу кожної з координат вище для обчислення умовних ймовірностей і побудови умовних рядів розподілу :

ξ_1 \ ξ_2	-9	-6	-1	2
-5	0,2	0,07	0,04	0,02
-2	0,12	0,02	0,06	0,05
2	0,08	0,03	0,05	0,26

$\xi 1$	-5	-2	2
p	0,33	0,25	0,42

ξ_2	-9	-6	-1	2
P	0,4	0,12	0,15	0,33

$$P\{\xi_1 = -5/\xi_2 =-9\} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{5}{10}$$

$$P\{\xi_1 =-2/\xi_2 =-9\} = \frac{0,12}{0,4} = \frac{3}{10}$$

$$P\{\xi_1 = 2/\xi_2 =-9\} = \frac{0,08}{0,4} = \frac{2}{10}$$

$$P\{\xi_1 =-5/\xi_2 =-6\} = \frac{0,07}{0,12} = \frac{7}{12}$$

$$P\{\xi_1 =-2/\xi_2 =-6\} = \frac{0,02}{0,12} = \frac{2}{12}$$

$$P\{\xi_1 = 2/\xi_2 =-6\} = \frac{0,03}{0,12} = \frac{3}{12}$$

$$P\{\xi_1 =-5/\xi_2 =-1\} = \frac{0,04}{0,15} = \frac{4}{15}$$

$$P\{\xi_1 =-2/\xi_2 =-1\} = \frac{0,06}{0,15} = \frac{6}{15}$$

$$P\{\xi_1 = 2/\xi_2 =-1\} = \frac{0,05}{0,15} = \frac{5}{15}$$

$$P\{\xi_1 =-5/\xi_2 = 2\} = \frac{0,02}{0,33} = \frac{2}{33}$$

$$P\{\xi_1 =-2/\xi_2 = 2\} = \frac{0,05}{0,33} = \frac{5}{33}$$

$$P\{\xi_1 = 2/\xi_2 = 2\} = \frac{0,05}{0,33} = \frac{26}{33}$$

$$P\{\xi_2 = -9/\xi_1 =-5\} = \frac{0,2}{0,33} = \frac{20}{33}$$

$$P\{\xi_2 = -6/\xi_1 =-5\} = \frac{0,07}{0,33} = \frac{7}{33}$$

$$P\{\xi_2 = -1/\xi_1 =- 5\} = \frac{0,04}{0,33} = \frac{4}{33}$$

$$P\{\xi_2 = 2/\xi_1 =- 5\} = \frac{0,02}{0,33} = \frac{2}{33}$$

$$P\{\xi_2 = -9/\xi_1 =- 2\} = \frac{0,12}{0,25} = \frac{12}{25}$$

$$P\{\xi_2 = -6/\xi_1 =- 2\} = \frac{0,02}{0,25} = \frac{2}{25}$$

$$P\{\xi_2 = -1/\xi_1 =- 2\} = \frac{0,06}{0,25} = \frac{6}{25}$$

$$P\{\xi_2 = 2/\xi_1 =- 2\} = \frac{0,05}{0,25} = \frac{5}{25}$$

$$P\{\xi_2 = -9/\xi_1 = 2\} = \frac{0,08}{0,42} = \frac{8}{42}$$

$$P\{\xi_2 = -6/\xi_1 = 2\} = \frac{0,03}{0,42} = \frac{3}{42}$$

$$P\{\xi_2 = -1/\xi_1 = 2\} = \frac{0,05}{0,42} = \frac{5}{42}$$

$$P\{\xi_2 = 2/\xi_1 = 2\} = \frac{0,26}{0,42} = \frac{26}{42}$$

Таблиця 1 – Умовні ряди розподілу ξ_1

ξ_1	-5	-2	2
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -9\}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -6\}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -1\}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{5}{15}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 2\}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{26}{33}$

Таблиця 2 – Умовні ряди розподілу ξ_2

ξ_2	-9	-6	-1	2
$P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = -5\}$	$\frac{20}{33}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{2}{33}$
$P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = -2\}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{5}{25}$
$P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = 2\}$	$\frac{8}{42}$	$\frac{3}{42}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{26}{42}$

6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Умовне математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ_1 (ξ_2) відносно значення $\xi_2 = y_j,\ j = \overline{1,4}$ ($\xi_1 = x_k,\ k = \overline{1,3}$) обчислюється за формулою :

$$E(\xi_1/\xi_2 = y_j) = \sum_{k=1}^{3} x_k P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\} = \varphi(y_j)$$

$$E(\xi_2/\xi_1 = x_k) = \sum_{j=1}^{4} y_j P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\} = \psi(x_k)$$

Виконаємо розрахнуки :

$$E(\xi_1/\xi_2 = -9) = (-5)\cdot\frac{5}{10} + (-2)\cdot\frac{3}{10} + 2\cdot\frac{2}{10} = -\frac{27}{10};$$

$$E(\xi_1/\xi_2 = -6) = (-5)\cdot\frac{7}{12} + (-2)\cdot\frac{2}{12} + 2\cdot\frac{3}{12} = -\frac{11}{4};$$

$$E(\xi_1/\xi_2 = -1) = (-5)\cdot\frac{4}{15} + (-2)\cdot\frac{6}{15} + 2\cdot\frac{5}{15} = -\frac{22}{15};$$

$$E(\xi_1/\xi_2 = 2) = (-5)\cdot\frac{2}{33} + (-2)\cdot\frac{5}{33} + 2\cdot\frac{26}{33} = \frac{32}{33}.$$

Таблиця – Ряд розподілу $E(\xi_1/\xi_2)$.

$E(\xi_1/\xi_2)$	$-\dfrac{11}{4}$	$-\dfrac{27}{10}$	$-\dfrac{22}{15}$	$\dfrac{32}{33}$
P	0,12	0,4	0,15	0,33

Перевірка:

$$E\left(E(\xi_1/\xi_2)\right) = 0{,}12 \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) + 0{,}4 \cdot \left(-\frac{27}{10}\right) + 0{,}15 \cdot \left(-\frac{22}{15}\right) + 0{,}33 \cdot \left(\frac{32}{33}\right) = -\frac{131}{100} = E\xi_1.$$

$$E(\xi_2/\xi_1 = -5) = (-9) \cdot \frac{20}{33} + (-6) \cdot \frac{7}{33} + (-1) \cdot \frac{4}{33} + 2 \cdot \frac{2}{33} = -\frac{74}{11};$$

$$E(\xi_2/\xi_1 = -2) = (-9) \cdot \frac{12}{25} + (-6) \cdot \frac{2}{25} + (-1) \cdot \frac{6}{25} + 2 \cdot \frac{5}{25} = -\frac{116}{25}$$

$$E(\xi_2/\xi_1 = 2) = (-9) \cdot \frac{8}{42} + (-6) \cdot \frac{3}{42} + (-1) \cdot \frac{5}{42} + 2 \cdot \frac{26}{42} = -\frac{43}{42}$$

Таблиця – Ряд розподілу $E(\xi_2/\xi_1)$.

$E(\xi_2/\xi_1)$	$-\dfrac{74}{11}$	$-\dfrac{116}{25}$	$-\dfrac{43}{42}$
P	0,33	0,25	0,42

Перевірка:

$$E\left(E(\xi_2/\xi_1)\right) = 0{,}33 \cdot \left(-\frac{74}{11}\right) + 0{,}25 \cdot \left(-\frac{116}{25}\right) + 0{,}42 \cdot \left(-\frac{43}{42}\right) = -\frac{381}{100} = E\xi_2.$$

Завдання 2

Неперервний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ рівномірно розподілений в області D див. рис. 21.

Фігура обмежена наступними кривими: $x^2 + y^2$=4, $x = -2$, $x = 2$
$y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$

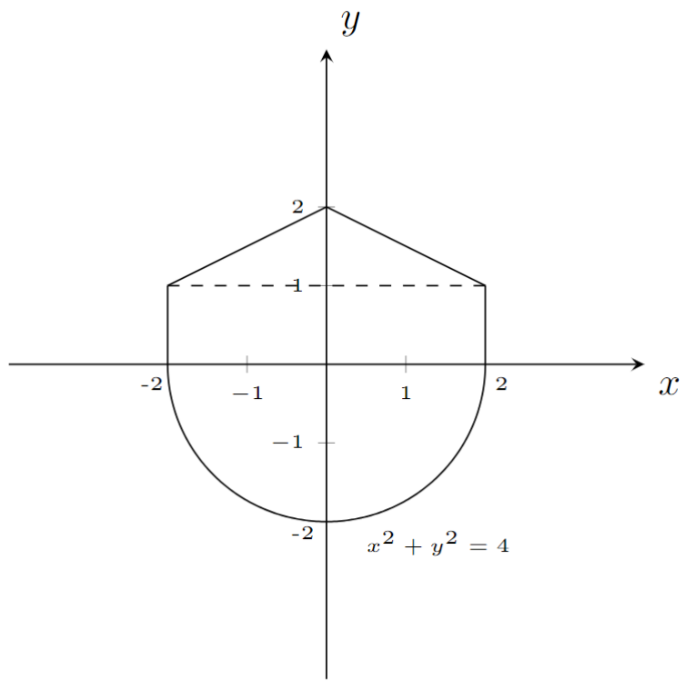

Рисунок 2.1

Саму область D можна подати у вигляді:

$$D = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{l} ((-2 \le x \le 0) \wedge \left(-\sqrt{4 - x^2} \le y \le \frac{1}{2}x + 2\right))) \\ \vee ((0 \le x \le 2)(-\sqrt{4 - x^2} \le y \le -\frac{1}{2}x + 2)) \end{array} \right. \right\}$$

1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

Знайдемо площу D.

$$S_D = \frac{4\pi}{2} + 4 + 2 = 2\pi + 6$$

За формулою щільність вектора $\vec{\xi}$ рівномірно розподіленого в області D.

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, (x,y) \in D; \\ 0, \ \ (x,y) \notin D. \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi + 6}, (x,y) \in D; \\ 0, \ \ (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Використавши формули обчислимо маргінальні щільності координат вектора $\vec{\xi}$.

