BÀI GIẢNG XÁC SUẤT

Giảng viên
Vũ Đỗ Huy Cường

Khoa Toán-Tin học
Đại học Khoa học Tự nhiên
vdhuycuong@gmail.com

Mục lục

Chương 1

Phép thử, Biến cố và Xác suất

1.1.1 Phép thử

Định nghĩa 1 (Phép thử ngẫu nhiên (Random experiment))

Là sự thực hiện một số điều kiện xác định (thí nghiệm cụ thể hay quan sát một hiện tượng nào đó), có thể lặp lại nhiều lần kết quả của phép thử ta không xác định trước được.

Ví dụ 1.1. Cho biết kết quả của các phép thử sau

Phép thử ngẫu nhiên	Kết quả
Tung đồng tiền	Mặt sấp, mặt ngửa
Điểm thi kết thúc môn	$\{0, 1, 2, \dots, 10\}$
Nhóm máu của một người	A, B, O, AB

1.1.1 Phép thử

Bài tập:

1.1. Cho biết kết quả của các phép thử sau

Phép thử ngẫu nhiên	Kết quả
Tung xúc xắc	
Kiểm tra giới tính	
Chọn ngày trong tuần	
Xếp loại học sinh	

1.2. Cho biết phép thử tương ứng với các kết quả sau

Phép thử ngẫu nhiên	Kết quả
	Ca 1, Ca 2, Ca 3, Ca 4
	Qua môn, Rớt môn
	Trẻ em, Người lớn
	S, M, L, XL

1.1.2 Biến cố ngẫu nhiên

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.
- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, ω, $(\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).
- Một tập con của không gian mẫu có nhiều biến cố được gọi là biến cố/sự kiện ngẫu nhiên (event).Kí hiệu $A, B, C, \ldots$
- Biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử là biến cố chắc chắn, ký hiệu Ω.
- Biến cố luôn không xảy ra gọi là biến cố không thể có (empty event), kí hiệu $\emptyset$.

1.1.2 Biến cố ngẫu nhiên

Ví dụ 1.2.

Phép thử: Tung một lần đồng xu.

Gọi $\omega_1 =$ "Đồng xu Sấp", $\omega_2 =$ "Đồng xu Ngửa".

Không gian các biến cố sơ cấp

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{S, N\}$$

Ví dụ 1.3.

Phép thử: Gieo một lần con xúc xắc.

Gọi $\omega_i =$ "mặt trên của súc sắc có số chấm = i ".

Không gian các biến cố sơ cấp

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\} = \{1, 2, \ldots, 6\}$$

$$\left.\begin{array}{llll} A = & \{1,3,5\} = & \text{"chấm lẻ"} & \searrow \\ B = & \{2,4,6\} = & \text{"chấm chẵn"} & \rightarrow \\ C = & \{5,6\} = & \text{"chấm > 4"} & \nearrow \end{array}\right. \text{Biến cố ngẫu nhiên}$$

1.1.2 Biến cố ngẫu nhiên

Bài tập

1.3. Tìm không gian biến cố sơ cấp của phép thử sau

a) Gieo hai đồng xu một lúc.

b) Gieo lần lượt hai đồng xu.

1.4. Một nhóm 5 người có 3 nam tên Hùng, Dũng, Trung và 2 nữ tên Thảo, Vân. Chọn ra 2 người để biểu diễn van nghệ.

a) Tìm không gian các biến cố sơ cấp. Có bao nhiêu biến cố sơ cấp?

b) Tìm biểu diễn các biến cố sau theo biến cố sơ cấp:

- A: 2 bạn được chọn toàn là nam.
- B: 2 bạn được chọn toàn là nữ.
- C: 2 bạn được chọn là 1 nam 1 nữ.
- D: 2 bạn được chọn có chữ cái đầu không giống nhau.
- E: 2 bạn được chọn có chữ cái cuối không giống nhau.

1.2. Quan hệ giữa các biến cố

Sự kéo theo

A kéo theo B, ký hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra. Ta còn nói A là biến cố thuận lợi cho B.

Sự tương đương

A tương đương với B, ký hiệu $A = B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra và ngược lại.

Ví dụ 1.4.
Tung một con xúc xắc.

Gọi A_i là biến cố được i chấm ($i = \overline{1,6}$), B là biến cố được số chấm chia hết cho 3, $C =$ "số chấm chẵn", $P_2 =$"số chấm nguyên tố chẵn".

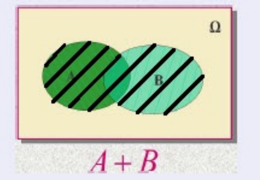
Khi đó ta có: $A_2 \subset C, A_3 \subset B, A_2 \subset P_2, P_2 \subset A_2$ và $A_2 = P_2$.

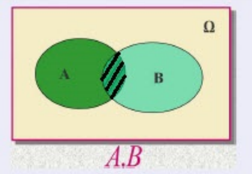
1.3.1 Biến cố tổng và biến cố tích

Biến cố tổng (union) - Biến cố tích (intersection)

Biến cố tổng của A và B, ký hiệu $A + B$ hay $A \cup B$ là biến cố xảy ra nếu A hoặc B xảy ra (có ít nhất một trong hai biến cố xảy ra).

Biến cố tích của A và B, ký hiệu AB hay $A \cap B$, là biến cố xảy ra nếu A và B đồng thời xảy ra.



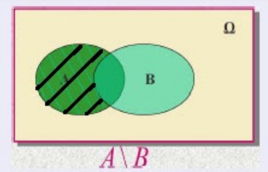


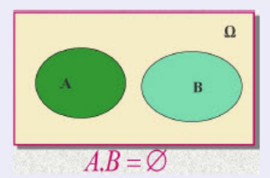
1.3.2 Biến cố hiệu và Biến cố xung khắc

Biến cố hiệu - Biến cố xung khắc

Biến cố hiệu của A và B, ký hiệu $A \setminus B$, là biến cố A xảy ra nhưng B không xảy ra.

A xung khắc với B nếu A và B không đồng thời xảy ra, ký hiệu $AB = \emptyset$. Dãy các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là xung khắc từng đôi một nếu $A_iA_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$.

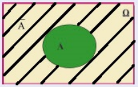




1.3.3 Biến cố bù

Biến cố đối lập (Biến cố bù) (complement)

Biến cố đối lập của A, ký hiệu $\overline{A}$, là biến cố xảy ra khi A không xảy ra và ngược lại, nghĩa là $\begin{cases} A+\overline{A} & =\Omega \\ A\overline{A} & =\emptyset \end{cases}$ hay $\overline{A}=\Omega\setminus A$.



Ta có tính chất sau

$$\begin{aligned} \overline{A+B} &= \bar{A}\bar{B} \\ \overline{AB} &= \overline{A}+\overline{B}. \end{aligned}$$

1.3.3 Biến cố bù

Hệ đầy đủ các biến cố (exhaustive)

Dãy n các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu:

$$A_iA_j = \emptyset,\ \forall i \neq j, i, j = \overline{1, n}$$
$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$$

1.3.3 Biến cố bù

Ví dụ 1.5.

Có 3 bệnh nhân phỏng. Đặt các biến cố:

$$A_i = \text{"Bệnh nhân } i \text{ tử vong"}, i = 1, 2, 3.$$

Hãy biểu diễn theo A_i các biến cố sau:

a) $A =$ "Có duy nhất một bệnh nhân tử vong".
b) $B =$ "Có ít nhất một bệnh nhân tử vong".
c) $C =$ "Cả ba bệnh nhân đều sống sót".
d) $D =$ "Một trong hai bệnh nhân thứ 1 hoặc thứ 2 tử vong".

Giải

a) $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.
b) $B = A_1 + A_2 + A_3$.
c) $C = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 = \Omega \setminus B = \overline{A_1 + A_2 + A_3}$.
d) $D = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2$

1.3.3 Biến cố bù

Bài tập 1.5.
Có 3 bệnh nhân phỏng. Đặt các biến cố:

$$A_i = \text{"Bệnh nhân } i \text{ tử vong"}, i = 1, 2, 3.$$

Hãy biểu diễn theo A_i các biến cố sau:

a) $A =$ "Bệnh nhân thứ 2 tử vong".
b) $B =$ "Chỉ có bệnh nhân thứ 2 tử vong".
c) $C =$ "Một trong 2 bệnh nhân thứ 1 hoặc thứ 3 tử vong".
d) $D =$ "Có nhiều nhất hai bệnh nhân tử vong".
e) $E =$ "Có ít nhất hai bệnh nhân tử vong".
f) $F =$ "Cả 3 bệnh nhân đều tử vong".
g) $G =$ "Bệnh nhân thứ 3 sống sót".
h) $H =$ "Một trong 2 bệnh nhân thứ 1 hoặc thứ 2 sống sót".
i) $I =$ "'Có ít nhất hai bệnh nhân sống sót".

