MỤC LỤC

CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TRONG ĐẠI SỐ MA TRẬN.

2.1. Đại số Ma trận.

2.1.1. VÉCTƠ CỘT &VECTƠ HÀNG.

Ta gọi véc tơ cột là một dãy hữu hạn có thứ tự các số sắp xếp từ trên xuống dưới.

Thí dụ .

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$ Là một véc tơ cột có 3 thành phần

Ta gọi véc tơ hàng là một dãy hữu hạn có thứ tự các số sắp xếp theo hàng ngang nối tiếp nhau .

Thí dụ. $v = [8, -4, 0, 2]$ là một véc tơ hàng có 4 thành phần .

Hai véc tơ hàng (hoặc 2 véc tơ cột) bằng nhau nếu và chỉ nếu chúng có các thành phần ở cùng vị trí bằng nhau .

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VECTƠ.

- **Cộng 2 véc tơ,** nếu

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{Thì} \quad u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_2 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

Tương tự, nếu

$u = [u_1, u_2, u_3]$ và $v = [v_1, v_2, v_3]$ thì :

$u + v = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3]$.

Ta có $u + v = v + u$

- **Nhân một véc tơ cho một hằng số**. Nếu a là một hằng số khác 0 và $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ thì $au = [au_1, au_2, au_3]$.

  Véc tơ không là véc tơ mà các thành phần đều bằng 0. Nếu véc tơ 0 có 3 thành phần, ta viết

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Nếu là véc tơ cột

Và $0 = [0, 0, 0]$ Nếu là véc tơ hàng.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

- **Tích vô hướng** (nhân véc tơ hàng với véc tơ cột) .

Nếu $u = [u_1,, u_3]$ và $v = \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{pmatrix}$

Thì $uv = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Thí dụ. Một người mua 3 hộp bánh, 2 hộp kẹo và 4 lọ mứt. Giá một hộp bánh là 5000 đ, 1 hộp kẹo là 4200 đ, giá một lọ mứt là 8000 đ,

Các số liệu trên được biểu diễn bằng các véc tơ

u = [3 (bánh), 2 (kẹo), 4 (mứt)] chỉ số lượng hàng đã mua

$v = \begin{pmatrix} 5000 \\ 4200 \\ 8000 \end{pmatrix}$ Chỉ đơn giá từng mặt hàng

Số tiền phải trả là tích của u và v

$$uv = [3, 2, 4] \begin{pmatrix} 5000 \\ 4200 \\ 8000 \end{pmatrix} = 3x5000 + 2x4000 +4x8000 = 57400$$

2.1.2. MA TRẬN .

- **Định nghĩa**. Một ma trận là một tập hợp sắp xếp theo hàng và theo cột. Một ma trận cấp mxn là một bảng số gồm mxn phần tử xếp theo m hàng và n cột

$$V = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} & \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} & \dots\ a_{2n} \\ \dots & \\ a_{m1}\ a_{m2} & \dots\ a_{mn} \end{pmatrix}$$ A_{Ij} là phần tử hàng I, cột j

Khi m=n ta gọi là ma trận vuông cấp n.

- **Ma trận đơn vị**, ký hiệu là I là ma trận vuông mà các phần tử trên đường chéo chính bằng 1, các phần tử khác bằng 0.

- **Ma trận chéo**, là ma trận vuông mà các phần tử khác trên đường chéo chính bằng 0

Thí dụ: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

- **Ma trận chuyển vị**. Cho một ma trận A, ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A^T là một ma trận suy từ A, đổi hàng thành cột, đổi cột thành hàng. Nếu A là ma trận mxn thì A^T là ma trận nxm.

Thí dụ. Nếu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 3 \\ 8 & -4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Thì } A^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -4 \\ 6 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ma trận vuông A có tính **đối xứng** nếu $A^T = A$

CÁC PHÉP TÍNH TRÊN MA TRẬN.

- **Cộng 2 ma trận**. Phép cộng hai ma trận chỉ có nghĩa khi hai ma trận có cùng cấp.

  Thí dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ Thì $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

- **Nhân một ma trận với một hằng số k khác 0.**

  Nếu $A = (a_{i\,j})$ thì $kA = (ka_{i\,j})$

- **Nhân một véc tơ hàng với một ma trận.**

  Điều kiện: số hàng của ma trận = số phần tử của véc tơ hàng.

  Thí dụ.

  $$[3, 2, 1]\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = [\,6, 19\,]$$

- **Nhân một ma trận với một véc tơ cột.**

  Điều kiện: Số cột của ma trận trên = số thành phần của véc tơ cột

  Thí dụ. $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 21 \end{pmatrix}$$

- **Nhân 2 ma trận $A \times B$.**

  Điều kiện : số cột của A = số hàng của B

  Thí dụ. $$A \times B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 58 \\ 0 & 32 \\ -3 & -14 \end{pmatrix}$$

  Tổng quát nếu A có cấp mxn, B có cấp nxp thì AB có cấp mxp.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Chú ý.

- Có thể nhân AB được nhưng không thể nhân BA (nếu hai ma trận không vuông cùng cấp).
- Nếu A và B là 2 ma trận vuông cùng cấp. Ta nhân được AB và BA nhưng AB khác BA.
- Nếu nhân được 3 ma trận A, B, C thì (AB)C = A(BC).
- A là một ma trận vuông cấp n, I là ma trận đơn vị cấp n, thì

  AI = IA = A

MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO.

Định nghĩa. Cho A là một ma trận vuông cấp n, nghịch đảo của A (nếu có), ký hiệu A^{-1} là một ma trận vuông cấp n sao cho

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

ĐỊNH THỨC CỦA MỘT MA TRẬN.

Với mỗi ma trận vuông ta tính được một số thực gọi là định thức của ma trận, ký hiệu det A.

- **Định thức của ma trận cấp 2.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{Thì } \det A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

- **Cấp 3.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32}$$

- **Định lý**. A có nghịch đảo nếu và chỉ nếu det A khác 0 .

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

2.2. Hệ các Phương trình tuyến tính.

Một hệ gồm m phương trình tuyến tính với n biến $x_1, ..., x_n$ là một tập hợp m phương trình tuyến tính được viết dưới dạng:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \dots \\ a_m x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

hay Ax = b trong đó A = (a_{ij}), ma trận mxn và b là m–véc tơ

Một nghiệm của hệ là 1 véc tơ n–véc tơ thỏa mãn hệ trên.

- Hệ được gọi là nhất quán nếu có ít nhất một nghiệm.
- Hệ được gọi là thuần nhất nếu $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$ khi đó hệ có ít nhất một nghiệm: $x_1 = ... = x_n = 0$ gọi là nghiệm tầm thường.

Thí dụ 1 . Giải hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ Ta có: } [A,b] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

2.2.1. Phương pháp GAUSS

Gồm hai Giai đoạn:

- **Quá trình thuận**: Đưa ma trận A về dạng ma trận nửa tam giác trên.
- **Quá trình ngược:** Tính các nghiệm $x_n, \dots x_1$ bằng phương pháp "**Thế ngược.**"

1. **Quá trình thuận**: Đưa ma trận A về dạng ma trận nửa tam giác trên.

   $\forall$ i: 1..n (dòng thứ i, ta biến đổi sao cho các phần tử thứ i+1 của cột i bằng không). Phép biến đổi như sau:

Dòng j = Dòng j – a_{ji}/ a_{ii} Dòng i , với j=i+1..n

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Với thí dụ ở trên ta có:

- i=1:

  Dòng 2 = Dòng 2 – 2 Dòng 1

  Dòng 3 = Dòng 3 – 3 Dòng 1

  Với thí dụ ở trên ta có:

$$[A,b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -5 & -7 & -12 \end{array}\right)$$

- i=2:

  Dòng 3 = Dòng 3 – 5 Dòng 2

$$[A,b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -5 & -7 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right)$$

2. **Giai đoạn 2: Giải ngược:** Tính các nghiệm x_n, … x_1 bằng phương pháp **"Thế ngược"**:

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} b_n$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}} \left(b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n \right)$$

…….

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

Với thí dụ 1. Lời giải là: $\boxed{x_3 = 1;\ x_2 = 6 - 5(1) = 1;\ x_1 = 6 - 2 - 3 = 1}$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

2.2.2. Phương pháp GAUSS-JORDAN.

Thí dụ 1. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_2 - 8x_3 = 17 \\ x_1 + x_3 = 10 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad Ax = b \text{ với } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Xét mx(n+1) - ma trận $[A,b] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Phương pháp Gauss - Jordan nhằm biến đổi sao cho các phần tử trên đường chéo = 1, và các phần tử khác của A = 0 bằng các phép tính sơ cấp sau đây:

Bước 1. Biến đổi sao cho hệ số của biến x_1 = 1 bằng cách đổi dòng 1 thành dòng 2 , [A,b] trở thành

$$[A,b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bước 2. Thay dòng 3 bằng (3) - dòng (1), [A,b] trở thành

$$[A,b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & -1 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

Bước 3. Thay dòng 3 → dòng 3 + dòng 2, [A,b] trở thành

$$[A,b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{pmatrix}$$

Bước 4. Biến đổi a_{33} = 1 bằng cách nhân dòng 3 cho -1/9

$$[A,b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Bước 5. Biến đổi dòng 1 $\rightarrow$ dòng 1 – dòng3

$$[A,b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bước 6. Thay dòng 2 $\rightarrow$ dòng 2 + 8 $\times$ dòng 3

$$[A,b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Như vậy, nghiệm của phương trình $x_1 = 7$, $x_2 = 7$, $x_3 = 3$.

Nhận xét. Khi áp dụng phương pháp Gauss - Jordan, ta đã lập lại nhiều lần một trong ba thao tác cơ bản sau :

Thao tác 1. Hoán đổi 2 dòng của ma trận [A,b].

Thao tác 2. Thay một dòng bằng chính dòng đó cộng với 1 dòng khác đã được nhân với một hằng số khác 0 ($1/a_{ii}$).

Thaotác 3. Thay một dòng bằng chính dòng đó cộng với một dòng khác đã được nhân với một hệ số khác 0.

Ba thao tác trên được mô tả trong các thủ tục sau đây :

- **THỦ TỤC H_DOI** (Var A: ma_tran; i,j: integer);

  {Đặc tả hoán đổi 2 dòng i và j của ma trận A}

  Var k: integer ; t: real ;

  Begin

  Lặp lại với k = 1 đến n

  t ← a[i,k]; a[i,k] ← a[j,k]; a[j,k] ← t

  Hết ;

  End;

- **THỦ TỤC NHAN** (Var A: ma_tran; i: integer; t: real);

  {Đặc tả dòng i, dòng j ($i \neq j$) , $t \neq 0 \Rightarrow$ dong i ← t * dong i}

  Var k: integer;

  Begin

  Lặp lại với k = 1 đến n a[i,k] ← a[i,k]* t ;

  End;

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

- **THỦ TỤC XOA** (Var A: ma_tran ; i,j : integer ; t : real) ;

  {Đặc tả dòng i, dòng j ($i \neq j$) , $t \neq 0 \Rightarrow$ dong i ← dong i - t * dòng j}

  Var k: integer ;

  Begin

  Lặp lại với k = 1 đến n a[i,k] ← a[i,k]*t ;

  End;

Phương pháp Gauss - Jordan được mô tả bằng giải thuật sau:

GIẢI THUẬT GAUSS_JORDAN;

```
Bắt đầu Đọc ma trận [A,b] {gọi là ma trận A}
    j ← 1 {xét cột thứ nhất}
    Lặp lại
        Nếu a[i,j]= 0 thì NHAN (A, j, i/a[j,j])
        Ngược lại Bắt đầu i ← 1
            Lặp lại
                Nếu a[i,j] = 0 thì i ← i+1
            Cho đến khi (a[i,j] = 0) hoặc (i = m+1);
            Nếu i = n+1 thì Bắt đầu
                Viết ("Phương trình vo nghiem") ;
                j ← n+1
            Hết Ngược lại Bắt đầu
                H_DOI (A, i, j) ; NHAN (A, j, 1/a[j,j]);
            Hết ;
        Hết;
        Lặp với i=1     đến j - 1 ;  XOA(a, i, j, a[i,j]) ;
        Lặp với i=j+1 đến m ;        XOA(a, i, j, a[i,j]) ;
        j ← j+1
    Cho đến j = n + 1 ;
Hết.
```

Nhận xét về phương pháp Gauss- Jordan:

- Ích lợi về mặt lý thuyết.
- Không thích hợp với các hệ lớn.