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dy$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dx$$

Рахуємо:

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \dfrac{1}{2\pi+6}\displaystyle\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}x+2} dy = \dfrac{1}{2\pi+6}\left(\dfrac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right), & -2 < x \le 0; \\ \dfrac{1}{2\pi+6}\displaystyle\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\frac{1}{2}x+2} dy = \dfrac{1}{2\pi+6}\left(-\dfrac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right), & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \le -2; \\ \dfrac{1}{2\pi+6}\displaystyle\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx = \dfrac{1}{\pi+3}\left(\sqrt{4-y^2}\right), & -2 < y \le 0; \\ \dfrac{1}{2\pi+6}\displaystyle\int_{-2}^{2} dx = \dfrac{2}{\pi+3}, & 0 < y \le 1; \\ \dfrac{1}{2\pi+6}\displaystyle\int_{2y-4}^{-(2y-4)} dx = \dfrac{1}{\pi+3}(4-2y), & 1 < y \le 2; \\ 0, & y > 2. \end{cases}$$

Перевіримо умови нормування $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)dy = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x)dx = \frac{1}{2\pi+6}\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2dx\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi+6}\int_{0}^{2}\left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}\left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^2}{4} + 2x + 2arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}\right)$$

$$+\frac{1}{2\pi+6}\left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{x^2}{4} + 2x + 2arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{0}^{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi+3}{2\pi+6} + \frac{\pi+3}{2\pi+6} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)dy = \frac{1}{\pi+3}\int_{-2}^{0}\sqrt{4-y^2}\,dy + \frac{2}{\pi+3}\int_{0}^{1}1\,dy + \frac{1}{\pi+3}\int_{1}^{2}(4-2y)dy =$$

$$= \frac{1}{\pi+3}\left(\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + 2arsin(\frac{y}{2})\Big|_{-2}^{0}\right) + \frac{2}{\pi+3}\left(y\Big|_{0}^{1}\right) + \frac{1}{\pi+3}\left(4y-y^2\Big|_{1}^{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi+3}(\pi) + \frac{2}{\pi+3}(1) + \frac{1}{\pi+3}(1) = 1$$

Отже, умова нормування виконується.

2. Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

Позначимо $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ – функції розподілу координат вектора $\vec{\xi}$. Застосуємо формули

$$\begin{cases} F_{\xi_1}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(t)dt; \\ F_{\xi_2}(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{y} f_{\xi_2}(s)ds. \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{-2}0\,dt=0, & x\le -2;\\ \int_{-\infty}^{-2}0\,dt+\frac{1}{2\pi+6}\int_{-2}^{x}(\frac{1}{2}t+\sqrt{4-t^2}+2)dt= & \\ =\frac{1}{2\pi+6}\left(\frac{t\sqrt{4-t^2}}{2}+\frac{t^2}{4}+2t+2arcsin\left(\frac{t}{2}\right)|_{-2}^{x}\right)= & \\ =\frac{1}{2\pi+6}\left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+\frac{x^2}{4}+2x+2arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+3+\pi\right), & -2<x\le 0;\\ \int_{-\infty}^{-2}0\,dt+\frac{1}{2\pi+6}\left(\int_{-2}^{0}(\frac{1}{2}t+\sqrt{4-t^2}+2)\,dt+\int_{0}^{x}(-\frac{1}{2}t+\sqrt{4-t^2}+2)dt\right)= & \\ =\frac{1}{2\pi+6}\left(\begin{array}{c}\left(\frac{t\sqrt{4-t^2}}{2}+\frac{t^2}{4}+2t+2arcsin\left(\frac{t}{2}\right)|_{-2}^{0}\right)+\\ +\left(\left(\frac{t\sqrt{4-t^2}}{2}-\frac{t^2}{4}+2t+2arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)|_{0}^{x}\end{array}\right)= & \\ =\frac{1}{2\pi+6}(3+\pi+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{x^2}{4}+2x+2arcsin\left(\frac{x}{2}\right)), & 0<x\le 2;\\ \int_{-\infty}^{-2}0\,dt+\frac{1}{2\pi+6}\left(\int_{-2}^{0}(\frac{1}{2}t+\sqrt{4-t^2}+2)\,dt+\int_{0}^{x}(-\frac{1}{2}t+\sqrt{4-t^2}+2)dt\right)+ & \\ +\int_{2}^{x}0\,dt=1, & x>2.\end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{-2}0\,ds=0, & y\le -2;\\ \int_{-\infty}^{-2}0\,ds+\frac{1}{\pi+3}\int_{-2}^{y}\sqrt{4-s^2}\,ds=\frac{1}{\pi+3}\left(2arcsin\left(\frac{s}{2}\right)+\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2}\right)|_{-2}^{y}= & \\ =\frac{1}{\pi+3}(2arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}+\pi), & -2<y\le 0;\\ \int_{-\infty}^{-2}0\,ds+\frac{1}{\pi+3}\left(\int_{-2}^{0}\sqrt{4-s^2}\,ds\right)+(\int_{0}^{y}\frac{2}{\pi+3}\ ds\Big)= & \\ =\frac{1}{\pi+3}\left(2arcsin\left(\frac{s}{2}\right)+\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2}\right)|_{-2}^{0}+(\frac{2s}{\pi+3}|_{0}^{y})= & \\ =\frac{\pi+2y}{\pi+3}, & 0<y\le 1;\\ \int_{-\infty}^{-2}0\,ds+\frac{1}{\pi+3}(\int_{-2}^{0}\sqrt{4-s^2}\,ds)+(\int_{0}^{1}\frac{2}{\pi+3}\ ds) & \\ +\frac{1}{\pi+3}\int_{1}^{y}(4-2s)ds\ =\frac{1}{\pi+3}\left(2arcsin\left(\frac{s}{2}\right)+\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2}\right)|_{-2}^{0}+\left(\frac{2s}{\pi+3}|_{0}^{1}\right)+\frac{1}{\pi+3}\left(4s-s^2|_{1}^{y}\right)= & \\ =\frac{\pi+2}{\pi+3}\ +\frac{-y^2+4y-3}{\pi+3} & 1<y\le 2.\\ \int_{-\infty}^{-2}0\,ds+\frac{1}{\pi+3}\left(\int_{-2}^{0}\sqrt{4-s^2}\,ds\right)+\left(\int_{0}^{1}\frac{2}{\pi+3}\ ds\right)+\frac{1}{\pi+3}\int_{1}^{2}(4-2s)ds+\int_{2}^{y}0\,ds= & \\ =\frac{1}{\pi+3}\left(2arcsin\left(\frac{s}{2}\right)+\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2}\right)|_{-2}^{0}+\left(\frac{2s}{\pi+3}|_{0}^{1}\right)+\frac{1}{\pi+3}\left(4s-s^2|_{1}^{2}\right)= & \\ \frac{\pi+2}{\pi+3}\ +\frac{1}{\pi+3}=1. & y>2.\end{cases}$$

Тобто

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{2\pi+6}\left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^2}{4} + 2x + 2arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + 3 + \pi\right), & -2 < x \le 0; \\ \frac{1}{2\pi+6}(3 + \pi + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{x^2}{4} + 2x + 2arcsin\left(\frac{x}{2}\right)) & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \le -2; \\ \frac{1}{\pi+3}(2arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \pi) & -2 < y \le 0; \\ \frac{\pi+2y}{\pi+3} & 0 < y \le 1; \\ \frac{\pi - y^2 + 4y - 1}{\pi+3}, & 1 < y \le 2; \\ 1, & 2 < y; \end{cases}$$

Оскільки функція розподілу неперервної випадкової величини є неперервною, тому перевіримо неперервність отриманих функцій.

$F_{\xi_1}(-2), x \le -2 = F_{\xi_1}(-2), -2 < x \le 0 = 0;$

$F_{\xi_1}(0), -2 < x \le 0 = F_{\xi_1}(0), 0 < x \le 2 = \frac{1}{2};$

$F_{\xi_1}(2), 0 < x \le 2 = F_{\xi_1}(2), x > 2 = 1.$

Отже $F_{\xi_1}(x)$ є неперервною.

$F_{\xi_2}(-2), y \le -2 = F_{\xi_2}(-2), -2 < y \le 0 = 0;$

$F_{\xi_2}(0), -2 < y \le 0 = F_{\xi_2}(0), 0 < y \le 1 = \frac{\pi}{\pi+3};$

$F_{\xi_2}(1), 0 < y \le 1 = F_{\xi_2}(1), 1 < y \le 2 = \frac{\pi+2}{\pi+3}$

$F_{\xi_2}(2), 1 < y \le 2 = F_{\xi_2}(2), 2 < y = 1$

Отже $F_{\xi_2}(y)$ є неперервною.

3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$.

За означенням $F_{\vec{\xi}}(x,\ y) = P\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$. Це імовірність потрапляння випадкового вектора усередину нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y) . Для знаходження сумісної функції розподілу неперервного вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ зі щільністю $f_{\vec{\xi}}(x, y)$ скористаємося формулою :

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} f_{\vec{\xi}}(t, s) ds$$

Координатну площину xOy розіб'ємо на області $D_0, D_1, \ldots, D_{14}$, які між собою попарно не перетинаються та в об'єднанні дають $\mathbb{R}^2$ ($D_i \cap D_j = \emptyset$ при $i \neq j$ та $\bigcup_{i=0}^{14} D_i = \mathbb{R}^2$)

Отримане розбиття зображено на рис. 22, області $D_i,\ i = \overline{0, 14}$ зафарбовано різними кольорами.