1.4.1 Định nghĩa 1 của xác xuất

Khái niệm về xác suất

Xác suất của biến cố A là một con số, số đó đặc trưng cho khả nang xuất hiện của biến cố A trong phép thử tương ứng. Ký hiệu là $P(A)$.

Nhận xét 1

- *$P(A)$ càng lớn (càng gần 1) thì khả nang xuất hiện A càng nhiều.*
- *$P(A)$ càng nhỏ (càng gần 0) thì khả nang xuất hiện A càng ít.*

1.4.1 Định nghĩa 1 của xác xuất

Định nghĩa 2 (Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển)

Nếu trong một phép thử có tất cả n biến cố sơ cấp đồng khả nang, nghĩa là $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$*,trong đó có m biến cố thuận lợi cho biến cố A thì xác suất của A, ký hiệu,* $P(A)$*, là tỉ số* $\frac{m}{n}$.

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(B)} = \frac{m}{n} = \frac{\text{Số biến cố thuận lợi cho } A}{\text{Số tất cả các biến cố có thể xảy ra}}$$

Ưu điểm: Tính được chính xác giá trị của xác suất mà không cần tiến hành phép thử.

Nhược điểm: do đòi hỏi phải có hữu hạn các biến cố và tính đồng khả nang của chúng mà trong thực tế lại có nhiều phép thử không có tính chất đó.

1.4.1 Định nghĩa 1 của xác xuất

Ví dụ 1.6.

Trong một hộp có 3 quả cầu trắng và 5 quả cầu đỏ giống hệt nhau về kích thước. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Tìm xác suất để được

a) 3 quả cầu đỏ.

b) 2 quả cầu trắng và 1 quả đỏ.

Giải

Phép thử: Lấy 3 quả cầu trong hộp 8 quả cầu.

Độ lớn không gian mẫu: $|\Omega| = C_8^3 = 56$

a) Biến cố A: Lấy được 3 quả cầu đỏ.

Số biến cố thuận lợi cho A: $|A| = C_5^3 = 10$

Xác suất để được 3 quả cầu đỏ: $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = 0,1786$

b) Biến cố B: Lấy được 2 quả cầu trắng và 1 quả cầu đỏ.

Số biến cố thuận lợi cho B: $|B| = C_3^2 C_5^1 = 15$

Xác suất biến cố B xảy ra: $P(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = 0,2679$

1.4.1 Định nghĩa 1 của xác xuất

Bài tập

1.6. Trong một chuồng gà có 4 gà trống và 8 gà mái giống hệt nhau về kích thước. Lấy ngẫu nhiên 4 con gà trong chuồng. Tìm xác suất để được

a) 4 gà mái.
b) 3 gà mái và 1 gà trống.
c) 2 gà mái và 2 gà trống.
d) 1 gà mái và 3 gà trống.

1.7. Có chín thẻ đánh số từ 1 đến 9. Rút ra ngẫu nhiên 4 thẻ trong đó. Tìm xác suất để trong 4 thẻ có

a) 4 thẻ có số liên tiếp.
b) 3 thẻ có số liên tiếp.
c) 2 thẻ có số liên tiếp.
d) Không có thẻ có số liên tiếp.

1.4.2 Định nghĩa 2 của xác xuất

Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê

Thực hiện phép thử n lần. Giả sử biến cố A xuất hiện m lần. Khi đó m là tần số suất hiên biến cố A trong n phép thử, và tỷ số $\frac{m}{n}$ được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A trong n phép thử, ký hiệu, $f_n(A) = \frac{m}{n}$.
Thực hiện phép thử vô hạn lần, $(n \to \infty)$ tần suất xuất hiện biến cố A tiến về một số xác định gọi là xác suất của biến cố A.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Ví dụ 1.7.
Tung nhiều lần đồng xu ta thu được bảng số liệu sau

Số lần tung	100	1.000	10.000	100.000
Số lần Sấp	47	493	5.004	49.995

1.4.3 Định nghĩa 3 của xác xuất

Định nghĩa theo quan điểm hình học

Xét một phép thử đồng khả nang, không gian mẫu có vô hạn phần tử và được biểu diễn thành một miền hình học Ω có độ đo xác định (độ dài, diện tích, thể tích). Biến cố $A \subset \Omega$ được biểu diễn bởi miền hình học A. Khi đó, xác suất xảy ra A được xác định bởi:

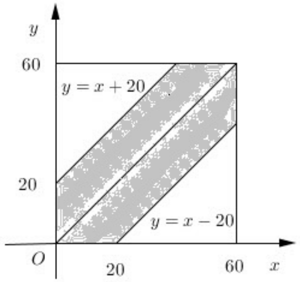
$$P(A) = \frac{\text{Độ đo của miền } A}{\text{Độ đo của miền } \Omega} \qquad (2)$$

1.4.3 Định nghĩa 3 của xác xuất

Ví dụ 1.8.

Hai người hẹn nhau tại một địa điểm vào khoảng từ 11 giờ đến 12 giờ. Họ quy ước rằng người đến trước chỉ đợi 20 phút, nếu không gặp sẽ đi. Giả sử việc đến điểm hẹn của mỗi người là ngẫu nhiên. Tìm xác suất để hai người gặp nhau.

Giải



Gọi thời điểm đến nơi hẹn của hai người lần lượt là x và y. Hai người gặp nhau khi

$$|y - x| < 20 \quad (*).$$

Diện tích không gian mẫu $60 \cdot 60 = 3600$.

Diện tích thỏa $(*)$ là: $3600 - 40 \cdot 40 = 2000$.

Xác suất hai người gặp nhau:

$$P = \frac{2000}{3600} = 55,56\%$$

1.4.4 Tính chất của xác suất

Tính chất của xác suất

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. $P(\Omega) = 1$.
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5. Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \leq P(B)$.

Chương 2

Các Công thức tính Xác suất

2.1. Công thức cộng xác suất

- A, B là hai sự kiện tùy ý, ta có:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

- A, B, C là ba sự kiện tùy ý, ta có:

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n sự kiện bất kỳ

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_iA_j) + $$
$$+ \sum_{i<j<k}^{n} (A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\ldots A_n)$$

2.1. Công thức cộng xác suất

- Cho A và B là hai biến cố xung khắc ta có :

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

- $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các sự kiện xung khắc từng đôi một $(A_iA_j = \emptyset \;$ với $i \neq j)$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{3}$$

2.1. Công thức cộng xác suất

Ví dụ 2.1.

Trong số 300 sinh viên lớp A có 100 sinh viên biết tiếng Anh, 80 sinh viên biết tiếng Pháp, 30 sinh viên biết cả 2 ngoại ngữ Anh-Pháp. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên lớp A. Tính xác suất sinh viên này biết ít nhất 1 ngoại ngữ (Anh hoặc Pháp).

Giải

Phép thử: Chọn 1 sinh viên lớp A

Đặt các biến cố:

$A =$ "SV này biết tiếng Anh", $B =$ "SV này biết tiếng Pháp"

Ta có:

$A + B =$ "SV biết ít nhất 1 NN"; $AB =$ "SV biết cả 2 NN".

Xác suất sinh viên biết ít nhất một ngoại ngữ là:

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{100}{300} + \frac{80}{300} - \frac{30}{300} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.1. Công thức cộng xác suất

Bài tập

2.1. Một câu lạc bộ thể thao có 20 người. Trong đó có 8 vận động viên chơi bơi lội, 10 vận động viên chơi bóng đá và 6 vận động viên chơi cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên, tính xác suất vận động viên này:

a) chơi môn bơi lội.
b) chơi ít nhất một trong hai môn trên.
c) Không chơi môn nào trong hai môn trên.

2.2. Một lớp học có 20 học sinh giỏi toán, 16 học sinh giỏi lý, 14 học sinh không giỏi môn nào. Biết có 4 học sinh giỏi cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh, tính xác suất học sinh này:

a) học giỏi cả hai môn.
b) giỏi ít nhất một môn.
c) chỉ giỏi lý mà không giỏi toán.

2.2.1 Công thức xác suất có điều kiện

Định nghĩa 3 (Conditional ptobability)

Cho hai biến cố A và B.

- *Xác suất xảy ra biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra là*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \ P(B) > 0. \tag{4}$$

- *Tương tự, xác suất xảy ra biến cố B với điều kiện biến cố A đã xảy ra là*

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \ P(A) > 0. \tag{5}$$

2.2.1 Công thức xác suất có điều kiện

Tính chất của xác suất có điều kiện

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$.
2. $P(B|B) = 1$.
3. Nếu $AC = \emptyset$ thì $P[(A+C)|B] = P(A|B) + P(C|B)$.
4. $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

Ví dụ 2.2.