  Thí dụ. Với hệ 1000 phương trình với 1000 biến, thì số phép tính số học (+, -, nhân, chia) phải làm vào khoảng (1000^3 =) 1 tỷ phép tính.

Cải tiến bằng phương pháp khử GAUSS.

2.2.3. Phương pháp Phân tích L.U.

Y tưởng của Phương pháp này như sau:

Bước 1. Phân tích A thành hai ma trận A= L U, trong đó L là ma trận nửa tam giác dưới (tất cả các phần tử trên đường chéo đều bằng 0, nói khác đi: $l_{ij}=0$, i< j) và U là ma trận nửa tam giác trên (tất cả các phần tử dưới đường chéo đều bằng 0, nói khác đi: $u_{ij}=0$, i> j).

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ . & . & . & \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & . & . \\ 0 & u_{22} & . & \\ 0 & . & . & \end{pmatrix}$$

Bước 2. Tìm nghiệm thông qua Giải Hai Hệ phương trình (1) và (2)

- Giải Hệ phương trình : $Az = B$ (tìm z) (1)
- Giải Hệ phương trình : $Ux = z$ (tìm x) (2)

2.3. Ap dụng để tính Nghịch đảo ma trận (ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP GAUSS - JORDAN).

Thí dụ. Tìm nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Phương pháp.

1. Kiểm tra xem det A khác 0
2. Viết ma trận [A,I]
3. Dùng để phép biến đổi để biến [A,I] $\rightarrow$ [I,B] khi đó B là nghịch đảo của A.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Ở thí dụ trên,

1. Det A = 4 det $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ = 5 det $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ = 16 + 15 = 31 $\neq$ 0

2. [A,I] = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Lần lượt thực hiện các phép biến đổi, ta được

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2.4. Áp dụng để lập Bảng cân đối liên ngành.

Một nền kinh tế có nhiều ngành sản xuất khác nhau. Tùy theo mức độ chính xác và chi tiết của cách phân chia mà người ta có thể chia các ngành sản xuất làm nhiều ngành: 14, 38, 100 hay 600 ngành.

Ta giả sử một nền kinh tế được thu gọn với 2 ngành sản xuất : ngành 1 và ngành 2 :

- Ngành 1 sản xuất các sản phẩm 1.
- Ngành 2 sản xuất các sản phẩm 2.

Mỗi ngành sử dụng 1 phần sản phẩm của chính mình làm ra cũng như sản phẩm của ngành kia.

Ta có các số lượng sau đây :

- x_{11} : số lượng sản phẩm 1 mà ngành 1 sử dụng
- x_{21} : số lượng sản phẩm 2 mà ngành 1 sử dụng
- x_{12} : số lượng sản phẩm 1 mà ngành 2 sử dụng
- x_{22} : số lượng sản phẩm 2 mà ngành 2 sử dụng

Các số lượng sản phẩm trên đều tính bằng tiền (dollar, đồng). Mặt khác, mỗi ngành sản xuất ra các sản phẩm không những cho nhu cầu của các ngành sản xuất mà còn để cung cấp cho các nhu cầu bên ngoài còn gọi là mức tiêu thụ cuối cùng, Thí dụ : nhu cầu cũa nhà nước, nhu cầu xuất khẩu, nhu cầu của người tiêu dùng. Các số liệu nêu trên, được trình bày trong Bảng sau đây:

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

	Ngành 1	2	Nhu cầu Bên ngoài	Tổng sản phẩm
Sản phẩm 1	X_{11}	x_{12}	d_1	x_1
Sản phẩm 2	X_{21}	x_{22}	d_2	x_2

Ta có: $x_1 = x_{11} + x_{12} + d_1$ (1)

$x_2 = x_{21} + x_{22} + d_2$ (2)

Các sản lượng x_{11} , x_{12} , x_{21} , x_{22} , có quan hệ thế nào với các tổng sản phẩm x_1 và x_2 ?

Người ta dùng mô hình tuyến tính (tức là nhu cầu của mỗi ngành về một sản phẩm nào đó tỷ lệ với tổng sản phẩm mà ngành đó làm ra).

Như vậy:

Đối với ngành 1 2

$x_{11} = a_{11}\ x_1$ $x_{12} = a_{12}\ x_2$

$x_{21} = a_{21}\ x_1$ $x_{22} = a_{22}\ x_2$

a_{ij} là các hằng số tỷ lệ. Ta có $0 \le a_{ij} < 1$.

Ý nghĩa của các hệ số a_{ij}.

Ta có $x_{11} = a_{11}\ x_1$,

Nếu cho $x_1 = 1$ thì $a_{11} = x_{11}$. Do đó a_{11} là chi phí cho SP1 mà ngành 1 sử dụng để làm ra 1 đồng SP1.

Tương tự

a_{21} là chi phí cho SP2 mà ngành 1 sử dụng để làm ra 1đ SP1,

a_{12} là chi phí cho SP1 mà ngành 2 sử dụng để làm ra 1đ SP2,

a_{22} là chi phí cho SP2 mà ngành 2 sử dụng để làm ra 1đ SP2.

Ta có:

$x_1 = a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + d_1$ (1)

$x_2 = a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + d_2$ (2)

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Nếu ta đặt:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ma trận có thể viết:

$$X = AX + D \iff (1 - A)X = D \qquad (3)$$

Trong đó, X = véc tơ sản xuất hay véc tơ tổng sản phẩm,

D = véc tơ nhu cầu,

$A = (a_{ij})$: ma trận nhập/ xuất hay ma trận trao đổi.

Nếu hệ phương trình (3) có nghiệm, ta nói nền kinh tế cân đối.

Nếu phải kể thêm chi phí lao động, ta phải xét đến véc tơ: $a_0 = [a_{01}, a_{02}]$, trong đó:

- a_{01} là chi phí lao động để làm ra 1 đồng SP1
- a_{02} là chi phí lao động để làm ra 1 đồng SP2

Ta xem thí dụ bằng số sau đây: Cho bảng trao đổi liên ngành của một nền kinh tế chỉ gồm 2 ngành 1 và 2:

	Ngành 1	Ngành 2	Nhu cầu Bên ngoài	Tổng sản phẩm
Sản phẩm 1	250	150	200	600
Sản phẩm 2	90	110	100	300
Tổng giá trị LĐ	130	30		
Giá trị gia tăng	130	10		
Tổng sản phẩm	600	300		

Giả sử các hệ số kỹ thuật không đổi trong thời gian một năm.

Hãy lập bảng dự đoán trao đổi liên ngành cho năm sau, biết rằng nhu cầu bên ngoài của mỗi ngành tăng lần lượt là 2% và 10%.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Giải.

- **Tính ma trận nhập xuất a = (a_{ij})**

$a_{11} = x_{11}/600 = 250/600 = 0.4167$

$a_{12} = x_{12}/300 = 150/300 = 0.500$

$a_{21} = x_{21}/600 = 90/600 = 0.1500$

$a_{22} = x_{22}/300 = 110/300 = 0.3667$

$$\text{Vậy } A = \begin{pmatrix} 0.4167 & 0.500 \\ 0.1500 & 0.3667 \end{pmatrix}$$

- **Tính vectơ nhu cầu D'.**

Do nhu cầu của ngành tăng 2% nên nhu cầu tổng sản phẩm của ngành 1 ở năm sau phải là: $200 \times 102\% = 204$

Nhu cầu của ngành 2 tăng 10% nên nhu cầu tổng sản phẩm của ngành 2 ở năm sau phải là: $100 \times 110\% = 110$

Vậy véc tơ nhu cầu cho năm sau là:

$$D' = \begin{pmatrix} 204 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Gọi X' là véc tơ sản xuất của năm sau, ta phải có:

$$(I - A)X' = D'$$

$$\text{Với } I - A = \begin{pmatrix} 1-0.4167 & -0.500 \\ -0.1500 & 1-0.3667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5833 & -0.500 \\ -0.1500 & 0.6333 \end{pmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên ta được

$$X' = \begin{pmatrix} 625.5849 \\ 321.8491 \end{pmatrix}$$

Suy ra $x'_{11} = a_{11}x'_1 = 260.6604$, $x'_{21} = a_{21}x'_1 = 93.8377$

$x'_{12} = a_{12}x'_2 = 160.9245$, $x'_{22} = a_{22}x'_2 = 118.0113$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Tính chi phí lao động, ta có:

$a_0 = [a_{01}, a_{02}]$ với:

$a_{01} = 130/600 = 0.2167.$

$a_{02} = 30/300 = 0.1$

Suy ra chi phí lao động:

- Đối với Ngành 1 = a_{01} x X'_1 = 0.2167 x 625.5849 = 135.5434
- Đối với Ngành 2 = a_{02} x X'_2 = 0.1 x 321.8491 = 32.1850

Và bảng trao đổi liên ngành cho năm sau có các số liệu như sau:

	Ngành 1	**Ngành 2**	**Nhu cầu Bên ngoài**	**Tổng sản phẩm**
Sản phẩm 1	260.6604	160.9245	204	625.5849
Sản phẩm 2	93.8377	118.0113	110	321.8491
Tổng giá trị LĐ	135.5434	32.1850		
Giá trị gia tăng	135.5434	10.784		
Tổng sản phẩm	625.5849	321.849		

2.5. Bài tập.

1. Cho

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

   a. Tính (A+B) + C ; A +(B+C) ; 3A.

   b. Tính ma trận chuyển vị của A, B, C

2. Thực hiện các phép nhân hai ma trận sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Tính Định thức của các ma trận sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Áp dụng Phương pháp Gauss và Gauss-Jordan giải các hệ phương trình sau:

   a.

$$\begin{cases} 1.2x - 0.8y = 1.0 \\ -1.5x - 0.25y = -1.0 \end{cases}$$

   b.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ 3x + 4y + 5z = 2 \end{cases}$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

c. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 19 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$ f. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ -2x + y - z = -1 \\ 5x - 3y + z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3w + 4x - y + z = -3 \\ 2x - y = -1 \\ 5w - 6x + 2z = 9 \\ w + x + y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 19 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

5. Các ma trận sau có nghịch đảo hay không? Nếu có tìm nghịch đảo của nó.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6. Áp dụng Phương pháp Gauss -Jordan tính nghịch đảo các ma trận sau:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7. Có 3 loại thực phẩm:

- Loại 1 chứa 1 đơn vị vitamin A, 2 đơn vị vitamin B, 3 đơn vị vitamin C
- Loại 2 chứa 2 đơn vị vitamin A, 0 đơn vị vitamin B, 3 đơn vị vitamin C
- Loại 3 chứa 3 đơn vị vitamin A, 1 đơn vị vitamin B, 2 đơn vị vitamin C

Người ta muốn chọn một khẩu phần cung cấp:"11 đơn vị vitamin A, 9 đơn vị vitamin B, 20 đơn vị vitamin C".

a. Tìm tất cả số lượng thực phẩm của mỗi loại có thể có bảo đảm đầy đủ nhu cầu về vitamin như trên.

b. Nếu giá đơn vị của các loại thực phẩm lần lượt là 600 đồng, 550 đồng, 500 đồng thì có khẩu phần nào trị giá 1000 đồng.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

8. Một xí nghiệp điện tử sản xuất 2 loại Board cho máy in. Cả 2 loại đều được xử lý trong 2 phân xưởng A và B. Thời gian cần thiết cho mỗi loại trong mỗi phân xưởng cho bởi bảng sau (Đv: phút):

	Loại 1	Loại 2
PX A	4 phút	3 phút
PX B	1 phút	2 phút

Có 3 công nhân trong phân xưởng A và chỉ có 1 công nhân ở trong phân xưởng B. Tìm sản lượng của mỗi loại trong một giờ.