Розпишемо усі області в аналітичному вигляді:

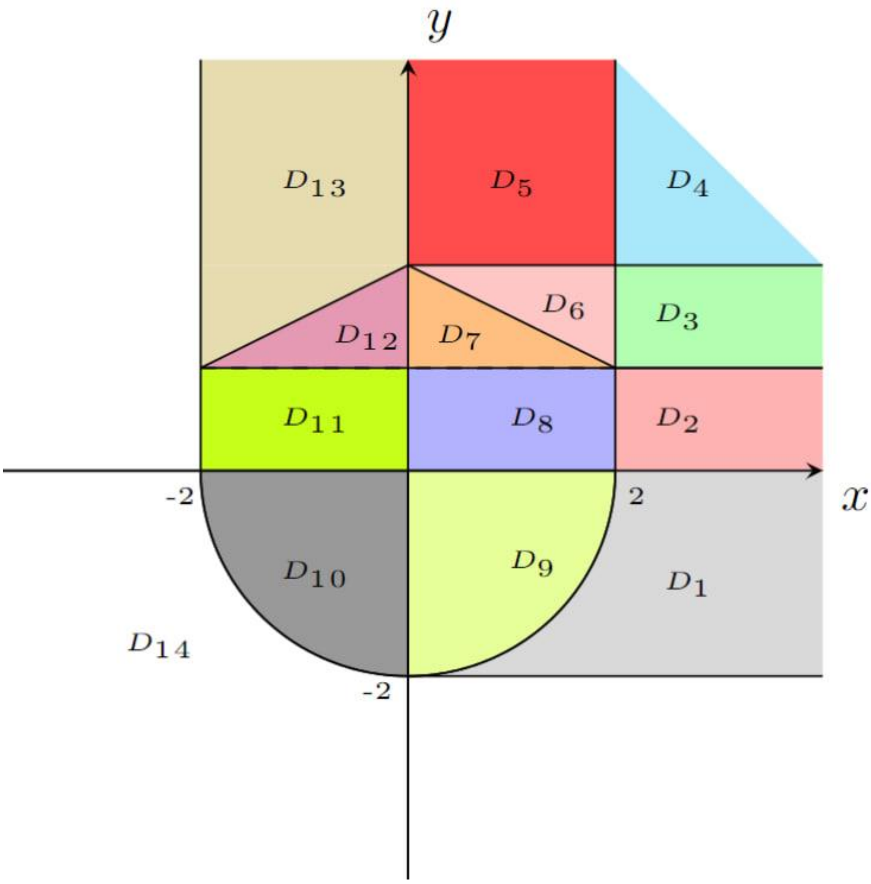

Рисунок 2.2

$D_1 = \left\{(x,y)\middle|\left(\sqrt{4-y^2} < x\right) \wedge (-2 < y \leq 0)\right\}$;

$D_2 = \{(x,y)|(2 < x) \wedge (0 < y \leq 1)\}$;

$D_3 = \{(x,y)|(x > 2) \wedge (1 < y \leq 2)\}$;

$D_4 = \{(x,y)|(2 < x) \wedge (2 < y)\}$;

$D_5 = \{(x,y)|(0 < x \leq 2) \wedge (2 < y)\}$;

$D_6 = \left\{(x,y)\middle|(0 < x \leq 2) \wedge \left(-\frac{1}{2}x + 2 < y \leq 2\right)\right\}$;

$D_7 = \left\{(x,y)\middle|(0 < x \leq 2) \wedge \left(1 < y \leq -\frac{1}{2}x + 2\right)\right\}$;

$D_8 = \left\{(x,y)\middle|\left((0 < x \leq 2)\right) \wedge (0 < y \leq 1)\right\}$;

$D_9 = \left\{(x,y)\middle|(0 < x \leq 2) \wedge \left(-\sqrt{4-x^2} < y \leq 0\right)\right\}$;

$D_{10} = \left\{(x,y)\middle|(-2 < x \leq 0) \wedge \left(-\sqrt{4-x^2} < y \leq 0\right)\right\}$.

$D_{11} = \left\{(x,y)\middle|\left((-2 < x \leq 0)\right) \wedge (0 < y \leq 1)\right\}$;

$D_{12} = \left\{(x,y)\middle|(-2 < x \leq 0) \wedge \left(1 < y \leq \frac{1}{2}x + 2\right)\right\}$;

$D_{13} = \left\{(x,y)\middle|(-2 < x \leq 0) \wedge \left(\frac{1}{2}x + 2 < y\right)\right\}$;

$D_{14} = \left\{(x,y)\middle|\left(\left(-\sqrt{4-y^2} < x\right) \wedge (-2 < y \leq 0)\right) \vee (x < -2) \vee (y < -2)\right\}$.

Таке розбиття пов'язане з виглядом подвійного інтеграла від сумісної функції щільності $\vec{\xi}$ по області, яка утворилася в коли перетнули області D та нескінченного квадранта з вершиною у точці (x,y). Перейдемо до системи координат tOs, оскільки x та y тут є параметрами. Позначимо $G_i = D \cap \{(t,s)|(\,s < x) \wedge (t < y)\}$, коли $(x,y) \in D_i$, $i = \overline{1,14}$ та розглянемо усі ці випадки. На рисунках 2.3 – 2.16 схематично показано по яким областям обмеженої фігури буде інтегрування. Для спрощення побудови та вирішення подвійних інтегралів у деяких випадках G_i будемо розбивати на частини.

Також в додатках містяться загальні рішення інтегралів ,які надалі будуть використовуватися в розрахунках суміної функції розподілу.

Врахуємо що рішення табличних інтегралів нам відомі і розписувати їх не будемо.

1. $(x, y) \in D_{14}$

$G_1 = \emptyset$,

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} ds \int_{-\infty}^{y} 0\, dt =$

$0.$

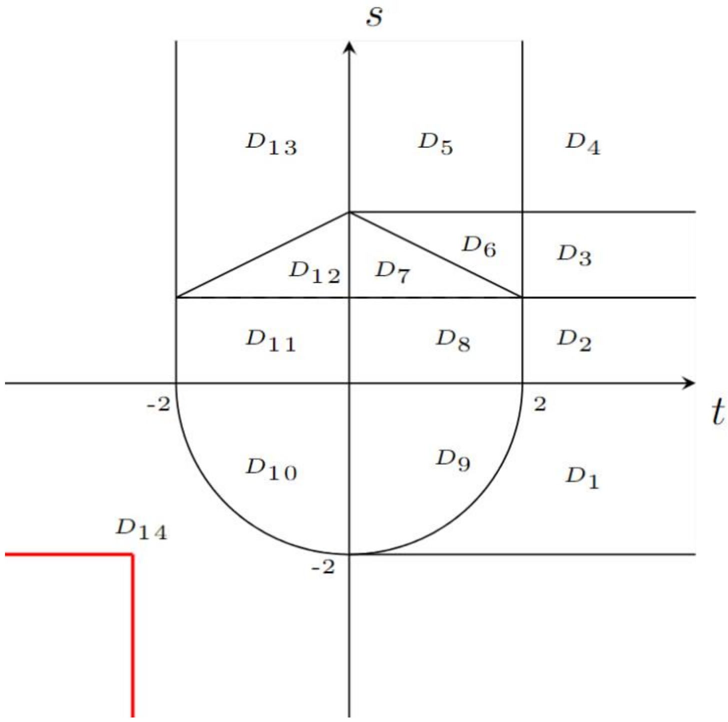

Рисунок 2.3

2. $(x, y) \in D_{10}$

$$G_2 = \left\{ (s,t) \middle| \begin{array}{c} (-2 \le s < x) \wedge \\ \wedge \left(-\sqrt{4 - s^2} \le t < y\right) \end{array} \right\}$$

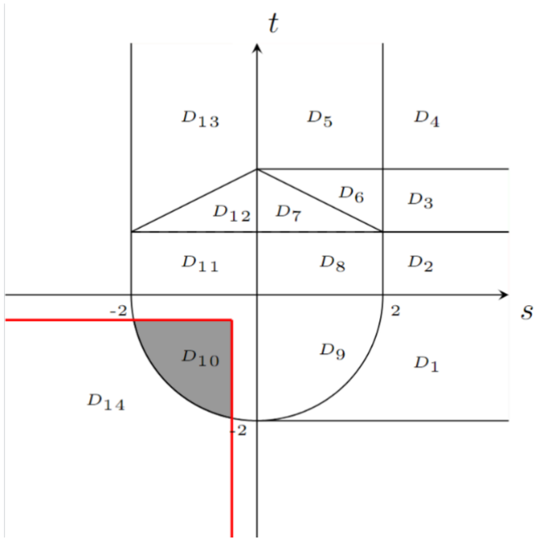

Рисунок 2.4

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi + 6} \iint_{G_2} dtds = \frac{1}{2\pi + 6} \int_{-2}^{x} ds \int_{-\sqrt{4-s^2}}^{y} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 6} \int_{-2}^{x} ds \left(y + \sqrt{4 - s^2}\right) = \frac{1}{2\pi + 6} \left(\frac{s\sqrt{4 - s^2}}{2} + ys + 2arscin\left(\frac{s}{2}\right) |_{-2}^{x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 6} \left(\frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + \frac{(2x + 4)y}{2} + 2arscin\left(\frac{x}{2}\right) + \pi\right)$$

3. $(x, y) \in D_9$

$G_3 = G_2$

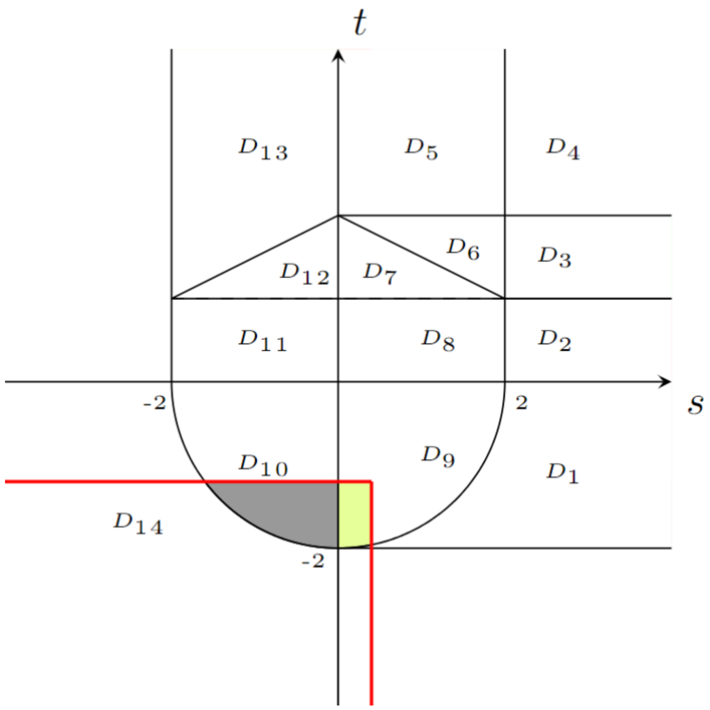

Рисунок 2.5

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi + 6}\iint_{G_3} dtds = \frac{1}{2\pi + 6}(\frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + \frac{(2x + 4)y}{2} + 2arscin(\frac{x}{2}) + \pi)$$