Một nhóm gồm 300 người trong đó có 200 nam và 100 nữ. Trong 200 nam có 70 người hút thuốc. Trong 100 nữ có 20 người hút thuốc. Chọn ngẫu nhiên một người.

a) Biết đã chọn được nữ, tính xác suất người đó là người hút thuốc?

b) Biết đã chọn được người hút thuốc, tính xác suất đó là nam?

2.2.1 Công thức xác suất có điều kiện

Giải

Phép thử: Chọn ngẫu nhiên 1 người trong 300 người. $|\Omega| = 300$

Biến cố A_1: người được chọn là nam $|A_1| = 200$.

Biến cố A_2: người được chọn là nữ $|A_2| = 100$.

Biến có B: người được chọn là người hút thuốc $|B| = 90$.

Ta có $P(A_1) = \dfrac{200}{300} = 0,6667$, $P(A_2) = \dfrac{100}{300} = 0,3333$.

$$P(B) = \frac{90}{300} = 0.3.$$

$$P(A_1B) = \frac{70}{300} = 0,2333, \; P(A_2B) = \frac{20}{300} = 0,0667.$$

a) Chọn được nữ, tính xác suất người đó hút thuốc

$$P(B|A_2) = \frac{P(A_2B)}{P(A_2)} = \frac{0,0667}{0,3333} = 0,2.$$

b) Chọn được người hút thuốc, tính xác suất người đó là nam

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{0,2333}{0,3} = 0,7777.$$

2.2.1 Công thức xác suất có điều kiện

Bài tập

2.3. Một nhóm gồm 100 người trong đó có 70 nam và 30 nữ. Trong 70 nam có 15 người bị ho. Trong 30 nữ có 10 người bị ho. Chọn ngẫu nhiên một người.

a) Biết đã chọn được nữ, tính xác suất người đó là người bị ho?

b) Biết đã chọn được người bị ho, tính xác suất đó là nam?

2.4. Một nhóm gồm 150 người trong đó có 50 người chơi thể thao. Trong 50 người đó có 45 người có sức khỏe tốt. Trong 100 người còn lại có 70 người có sức khỏe tốt. Chọn ngẫu nhiên một người.

a) Biết đã chọn được người chơi thể thao, tính xác suất người đó có sức khỏe tốt?

b) Biết đã chọn được người có sức khỏe không tốt, tính xác suất đó là người không chơi thể thao?

2.2.2 Công thức nhân xác suất

Hệ quả 1 (Multiplication rule)

Với các biến cố tùy ý A và B ta có

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A). \tag{6}$$

Công thức nhân xác suất tổng quát
Cho họ $A_i (i = 1, \dots, n)$ là họ n biến cố, khi đó

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}). \tag{7}$$

2.2.2 Công thức nhân xác suất

Ví dụ 2.3.
Một hộp có 20 ống thuốc, trong đó có 5 ống thuốc kém chất lượng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại 3 ống thuốc. Tính xác suất
a) Lấy được 3 ống thuốc tốt.
b) Lấy được 2 ống thuốc tốt, 1 kém chất lượng.

Giải
Phép thử: Lấy lần lượt 3 ống thuốc.
Đặt A_i là biến cố tại lần lấy thứ i được thuốc tốt.
a) Biến cố lấy được 3 ống thuốc tốt: $B = A_1A_2A_3$.
Ta có $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) = \frac{15}{20}\frac{14}{19}\frac{13}{18} = 0,3991$.
b) Biến cố lấy được 2 ống thuốc tốt:
$$C = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3.$$
Ta có $P(A_1A_2\overline{A_3}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}|A_1A_2) = \frac{15}{20}\frac{14}{19}\frac{5}{18} = 0,1535$.
$P(A_1\overline{A_2}A_3) = P(\overline{A_1}A_2A_3) = P(A_1A_2\overline{A_3}) \Rightarrow P(C) = 0,4605$.

2.2.2 Công thức nhân xác suất

Bài tập

2.5. Một người có 5 bóng đèn trong đó có 2 bóng bị hỏng. Người đó thử ngẫu nhiên lần lượt từng bóng đèn (không hoàn lại) cho đến khi chọn được 1 bóng tốt. Tính xác suất để

a) người đó thử đến lần thứ 2.

b) người đó thử đến lần thứ 3.

2.6. Một sinh viên được thi lại 1 lần nếu lần thi thứ nhất bị rớt (2 lần thi độc lập). Biết rằng xác suất để sinh viên này thi đỗ lần 1 và lần 2 tương ứng là 60% và 80%. Tính xác suất sinh viên này thi đỗ?

2.7. Trong dịp tết, ông A đem bán 1 cây mai lớn và 1 cây mai nhỏ. Xác suất bán được cây mai lớn là 0,9. Nếu bán được cây mai lớn thì xác suất bán được cây mai nhỏ là 0,7. Nếu cây mai lớn không bán được thì xác suất bán được cây mai nhỏ là 0,2. Biết rằng ông A bán được ít nhất 1 cây mai, tìm xác suất để ông A bán được cả hai cây?

2.3. Sự độc lập giữa các biến cố

Hai biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập (independent)** với nhau nếu

$$P(AB) = P(A).P(B) \tag{8}$$

Suy ra, nếu A độc lập với B thì

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \end{aligned}$$

2.3. Sự độc lập giữa các biến cố

Ví dụ 2.4.

Khảo sát giới tính của đứa con thứ nhất và thứ hai trong các gia đình có 2 con có độc lập với nhau hay không?

Giải

Không gian biến cố sơ cấp của phép thử: $\Omega = \{TT, TG, GT, GG\}$

Đặt :

$A =$ "Con đầu là con trai." $= \{TT, TG\}$

$B =$ "Con thứ hai là con gái " $= \{TG, GG\}$

Ta có:

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ và } P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

và $P(AB) = \dfrac{1}{4} = P(A).P(B)$. Vậy A, B độc lập.

2.3. Sự độc lập giữa các biến cố

n biến cố độc lập

Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập với nhau nếu chúng thỏa

$$\begin{aligned} P(A_iA_j) &= P(A_i)P(A_j) \\ P(A_iA_jA_k) &= P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ P(A_1A_2\ldots A_n) &= P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \end{aligned}$$

với mọi tổ hợp chập 2 (i, j), chập 3 (i, j, k), $\ldots$ của n chỉ số.

Chú ý

Sự độc lập từng đôi một không dẫn đến sự độc lập toàn phần.

2.3. Sự độc lập giữa các biến cố

Bài tập:

2.8. Gieo đồng thời hai con xúc xắc. Ta xét các biến cố.

A: “con xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 1 chấm”.

B: “con xúc xắc thứ hai xuất hiện mặt 2 chấm”.

C : “tổng số chấm trên hai con xúc xắc là chẵn.

Kiểm tra sự độc lập của A, B, C.

2.9. Xét phép thử ngẫu nhiên có các kết quả đồng khả nang

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Đặt $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4\}$, $C = \{\omega_3, \omega_4\}$. Kiểm tra sự độc lập của A, B, C.

2.4.1 Công thức xác suất đầy đủ

Định nghĩa 4 (Total Probability Rule)

Cho $A_i (i = 1, \ldots, n)$ là hệ đầy đủ các biến cố và B là một biến cố nào đó (trong cùng phép thử) thì

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i). \end{aligned} \tag{9}$$

Ví dụ 2.5.

Một nông trường có 4 đội sản xuất. Các đội lần lượt sản xuất 1/3 , 1/4, 1/4, 1/6 tổng sản lượng nông sản của nông trường. Tỉ lệ phế phẩm tương ứng với các đội sản xuất là 0,15; 0,08; 0,05 và 0,01.

Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho của nông trường. Tìm xác suất để lấy phải một phế phẩm.

2.4.1 Công thức xác suất đầy đủ

1. Gọi
   $A_i =$ " Sản phẩm chọn được do đội thứ i sản xuất ",
   $i = 1, 2, 3, 4$.
   $B =$ " Sản phẩm chọn được là một phế phẩm".
2. Vì chỉ lấy ngẫu nhiên một sản phẩm nên ta có: $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là một hệ đầy đủ và theo giả thiết

$$P(A_1) = \frac{1}{3}, P(A_2) = \frac{1}{4}, P(A_3) = \frac{1}{4}, P(A_4) = \frac{1}{6}$$

$P(B|A_1) = 0.15,\ P(B|A_2) = 0.08,\ P(B|A_3) = 0.05,\ P(B|A_4) = 0.01.$

3. Áp dụng công thức toàn phần ta có:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \\ &+ P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4), \\ &= \frac{1}{3}\cdot 0.15 + \frac{1}{4}\cdot 0.08 + \frac{1}{4}\cdot 0.05 + \frac{1}{6}\cdot 0.01 \\ &\approx 0.0842. \end{aligned}$$

2.4.1 Công thức xác suất đầy đủ

Bài tập

2.10. Một cửa hàng bán hai loại bóng đèn cùng kích cỡ gồm: 70 bóng màu trắng với tỉ lệ bóng hỏng là 1% và 30 bóng màu vàng với tỉ lệ hỏng 2%. Một khách hàng chọn mua ngẫu nhiên 1 bóng đèn từ cửa hàng này. Tính xác suất để người này mua được bóng đèn tốt ?