9. Cho hệ
$$\begin{aligned} 0.0001x + y &= 0.999 \\ x - y &= 0.002 \end{aligned}$$

a. Giải bằng cách cộng hai phương trình.

b. Giải hệ bằng Gauss. Có điều gì bất thường?

10. Giải hệ

a. $$\begin{aligned} 2.001x + 5y &= 7.001 \\ 2x + 5y &= 7 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 2.001x + 5y &= 7 \\ 2x + 5y &= 7 \end{aligned}$$

So sánh 2 hệ trên và kết quả.

11. Cho ma trận xuất.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -25 \\ -125 & -5 & -25 \\ -125 & 0 & -125 \end{pmatrix}$$

Tìm vectơ tổng sản phẩm X cho nền kinh tế A biết rằng vectơ biểu diễn nhu cầu bên ngoài là:

$$D = \begin{vmatrix} 125\ 000 \\ 250\ 000 \\ 90\ 000 \end{vmatrix}$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

CHƯƠNG 3. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN.

3.1. Mở đầu.

Mục đích của chương này là cung cấp một số phương pháp giải phương trình có dạng tổng quát

$$f(x) = 0 \tag{3.1}$$

trong đó : f là một hàm phi tuyến,

x^* được gọi là nghiệm của phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x^*) = 0$.

ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM.

Nếu tồn tại hai điểm a, b sao cho f(a) và f(b) trái dấu, nghĩa là

$$f(a).f(b)<0$$

và hàm f liên tục trong khỏang [a, b] thì Phương trình (1) có ít nhất một nghiệm trong khỏang [a, b].

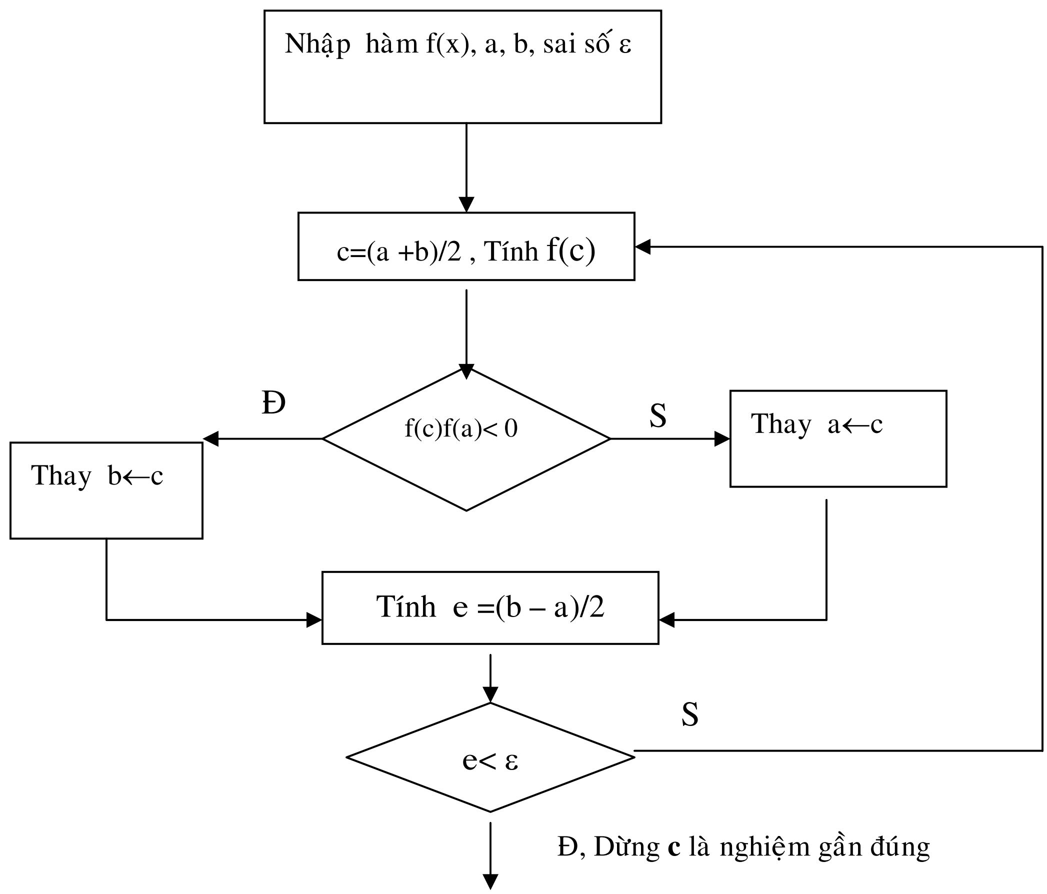
3.2. Phương pháp chia đôi khoảng.

Giả sử (a,b) là khoảng cho trước của phương trình f(x) = 0.

Ý tưởng của Phương pháp: Nếu f(x) là hàm liên tục trên khỏang [a,b] và f(a).f(b)<0 thì $\exists c \in [a,b]$ sao cho f(c)=0.(theo định lý tồn tại nghiệm)

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

- **THUẬT TÓAN CHIA ĐÔI KHỎANG.**



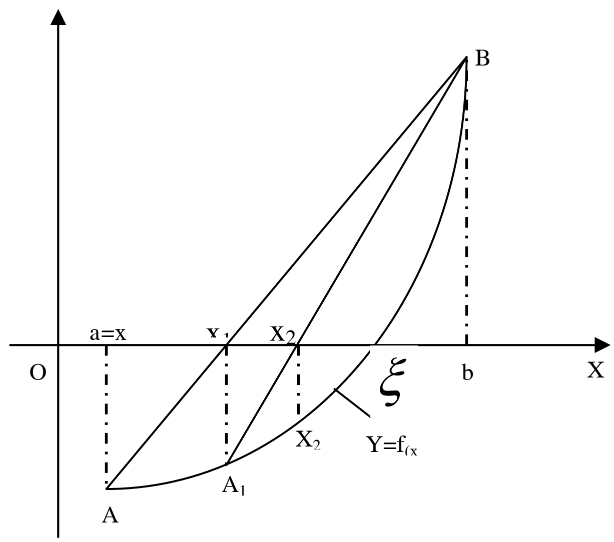
THÍ DỤ 1. Tìm nghiệm dương của Phương trình $f(x) = x^2 + 2x - 0.5$ trong khỏang [0,1] theo phương pháp chia đôi, ta có kết quả như sau:

Số Bước lặp i	a	b	c=(a+b)/2	f(a)	f(b)	f(c)	(b-a)/2
1	0	1	0.5	-0.5	2.5	0.75	0.5
2	0	0.5	0.25	-0.5	0.75	0.0625	0.25
3	0	0.25	0.125	-0.5	0.0625	-0.23438	0.125
4	0.125	0.25	0.1875	-0.23438	0.0625	-0.08984	0.0625
5	0.1875	0.25	0.21875	-0.08984	0.0625	-0.01465	0.03125
6	0.21875	0.25	0.234375	-0.01465	0.0625	0.023682	0.015625
7	0.21875	0.234375	0.2265625	-0.01465	0.023682	0.004456	0.007813

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

3.3. Phương pháp dây cung.

Giả sử (a,b) là khoảng cho trước của phương trình f(x) = 0. Ý tưởng của phương pháp là thay cung AB của hàm y = f(x) bằng dây cung AB rồi lấy hoành độ giao điểm x_1 của dây cung với trục hoành làm giá trị gần đúng của nghiệm đúng ξ.



Dây cung AB là đường thẳng đi qua hai điểm A(a,f(a)) và B(b,f(b)) nên phương trình của dây cung AB là:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Giao điểm x_1 của trục hoành với dây cung AB, ta có $x = x_1$ và $y = 0$, nên có:

$$\frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

Suy ra :

$$x_1 = a - \frac{f(a)*(b-a)}{f(b) - f(a)} \quad \text{hay} \quad \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Áp dụng liên tiếp phương pháp dây cung đối với khoảng cách ly nghiệm (a,b), có một trong hai mút của khoảng (a,b) cố định, đó là mút ở dấu của hàm f(x) trùng với đạo hàm cấp hai f''(x) và từ đó ta có công thức tổng quát sau:

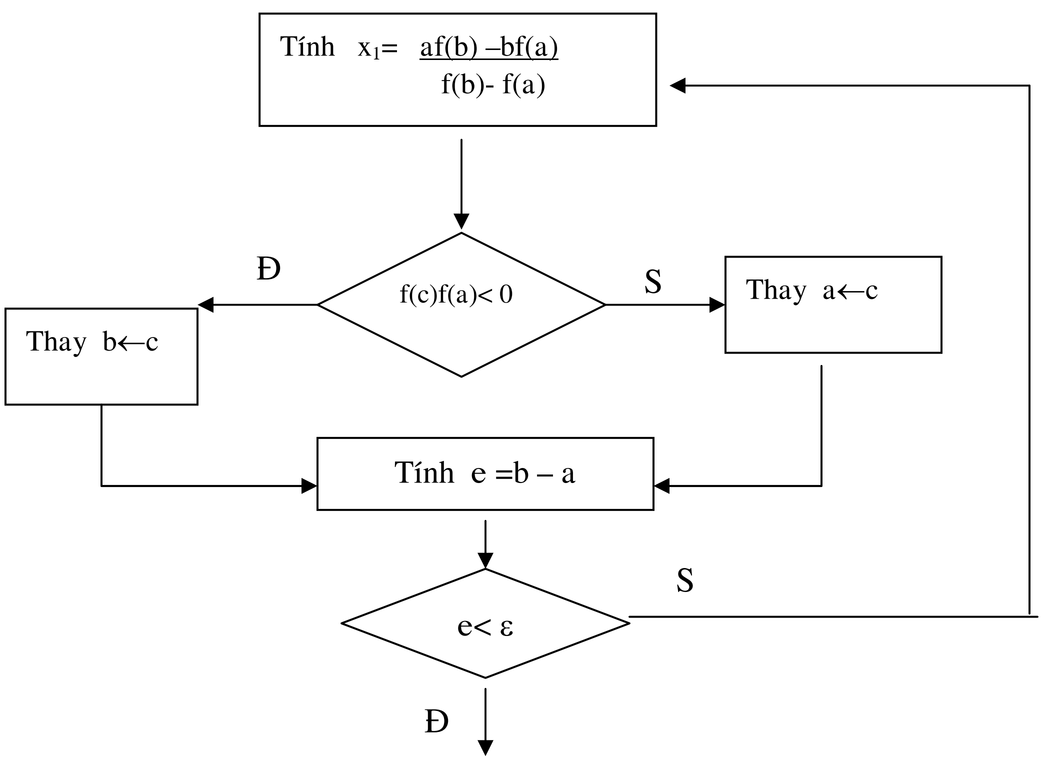
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)*(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)} \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (3.2)$$

trong đó:

d= b nếu f(b) cùng dấu với f''(x): $x_0 = a$

d= a nết f(a) cùng dấu với f''(x): $x_0 = b$.