4. $(x, y) \in D_1$

$$G_4 = G_3 =$$

$$= \left\{ (s,t) \middle| \begin{array}{c} \left(-\sqrt{4-t^2} \le s < \sqrt{4-t^2}\right) \wedge \\ \wedge \left(-2 \le t < y\right) \end{array} \right\}$$

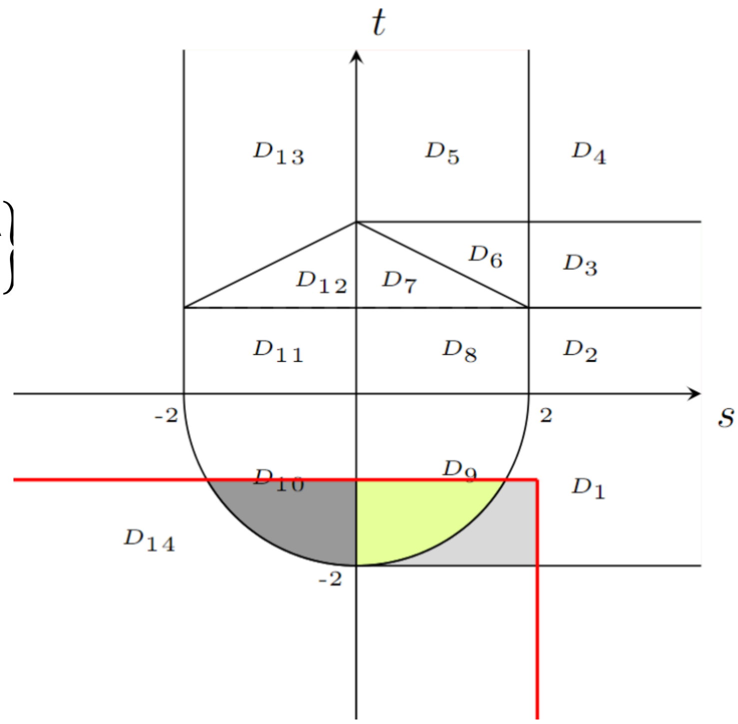

Рисунок 2.6

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi + 6} \iint_{G_4} dt ds = \frac{1}{2\pi + 6} \int_{-\sqrt{4-t^2}}^{\sqrt{4-t^2}} ds \int_{-2}^{y} dt =$$

$$= \frac{2}{2\pi + 6} \int_{-2}^{y} \sqrt{4-t^2} dt = \frac{2}{2\pi + 6} \left(\frac{t\sqrt{4-t^2}}{2} + 2arcsin\left(\frac{t}{2}\right) |_{-2}^{y} \right)$$

$$= \frac{2}{2\pi + 6} (2arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \pi)$$

5. $(x,y) \in D_{11}$

$$G_5 = G_2 = \left\{ (s,t) \middle| \begin{matrix} (-2 \leq s < x) \land \\ \land \left(-\sqrt{4-s^2} \leq t < y\right) \end{matrix} \right\}$$

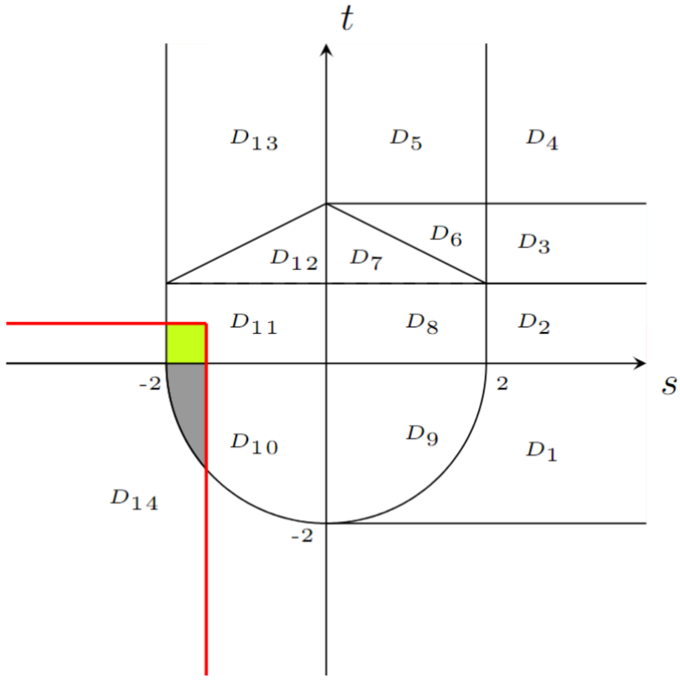

Рисунок 2.7

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+6}\iint_{G_5} dtds = \frac{1}{2\pi+6}\left(\int\limits_{-\sqrt{4-s^2}}^{y} dt \int\limits_{-2}^{x} ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}\left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{(2x+4)y}{2} + 2arscin\left(\frac{x}{2}\right) + \pi\right)$$

6. $(x,y) \in D_8$

$$G_6 = G_5 = \left\{ (s,t) \middle| \begin{matrix} (-2 \le s < x) \wedge \\ \wedge \left(-\sqrt{4-s^2} \le t < y\right) \end{matrix} \right\}$$

Оскільки області $G_6 = G_5$,то функція розподілу в них однакова :

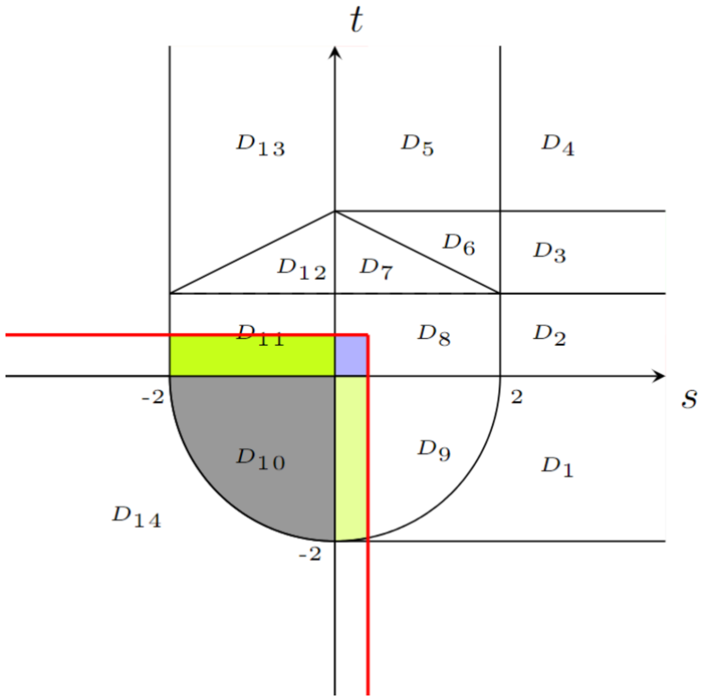

Рисунок 2.8

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi + 6}\left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{(2x+4)y}{2} + 2arscin(\frac{x}{2}) + \pi\right)$$

7. $(x,y) \in D_2$

$$G_7 = \left\{(s,t) \middle| \begin{matrix} (-2 \le s < 2) \wedge \\ \wedge \left(-\sqrt{4-s^2} \le t < y\right) \end{matrix}\right\}$$

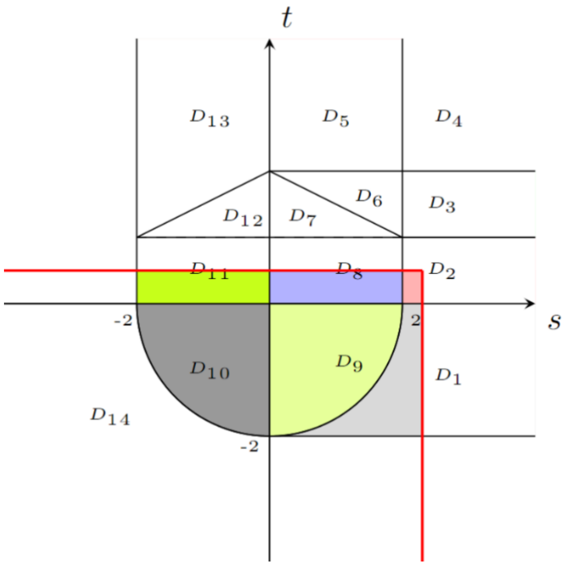

Рисунок 2.9

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+6}\iint_{G_7} dtds = \frac{1}{2\pi+6}\left(\int\limits_{-\sqrt{4-s^2}}^{y} dt \int\limits_{-2}^{2} ds\right) = \frac{1}{2\pi+6}\left(\int\limits_{-2}^{2}\left(y+\sqrt{4-s^2}\right)ds\right)$$

$$= \frac{2y+\pi}{\pi+3}$$

8. $(x, y) \in D_{12}$

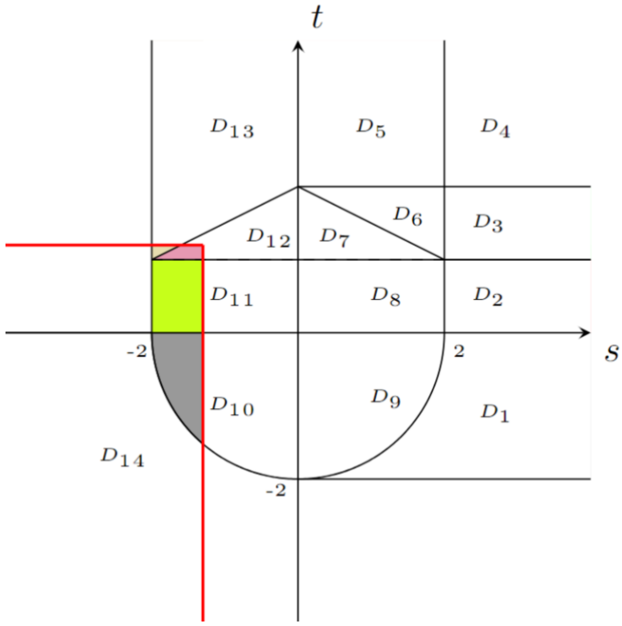

Рисунок 2.10

$$G_8 = \left\{(s,t) \middle| \begin{matrix} (-2 \le s < x) \wedge \\ \wedge \left(-\sqrt{4-s^2} \le t < 1\right) \end{matrix}\right\} \cup \left\{(s,t) \middle| \begin{matrix} (2t-4 \le s < x) \wedge \\ \wedge\, (1 \le t < y) \end{matrix}\right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+6}\iint_{G_8} dtds = \frac{1}{2\pi+6}\left(\int\limits_{-\sqrt{4-s^2}}^{1} dt \int\limits_{-2}^{x} ds + \int\limits_{1}^{y} dt \int\limits_{2t-4}^{x} ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}\left(\int\limits_{-2}^{x}\left(1+\sqrt{4-s^2}\right) ds + \int\limits_{1}^{y}(x-2t+4)dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}\left(\left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} + s + 2arcsin\left(\frac{s}{2}\right)\right)\Big|_{-2}^{x} + (-t^2+xt+4t)\Big|_{1}^{y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}\left(2arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \pi - y^2 + (x+4)y - 1\right)$$