2.11. Chuồng thỏ 1 có 3 con thỏ trắng và 4 con thỏ đen; chuồng 2 có 5 thỏ trắng và 3 thỏ đen. Quan sát thấy có 1 con thỏ chạy từ chuồng 1 sang chuồng 2, sau đó có 1 con thỏ chạy ra từ chuồng 2. Tính xác suất để con thỏ chạy ra từ chuồng 2 là thỏ trắng ?

2.4.2 Công thức Bayes

Định nghĩa 5 (Bayes Fomula)

Cho $A_i(i = 1, \ldots, n)$ *là hệ đầy đủ các biến cố,* B *là một biến cố nào đó liên quan đến hệ sao cho* $P(B) > 0$. *Khi đó với mọi* i

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} \tag{10}$$

trong đó $P(B)$ *được tính từ công thức (9)*

2.4.2 Công thức Bayes

Ví dụ 2.6.

Một đám đông có số đàn ông bằng nửa số phụ nữ. Xác suất để đàn ông bị bệnh tim là 0.06 và phụ nữ là 0.036. Chọn ngẫu nhiên 1 người từ đám đông, thấy người này bị bệnh tim. Tính xác suất để người này là đàn ông.

Giải:

Phép thử: chọn một người từ đám đông.

Đặt A_1 là biến cố người được chọn là đàn ông. A_2 là biến cố người được chọn là phụ nữ. Hệ A_1, A_2 là đầy đủ.

Đặt B là biến cố người được chọn là người bệnh.

Ta có $P(A_1) = 0,3333, P(A_2) = 0,6666,$

$P(B|A_1) = 0,06, P(B|A_2) = 0,036.$

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = 0,044$

Yêu cầu bài toán:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.02}{0,044} = 0,4545$$

2.4.2 Công thức Bayes

Bài tập

2.12. Nhà máy X có 3 phân xưởng A, B , C tương ứng sản xuất ra 20%, 30% và 50% tổng sản phẩm của nhà máy. Giả sử tỉ lệ sản phẩm hỏng do các phân xưởng A, B , C tương ứng sản xuất ra là 1%, 2% và 3%. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm do nhà máy X sản xuất ra.

a) Tính xác suất (tỉ lệ) sản phẩm này là hỏng ?

b) Tính xác suất sản phẩm này hỏng và thuộc phân xưởng A.

c) Biết rằng sản phẩm được chọn là hỏng, tính xác suất sản phẩm này là thuộc phân xưởng A?

2.13. Tỷ lệ bệnh B tại một địa phương bằng 0.02. Dùng một phản ứng giúp chuẩn đoán, nếu người bị bệnh thì phản ứng dương tính 95%, nếu người không bị bệnh thì phản ứng dương tính 10%.

a) Tìm xác suất dương tính của phản ứng.

b) Một người phản ứng dương tính, tìm XS người đó bị bệnh.

c) Tìm xác suất chuẩn đoán đúng của phản ứng.

Chương 3

Biến ngẫu nhiên và Đặc trưng

3.1.1 Biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 6

Biến ngẫu nhiên *Biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ từ không gian các biến cố sơ cấp Ω vào $\mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} X \quad : \quad & \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \omega \longmapsto X = X(\omega) \end{aligned}$$

Người ta thường dùng các chữ in hoa X, Y, Z, ... để ký hiệu các biến ngẫu nhiên và các chữ thường x,y,z, ... để chỉ các giá trị của biến ngẫu nhiên.

3.1.1 Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 3.1. Thực hiện phép thử gieo đồng thời 3 đồng xu cân đối, trong trường hợp này chúng ta có các biến cố sơ cấp sau

$$\omega_1 = (SSS), \quad \omega_2 = (SSN), \quad \omega_3 = (SNN), \quad \omega_4 = (SNS)$$

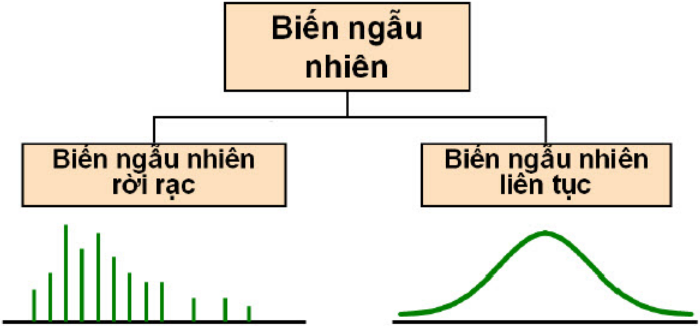
$$\omega_5 = (NNN), \quad \omega_6 = (NNS), \quad \omega_7 = (NSS), \quad \omega_8 = (NSN)$$

Nếu gọi biến ngẫu nhiên X là số đồng xu ngửa xuất hiện thì X nhận các giá trị sau

$$X(\omega_1) = 0, \quad X(\omega_2) = 1, \quad X(\omega_3) = 2, \quad X(\omega_4) = 1$$

$$X(\omega_5) = 3, \quad X(\omega_6) = 2, \quad X(\omega_7) = 1, \quad X(\omega_8) = 2$$

3.1.2 Phân loại biến ngẫu nhiên



3.1.3 Biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 7 (Biến ngẫu nhiên rời rạc)

Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận là một tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.

Ví dụ 3.2. Các biến ngẫu nhiên sau là các biến ngẫu nhiên rời rạc:
a) Số sản phẩm kém chất lượng trong một lô hàng.
b) Số bit lỗi được truyền đi trong một kênh truyền tín hiệu số.
c) Số con trong một gia đình.
d) Tỉ số nữ sinh trong một lớp học.

Các giá trị ở ví dụ trên chỉ có thể thay đổi theo "bước nhảy".

3.1.4 Biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 8 (Biến ngẫu nhiên liên tục)

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó nhận được là một khoảng dạng (a,b) (có thể là [a,b); (a,b]; [a,b]) hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3.3.

Các biến ngẫu nhiên sau là biến ngẫu nhiên liên tục

a) Nhiệt độ không khí ở mỗi thời điểm nào đó.

b) Độ $0 \leq pH \leq 14$ của một chất hóa học nào đó.

c) Chiều cao của một cây lúa.

d) Thời gian hoạt động bình thường của một bóng đèn điện tử.

Các giá trị ở ví dụ trên có thể thay đổi một cách tùy ý.

3.1.5 Hàm phân phối xác suất

Quy luật phân phối xác suất

Một hệ thức cho phép biễu diễn mối quan hệ giữa các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên với xác suất nhận các giá trị tương ứng gọi là quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa 9 (Cumulative distribution function)

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X (xác định trên không gian các biến cố sơ cấp Ω) là hàm $F(x)$ được định nghĩa

$$F(x) = P(X \leq x)$$

với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$

3.1.5 Hàm phân phối xác suất

Tính chất

Hàm phân phối xác suất $F(x)$ có các tính chất cơ bản sau:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ với mọi x.

ii) Hàm phân phối là hàm không giảm.

iii) Liên tục phải, có giới hạn bên trái tại mỗi điểm.

iv) $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

v) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \leq b$

3.2.1 Hàm xác suất rời rạc

Định nghĩa 10 (Probability mass function)

Xét một biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$, một hàm giá trị xác suất (gọi tắt là hàm xác suất) là hàm thỏa

$$i)\ f(x_i) \geq 0 \qquad ii) \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1 \qquad iii)\ f(x_i) = P(X = x_i)$$

Để mô tả biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì ta dùng bảng phân phối xác suất, có hai dòng:

- Dòng thứ nhất là các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên X.
- Dòng thứ hai là xác suất tương ứng.

Bảng phân phối của một biến ngẫu nhiên X có dạng như sau:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_n)$	$\ldots$

3.2.1 Hàm xác suất rời rạc

Ví dụ 3.4.

Người A mua một loại bảo hiểm tai nạn trong 1 nam với phí là 70 ngàn đồng. Nếu bị tai nạn thì công ty sẽ chi trả 3 triệu đồng. Gọi X là số tiền người A có được sau 1 nam mua bảo hiểm này. Tìm biểu diễn của X.

Giải

Phép thử: Người A mua bảo hiểm

Không gian mẫu $\Omega = \{T, \overline{T}\}$ với T là biến cố "người A bị tai nạn".

Vậy biểu diễn của X là

$$X(T) = 2,93 \text{ triệu và } X(\overline{T}) = -0,07 \text{ triệu}.$$

3.2.1 Hàm xác suất rời rạc

Ví dụ 3.5.