- **THUẬT TÓAN.**



Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

- **Sự hội tụ của phương pháp**

Giả sử (a,b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình f(x) = 0 và f''(x) giữ dấu không đổi trong (a,b) nghĩa là: f(a) * f(b) < 0, f'(x) và f''(x) giữ dấu không đổi trong (a,b). Khi đó nếu áp dụng liên tiếp phương pháp dây cung đối với khoảng cách ly nghiệm (a,b), các nghiệm gần đúng liên tiếp x_0 , x_1 , x_2 , …. Hoặc tạo nên một dãy đơn điệu tăng và bị chặn. Nên tồn tại giới hạn: $\lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{\xi}$

Khi ấy $\overline{\xi}$ là nghiệm của phương trình f(x) = 0 trong (a,b),

- **Đánh giá sai số nghiệm gần đúng**

Định lý:

Giả sử nghiệm gần đúng ξ và nghiệm gần đúng x_n của phương trình f(x) = 0 đều nằm trong một đoạn $[\alpha,\beta]$ và $0 < m_1 \le |f'(x)|$ đối với $\forall x \in [\alpha,\beta]$. Khi đó ta có đánh giá sau:

$$|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1} \qquad (3.3)$$

Chứng minh:

Áp dụng công thức số gia hữu hạn (công thức Lagrange) ta có:

$f(x_n) – f(\xi) = f'(c) * (x_n - \xi)$ với $c \in (\alpha,\beta)$

Vì $f(\xi) = 0$ và $|f'(c)| \ge m_1$ nên :

$|f(x_n) – f(\xi)| = |f(x_n)| = |f'(c)(x_n - \xi)| \ge m_1 |x_n - \xi|$

suy ra : $|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Do đó, để đánh giá mức độ chính xác của nghiệm gần đúng x_n, nhận được bằnh phương pháp dây cung, ta có thể dùng đánh giá (3.3). Ngoài ra, ta có thể đánh giá sai số của nghiệm gần đúng thông qua x_{n-1} và x_n, nhận được từ công thức (3.2).

Giả sử trên [a,b] , f'(x) liên tục, giữ dấu không đổi và thỏa mãn:

$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 < +\infty$ (theo giả thiết)

Từ (3.2) ta có :

$$x_n = x_{n+1} - \frac{f(x_{n-1})*(x_{n-1}-d)}{f(x_{n-1})-f(d)}$$

và : $$-f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1})-f(d)}{x_{n-1}-d} * (x_n - x_{n-1})$$

Vì ξ là nghiệm đúng của phương trình f(x) = 0: f(ξ) = 0, nên có thể viết :

$$f(\xi) - f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1})-f(d)}{x_{n-1}-d} * (x_n - x_{n-1})$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn, ta có :

$$f'(c_1) - f(\xi - x_{n-1}) = f'(c_2) * (x_n - x_{n-1}) \quad \text{với } c_1, c_2 \in (a,b);$$

Do đó:

$$f'(c_1) * (\xi - x_n + x_n - x_{n-1}) = f'(c_2) * (x_n - x_{n-1})$$

$$f'(c_1) * (\xi - x_n) = [f'(c_2) - f'(c_1)] * (x_n - x_{n-1})$$

và:

$$|x_n - \xi| = \frac{|f'(c_2) - f'(c_1)|}{|f'(c_1)|} |x_n - x_{n-1}|$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Theo giả thiết, ta có :

$$\left|f'(c_2) - f'(c_1)\right| \le M_1 - m_1$$

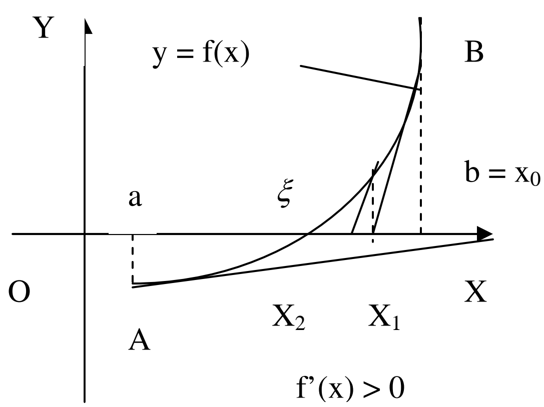
Từ đó suy ra: $\left|x_n - \xi\right| \le \dfrac{M_1 - m_1}{m_1} * \left|x_n - x_{n-1}\right|$

Trở lại THÍ DỤ 1, tìm nghiệm dương của Phương trình f(x) = x^2 + 2x – 0.5 trong khỏang [0,1] theo phương pháp dây cung, ta có kết quả như sau:

Số Bước lặp i	a	b	c=(af(b)-bf(a))(f(b)-f(a))	f(a)	f(b)	f(c)	x_2-x_1
1	0	1	0.166666667	-0.5	2.5	-0.13889	0.04386
2	0.1666667	1	0.210526316	-0.13889	2.5	-0.03463	0.010785
3	0.2105263	1	0.221311475	-0.03463	2.5	-0.0084	0.002607
4	0.2213115	1	0.223918575	-0.0084	2.5	-0.00202	0.000628
5	0.2239186	1	0.224546172	-0.00202	2.5	-0.00049	0.000151
6	0.2245462	1	0.224697099	-0.00049	2.5	-0.00012	

3.4. Phương pháp Newton.

Giả sử (a,b) là khoảng cho trước của phương trình f(x) = 0. Ý tưởng của phương pháp là thay cung AB của hàm y = f(x) bằng tiếp tuyến rồi lấy hoành độ giao điểm x_1 của tiếp tuyến với trục hoành làm giá trị gần đúng của nghiệm đúng ξ.



f'(x) > 0

f''(x) > 0

Trong khai triển Taylor, ta có:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \ \ldots\ = 0$$

$$f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) = 0$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Suy ra

$$x_1 = x_0 - \frac{f(xo)}{f'(xo)}$$

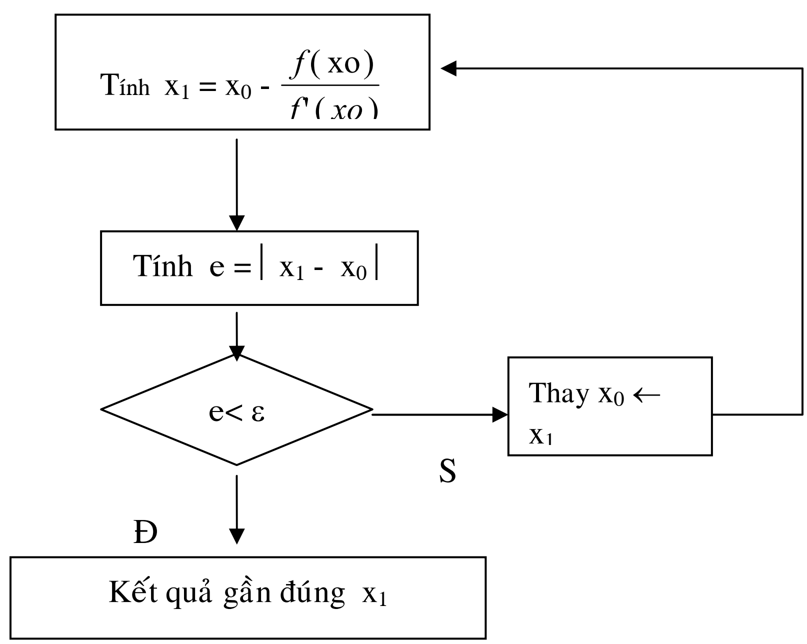
Nghiệm ξ bây giờ nằm trong khoảng (a,x_1). Nếu x_1 chưa đạt độ chính xác yêu cầu, ta thay (a,b) bằng (a,x_1) và lại áp dụng phương pháp tiếp tuyến (Newton) đối với (a,x_1), ta nhận được x_2 xấp xỉ nghiệm ξ tốt hơn x_1:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Tiếp tục quá trình trên, trong trường hợp tổng quát ta nhận được:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- **THUẬT TÓAN.**



Trở lại THÍ DỤ 1, tìm nghiệm dương của Phương trình $f(x) = x^2 + 2x - 0.5$ trong khoảng [0,1] theo phương pháp Newton, ta có kết quả như sau:

Số Bước lặp i	x	f'(x)	f'(x)	x1=x0-f(x0)/f'(x0)	x1-x0
1	0.5	0.75	3	0.25	-0.25
2	0.25	0.0625	2.5	0.225	-0.025
3	0.225	0.000625	2.45	0.224744898	-0.00026

3.5. Bài tập.

1. Tìm nghiệm dương trên đoạn [1, 2], với sai số là 0.01 của các phương trình sau bằng 3 phương pháp: chia đôi, dây cung và phương pháp Newton:
   a. $x^2 - 0.9x - 1.52 = 0$
   b. $x^3 - x - 1 = 0$

2. Tìm khoảng thích hợp để các phương trình sau có nghiệm và tìm nghiệm theo 3 phương pháp: chia đôi, dây cung và phương pháp Newton sau 4 bước lặp:
   a. $x^3 - 2x - 1 = 0$
   b. $\sqrt{x} - x + 2 = 0$
   c. $x - \sin x - 0.25 = 0$
   d. $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$
   e. $x^5 - x - 0.2 = 0$
   f. $2x^3 - 0.5x - 1 = 0$
   g. $x^2 - \log x - 6 = 0$
   h. $e^x - 2 = 0$
   i. $3x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 4x + 1 = 0$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

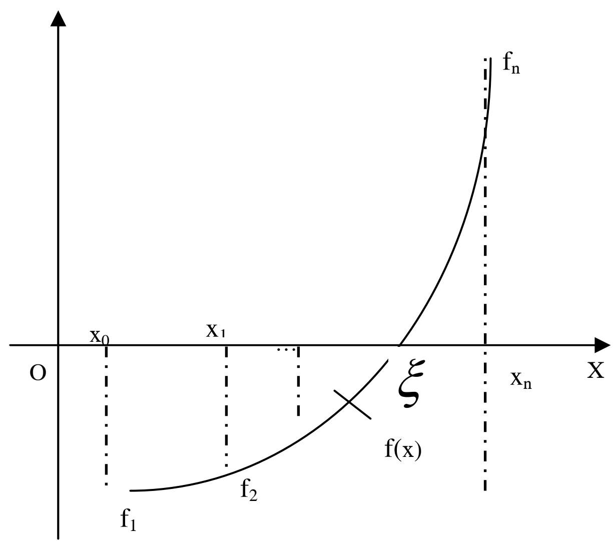
CHƯƠNG 4. PHƯƠNG PHÁP NỘI SUY - NGOẠI SUY.

4. 0. MỞ ĐẦU.

Giả sử f(x) là một hàm chưa biết, (hoặc cần phục hồi), nhưng ta biết giá trị của hàm f tại n + 1 điểm x_0 , x_1, x_2 , …. x_n là $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, …. $f(x_n)$.

Ký hiệu:

$f_0 = f(x_0)$,
$f_1 = f(x_1)$,
….
$f_n = f(x_n)$.



Ta có n điểm dữ liệu

x	x_0	x_1	…	x_n
$f_x = f(x)$	f_0	f_1		f_n

Vấn đề: Tìm một hàm g xấp xĩ với hàm f theo nghĩa:

$$g(x_i) = f(x_i) \quad \text{với } i=0..n.$$

Hàm g được gọi là hàm nội suy của hàm f. Nếu g là hàm đa thức. Ta gọi g là nội suy đa thức.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

4. 1. NỘI SUY TUYẾN TÍNH (LINEAR INTERPOLATION).