9. $(x, y) \in D_7$

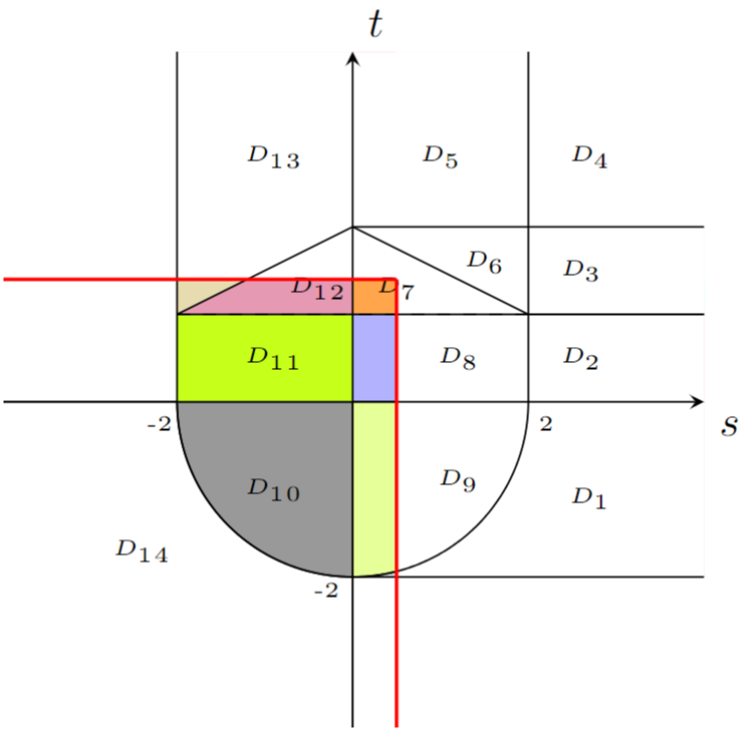

Рисунок 2.11

$$G_9 = G_8 = \left\{(s,t)\middle| \begin{matrix}(-2 \le s < x) \wedge \\ \wedge \left(-\sqrt{4-s^2} \le t < 1\right)\end{matrix}\right\} \cup \left\{(s,t)\middle| \begin{matrix}(2t-4 \le s < x) \wedge \\ \wedge (1 \le t < y)\end{matrix}\right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi + 6}\left(2arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \pi - y^2 + (x+4)y - 1\right)$$

10. $(x, y) \in D_6$.

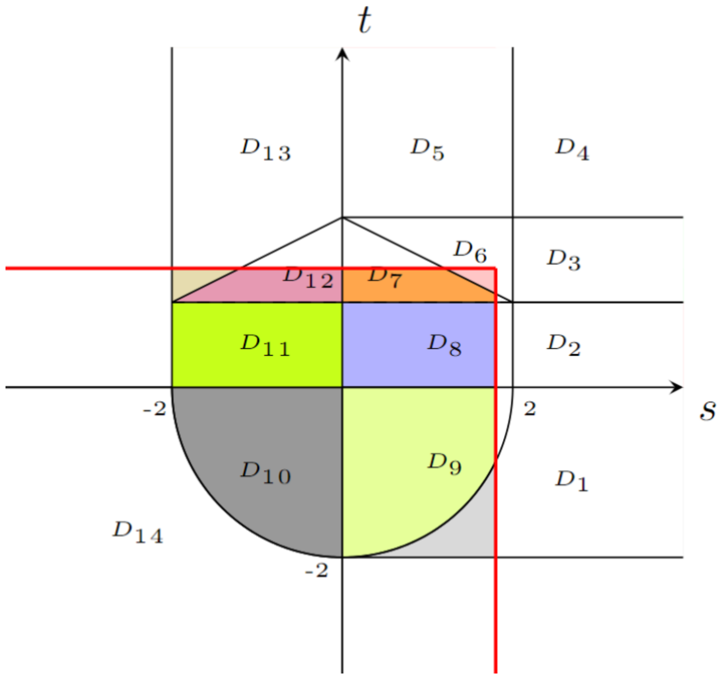

Рисунок 2.12

$$G_{10} = G'_{10} \cup G''_{10} \cup G'''_{10} = \left\{(s,t) \middle| \begin{array}{c} (-2 \le s < x) \wedge \\ \wedge \left(-\sqrt{4-s^2} \le t < 1\right) \end{array}\right\} \cup \left\{(s,t) \middle| \begin{array}{c} (2t-4 \le s < 4-2y) \wedge \\ \wedge (1 \le t < y) \end{array}\right\}$$
$$\cup \left\{(s,t) \middle| \begin{array}{c} (4-2y \le s < x) \wedge \\ \wedge \left(1 \le t < -\frac{1}{2}s + 2\right) \end{array}\right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi + 6} \iint_{G_{10}} dtds$$

$$= \frac{1}{2\pi + 6}\left(\int_{-\sqrt{4-s^2}}^{1} dt \int_{-2}^{x} ds + \int_{1}^{y} dt \int_{2t-4}^{4-2y} ds + \int_{1}^{-\frac{1}{2}s+2} dt \int_{4-2y}^{x} ds \right) =$$

$$\frac{1}{2\pi + 6}\left(\int_{-2}^{x} (1 + \sqrt{4-s^2}) ds + \int_{1}^{y} (8-2y-2t) dt + \int_{4-2y}^{x} (-\frac{1}{2}s + 1) ds \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 6}\left(\left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} + s + 2arcsin\left(\frac{s}{2}\right)\right)\Big|_{-2}^{x} + \left(-t^2 - 2yt + 8t\Big|_{1}^{y}\right) + \left(s - \frac{s^2}{4}\Big|_{4-2y}^{x}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 6}\left(2arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2x + \pi - 2y^2 + 8y - 5 - \frac{x^2}{4}\right)$$

11. $(x, y) \in D_3$

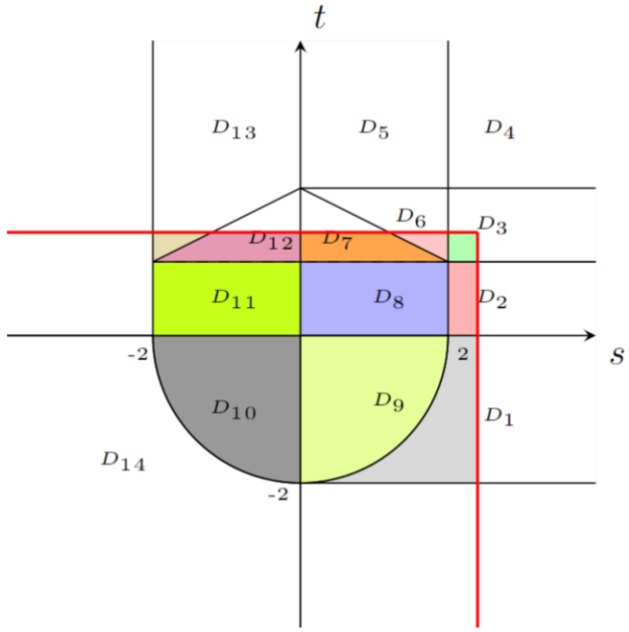

Рисунок 2.13

$$G_{11} = G'_{11} \cup G''_{11} = \left\{ (s,t) \middle| \begin{array}{c} (-2 \le s < 2) \wedge \\ \wedge \left(-\sqrt{4-s^2} \le t < 1\right) \end{array} \right\}$$

$$\cup \left\{ (s,t) \middle| \begin{array}{c} (2t-4 \le s < 4-2t) \wedge \\ \wedge (1 \le t < y) \end{array} \right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+6} \iint_{G_9} dtds = \frac{1}{2\pi+6} \left(\int_{-\sqrt{4-s^2}}^{1} dt \int_{-2}^{2} ds + \int_{1}^{y} dt \int_{2t-4}^{4-2t} ds \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6} \left(\int_{-2}^{2} (1+\sqrt{4-s^2}) ds + \int_{1}^{y} (8-4t) dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi+6} \left(\left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} + s + 2arcsin\left(\frac{s}{2}\right) \right) \Big|_{-2}^{2} + (8t-2t^2) \Big|_{1}^{y} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi+6} (2\pi - 2y^2 + 8y - 2)$$

12. $(x,y) \in D_{13}$

$$G_{12} = \left\{ (s,t) \middle| \begin{array}{c} (-2 \le s < x) \wedge \\ \wedge \left(-\sqrt{4-s^2} \le t < \frac{1}{2}s + 2\right) \end{array} \right\}$$

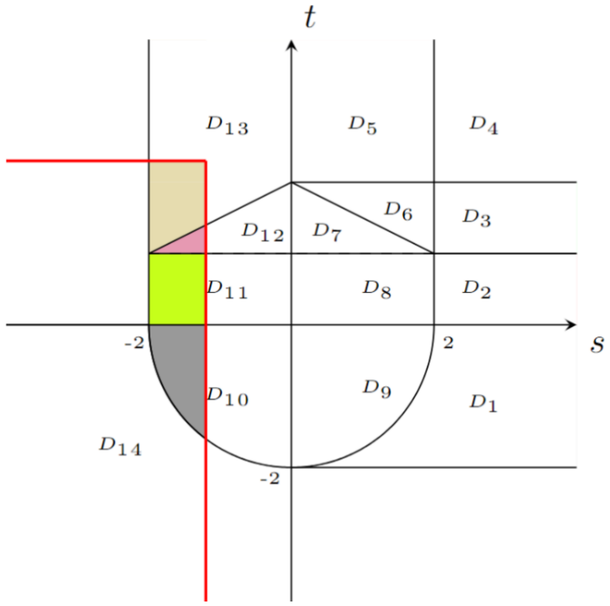

Рисунок 2.14

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+6}\iint_{G_{12}} dtds = \frac{1}{2\pi+6}\left(\int_{-\sqrt{4-s^2}}^{\frac{1}{2}s+2} dt \int_{-2}^{x} ds \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}\left(\int_{-2}^{x} \frac{1}{2}s + 2 + \sqrt{4-s^2} ds \right) = \frac{1}{2\pi+6}\left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} + \left(\frac{s^2}{4}\right) + 2s + 2arcsin\left(\frac{s}{2}\right) \Big|_{-2}^{x} \right) =$$

$$\frac{1}{2\pi+6}\left(2arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{4}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2x + \pi + 3 \right)$$