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có hàm xác suất

$$f(x) = \frac{2x+1}{25}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

a) Lập bảng phân phối xác suất

b) Tính $P(X \leq 1)$ và $P(2 \leq X \leq 4)$

Giải

a) Bảng phân phối của một BNN X có dạng như sau:

X	0	1	2	3	4
P	0,04	0,12	0,2	0,28	0,36

b) Các xác suất yêu cầu là

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,16$

$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,64$

3.2.2 Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 11 (Hàm phân phối xác suất)

Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc X, ký hiệu là F(x), được xác định như sau

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Cụ thể

$$F(X) = P(X \leq x) \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ f(x_1), & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2), & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) & x_{n-1}, \leq x < x_n \\ 1, & x \geq x_n \end{cases}$$

3.2.2 Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Ví dụ 3.6. Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp trong một lần gieo đồng xu cân đối đồng chất. Hãy lập bảng phân phối và xác định hàm phân phối xác suất của X.

Giải

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X:

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} P(\varnothing) = 0 & x < 0 \\ P(S) = 1/2 & 0 \leq x < 1 \\ P(\Omega) = 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

3.2.2 Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Bài tập

3.1. Một xạ thủ có 4 viên đạn. bắn lần lượt từng viên vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất bắn trúng mục tiêu ở mỗi lần bắn là 0,7. Nếu có một viên trúng hoặc hết đạn thì dừng. Gọi X là số viên đạn đã bắn, lập bảng phân phối xác suất cho X.

3.2. Một lô hàng có 150 sản phẩm trong đó có 50 sản phẩm kém chất lượng. Chọn ngẫu nhiên lần lượt 3 sản phẩm không hoàn lại. Gọi X là số sản phẩm không đạt chất lượng trong 3 sản phẩm được chọn.

a) Lập bảng phân phối xác suất cho X.

b) Viết hàm phân phối xác suất.

c) Tìm xác suất có 2 sản phẩm kém chất lượng trong phép thử.

3.3.1 Hàm mật độ xác suất

Đối với biến ngẫu nhiên liên tục ngoài công cụ là hàm phân phối xác suất ta còn sử dụng hàm mật độ xác suất của nó.

Định nghĩa 12 (Hàm mật độ xác suất)

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X, hàm số $f(x)$ không âm, xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa các tính chất

i) $P(X \in I) = \int_I f(x)dx, \forall I \subset \mathbb{R}$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

hàm số $f(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X.

3.3.2 Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

Chú ý:

1. Mọi hàm $f(x)$ không âm, và thỏa điều kiện $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ đều là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên X nào đó.
2. Từ định nghĩa về hàm mật độ ta có hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $f(x)$ là
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
3. $F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$
4. Nếu X là một biến ngẫu nhiên liên tục, với x_1 và x_2 bất kỳ
$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X \leq x_2) &= P(x_1 < X \leq x_2) \\ &= P(x_1 \leq X < x_2) \\ &= P(x_1 < X < x_2) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

3.3.2 Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

Ví dụ 3.7.

Cho hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} a & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

a) Xác định a để f(x) là hàm mật độ của BNN liên tục X.
b) Tính $P(1/4 \leq X \leq 1/2)$
c) Xác định hàm phân phối của X.
d) Tính $P(1/2 \leq X \leq 2)$

Giải

a) Điều kiện f(x) là hàm mật độ là: $f(x) \geq 0$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Mà $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 adx = a$. Vậy $a = 1$. Ta có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

3.3.2 Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

b) Xác suất cần tìm là

$$P(1/4 \leq X \leq 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} f(x)dx = 1/4$$

c) Ta có $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} dt = x$

Hàm phân phối của X có dạng

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

d) Xác suất cần tìm là

$$P(1/2 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$$

3.3.2 Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

Bài tập

3.3. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

a) Chứng tỏ $f(x)$ là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X.
b) Xác định hàm phân phối của X và tính $P(1 \leq X \leq 3/2)$.

3.4. Biết tuổi thọ của một thiết bị điện tử trong máy photocopy (đv: giờ) là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \frac{e^{-x/1000}}{1000}, \qquad x > 0$$

Xác định xác suất để

a) Một thiết bị có tuổi thọ trên 3000 giờ.
b) Một thiết bị có tuổi thọ trong khoảng từ 1000 đến 2000 giờ.

3.4.1 Kỳ vọng của BNN rời rạc

Định nghĩa 13 (Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên(Expectation))

Giả sử BNN rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$	$\dots$

Kỳ vọng của X, ký hiệu $\mathbb{E}(X)$, là một số được định nghĩa

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X = x_i = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i f(x_i) \tag{11}$$

3.4.1 Kỳ vọng của BNN rời rạc

Ví dụ 3.8.

Một hộp chứa 10 viên bi, trong đó có 3 viên bi đỏ nặng 10g, 5 viên bi trắng nặng 50g và 2 viên bi xanh nặng 20g. Chọn ngẫu nhiên ra 1 viên bi và gọi X là khối lượng của viên bi đó. Tính $\mathbb{E}(X)$?

Giải

Phép thử: Chọn ngẫu nhiên 1 viên bi.

Biến ngẫu nhiên X: khối lượng của viên bi.

X	10	20	50
P	$0,3$	$0,2$	$0,5$

Kỳ vọng của X:

$$E(X) = 10 \cdot 0,3 + 20 \cdot 0,250 \cdot 0,5 = 32$$

3.4.1 Kỳ vọng của BNN rời rạc

Bài tập

3.5. Cho BNN X có phân phối xác suất

X	-1	0	2	3
P	$0,1$	$0,2$	$0,4$	$0,3$

Tính kỳ vọng của X

3.6. Một lô hàng gồm 10 sản phẩm tốt và 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 4 sản phẩm từ lô hàng đó, gọi X là số sản phẩm tốt trong 4 sản phẩm lấy ra. Tìm phân phối xác suất và tính kỳ vọng của X?

3.7. Theo thống kê, một người Mỹ 25 tuổi sẽ sống thêm trên 1 nam với xác suất là 0,992. Một công ty bảo hiểm A đề nghị người đó bảo hiểm sinh mạng cho 1 nam với số tiền chi trả là 10.000USD, phí bảo hiểm là 100USD. Hỏi trung bình công ty A lãi bao nhiêu khi bán bảo hiểm cho người đó?

3.4.2 Kỳ vọng của BNN liên tục

Định nghĩa 14 (Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên(Expectation))

Giả sử BNN liên tục X có hàm mật độ xác suất f(x), kỳ vọng của X là

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{12}$$

Ví dụ 3.9.
Tính kỳ vọng của X biết X là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \in [0,1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Giải
Kỳ vọng của X: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x2xdx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

3.4.2 Kỳ vọng của BNN liên tục

Bài tập

3.8. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2x), & x \in [01] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

a) Tính $P(X < 0.2)$

b) Tính kỳ vọng của X.

3.9. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 20e^{-20(x-12,5)}, & x \geq 12,5 \\ 0, & x < 12,5 \end{cases}$$

a) Tính $P(X > 12.6)$

b) Tính kỳ vọng của X.

3.4.3 Tính chất và Ý nghĩa của Kỳ vọng

Tính chất của kỳ vọng

Cho X, Y là 2 biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có các tính chất sau

- $\mathbb{E}(c) = c$
- $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- Nếu hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập thì $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Ý nghĩa của kỳ vọng

- Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên.
- Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất.

3.4.1 Phương sai của BNN rời rạc

Định nghĩa 15 (Phương sai của BNN rời rạc (Variance))

Nếu biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ thì phương sai của X, ký hiệu $\mathbb{V}ar(X)$, được định nghĩa

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left[X - \mathbb{E}(X)\right]^2$$

Trong thực tế, để tính phương sai của biến ngẫu nhiên X ta thường sử dụng công thức

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Định nghĩa 16 (Độ lệch chuẩn (Standard deviation))

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X là can bậc 2 của $\mathbb{V}ar(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}$$

3.4.1 Phương sai của BNN rời rạc

Ví dụ 3.10.
Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với bảng phân phối xác suất:

X	1	2	3
P	0.3	0.4	0.3

Tính $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}ar(X)$ và $\sigma(X)$?

Giải

Ta có:

X^2	1	4	9
P	0.3	0.4	0.3

Dễ dàng tính được $\mathbb{E}(X) = 2$, $\mathbb{E}(X^2) = 4,6$,
Vậy $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 4,6 - 2^2 = 0,6$
và $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)} = 0,7746$.

3.4.1 Phương sai của BNN rời rạc

Bài tập

3.10. Cho BNN X có phân phối xác suất

X	-1	0	2	3
P	$0,1$	$0,2$	$0,4$	$0,3$

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của X

3.11. Một lô hàng gồm 10 sản phẩm tốt và 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 4 sản phẩm từ lô hàng đó, gọi X là số sản phẩm tốt trong 4 sản phẩm lấy ra. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của X?