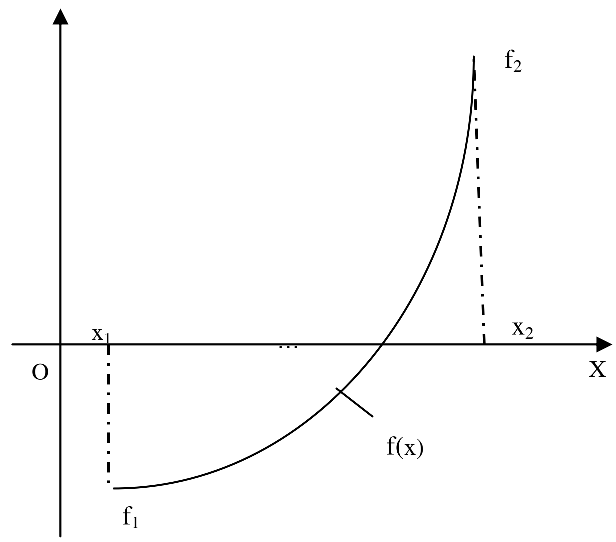
Trường hợp g là đa thức bậc 1 (qua 2 điểm) ta gọi là nội suy tuyến tính.

Bảng dữ liệu trên sẽ là:

x

x	x_0	x_1
$f_x = f(x)$	f_0	f_1

$g(x) = p_1(x) = a_0 + a_1 x.$



Ta có:

$f_1 = a_0 + a_1 x_0$

$f_2 = a_0 + a_1 x_1$

Giải Hệ Phương trình trên ta được:

$$a_0 = \frac{x_1 f_0 - x_0 f_1}{x_1 - x_0}$$

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

Sai số $e(x) = ½ (x - x_0)(x - x_1) f''(\xi)$, $x_0<\xi<x_1$.

4. 2. NỘI SUY LAGRANGE.

Trường hợp g là đa thức bậc n (qua n + 1 điểm). Giả sử nội suy đa thức g(x) có dạng:

$g(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n$,

trong đó $g(x_i) = f(x_i) = f_i$ với i=0..n.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Lagrange chọn hàm Nội suy g(x) có dạng =

$$g(x) = \sum_i L_i(x) f_i$$

trong đó:

$$L_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x = x_i, \\ 0 \text{ trái lại} \end{cases}$$

Định nghĩa trên tương đương:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ trái lại} \end{cases}$$

Theo định nghĩa, ta có:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1}).....(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)....(x_i-x_n)}$$

Nhận xét.

Với n =1, nội suy Lagrange chính là nội suy tuyến tính. Thật vậy.

$g(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1$ với:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)}$$

Suy ra:

$$g(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} + \frac{x_1 f_0 - x_0 f_1}{x_1-x_0} x$$

Sai số $e(x) = L(x) f^{(n+1)}(\text{"}(\xi)$, $x_0 < \xi < x_n$.

$$L\ (x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1}).....(x-x_n)}{(n+1)!}$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

4. 3. NỘI SUY NEWTON TIẾN.

Giả sử các điểm có khỏang cách đều nhau. Các điểm dữ liệu được ký hiệu (x_i , f_i), trong đó $f_i = f(x_i)$. Để định nghĩa nội suy Newton tiến , ta cần các định nghĩa sau:

$$\Delta^0 f_i = f_i \qquad \text{(Sai phân tiến bậc 0)} \qquad (4.3.1)$$

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \qquad \text{(Sai phân tiến bậc 1)} \qquad (4.3.2)$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \qquad \text{(Sai phân tiến bậc 2)} \qquad (4.3.3)$$

.

.

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i \qquad \text{(Sai phân tiến bậc k)} \qquad (4.3.4)$$

Thí dụ 1. Ta có Bảng sai phân tiến sau đây:

I	x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	0.1	0.001	0.200	0.020	0.000	-0.140	0.422
1	0.2	0.201	0.220	0.020	-0.140	0.282	
2	0.3	0.421	0.240	-0.120	0.142		
3	0.4	0.661	0.120	0.022			
4	0.5	0.781	0.142				
5	0.6	0.923					

Hàm nội suy Newton (đa thức) tiến qua k+1 điểm (x_i , f_i), i=0..k, được định nghĩa như sau:

$$g(x) = g(x_0 + sh) = \sum_{n=0}^{k} C_s^n \Delta^k f_0$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Cụ thể, ta có:

- Nội suy tuyến tính:

$$g(x) = g(x_0 + sh) = f_0 + s\Delta f_0$$

- Nội suy đa thức bậc 2:

$$g(x) = g(x_0 + sh) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

Với Thí dụ 1, ta có:

- Nội suy tuyến tính:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0.001 + 0.2\,s = 0.001 + 0.2(x - x_0)/0.1 \\ &= 0.001 + 0.2(x - 0.1)/0.1 \\ &= -0.1999 + 2x \end{aligned}$$

- Nội suy đa thức bậc 2:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0.001 + 0.2\,s + 0.02\,s(s-1)/2 \\ &= 0.001 + 0.2(x-0.1)/0.1 + 0.01(x-0.1)(x-0.1-1)/0.01 \\ &= -0.1999 + 2x + (x^2 - 1.2x + 0.11) \\ &= -0.0899 + 0.8x + x^2 \end{aligned}$$

Sai số của nội suy Newton tương tự với sai số của nội suy Lagrange:

Sai số $e(x) = L(x)f^{(n+1)}(\text{"}(\xi)$, $x_0<\xi<x_n$.

$$L(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots\ldots(x-x_n)}{(n+1)!}$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

4. 4. NỘI SUY NEWTON LÙI.

Tương tự như định nghĩa cho nội suy Newton tiến, các điểm có khỏang cách đều nhau, được ký hiệu (x_i , f_i), trong đó $f_i = f(x_i)$. Để định nghĩa nội suy Newton lùi, ta cần các định nghĩa sau:

$$\nabla^0 f_i = f_i \qquad \text{(Sai phân lùi bậc 0)} \qquad (4.4.1)$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \qquad \text{(Sai phân lùi bậc 1)} \qquad (4.4.2)$$

$$\nabla^2 f_i = \Delta f_i - \Delta f_{i-1} \qquad \text{(Sai phân lùi bậc 2)} \qquad (4.4.3)$$

.

.

$$\nabla^k f_i = \Delta^{k-1} f_i - \Delta^{k-1} f_{i-1} \qquad \text{(Sai phân lùi bậc k)} \qquad (4.4.4)$$

Lấy lại Thí dụ 1. Ta có Bảng sai phân lùi sau đây:

i	x_i	$f(x_i)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$	$\nabla^5 f$
0	0.1	0.001					
1	0.2	0.201	-0.200				
2	0.3	0.421	-0.220	0.020			
3	0.4	0.661	-0.240	0.020	0.000		
4	0.5	0.781	-0.120	-0.120	0.140	-0.140	
5	0.6	0.923	-0.142	0.022	-0.142	0.282	-0.422

Hàm nội suy Newton (đa thức) lùi từ điểm $x=x_j$, … $x=x_{j-k}$ được định nghĩa như sau:

$$g(x) = g(x_j + sh) = \sum_{n=0}^{k} C_{s+n-1}^{n} \nabla^k f_j$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Cụ thể, ta có:

- Nội suy tuyến tính:

$$g(x) = g(x_j + sh) = f_j + s\nabla f_j$$

- Nội suy đa thức bậc 2:

$$g(x) = g(x_j + sh) = f_j + s\nabla f_j + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_j$$

Với Thí dụ 1, ta có:

- Nội suy tuyến tính, với j=3 ; x_j = 0.4, f_3 = 0.661; ∇f_3 = – 0.240

$$\begin{aligned} g(x) &= 0.661 - 0.240\, s \\ &= 0.661 - 0.240\,(x - 0.4)/0.1 \\ &= 0.661 - 2.4\,(x - 0.4) \\ &= 1.621 - 2.4\,x \end{aligned}$$

- Nội suy đa thức bậc 2, với j=3 ; x_j = 0.4, f_3 = 0.661; ∇f_3 = – 0.240, $\nabla^2 f_3$ = 0.020

$$\begin{aligned} g(x) &= 0.661 - 0.240\, s + s(s+1)\,\nabla^2 f_3 / 2 \\ &= 0.661 - 0.240\,(x - 0.4)/0.1 + 0.01(x - 0.4)\,(x - 0.4 + 1)/0.01 \\ &= 0.661 - 2.4\,(x - 0.4) + (x - 0.4)\,(x - 0.4 + 1) \\ &= 1.621 - 2.4\,x + (x^2 + 0.2\,x - 0.24) \\ &= 1.381 - 2.2\,x + x^2 \end{aligned}$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

4.5. BÀI TẬP.

1. Cho bảng Dữ liệu sau:

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	0
1	2	0.301
2	3	0.477
3	4	0.602

a. Tính nội suy tuyến tính và nội suy Lagrange trong trường hợp n=1, 2,3.

b. Lập bảng sai phân và tính nội suy Newton trong trường n=1, 2,3.

2. Cho bảng Dữ liệu sau:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.1	0.997
1	0.3	0.977
2	0.5	0.938
3	0.7	0.881

a. Tính nội suy tuyến tính qua 2 điểm i=0, 1
b. Tính nội suy Lagrange trong trường hợp n=1, 2,3.
c. Lập bảng sai phân và tính nội suy Newton tiến trong trường n=1, 2,3.

3. Cho hàm số f định nghĩa như sau:

$$F(x) = 3x^3 + 5x - 1.$$

a. Tính nội suy tuyến tính qua 2 điểm $x_0 = 1$ và $x_1 = 2$.
b. Tính nội suy Lagrange trong trường hợp n=1, 2,3, với $x_0 = 1$, h=0.2.
c. Lập bảng sai phân và tính nội suy Newton tiến trong trường hợp n=1, 2,3. với $x_0 = 1$, h=0.2.
d. Tính sai số tại x =1.3.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

CHƯƠNG 5. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN SỐ

Mục đích trong chương này là dùng phương pháp số để tính tích phân.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

trong đó hàm f(x) được cho dưới dạng bảng hay dạng giải tích.

Phương pháp số (tính gần đúng) dựa trên đa thức nội suy P_n của f.

5.1. Phương pháp hình thang.

TRƯỜNG HỢP n=2.

Để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$ ta thay hàm số dưới dấu tích phân f(x) bằng đa thức nội suy Newton tiến bậc một (đi qua hai điểm A(a,f(a)) và B(b,f(b)) xuất phát từ nút trùng với cận dưới a,và có:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$

Để tính tích phân xác định ở vế phải, ta biến đổi số:

x=a + (b-a)t

Khi đó : dx=(b-a)dt, t biến thiên từ 0 đến 1, và :

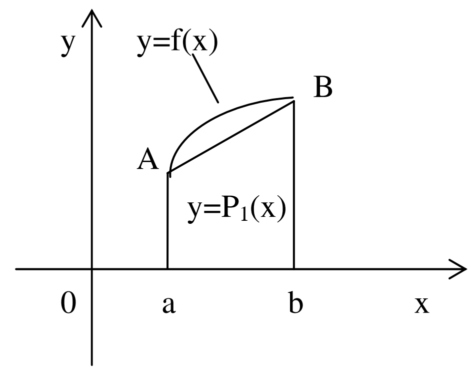
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx = \int_0^1 (y_0 + t\Delta y_0)(b-a)dt = (b-a)\left(y_0 t + \Delta y_0 \frac{t^2}{2} \right)\Bigg|_{t=0}^{t=1}$$

trong đó y_0=f(a) ; $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(b) - f(a)$

Vậy $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$ **(5.1)**

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Về mặt hình học, (5.1) có nghĩa là diện tích hình thang cong $\overset{\frown}{aABb}$ ($\overset{\frown}{AB}$ là cung đường cong y=f(x) đi qua hai điểm A và B) được thay xấp xỉ bằng diện tích hình thang phẳng $\overline{aABb}$ ($\overline{AB}$ là dây cung y=P_1(x) nối hai điểm A và B). Nói khác đi, đường cong y=f(x) nối hai điểm A và B được thay xấp xỉ bằng đường thẳng y=P_1(x) đi qua hai điểm A và B. (Hình 1)



Hình 1

Công thức (5.1) là công thức hình thang, trong trường hợp n=2.