13. $(x,y) \in D_5$

$$G_{13} = \left\{(s,t)\middle|_{\wedge\left(-\sqrt{4-s^2} \le t < \frac{1}{2}s+2\right)}^{(-2 \le s < 0)\wedge}\right\}$$

$$\cup\left\{(s,t)\middle|_{\wedge\left(-\sqrt{4-s} \le t < -\frac{1}{2}s+2\right)}^{(0 \le s < x)\wedge}\right\} = G_{10}$$

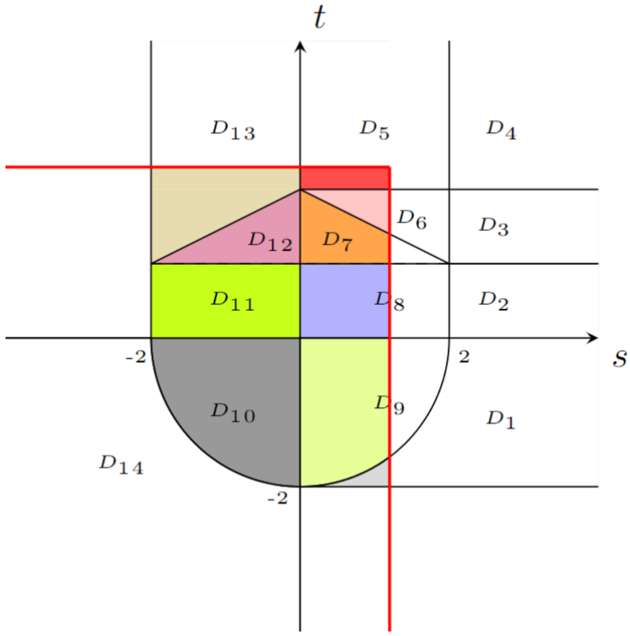

Рисунок 2.15

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+6}\iint_{G_{13}} dtds = \frac{1}{2\pi+6}\left(\int_{-\sqrt{4-s^2}}^{\frac{1}{2}s+2} dt \int_{-2}^{0} ds + \int_{-\sqrt{4-s}}^{-\frac{1}{2}s+2} dt \int_{0}^{x} ds\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi+6}\left(\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}s+2+\sqrt{4-s^2}\right)ds + \int_{0}^{x}\left(-\frac{1}{2}s+2+\sqrt{4-s^2}\right)ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}\left(\left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} + \left(\frac{s^2}{4}\right) + 2s + 2arcsin\left(\frac{s}{2}\right)\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} - \left(\frac{s^2}{4}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2s + 2arcsin\left(\frac{s}{2}\right)\right)\Big|_{0}^{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}\left(\pi + 3 + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} - \left(\frac{x^2}{4}\right) + 2x + 2arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

14. $(x, y) \in D_4$

$$G_{14} = \left\{(s,t)\middle| \begin{matrix} (-2 \le s < 0) \wedge \\ \wedge \left(-\sqrt{4-s^2} \le t < \frac{1}{2}s + 2\right) \end{matrix}\right\}$$

$$\cup$$

$$\cup \left\{(s,t)\middle| \begin{matrix} (0 \le s < 2) \wedge \\ \wedge \left(-\sqrt{4-s^2} \le t < -\frac{1}{2}s + 2\right) \end{matrix}\right\}$$

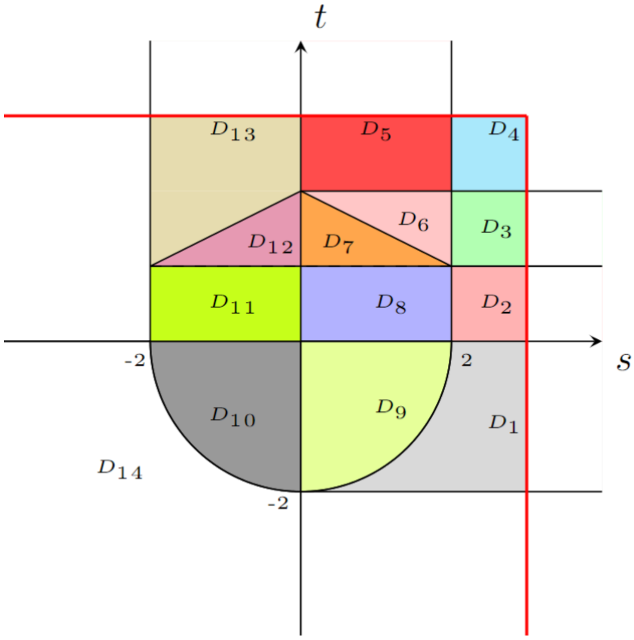

Рисунок 2.16

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi + 6} \iint_{G_{14}} dtds = \frac{1}{2\pi + 6} \iint_{G} dsdt = \frac{S_G}{S_G} = 1$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \left(-\sqrt{4-y^2} < x\right) \wedge (-2 < y \le 0)) \vee (x < -2) \vee (y < -2); \\ \frac{1}{2\pi+6}\left(\frac{(2x+4)y}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2arscin\left(\frac{x}{2}\right) + \pi\right), & (-2 < x \le 2) \wedge \left(-\sqrt{4-x^2} < y \le 1\right); \\ \frac{2}{2\pi+6}\left(2arscin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \pi\right), & \left(\sqrt{4-y^2} < x\right) \wedge (-2 < y \le 0); \\ \frac{2y+\pi}{\pi+3}, & (2 < x) \wedge (0 < y \le 1); \\ \frac{1}{2\pi+6}\left(2arscin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \pi - y^2 + (x+4)y - 1\right), & (-2 < x \le 0) \wedge \left(1 < y < \frac{1}{2}x + 2\right); \\ \frac{1}{2\pi+6}\left(2arscin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2x + \pi - 2y^2 + 8y - 5 - \frac{x^2}{4}\right), & (0 < x \le 2) \wedge \left(-\frac{1}{2}x + 2 < y \le 2\right) \\ \frac{\pi - y^2 + 4y - 1}{\pi+3}, & (x > 2) \wedge (1 < y \le 2); \\ \frac{1}{2\pi+6}\left(2arscin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x^2}{4} + 2x + \pi + 3\right), & (-2 < x \le 0) \wedge \left(\frac{1}{2}x + 2 < y\right) \\ \frac{1}{2\pi+6}\left(2arscin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{x^2}{4} + 2x + \pi + 3\right), & (0 < x \le 2) \wedge (2 < y) \\ 1, & (2 < x) \wedge (2 < y). \end{cases}$$

Можемо зробити деякі висновки. Сумісна функція $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ розподілу рівна для наступних областей:

$$D_{10} = D_9 = D_{11} = D_8$$

$$D_{12} = D_7$$

З вигляду функціїї також зрозуміло, що умови узгодженості сумісної функції розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$ з функціями розподілу його координат виконуються.

Також , неперевність по лініях стику областей , виконується ,з цього можна запевнитися в неперервності суміної функції розподілу.

4. Математичні сподівання координат. Кореляційна та нормована кореляційна матриця.

Для початку обчислимо математичні сподівння координат.

$$E\xi_1 = \iint_{-\infty}^{+\infty} x f_{\vec{\xi}}(x,y)dydx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}(\int_{-2}^{0} x\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right)dx + \int_{0}^{2} x\left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right))dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}((\frac{x^2\sqrt{4-x^2}}{3} - \frac{4\sqrt{4-x^2}}{3} + \left(\frac{x^3}{6}\right) + x^2)|_{-2}^{0} + (\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} - \left(\frac{x^2}{4}\right)$$

$$+ 2x + 2arcsin\left(\frac{x}{2}\right))|_{0}^{2}) = \frac{1}{2\pi+6}(-\frac{16}{3} + \frac{16}{3}) = 0$$

$$E\xi_2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} y f_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)dy$$

$$= \frac{1}{\pi+3}(\int_{-2}^{0} y\left(\sqrt{4-y^2}\right)dy + \int_{0}^{1} 2ydy + + \int_{1}^{2}(4y-2y^2)dy) =$$

$$= \frac{1}{\pi+3}\left(\left(\frac{y^2\sqrt{4-y^2}}{3} - \frac{4\sqrt{4-y^2}}{3}|_{-2}^{0}\right) + (y^2|_{0}^{1}\right) + \left(2y^2 - \frac{y^3}{3}|_{1}^{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi+3}(-\frac{8}{3} + 1 + \frac{4}{3}) = \frac{-1}{3\pi+9}$$

Отже, центр розсіювання випадкового вектора $\vec{\xi}$ має координати

$$(E\xi_1, E\xi_2) = \left(0, -\frac{1}{3\pi+9}\right).$$

Тепер побудуємо кореляційну матрицю та нормовану кореляційну матрицю.Для почтаку побудуємо допоміжну матрицю K_1

$$K_1 = \begin{pmatrix} E\xi_1^2 & E\xi_1\xi_2 \\ E\xi_1\xi_2 & E\xi_2^2 \end{pmatrix}$$

$$E\xi_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}(\int_{-2}^{0} x^2\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right)dx + \int_{0}^{2} x^2\left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right))dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}((\frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + \left(\frac{x^4}{8}\right) + \frac{2x^3}{3} + 2arcsin(\frac{x}{2})|_{-2}^{0}) +$$

$$+(\frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} - \left(\frac{x^4}{8}\right) + \frac{2x^3}{3} + 2arcsin(\frac{x}{2})|_{0}^{2})) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}(\pi + \frac{10}{3} + \pi + \frac{10}{3}) = \frac{3\pi+10}{3\pi+9}$$

$$E\xi_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\xi_2}(y)dy =$$

$$= \frac{1}{\pi+3}(\int_{-2}^{0} y^2\left(\sqrt{4-y^2}\right)dy + \int_{0}^{1} 2y^2dy + + \int_{1}^{2} 4y^2 - 2y^3dy) =$$

$$= \frac{1}{\pi+3}\left(\left(\frac{y^3\sqrt{4-y^2}}{4} - \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + 2arcsin\left(\frac{y}{2}\right)|_{-2}^{0}\right) + \left(\frac{2y^3}{3}|_{0}^{1}\right) + \left(\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{2}|_{1}^{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi+3}(\pi + \frac{2}{3} + \frac{11}{6}) = \frac{2\pi+5}{2\pi+6}$$

$$E\xi_1\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}\left(\int_{-2}^{0} y\,dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx + \int_{0}^{1} y\,dy \int_{-2}^{2} x\,dx + \int_{1}^{2} y\,dy \int_{2y-4}^{4-2y} x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+6}\left(\int_{-2}^{0} 0\,ydy + \int_{0}^{1} 0y\,dy + \int_{1}^{2} 0y\,dy\right) = 0$$