3.12. Theo thống kê, một người Mỹ 25 tuổi sẽ sống thêm trên 1 nam với xác suất là 0,992. Một công ty bảo hiểm A đề nghị người đó bảo hiểm sinh mạng cho 1 nam với số tiền chi trả là 10.000USD, phí bảo hiểm là 100USD. Gọi X là số tiền công ty thu được sau 1 nam. Tìm phương sai của X?

3.4.2 Phương sai của biến liên tục

Định nghĩa 17 (Phương sai của BNN liên tục (Variance))

- *Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm xác suất $f(x)$, ký hiệu $\mu = \mathbb{E}(X)$, công thức tính phương sai là*

$$\mathbb{V}ar(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2$$

- *Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$, ký hiệu $\mu = \mathbb{E}(X)$, công thức tính phương sai là*

$$\mathbb{V}ar(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

3.4.2 Phương sai của BNN liên tục

Ví dụ 3.11.

Tính Phương sai và Độ lệch chuẩn của X biết X là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \in [0,1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Giải

Ta có $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x2xdx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 2xdx = \frac{2}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Vậy $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$

và $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$

3.4.2 Phương sai của BNN liên tục

Bài tập

3.13. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2x), & x \in [01] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Tính phương sai của X.

3.14. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 20e^{-20(x-12,5)}, & x \geq 12,5 \\ 0, & x < 12,5 \end{cases}$$

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của X.

3.4.3 Tính chất và Ý nghĩa của Phương sai

Tính chất của phương sai

Cho X, Y là 2 biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì phương sai có các tính chất sau

i) $\mathbb{V}ar(c) = 0$
ii) $\mathbb{V}ar(cX) = c^2\mathbb{V}ar(X)$
iii) $\mathbb{V}ar(X + c) = \mathbb{V}ar(X)$
iv) Nếu X và Y độc lập thì $\mathbb{V}ar(X + Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y)$

Ý nghĩa của phương sai

Phương sai là kỳ vọng của bình phương các sai lệch giữa X và $\mathbb{E}(X)$, hay phương sai là trung bình bình phương sai lệch, nó phản ánh mức độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.

Chương 4

Các Phân phối Xác suất

4.1.1 Biến ngẫu nhiên Bernoulli

Định nghĩa 18 (Phân phối Bernoulli)

Thực hiện một phép thử, ta quan tâm đến biến cố A. Nếu biến cố A xảy ra (thành công) thì X nhận giá trị là 1 $(X = 1)$*, ngược lại biến ngẫu nhiên X nhận giá trị 0. Phép thử này gọi là phép thử Bernoulli. Giả sử xác suất xảy ra biến cố A là p,* $0 < p < 1$

$$P(A) = P(X = 1) = p$$

và

$$P(\bar{A}) = P(X = 0) = 1 - p = q$$

Khi đó biến ngẫu nhiên X được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với tham số p, ký hiệu $X \sim B(1, p)$

4.1.2 Phân phối Bernoulli

Ví dụ 4.1.
Các phép thử sau đây cho kết quả là một biến ngẫu nhiên Bernoulli

a) Tung ngẫu nhiên một đồng xu: $X = 1$ nếu xuất hiện mặt sấp, $X = 0$ nếu xuất hiện mặt ngửa.

b) Kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm trong lô hàng: $X = 1$ nếu gặp được sản phẩm tốt, $X = 0$ nếu gặp sản phẩm kém.

c) Trả lời ngẫu nhiên 1 câu trắc nghiệm: $X = 0$ nếu trả lời đúng, $X = 1$ nếu trả lời sai.

d) Mua vé số: $X = 0$ nếu trúng số, $X = 1$ nếu không trúng số.

4.1.2 Phân phối Bernoulli

- Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $X \sim B(1, p)$ có dạng

X	1	0
P	p	q

với $q = 1 - p$.

- Dựa vào bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X ta dễ dàng tính được

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathbb{V}ar(X) = pq.$$

4.1.2 Phân phối Bernoulli

Ví dụ 4.2.
Kiểm tra các phép thử sau có phải phép thử Bernoulli hay không?

a) Gieo 1 đồng xu 5 lần
Đây là 5 phép thử Bernoulli.

b) Một người bắn lần lượt 7 viên đạn vào 1 mục tiêu
Đây đó là 7 phép thử Bernoulli.

c) Nếu 7 người bắn, mỗi người bắn 1 viên đạn
Đây không phải là phép thử Bernoulli.
Tuy nhiên nếu biết rằng khả nang bắn trúng bia của 7 người là như nhau thì đó lại là 7 phép thử Bernoulli.

4.1.3 Phân phối Nhị thức

Định nghĩa 19 (Phân phối Nhị thức)

Thực hiện n phép tử Bernoulli độc lập với xác suất thành công trong mỗi phép thử là p.
Gọi X là số lần thành công (biến cố A xảy ra) trong n phép thử thì

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

với X_i $(i = \overline{1, n})$ *là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với cùng tham số p.*
Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc với miền giá trị $S = \{0, \ldots, n\}$ *và xác suất*

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k \in S$$

X được gọi là có luật phân phối Nhị thức với các tham số n, p.
$X \sim B(n, p)$

4.1.3 Phân phối Nhị thức

Ví dụ 4.3.

Tại 1 địa phương, theo số liệu thống kê có 20% dân số mắc bệnh A. Chọn ngẫu nhiên 8 người, tính khả nang

a) có 3 người mắc bệnh A.

b) có nhiều nhất 2 người mắc bệnh A.

Giải

Khi chọn ngẫu nhiên 1 người thì có 2 khả nang xảy ra: mắc bệnh hoặc không, với xác suất mắc bệnh là 0.2

Gọi X là số người bị sốt rét trong 8 lần chọn, ta có $X \sim B(8, 0.2)$.

a) $P(X = 3) = C_8^3(0.2)^3(0.8)^5 = 0.147$

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0,1677 + 0,3355 + 0,2936 = 0,7969$

4.1.3 Phân phối Nhị thức

Định lý (Các đặc trưng của BNN có phân phối nhị thức)

Nếu X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức $B(n, p)$ thì

i) $\mathbb{E}(X) = np$,

ii) $\mathbb{V}ar(X) = npq$,

iii) Với x, h là hai số nguyên dương thì

$$P(x \leq X \leq x+h) = P(X = x) + P(X = x+1) + \ldots + P(X = x+h).$$

4.1.3 Phân phối Nhị thức

Bài tập

4.1. Trong một nhà máy sản xuất vi mạch điện tử, biết rằng tỷ lệ vi mạch không đạt chất lượng là 5%. Kiểm tra ngẫu nhiên 15 vi mạch. Tính xác suất

a) Có đúng 7 vi mạch không đạt chất lượng.

b) Có ít nhất 1 vi mạch không đạt chất lượng.

4.2. Một bài thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu có 5 đáp án và chỉ có 1 đáp án đúng. Biết rằng học sinh đánh ngẫu nhiên toàn bộ bài thi. Tính xác suất

a) Học sinh làm đúng ít nhất 5 câu;

b) Học sinh làm đúng 10 câu;

c) Số câu trả lời đúng trung bình mà học sinh làm được là bao nhiêu? Tính phương sai của số câu trả lời đúng.

4.2.1 Phân phối siêu bội

Một tập hợp gồm có M phần tử, trong đó có N phần tử cùng mang một tính chất A. Lấy ngẫu nhiên một lượt n phần tử trong tập hợp. Gọi X là số phần tử có tính chất A trong n phần tử lấy ra. Khi đó, ta nói BNN X có phân bố siêu bội.

Định nghĩa 20 (Phân phối Siêu bội)

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị từ $[max\{n-(M-N),0\}, min\{n,N\}]$ *gọi là có phân phối siêu bội với tham số* M, N, n*, ký hiệu* $X \sim H(M,N,n)$ *nếu*

$$f(x) = P(X=x) = \frac{C_N^x C_{M-N}^{n-x}}{C_M^n},$$

Kỳ vọng và phương sai của X lần lượt là

$$\mathbb{E}(X) = \frac{nN}{M}, \qquad \mathbb{V}ar(X) = \frac{nN}{M}\left(1-\frac{N}{M}\right)\frac{M-n}{M-1}$$

4.2.1 Phân phối siêu bội

Ví dụ 4.4.

Một cửa hàng bán 50 con cá chép, trong đó có 18 con cá chép Nhật. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 4 con cá chép (chọn 1 lần). Tính xác suất có từ 2 tới 4 con cá chép Nhật.