Để xác định sai số cho công thức (5.1) trên, chúng ta giả thiết rằng hàm số y=f(x) có đạo hàm cấp hai liên tục trên [a,b].

Xem R là hàm số của h=b-a :

$$R = R(h) = \int_a^{a+h} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + f(a+h)\right]$$

Đạo hàm hai lần công thức trên theo h, ta có:

$$R'(h) = \frac{1}{2}\left[f(a) + f(a+h)\right] - \frac{h}{2} f'(a+h)$$

và $$R''(h) = -\frac{h}{2} f''(a+h)$$

Ngoài ra: R(0)=0; R’(0)=0.

Từ đó áp dụng định lý trung bình thứ hai của tích phân xác định, chúng ta nhận được:

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{2}\int f''(a+t)dt =$$

$$= -\frac{1}{2} f''(c_1)\int_0^h tdt = -\frac{h^2}{4} f''(c_1)$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

với $c_1 \in (a,a+h)$

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{4}\int_0^h t^2 f''(c_1)dt =$$

$$= -\frac{1}{4} f''(c_1)\int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12} f''(c_1);\ c \in (a, a+h)$$

Tóm lại, công thức hình thang, cho trường hợp chia hai khỏang (n=2):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right] - \frac{h^3}{12} f''(c) \qquad \textbf{(5.2)}$$

với h=b-a và $c \in (a,b)$

TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT n.

Trong trường hợp tổng quát, ta có thể chia đoạn [a, b] thành n khỏang (có thể không bằng nhau, n là số nguyên, dương, chẳn hoặc lẻ đều được):

$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$

có độ dài là $h=\dfrac{b-a}{n}$ bởi các điểm chia $x_0=a$; $x_i = a + ih$ $(i=\overline{1,n-1})$;$x_n=b$

Ký hiệu: $y_i=f(x_i)$ $(i=\overline{0,n})$, khi đó: $I = \int_a^b f(x)dx$ có thể được tính như sau:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \qquad \textbf{(5.3)}$$

Đối với mỗi tích phân xác định ở vế phải của (5.3), ta tính gần đúng bằng công thức hình thang (5.1), ta nhận được:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_0) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

hay:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) \qquad \textbf{(5.4)}$$

Công thức **(5.4)** được gọi là công thức hình thang trong trường hợp tổng quát.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Nếu hàm số y=f(x) có đạo hàm cấp hai liên tục trên [a,b] thì do (5.2), sai số của công thức hình thang tổng quát là :

$$R = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{i-1} + y_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2}\left(y_{i-1} + y_i\right)\right) = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(c_i) \qquad \textbf{(5.5)}$$

với $c_i \in (x_{i-1},x_i)$

Xét trung bình cộng: $\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(c_i)$. Rất rõ gồm giữa giá trị nhỏ nhất m_2 và giá trị lớn nhất M_2 của đạo hàm cấp hai $f''(x)$ trên [a,b], nghĩa là:

$$m_2 \le \mu \le M_2$$

Vì theo giả thiết, $f''(x)$ liên tục trên [a,b] nên nó nhận mọi giá trị trung gian giữa m_2 và M_2 . Do đó,tìm được điểm c ∈ [a,b] sao cho μ= $f''(c)$,hay :

$$\sum_{i=1}^{n} f''(c_i) = n\mu = nf''(c)$$

Thay vào (5.5), nhận được :

$$R = -\frac{nh^3}{12}f''(c) = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(c), c \in [a,b] \qquad \textbf{(5.6)}$$

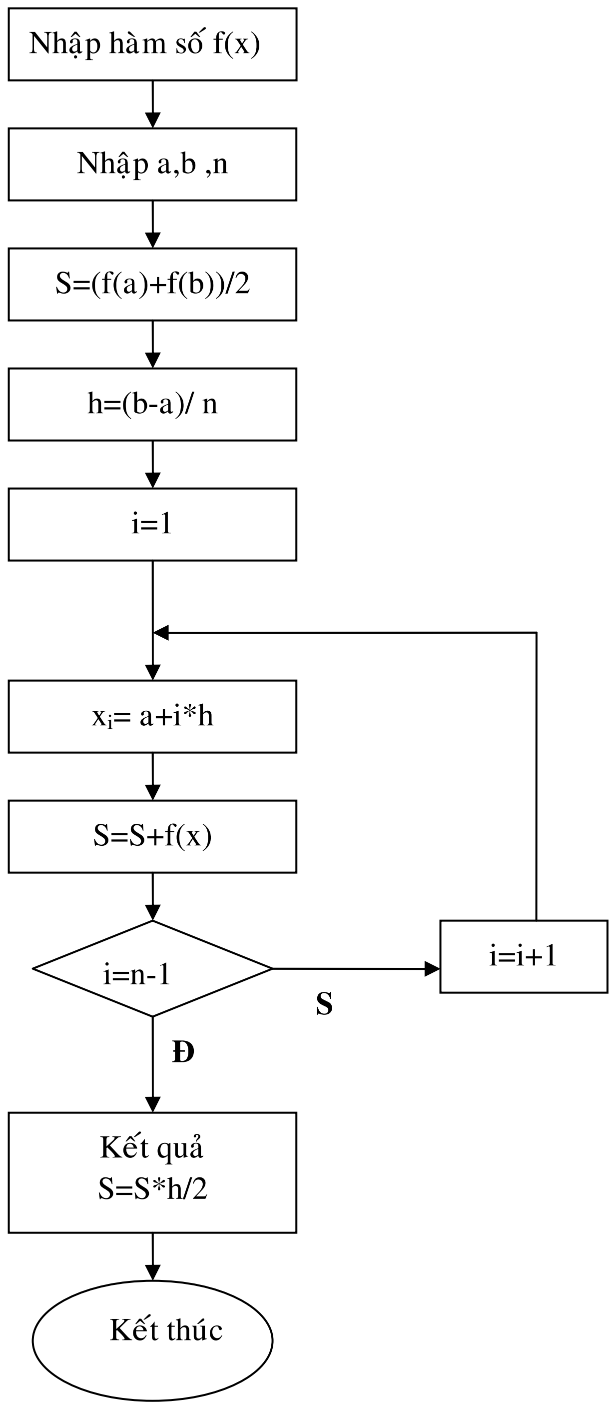
Tóm lại, với giả thiết hàm số y=f(x) có đạo hàm cấp hai liên tục trên [a,b] và chia đoạn lấy tích phân [a,b] thành n đoạn bằng nhau, có độ dài h=$\frac{b-a}{2}$, ta có công thức hình thang tổng quát sau :

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) - \frac{(b-a)h^2}{12}f''(c) \qquad \textbf{(5.7)}$$

với c ∈ [a,b]

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Thuật toán hình thang



Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

THÍ DỤ 1. Tính gần đúng tích phân sau đây **I=** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

Trường hợp n=10 và h= 0.1, ta có Bảng kết quả sau:

I	x_i	y_{2j-1}	y_{2j}
0	0		y_0=1,00000
1	0,1	0,90909	
2	0,2		0,83333
3	0,3	0,769223	
4	0,4		0,71429
5	0,5	0,66667	
6	0,6		0,62500
7	0,7	0,58824	
8	0,8		0,55556
9	0,9	0,52632	
10	1,0		y_{10}=0,50000
Σ		δ_1 =3,45955	δ_2=2,72818

5.2. Phương pháp SimpSon1/3

TRƯỜNG HỢP n=2.

Để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$, chúng ta có thể chia [a,b] thành hai đoạn bằng nhau bởi các điểm chia x_0=a;x_1=a+$\frac{b-a}{2}$= a+h ; x_2 =b=a+2h , và thay hàm số dưới dấu tích phân f(x) bằng đa thức nội suy Newton tiến bậc hai (đi qua ba điểm A(x_0 =a,y_0=f(x_0)), C(x_1=a+h,y_1=f(x_1)) , B(x_2=a+2h,y_2=f(x_2)) có hoành độ cách đều nhau) xuất phát từ nút trùng với cận dưới a=x_0 ,và ta có : $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Để tính tích phân xác định ở vế phải, ta biến đổi $x=x_0+ht$. Khi đó $dx=hdt$, t biến thiên từ 0 đến 2 và:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_0^2 \left(y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 \right) hdt$$

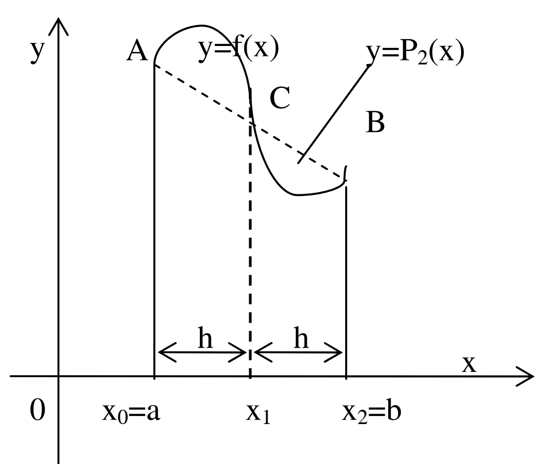
$$= h\left(y_0 t + \Delta y_0 \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \right) \Bigg|_{t=0}^{t=2}$$

trong đó $\Delta y_0 = y_1 - y_0$;

$\Delta^2 y_0 = y_1 - y_0 = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$

Vậy $$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 \right) \qquad \textbf{(5.8)}$$

Về mặt hình học, (5.8) có nghĩa là diện tích hình thang cong aACBb (ACB là cung đường cong $y=f(x)$ đi qua 3 điểm A, C, B được thay xấp xỉ bằng hình thang cong AACBb (ACB là cung parabol $y=P_2(x)$ đi qua ba điểm A,C và B). Nói khác đi, đường cong $y=f(x)$ đi qua ba điểm A, C và B được thay xấp xỉ bằng đường parabol $y=P_2(x)$ đi qua ba điểm A, C và B. (Hình 2). Công thức (5.8) được gọi là công thứ SimpSon1/3 .



Hình 2.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

$$R = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Để xác định sai số, giả thiết rằng hàm số y=f(x) có đạo hàm cấp 4 liên tục trên [a,b]. Cố định điểm giữa $x_1$và xem R là hàm số của h (h$\geq$ 0) :

$$R = R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_1-h) + 4f(x_1) + f(x_1+h)\right)$$

Đạo hàm ba lần theo h đẳng thức trên, ta có :

$$R'''(h) = -\frac{h}{3}\left(f'''(x_1+h) - f'(x_1-h)\right)$$

Áp dụng công thức Larange đối với $f'''(x)$,ta có :

$$R'''(h) = -\frac{2h^2}{3} f^{(4)}(c_3), c_3 \in (x_1-h, x_1+h)$$

Ngoài ra: R(0)=0;R'(0)=0; $R''(0) = 0$. Từ đó, chúng ta áp dụng định lý trung bình thứ hai của hai tích phân xác định, ta nhận được:

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t)dt = -\frac{2}{9}h^3 f^{(4)}(c_2)dt, c_2 \in (x_1-h, x_1+h)$$

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{18}h^4 f^{(4)}(c_1)dt, c_1 \in (x_1-h, x_1+h)$$

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(c)dt, c \in (x_1-h, x_1+h)$$

Tóm lại: Với giả thiết hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp bốn liên tục trên [a, b], ta có công thức SimpSon1/3 sau:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(c)dt \qquad \textbf{(5.9)}$$

với h=$\frac{b-a}{2}$, c$\in (a,b)$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT n.