Отже матриця K_1 матиме вигляд:

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi + 10}{3\pi + 9} & 0 \\ 0 & \frac{2\pi + 5}{2\pi + 6} \end{pmatrix}$$

Побудуємо наступну матрицю $K_2 = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_1, \xi_2) & D\xi_2 \end{pmatrix}$

$$D\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = (\frac{3\pi + 10}{3\pi + 9}) - (0)^2 = \frac{3\pi + 10}{3\pi + 9} \approx 1{,}054$$

$$D\xi_2 = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = \frac{2\pi + 5}{2\pi + 6} - \left(-\frac{1}{3\pi + 9}\right)^2 \approx 0{,}917$$

Тепер обчислимо кореляційний момент $K(\xi_1, \xi_2)$

$$K(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 \cdot E\xi_2 = 0 – 0 \cdot \left(-\frac{1}{3\pi + 9}\right) = 0$$

Тому кореляцыйна матриця має наступний вигляд:

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1{,}054 & 0 \\ 0 & 0{,}917 \end{pmatrix}$$

Видно, що випадкові величини ξ_1 та ξ_2 є некорельованими. Також виконаємо перевірку додатньої визначеності матриці K_2.

$$\det K_2 = 1{,}054 \cdot 0{,}917 > 0$$

Тепер перейдемо до побудови нормованої кореляційної матриці.

Вигляд її наступний :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r(\xi_1, \xi_2) \\ r(\xi_2, \xi_1) & 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки ξ_1 та ξ_2 є некорельованими, то $r(\xi_1, \xi_2) = 0$

Також пам'ятаємо що нормована кореляційна матриця симетрична а тому остаточний вигляд її такий :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Умовні щільності розподілу для кожної координати.

За допомогою формул:

$$f_{\xi_1}(x/y) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)}$$

$$f_{\xi_2}(y/x) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)}$$

Нагадаємо вигляд маргінальних та сумісної щільностей:

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{2\pi+6}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}x+2} dy = \frac{1}{2\pi+6}\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right), & -2 < x \le 0; \\ \frac{1}{2\pi+6}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\frac{1}{2}x+2} dy = \frac{1}{2\pi+6}\left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right), & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \le -2; \\ \frac{1}{2\pi+6}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx = \frac{1}{\pi+3}\left(\sqrt{4-y^2}\right), & -2 < y \le 0; \\ \frac{1}{2\pi+6}\int_{-2}^{2} dx = \frac{2}{\pi+3}, & 0 < y \le 1; \\ \frac{1}{2\pi+6}\int_{2y-4}^{-(2y-4)} dx = \frac{1}{\pi+3}(4-2y), & 1 < y \le 2; \\ 0, & y > 2. \end{cases}$$

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi+6}, (x,y) \in D; \\ 0, \quad (x,y) \notin D. \end{cases}$$

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{l}((-2\le x\le 0)\wedge\left(-\sqrt{4-x^2}\le y\le \frac{1}{2}x+2\right)))\\ \vee\left((0\le x\le 2)\left(-\sqrt{4-x^2}\le y\le -\frac{1}{2}x+2\right)\right)\end{array}\right\}$$

$$f_{\xi_1}(x/y)=\frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)}=$$

$$=\begin{cases}0, & y\le -2;\\ \dfrac{\frac{1}{2\pi+6}}{\frac{1}{\pi+3}\left(\sqrt{4-y^2}\right)}=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{4-y^2}\right)}, & y\in\left(-2;0\right], x\in\left[-\sqrt{4-y^2};\ \sqrt{4-y^2}\right];\\ 0, & y\in\left(-2;0\right], x\notin\left[-\sqrt{4-y^2};\ \sqrt{4-y^2}\right];\\ \dfrac{\frac{1}{2\pi+6}}{\frac{2}{\pi+3}}=\dfrac{1}{4}, & y\in(0;1], x\in[-2;\ 2];\\ 0, & y\in(0;1], x\notin[-2;\ 2];\\ \dfrac{\frac{1}{2\pi+6}}{\frac{1}{\pi+3}(4-2y)}=\dfrac{1}{2(4-2y)}, & y\in(1;2], x\in[2y-4;\ 4-2y];\\ 0, & y\in(1;2], x\notin[2y-4;\ 4-2y];\\ 0, & y>2.\end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y/x)=\frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)}$$

$$=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{\frac{1}{2\pi+6}}{\frac{1}{2\pi+6}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{4-x^2}+2\right)}=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{4-x^2}+2\right)}, & x\in\left(-2;0\right], y\in\left[-\sqrt{4-x^2};\ \frac{1}{2}x+2\right];\\ 0, & x\in\left(-2;0\right], y\notin\left[-\sqrt{4-x^2};\ \frac{1}{2}x+2\right];\\ \dfrac{\frac{1}{2\pi+6}}{\frac{1}{2\pi+6}\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{4-x^2}+2\right)}=\dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{4-x^2}+2\right)}, & x\in\left(0;2\right], y\in\left[-\sqrt{4-x^2};-\frac{1}{2}x+2\right]\\ 0, & x\in\left(0;2\right], y\notin\left[-\sqrt{4-x^2};-\frac{1}{2}x+2\right];\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Отже :

$$f_{\xi_1}(x/y)=\begin{cases} 0, & y\le -2;\\ \dfrac{1}{2\left(\sqrt{4-y^2}\right)}, & y\in\left(-2;0\right], x\in\left[-\sqrt{4-y^2};\ \sqrt{4-y^2}\right];\\ 0, & y\in\left(-2;0\right], x\notin\left[-\sqrt{4-y^2};\ \sqrt{4-y^2}\right];\\ \dfrac{1}{4}, & y\in(0;1], x\in[-2;\ 2];\\ 0, & y\in(0;1], x\notin[-2;\ 2];\\ \dfrac{1}{2(4-2y)}, & y\in(1;2], x\in[2y-4;\ 4-2y];\\ 0, & y\in(1;2], x\notin[2y-4;\ 4-2y];\\ 0, & y>2. \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y/x)=\begin{cases} 0, & x\le -2;\\ \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{4-x^2}+2\right)}, & x\in\left(-2;0\right], y\in\left[-\sqrt{4-x^2};\ \dfrac{1}{2}x+2\right];\\ 0, & x\in\left(-2;0\right], y\notin\left[-\sqrt{4-x^2};\ \dfrac{1}{2}x+2\right];\\ \dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}x+\sqrt{4-x^2}+2\right)}, & x\in\left(0;2\right], y\in\left[-\sqrt{4-x^2};-\dfrac{1}{2}x+2\right];\\ 0, & x\in\left(0;2\right], y\notin\left[-\sqrt{4-x^2};-\dfrac{1}{2}x+2\right];\\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Умови нормування для умовних щільностей виконуються, оскільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y)dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dx}{f_{\xi_2}(y)} = \frac{f_{\xi_2}(y)}{f_{\xi_2}(y)} = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x)dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dy}{f_{\xi_1}(x)} = \frac{f_{\xi_1}(x)}{f_{\xi_1}(x)} = 1.$$

У нашому випадку видно, що:

$$\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}x+2} \frac{dy}{\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right)} = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\frac{1}{2}x+2} \frac{dy}{\left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right)} = 1$$

$$\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{dx}{2\left(\sqrt{4-y^2}\right)} = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4}\, dx = \int_{2y-4}^{4-2y} \frac{dx}{2(4-2y)} 1$$

6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Для пошуку умовних математичних сподівань скористаємося формулами:

$$\begin{cases} E(\xi_2/\xi_1 = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y/x)dy = \psi(x)\,; \\ E(\xi_1/\xi_2 = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x/y)dx = \varphi(y)\,. \end{cases}$$

$$E(\xi_2/\xi_1 = x) =$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} 0\, dy = 0, & (x \le -2) \vee (x > 2); \\ \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}x+2} \frac{y}{\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right)}\, dy = \frac{y^2}{2\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right)} \Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}x+2} & \\ \qquad = \frac{\frac{5x^2}{4} + 2x}{2\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right)}, x \in (-2; 0]; & \\ \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\frac{1}{2}x+2} \frac{y}{\left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right)}\, dy = \frac{y^2}{2\left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right)} \Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\frac{1}{2}x+2} = & \\ \qquad = \frac{\frac{5x^2}{4} - 2x}{2\left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{4-x^2} + 2\right)}, & x \in (0; 2]. \end{cases}$$

$$E(\xi_1/\xi_2 = y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} 0\, dx = 0, & (y \le -2) \vee (y > 2); \\ \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{2\left(\sqrt{4-y^2}\right)}\, dx = \frac{x^2}{4\left(\sqrt{4-y^2}\right)} \Big|_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} = 0, & y \in (-2; 0]; \\ \int_{-2}^{2} \frac{x}{4} dx = \frac{x^2}{8} \Big|_{-2}^{2} = 0, & y \in (0; 1]. \\ \int_{2y-4}^{4-2y} \frac{x}{2(4-2y)}\, dx = \frac{x^2}{4(4-2y)} \Big|_{2y-4}^{4-2y} = 0, & y \in (1; 2]. \end{cases}$$

$E(\xi_2/\xi_1 = x)$ та $E(\xi_1/\xi_2 = y)$ зображені блакитними лініями на рис. 2.17 та 2.18 відповідно.