Giải

Gọi X là số con cá chép Nhật được lấy ra. Khi đó, $X \sim H(50; 18; 4)$. Ta cần tính $P(2 \leq X \leq 4)$. Ta có

$$P(X = 2) = \frac{C_{32}^{2} C_{18}^{2}}{C_{50}^{4}} = 0,3295$$

$$P(X = 3) = \frac{C_{32}^{1} C_{18}^{3}}{C_{50}^{4}} = 0,1134$$

$$P(X = 2) = \frac{C_{32}^{0} C_{18}^{4}}{C_{50}^{4}} = 0,0133$$

Vậy $P(2 \leq X \leq 4) = 0,4562$

4.2.1 Phân phối siêu bội

Bài tập

4.3. Một thùng bia có 24 chai trong đó để lẫn 3 chai quá hạn sử dụng. Chọn ngẫu nhiên từ thùng đó ra 4 chai bia (chọn 1 lần). Tính xác suất chọn được cả 4 chai bia không quá hạn sử dụng.

4.4. Một sọt Cam có 10 trái trong đó có 4 trái hư. Lấy ngẫu nhiên ra ba trái.

a) Tính xác suất lấy được 3 trái hư.
b) Tính xác suất lấy được 1 trái hư.
c) Tính xác suất lấy được ít nhất một trái hư.
d) Tính xác suất lấy được nhiều nhất 2 trái hư.

4.2.2 Xấp xỉ phân phối Siêu bội bằng phân phối Nhị thức

Cho $X \sim H(M, N, n)$, nếu $n \ll N$ và $n \ll M - N$ thì ta có thể xem $X \sim B(n, \dfrac{N}{M})$

Ví dụ 4.5.

Một lô hàng có 150.000 sản phẩm, trong đó có 30.000 sản phẩm do nhà máy A sản xuất. Chọn ngẫu nhiên 20 sản phẩm từ lô hàng. Tính xác suất có từ 3 đến 5 sản phẩm do nhà máy A sản xuất.

Giải

Gọi X là số sản phẩm do nhà máy A sản xuất trong 20 sản phẩm lấy ra. Khi đó,$X \sim H(150.000, 30.000, 20)$.

Vì $20 \ll 150.000$ và$20 \ll 150.000 - 30.000 = 120.000$ nên ta xem $X \sim B(20, 1/5)$.

Do đó $P(3 \leq X \leq 5) = 0,5981$.

4.2.2 Xấp xỉ phân phối Siêu bội bằng phân phối Nhị thức

Bài tập

4.5. Một hộp đựng 100.000 viên bi, trong đó có 40.000 bi đỏ. Chọn ngẫu nhiên 10 bi từ hộp, tính xác suất có 7 bi đỏ

4.6. Một hiệu sách bán 1000 quyển truyện A, trong đó có 300 quyển in lậu. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 4 quyển truyện A (chọn 1 lần).

a) Tính xác suất khách hàng chọn được 2 quyển in lậu.

b) Tính xác suất khách hàng không chọn trúng quyển in lậu.

c) Hỏi khả nang cao nhất khách hàng chọn phải bao nhiêu quyển truyện A in lậu?

4.2.3 Phân phối Poisson

Các biến ngẫu nhiên được sử dụng để mô tả, "đếm" số lần xảy ra của một biến cố, sự kiện nào đó xảy ra trong một khoảng thời gian (và thỏa một số điều kiện) thường được mô tả bằng phân phối Poisson.

Định nghĩa 21 (Phân phối Poisson)

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị từ $0, 1, 2, \ldots$ *gọi là có phân phối Poisson với tham số* λ, *ký hiệu* $X \sim P(\lambda)$ *nếu*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Kỳ vọng và phương sai của X lần lượt là

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{V}ar(X) = \lambda$$

4.2.3 Phân phối Poisson

Ví dụ 4.6.

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson.

a) Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.

b) Số người sống lâu trên 100 tuổi.

c) Số người đến bưu điện nào đó trong một ngày.

d) Số tai nạn hoặc sự cố giao thông xảy ra tại một điểm giao thông trong một ngày.

4.2.3 Phân phối Poisson

Ví dụ 4.7.
Quan sát tại siêu thị A thấy trung bình 5 phút có 18 khách đến mua hàng.

a) Tính xác suất để trong 7 phút có 25 khách đến.

b) Tính xác suất để trong 2 phút có từ 3 đến 5 khách đến.

c) Tính số khách sẽ đến siêu thị A trong 1 giờ mà xác suất lớn hơn 95%.

Giải

a) Gọi X_1 là số khách vào siêu thị trong 7 phút. Do cứ 5 phút có 18 khách đến mua hàng nên số khách đến $X_1 \sim P(\lambda_1)$ với

$$\lambda_1 = \frac{18}{5} \cdot 7 = 25,2.$$

Xác suất để trong 7 phút có 25 khách đến là

$$P(X_1 = 25) = \frac{e^{-25,2} \cdot 25,2^{25}}{25!} = 0,079$$

4.2.3 Phân phối Poisson

b) Gọi X_2 là số khách vào siêu thị trong 2 phút. Do cứ 5 phút có 18 khách đến mua hàng nên số khách đến $X_2 \sim P(\lambda_2)$ với

$$\lambda_2 = \frac{18}{5} \cdot 2 = 7,2.$$

Xác suất để trong 2 phút có từ 3 đến 5 khách đến là

$$P(3 \leq X_2 \leq 5) = \frac{e^{-7,2} \cdot 7,2^3}{3!} + \frac{e^{-7,2} \cdot 7,2^4}{4!} + \frac{e^{-7,2} \cdot 7,2^5}{5!}$$
$$= 0,0464 + 0,0836 + 0,1204 = 0,2504$$

c) Gọi X_3 là số khách vào siêu thị trong 1 giờ. Do cứ 5 phút có 18 khách đến mua hàng nên số khách đến $X_3 \sim P(\lambda_3)$ với

$$\lambda_3 = \frac{18}{5} \cdot 60 = 216.$$

Gọi t là số khách đến mà xác suất lớn hơn 95%. Ta có

$$P(X \geq T) = \frac{e^{216} \cdot 216^T}{T!} + \frac{e^{216} \cdot 216^{T+1}}{(T+1)!} + \frac{e^{216} \cdot 216^{T+2}}{(T+2)!} + \ldots$$

4.2.3 Phân phối Poisson

Bài tập

4.7. Giả sử số lỗi in trong một trang nào đó của quyển sách có phân phối Poisson với tham số $\lambda = 0.5$. Tính xác suất có ít nhất một lỗi in trong trang này?

4.8. Số cuộc điện thoại gọi đến một tổng đài điện thoại trong một giờ có phân phối Poisson với $\lambda = 10$. Tính xác suất

a) Có 5 cuộc gọi điện thoại đến trong 1 giờ.

b) Có nhiều nhất 3 cuộc gọi điện thoại đến trong 1 giờ.

4.2.4 Xấp xỉ phân phối Nhị thức bằng phân phối Poisson

Cho $X \sim B(n, p)$, nếu $n \to \infty$ và $p \to 0$ sao cho $np \to \lambda$ thì

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \text{ nghĩa là } X \sim P(\lambda)$$

Trong thực tế, phân phối Poisson sẽ xấp xỉ tốt cho phân phối Nhị thức khi $n \geq 100$, $p \leq 0.01$ và $np \leq 20$.

Ví dụ 4.8.

Trong 1 lô thuốc, tỷ lệ thuốc hỏng là $p = 0.002$. Kiểm tra 1000 ống. Tính xác suất để gặp 3 ống bị hỏng?

Giải

Ta có mô hình Bernoulli với $p = 0.002$ rất nhỏ, $n = 1000$ lớn.

Gọi X là số lọ thuốc bị hỏng trong 1000 lọ.

Khi đó $X \sim P(\lambda)$ với $\lambda = np = 2 \Rightarrow \mathbb{P}(X = 3) = \dfrac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0.18$

4.2.4 Xấp xỉ phân phối Nhị thức bằng phân phối Poisson

Bài tập

4.9. Trong một đợt tiêm chủng cho trẻ em ở một khu vực, biết xác suất một trẻ bị phản ứng với thuốc sau khi tiêm là 0.001. Thực hiện tiêm cho 2000 trẻ, tính xác suất

a) có 5 trẻ bị phản ứng với thuốc sau khi tiêm.

b) có nhiều nhất 2 trẻ bị phản ứng với thuốc sau khi tiêm.

Bài tập

4.10. Một trại gà nuôi lấy trứng có xác suất trứng hư là 0.002. Thực hiện kiểm tra 10.000 trứng, tính xác suất

a) có 10 trứng bị hư.

b) có nhiều hơn 3 trứng bị hư.

4.3.1 Phân phối đều

Định nghĩa 22 (Phân phối đều)

Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có phân phối đều trên đoạn $[a, b]$, ký hiệu $X \sim U[a, b]$, nếu hàm mật độ xác suất của X có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \textit{khi } x \in [a, b] \\ 0 & \textit{nơi khác} \end{cases}$$

Từ định nghĩa trên, ta có được hàm phân phối xác suất của $X \sim U[a, b]$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi x<a} \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{khi } x \in [a, b] \\ 1 & \text{khi x>b} \end{cases}$$

Ta có: $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $\mathbb{V}ar(X) = \dfrac{(a-b)^2}{12}$

4.3.1 Phân phối đều

Ví dụ 4.9.