Để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$, ta chia [a, b] thành n=2m đoạn bằng nhau (nghĩa là n là số nguyên, dương, và chẳn): $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, …, $[x_{2m-2},x_{2m-1}]$, $[x_{2m-1},x_{2m}]$, có độ dài là $h=\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{2m}$ bởi các điểm chia : $x_0=a$, $x_1=a+ih$ $(i=\overline{1,2m-1})$, $x_n=x_{2m}=b$.

Ký hiệu: $y_i=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$, khi đó, ta có:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \qquad (5.10)$$

Đối với mỗi tích phân xác định ở vế phải của (5.10), ta tính gần đúng bằng công thức SimpSon1/3 (5.8). Ta nhận được:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_1 + 4y_2 + y_{23}\right) + \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{h}{3}\left(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_{2m}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}\right) + \ldots +\right.$$
$$\left. + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}\right)\right]$$

hay

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_{2m}\right) + 4\partial_1 + 2\partial_2\right] \qquad \mathbf{(5.11)}$$

trong đó : $\partial_1 = y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}; \partial_2 = y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}$

Công thức (5.11) được gọi là công thức SimpSon1/3 tổng quát.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Nếu hàm y= f(x) có đạo hàm cấp bốn liên tục trên [a,b] thì do (1.9), sai số của công thức SimpSon1/3 tổng quát là :

$$R = \int_{x_0}^{x_{2m}} f(x)dx - \frac{h}{3}\sum_{k-1}^{m}\left(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}\right)$$
$$= -\frac{h^5}{90}\sum_{k-1}^{m} f^{(4)}(c_k) \quad \textbf{(5.12)}$$

với $c_k \in (x_{2k-2}, x_{2k})$.

Lập luận tương tự trường hợp công thức hình thang tổng quát, vì $f^{(4)}(x)$, theo giả thiết, liên tục trên [a,b], nên tìm được điểm c∈[a,b] sao cho :

$$f^{(4)}(c) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f^{(4)}(c_k)$$

Thay vào (1.12), nhận được :

$$R = -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(c) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(c), c \in [a,b] \quad \textbf{(1.13)}$$

Tóm lại, với giả thiết hàm số y=f(x) có đạo hàm cấp bốn liên tục trên [a,b] và chia đoạn lấy tích phân [a,b] thành n=2m đoạn bằng nhau, có độ dài h= $\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$ ta có công thức SimpSon1/3 tổng quát sau :

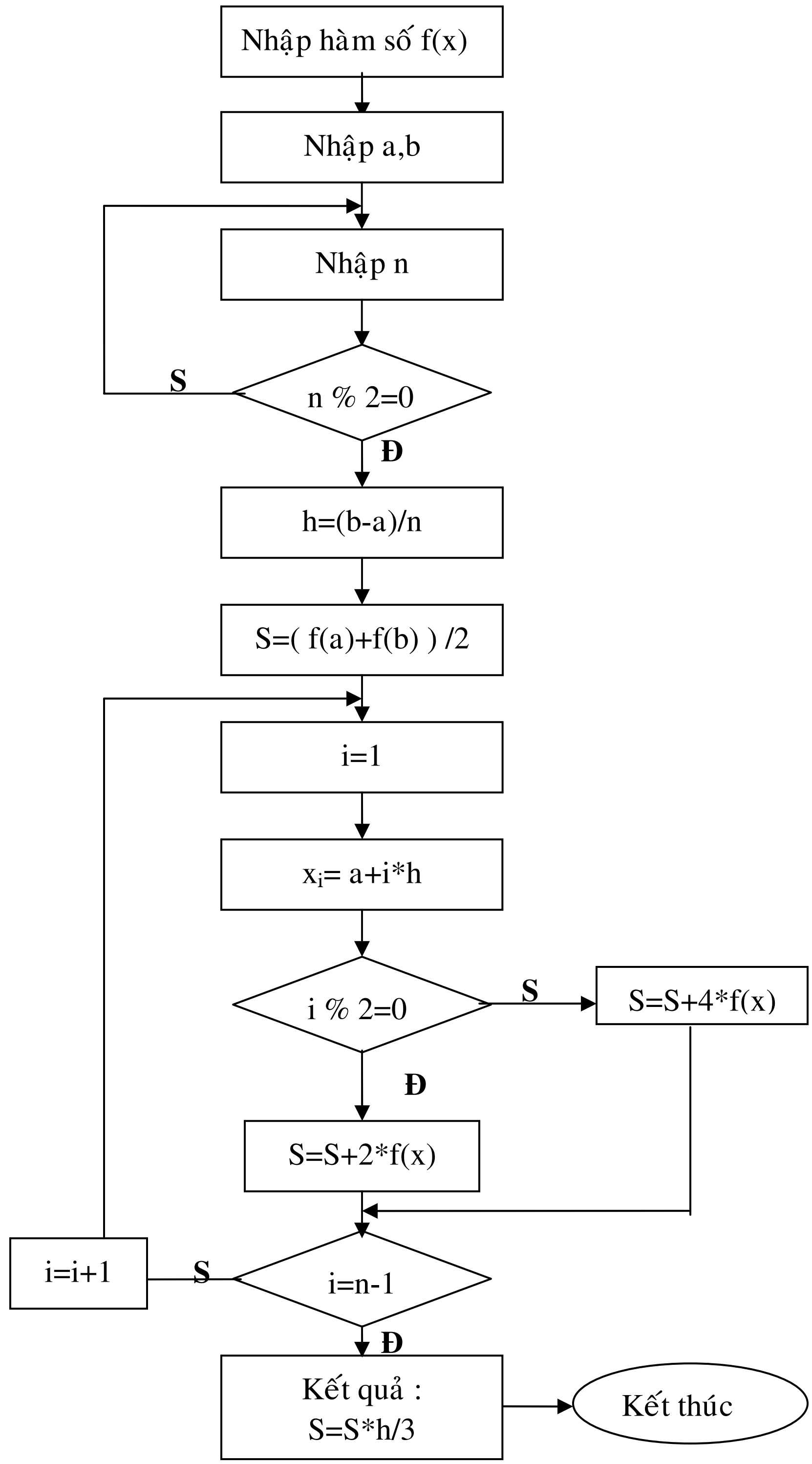
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_{2m}\right) + 4\partial_1 + 2\partial_2\right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(c) \quad \textbf{(1.14)}$$

c ∈[a,b]

trong đó : $\partial_1 = y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}; \partial_2 = y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}$.

Thuật toán SimpSon1/3 được mô tả như sau:

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;


Nhập hàm số f(x)
Nhập a,b
Nhập n
n % 2=0
S
Đ
h=(b-a)/n
S=(f(a)+f(b)) /2
i=1
x_i= a+i*h
i % 2=0
S
S=S+4*f(x)
Đ
S=S+2*f(x)
i=i+1
S
i=n-1
Đ
Kết quả :
S=S*h/3
Kết thúc

Nhận xét.

Từ (5.7) và (5.14), cho thấy công thức SimpSon1/3 tổng quát có độ chính xác cao hơn công thức hình thang tổng quát khi có cùng bước h như nhau.

Trước khi tính tích phân xác định, ta sẽ kiểm tra hàm số y=f(x) có liên tục trên [a,b] không, nếu hàm số y=f(x) không liên tục trên [a,b] mà bị chặn tại một điểm nào đó trong khoảng [a,b] thì ta sẽ không tính tích phân xác định của hàm y=f(x) trên [a,b].

Tính sai số của công thức SimpSon1/3 tổng quát (5.14) đòi hỏi phải biết $f^{(4)}(x)$, nghĩa là phải tính đạo hàm cấp bốn của hàm số f(x). Nếu tính như vậy thì ta sẽ có thêm một sai số trong khi tính đạo hàm . Do đó, trong thực hành người ta thường xác định gần đúng sai số của công thức SimpSon1/3 tổng quát như sau :

Giả sử trên [a, b], đạo hàm $f^{(4)}$ ít biến đổi, do (5.14), nhận được biểu thức gần đúng của sai số phải tìm là: $R=Mh^4$, trong đó M xem là hằng số.

Gọi I_n và I_{2n} là giá trị gần đúng của I= $\int_a^b f(x)dx$ nhận được từ công thức SimpSon1/3 tổng quát với bước h và $\frac{h}{2}$,ta có:

$$I=I_n + Mh^4$$

$$I=I_{2n} + M\left(\frac{h}{2}\right)^4$$

Từ đó : $I_{2n} - I_n = \frac{15}{16}Mh^4$ và $|I - I_{2n}| = \frac{1}{15}|I_{2n} - I_n|$

Lập luận hoàn toàn tương tụ đối với công thức hình thang tổng quát, với giả thiết đạo hàm $f''(x)$ ít biến đổi trên [a, b], ta có công thức thực hành tính sai số:

$|I - I_{2n}| = \frac{1}{3}|I_{2n} - I_n|$. Trong đó I_n và I_{2n} là giá trị gần đúng của I=$\int_a^b f(x)dx$ nhận được từ công thức hình thang tổng quát với bước h và $\frac{h}{2}$.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Như vậy, trong khi thực hành sai số của công thức hình thang được tính bằng:

$$\Delta \approx \frac{1}{3}\left|I_{2n} - I_n\right|$$

Và sai số của công thức SimpSon1/3 được tính bằng :

$$\Delta \approx \frac{1}{15}\left|I_{2n} - I_n\right|$$

Khi tính tích phân gần đúng với một sai số cho trước, ta tính tích phân theo công thức chọn trước với một bước h nào đó, sau đó tính lại theo công thức đó với bước h/2 (tức tăng n gấp đôi). Ký hiệu I_n và I_{2n} là các kết quả tương ứng. Nếu $\left|I_n - I_{2n}\right| < \varepsilon$ (ε là sai số) thì kết quả là I_{2n} và dựa vào đó ta cũng xác định được số bước lặp. Nếu $\left|I_n - I_{2n}\right| \geq \varepsilon$ thì quá trình được lặp lại với bước h/4. Bước h đầu tiên thường được chọn cỡ $\sqrt[m]{\varepsilon}$, trong đó m=2 với cong thức hình thang và m=4 với công thức Simpon1/3 (vì trong công thức sai số của các công thức đó có chứa h^2 và h^4 tương ứng.

Khi tính tích phân với số bước lặp cho trước: nếu số bước lặp ta cho quá nhỏ thì sai số gần đùng cho ra sẽ rất lớn. Ngược lại với số bước lặp lớn thì sai số nhỏ.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

5.3. Bài tập.

1. Tính tích phân của các hàm sau đây theo 3 phương pháp hình thang với n=2,4,8 Simpson 1/3:
   a. $3x^3 + 5x - 1$ trên [0,1]

   b. 1/(2+x) trên [0, 1]

2. Cho bảng Dữ liệu sau:

I	x_i	$f(x_i)$
0	0	0.9162
1	0.25	0.8109
2	0.5	0.6931
3	0.75	0.5596
3	1	0.4055

Tính tích phân trên [0, 1] theo 3 phương pháp hình thang với n=2,4,8 Simpson 1/3.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

CHƯƠNG 6. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU.

6.1. Mở đầu.

Phần lớn, trong thực nghiệm, ta chỉ có các dãy số liệu dưới dạng Bảng (nếu được nội suy hay ngoại suy dưới dạng biểu thức), chẳng hạn như là ảnh hưởng của chiều cao (dãy số liệu y, phụ thuộc), theo chế độ dinh dưởng (dãy số liệu x, độc lập), hay ta có số liệu về chi tiêu theo thu nhập từng như Bảng Dữ liệu sau đây:

BẢNG 1. Chi tiêu của cá nhân theo Thu nhập hằng năm.