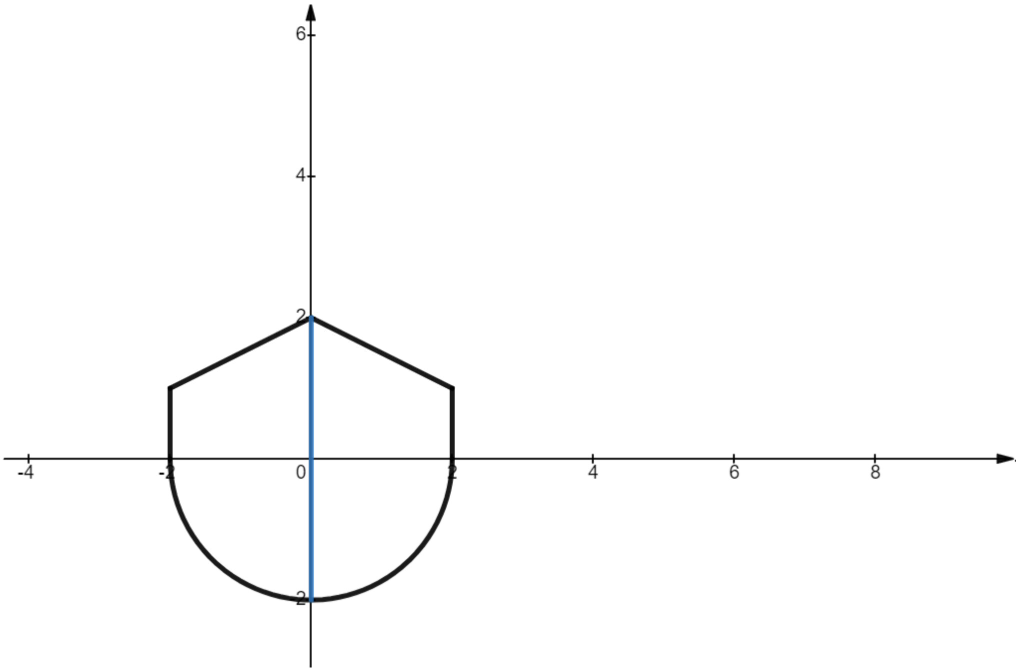

Рисунок 2.17

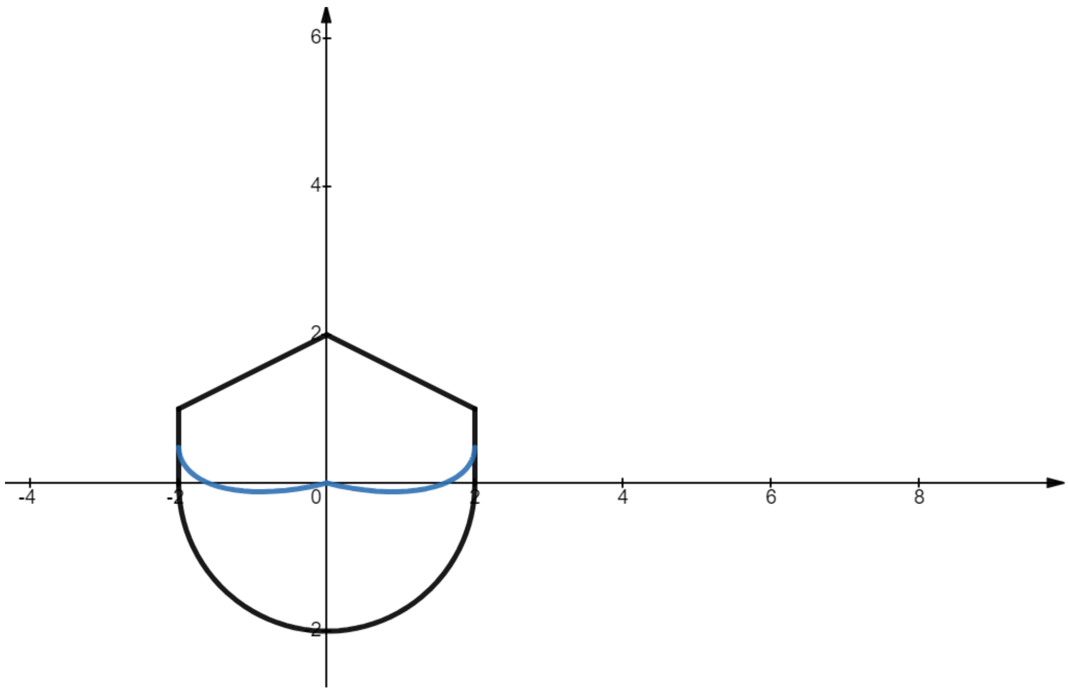

Рисунок 2.18

Розглянемо випадкові величини $E(\xi_1/\xi_2) = \varphi(\xi_2)$ та $E(\xi_2/\xi_1) = \psi(\xi_1)$. У нашому випадку:

$$E(\xi_1/\xi_2) = \begin{cases} 0, & (\xi_2 \le -2) \vee (\xi_2 > 2); \\ 0, & \xi_2 \in (-2; 2]. \end{cases}$$

$$E(\xi_2/\xi_1) = \begin{cases} 0, & (\xi_1 \le -2) \vee (\xi_1 > 2); \\ \dfrac{\frac{5{\xi_1}^2}{4} + 2\xi_1}{2\left(\frac{1}{2}\xi_1 + \sqrt{4 - {\xi_1}^2} + 2\right)}, & \xi_1 \in (-2; 0]; \\ \dfrac{\frac{5{\xi_1}^2}{4} - 2\xi_1}{2\left(-\frac{1}{2}\xi_1 + \sqrt{4 - {\xi_1}^2} + 2\right)}, & \xi_1 \in (0; 2]. \end{cases}$$

Виконаємо перевірку формул повного математичного сподівання

$$\begin{cases} E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big) = E\xi_1; \\ E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big) = E\xi_2. \end{cases}$$

$$E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi_1/\xi_2 = y) f_{\xi_2}(y)dy =$$

$$= \frac{1}{\pi + 3}\left(\int_{-2}^{0} \frac{0\left(\sqrt{4 - y^2}\right)}{1} dy + \int_0^1 0 \cdot 2dy + \int_1^2 \frac{0(4 - 2y)}{1} dy\right)) = 0 = E\xi_1$$

$$E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi_2/\xi_1 = x) f_{\xi_1}(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 6}\left(\int_{-2}^{0} \frac{\left(\frac{5x^2}{4} + 2x\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x + \sqrt{4 - x^2} + 2\right)}{2\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{4 - x^2} + 2\right)} d\mathrm{x}\right.$$

$$\left. + \int_0^2 \frac{\left(\frac{5x^2}{4} - 2x\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{4 - x^2} + 2\right)}{2\left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{4 - x^2} + 2\right)} dy\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 6}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3\pi + 9} = E\xi_2$$

ДОДАТКИ

1.$\int\left(\sqrt{4-y^2}\right)dy = \left|\begin{matrix} t = arcsin\left(\frac{y}{2}\right) \\ 4cos^2(t) = 4-y^2 \\ y = 2sin(t) \\ dy = 2cos(t)dt \end{matrix}\right| = \int 4cos^2(t)dt =$

$= \left|cos^2(t) = \frac{1+cos(2t)}{2}\right| = 4\int \frac{1+cos(2t)}{2}dt =$

$= 4(\frac{1}{2}\int cos(2t)dt + \frac{1}{2}\int 1dt = sin(2t) + 2t ==$

$= 2sin(t)cos(t) + 2t = \left|\begin{matrix} \text{Зворотня заміна} \\ t = arcsin\left(\frac{y}{2}\right) \\ cos(arcsin(t)) = \sqrt{1-t^2} \end{matrix}\right| =$

$= y\sqrt{1-\frac{y^2}{4}} + 2arcsin\left(\frac{y}{2}\right) = y\sqrt{\frac{4-y^2}{4}} + 2arcsin\left(\frac{y}{2}\right) =$

$= \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + 2arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + C\ , C \in \mathbb{R}.$

2. $\int y\left(\sqrt{4-y^2}\right)dy = \left|\begin{matrix} t = 4-y^2 \\ -\frac{1}{2}dt = ydy \end{matrix}\right| = \int -\frac{\sqrt{t}}{2}dt = -\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} = \left|\begin{matrix} \text{Зворотня заміна} \\ t = 4-y^2 \end{matrix}\right| =$

$= -\frac{(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{y^2\sqrt{4-y^2}}{3} - \frac{4\sqrt{4-y^2}}{3} + C\ , C \in \mathbb{R}.$

3. .$\int y^2\left(\sqrt{4-y^2}\right)dy = \left|\begin{matrix} t = arcsin\left(\frac{y}{2}\right) \\ 4cos^2(t) = 4-y^2 \\ y = 2sin(t) \\ dy = 2cos(t)dt \end{matrix}\right| = \int 16cos^2(t)sin^2(t)dt =$

$$= \left| \begin{matrix} cos^2(t) = \dfrac{1 + cos(2t)}{2} \\ sin^2(t) = \dfrac{1 - cos(2t)}{2} \end{matrix} \right| = 16 \int \frac{\big(1 - cos(2t)\big)\big(1 + cos(2t)\big)}{4} dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 2t \\ dt = \dfrac{1}{2} du \\ t = \dfrac{u}{2} \end{matrix} \right| = 4 \int \frac{\big(1 - cos(u)\big)\big(1 + cos(u)\big)}{2} du = 2 \int 1 - cos^2(u) du =$$

$$= \left| cos^2(u) = \frac{1 + cos(2u)}{2} \right| = 2 \left(\int 1du - \int \frac{1 + cos(2u)}{2} du \right) = u - \frac{sin(2u)}{2} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{Зворотня заміна} \\ u = 2t \end{matrix} \right| = 2t - \frac{sin(4t)}{2} = \left| \begin{matrix} \text{Зворотня заміна} \\ t = arcsin\left(\dfrac{y}{2}\right) \end{matrix} \right| =$$

$$= 2arcsin\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{2sin(2t)cos(2t)}{2} =$$

$$= 2arcsin\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{4sin(t)cos(t)\big(cos^2(t) - sin^2(t)\big)}{2} =$$

$$= 2arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y^3\sqrt{4 - y^2}}{4} - \frac{y\sqrt{4 - y^2}}{2} + C\ , C \in \mathbb{R}.$$