Năm	Thu nhập (x)	Chi tiêu (Y)
1970	122.80	111.00
1971	124.30	114.40
1972	134.80	121.50
1973	144.10	127.70
1974	142.20	125.80
1975	143.30	124.90
1976	142.50	125.30
1977	140.80	124.60
1978	150.70	131.60
1979	159.10	137.60
1980	161.20	137.00
1981	157.30	136.60
1982	157.60	137.60
1983	161.30	143.10
1984	164.80	145.40

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Bài tóan được đạt ra như sau:

Cho đọan [a, b], (a, b hữu hạn), hàm **y=f(x)** được cho dưới dạng bảng hay dưới dạng biểu thức. Ta muốn biểu diễn gần đúng hàm f(x) dưới dạng một tổ hợp:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x)$$

Hãy tìm các Hệ số a_i (i=0..n) sao cho Φ_i (x) là gần nhất (theo phương sai) với f(x).

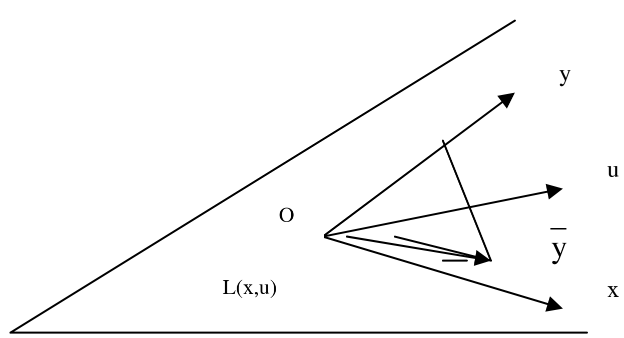
Phép xấp xĩ như vậy được gọi là Phương pháp Bình phương tối thiểu.

Ý nghĩa hình học của Phương pháp Bình phương tối thiểu.

Ký hiệu:

- $x = (x_1, \ldots., x_n)$.
- $y = (y_1, \ldots., y_n)$.
- u = (1, …1) vectơ đơn vị.

Khi x và u không đồng thời tuyến tính, sẽ xác định duy nhất một siêu phẳng L(x, u). Phương pháp Bình phương tối thiểu là xác định một vectơ $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots., \bar{y}_n)$.sao cho khỏang cách Euclide giữa y và $\bar{y}$ là ngắn nhất. Theo một phép trực giao của y trên siêu phẳng L(x,u) (xem Hình. 1)



Hình. 1

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

6.2. Phương pháp bình phương tối thiểu. (Least – Squares Method).

$$Min \sum_{1}^{n} (y_i - \overline{y_i})^2 \qquad (6.1)$$

trong đó:

- y_i = Giá trị của y cho quan sát thứ i
- $\overline{y}_i$ = Giá trị dự kiến của y cho quan sát thứ i

TRƯỜNG HỢP $\overline{y} = b_0 + b_1 x$:

$$\Rightarrow Min \sum_{1}^{n} [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2$$

Đặt : $$f(x) = \sum_{1}^{n} [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2$$

$$= \sum_{1}^{n} y_i^2 - (b_0 + b_1 x_i)^2 - 2 y_i (b_0 + b_1 x_i)]$$

Lấy vi phân theo 2 biến b_0 và b_1 ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial b_0} = \sum_{1}^{n} [-2 y_i + 2(b_0 + b_1 x_i)] = 2[-\sum_{1}^{n} y_i + nb_0 + b_1 \sum_{1}^{n} x_i]$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = -2\sum_{1}^{n} x_i y_i + 2(b_0 + b_1 x_i)x_i = 2[-\sum_{1}^{n} x_i y_i + b_0 \sum_{1}^{n} x_i + b_1 \sum_{1}^{n} x_i^2]$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Bài tóan (6.1) tương đương với Bài tóan $\partial \mathbf{f} = \mathbf{0}$
Suy ra, ta có Hệ Phương trình:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum_1^n x_i = \sum_1^n y_i \\ b_0 \sum_1^n x_i + b_1 \sum_1^n x_i^2 = \sum_1^n x_i y_i \end{cases} \qquad (6.2)$$

Giải Hệ phương trình trên ta được:

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{n\sum_1^n x_i y_i - \sum_1^n x_i \sum_i^n y_i}{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2} \\ b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x} \end{cases} \qquad (6.3)$$

Với cách tính tương tự như trên ta có thể mở rộng cho trường hợp cho trường hợp tổng quát để tính b_i (i=0..n).

6.3. Áp dụng Phương pháp bình phương trong Bài tóan dự báo theo Hồi qui Tuyến tính.

Với số liệu ở Bảng 1, Hàm chi tiêu hằng năm của cá nhân, y, có thể xấp xĩ thành một Hàm tuyến tính theo thu nhập cá nhân hằng năm x, nghĩa là

$$y = b_0 + b_1 x + u.$$

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

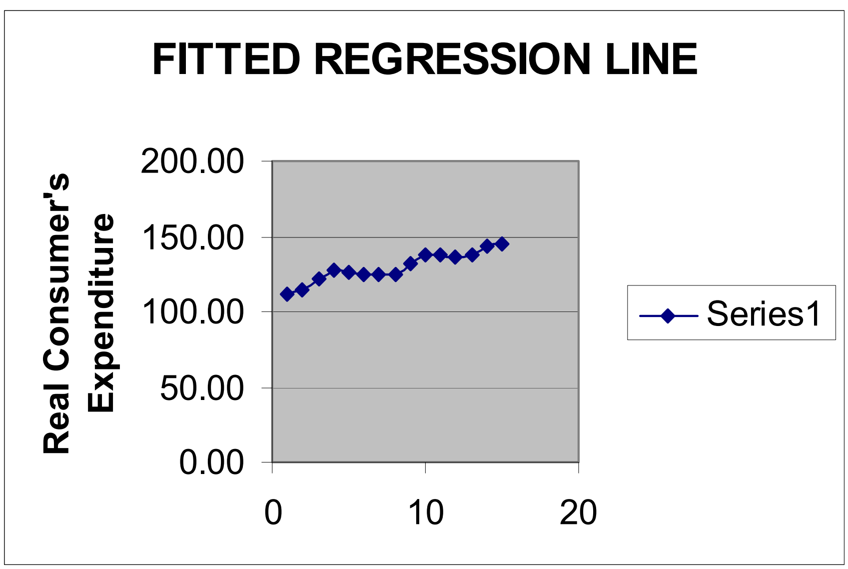
trong đó b_0 và b_1 là hằng (thông số) và u là dao động (hay sai số). b_0 và b_1 không thể tìm thấy do quan sát, tuy nhiên b_0 và b_1 được tính từ Bảng 1, theo công thức (6.3). (Ta có thể sử hàm trong Excel để tính:

- @INTERCEPT (D_array, IND_array) để tính b_0
- @SLOPE (D_array, IND_array) để tính b_1

Với thí dụ ỡ Bảng 1. ta tính được :

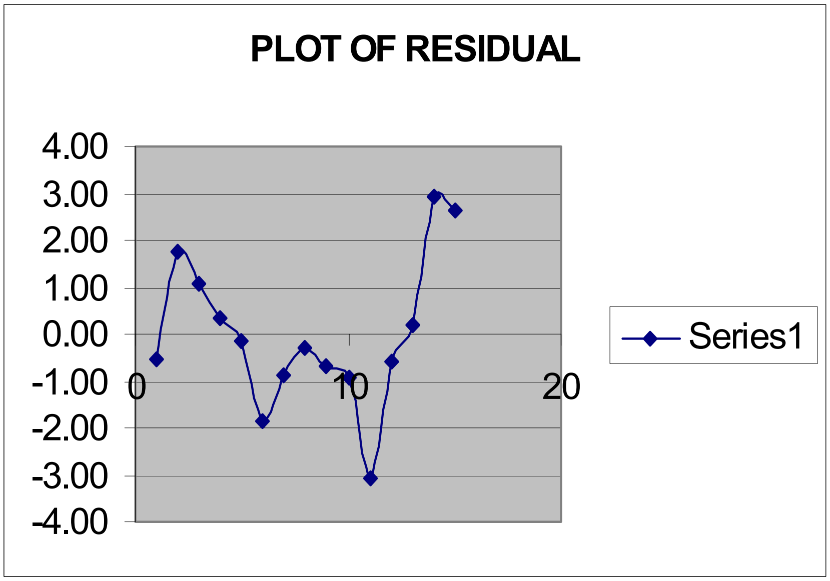
- $b_0 = 20.1806$
- $b_1 = 0.7438$

Ngòai ra có thể sử dụng (Excel, hoặc các phần mềm thống kê), ta có thể vẽ đường biểu diễn của Hàm hồi qui, như theo hình vẽ sau.



Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

Và đường thặng dư (sai số):



Một cách đơn giản ta có thể sử dụng hồi qui tuyến tính để dự báo. Với thí dụ ở Bảng 1. Ta có Hàm dự báo (hồi qui) tuyến tính là

$$\bar{y} = 20.1806 + 0.7438\ x$$

Ta có thể tính cho chi tiêu cho năm tiếp theo nếu thu nhập x = 170.

$$\bar{y} = 20.1806 + 0.7438 * 170 = 146.6266$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có thể mở rộng cho dạng hàm như hàm mủ,(hồi qui theo hàm mủ), hàm logarit (hồi qui theo hàm loga), hàm đa thức (hồi qui bội),..

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

6.4. Bài tập.

1. Cho Bảng Dữ liệu sau:

	X	Y
1970	122.80	111.00
1971	124.30	114.40
1972	134.80	121.50
1973	144.10	127.70
1974	142.20	125.80
1975	143.30	124.90
1976	142.50	125.30
1977	140.80	124.60
1978	150.70	131.60
1979	159.10	137.60

Tính Y =f(X) với X= 150 theo phương pháp hồi qui tuyến tính.

2. Bảng Dữ liệu sau cho biết Chi tiêu hằng năm (Y) theo Thu nhập cá nhân hằng năm (X).

Năm	X	Y
1970	1581.09	1211.89
1971	1614.31	1249.44
1972	1695.90	1313.73
1973	1796.29	1369.31
1974	1811.78	1379.90
1975	1791.78	1383.00
1976	1874.93	1461.32
1977	1962.29	1534.39
1978	2055.40	1597.27
1979	2130.13	1645.31
1980	2165.30	1668.00
1981	2225.78	1697.53
1982	2223.02	1717.07
1983	2268.07	1748.95

Dùng Hồi qui Tuyến tính để dự báo cho chi tiêu năm 1984 với thu nhập là x= 2350

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;

3. Một Nhà phân phối dụng cụ âm nhạc nhận xét rằng nhu cầu mua trống Bass liên quan đến số lần xuất hiện của nhóm Nhạc Rock, Green Shades trong tháng vừa qua, với các số liệu được thu thập như sau:

Nhu cầu mua Trống Bass	Tấn suất xuất hiện trên TV của nhóm Green Shades
3	3
6	4
7	7
5	6
10	8
8	5

3.1. Dùng Hồi qui tuyến tính để tính Hàm dự báo giữa nhu cầu mua Trống và tần suất xuất hiện của nhóm.

3.2. Tính dự báo cho nhu cầu mua Trống nếu tần suất xuất hiện của nhóm là 9 lần trong tháng vừa qua.

Trương Mỹ Dung,
www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung;
Mail= tmdung@fit.hcmuns.edu.vn;
C/c tmdung@az.com.vn;