Tỷ lệ mắc bệnh A tại khu dân cư B là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & \text{khi } x \in [5, 25] \\ 0 & \text{còn lại} \end{cases}$$

Tính $\mathbb{P}\{|X - 10| > 2.5\}$?

Giải

Xét $X \sim U[5, 25]$.Ta có $|X - 10| > 2,5 \Rightarrow X < 7.5$ hay $X > 12.5$. Mà

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{khi x<5} \\ \dfrac{x-5}{20} & \text{khi } x \in [5, 25] \\ 1 & \text{khi x>25} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{P}\{|X - 10| > 2.5\} &= \mathbb{P}(X < 7.5) + \mathbb{P}(X > 12.5) \\ &= F(7.5) + 1 - F(12.5) = 0.75 \end{aligned}$$

4.3.1 Phân phối đều

Bài tập

4.11. Lịch xuất bến của một trạm xe bus như sau: chiếc xe đầu tiên trong ngày sẽ khởi hành vào lúc 7h, sau 30 phút sẽ có một xe khác đến trạm. Giả sử một hành khách đến trạm trong khoảng thời gian từ 7h-7h30. Tìm xác suất để hành khách này chờ

a) Ít hơn 5 phút.

b) Ít nhất 12 phút.

4.12. Một sinh viên đi bộ từ nhà đến trường với quãng đường 400 m và vận tốc đều V (đơn vị m/phút). Biết rằng V là một BNN và thời gian đi bộ của người đó là BNN Tcó phân phối đều trong khoảng từ 6 phút đến 10 phút.

a) Tìm xác suất để sinh viên này có thời gian đi hơn 8.5 phút.

b) Tìm $E(T)$ và $Var(T)$.

b) Tìm $E(V)$ và $Var(V)$.

4.3.2 Phân phối mũ

Định nghĩa 23 (Phân phối Mũ)

Biến ngẫu nhiên liên tục T được gọi là có phân phối mũ với tham số λ *nếu hàm mật độ xác suất có dạng*

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$

trong đó

λ: *số biến cố trung bình xảy ra trong một đơn vị thời gian.*

t : *số đơn vị thời gian cho đến biến cố kế tiếp.*

4.3.2 Phân phối mũ

Các đặc trưng của phân phối mũ

Ta suy ra hàm phân phối xác suất có dạng:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$

Định lý

Nếu $T \sim exp(\lambda)$ thì kỳ vọng và phương sai của T lần lượt bằng

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}; \quad \mathbb{V}ar(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

4.3.2 Phân phối mũ

Ví dụ 4.10.

Biết thời gian sống (tháng) của một thành phần điện tử là một BNN có phân phối mũ với $\lambda = 0,1$.

a) Tính xác suất thời gian sống nhỏ hơn 10.

b) Tính xác suất thời gian sống từ 5 tới 15.

c) Tìm t sao cho xác suất của thời gian sống lớn hơn t bằng $0,01$

Giải

Gọi X là thời gian sống của thành phần điện tử. Ta có $X \sim exp(0,1)$.

a) $P(X < 10) = 1 - e^{-0,1 \cdot 10} = 0,6321$.

b) $P(5 < X < 15) = \left(1 - e^{-0,1 \cdot 15}\right) - \left(1 - e^{-0,1 \cdot 5}\right) = 0,3834$.

c) $P(X > t) = 0,01 \Rightarrow P(X < t) = 0,99$

$\Rightarrow 1 - e^{-0,1 \cdot t} = 0,99 \Rightarrow t = 230,26$.

4.3.2 Phân phối mũ

Bài tập

4.13. Biết thời gian sống (tháng) của một bóng đèn là một BNN có phân phối mũ với $\lambda = 0,1$.

a) Tính xác suất thời gian sống nhỏ hơn 12.

b) Tính xác suất thời gian sống từ 12 tới 18.

c) Tìm *t* sao cho xác suất của thời gian sống lớn hơn *t* bằng $0,05$

4.14. Trong một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử, biết tuổi thọ của một mạch điện là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tuổi thọ trung bình 6.25 nam. Nếu thời gian bảo hành của sản phẩm là 5 nam. Hỏi tỷ lệ sản phẩm bảo hành của nhà máy là bao nhiêu?

4.4.1 Phân phối chuẩn

Định nghĩa 24 (Phân phối Chuẩn)

Biến ngẫu nhiên liên tục X nhận giá trị trong khoảng $(-\infty, +\infty)$ được gọi là có phân phối chuẩn tham số μ, σ nếu hàm mật độ xác suất của X có dạng

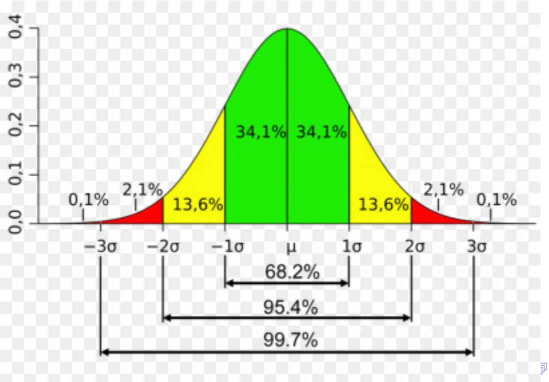
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad -\infty < x < +\infty$$

trong đó μ, σ là hằng số và $\sigma > 0, -\infty < \mu < +\infty$.
Ta ký hiệu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Khi đó $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$.

4.4.1 Phân phối chuẩn

Tính chất

- Đồ thị có dạng như một cái chuông đối xứng, xác định trên $\mathbb{R}$
- Phân phối phụ thuộc kỳ vọng μ và độ lệch tiêu chuẩn σ.



4.4.1 Phân phối chuẩn

Định lý (Tính "tuyến tính" của phân phối chuẩn)

Nếu các biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn kỳ vọng μ, phương sai σ^2 và nếu $Y = aX + b$, (a, b là hằng số và $a \neq 0$), thì Y có phân phối chuẩn với kỳ vọng $a\mu + b$ và phương sai $a^2\sigma^2$.

Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, \dots, X_n$ là độc lập và nếu X_i có phân phối chuẩn kỳ vọng μ_i và phương sai σ_i^2 $(i = \overline{1, n})$ thì tổng $X_1 + \dots + X_n$ có phân phối chuẩn với kỳ vọng $\mu_1 + \dots + \mu_n$ và phương sai $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$.

Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, \dots, X_n$ là độc lập và nếu X_i có phân phối chuẩn kỳ vọng μ_i và phương sai σ_i^2 $(i = \overline{1, n})$. $a_1, \dots, a_n$ và b là các hằng số sao cho có ít nhất một $a_i \neq 0$, thì biến ngẫu nhiên $a_1X_1 + \dots + a_nX_n + b$ có phân phối chuẩn với kỳ vọng $a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n$ và phương sai $a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2$

4.4.2 Phân phối chuẩn hóa

Phân phối Chuẩn hóa

Biến ngẫu nhiên Z được gọi là có phân phối chuẩn hóa nếu nó có phân phối chuẩn với tham số $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ và ta ký hiệu $X \sim N(0, 1)$

Theo qui ước, hàm phân phối của biến ngẫu nhiên chuẩn tắc được ký hiệu là $\varphi(z)$, có dạng

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Khi đó

i) $P(a \leq X \leq b) = \varphi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

ii) $P(X \leq b) = P(-\infty \leq X \leq b), \quad P(a \leq X) = P(a \leq X \leq \infty)$

4.4.2 Phân phối chuẩn hóa

Ví dụ 4.11.

Tốc độ chuyển dữ liệu từ máy chủ của ký túc xá đến máy tính của sinh viên vào buổi sáng chủ nhật có phân phối chuẩn với trung bình 45 Kb/s và độ lệch chuẩn 11 Kb/s. Tìm xác suất để tốc độ chuyển dữ liệu

a) nằm trong khoảng 35 đến 50 Kb/s.

b) luôn cao hơn 45 Kb/s.

Giải

Gọi X là tốc độ chuyền dữ liệu: $X \sim N(45, 11^2)$.

a) Xác suất $35 < X < 50$ là

$$P(35 < X < 50) = \varphi\left(\frac{50-45}{11}\right) - \varphi\left(\frac{35-45}{11}\right)$$
$$= \varphi(0,45) - \varphi(0,91) = 0,4922$$

b) Xác suất $45 < X$ là

$$P(45 < X < +\infty) = \varphi\left(\frac{+\infty-45}{11}\right) - \varphi\left(\frac{45-45}{11}\right)$$
$$= \varphi(\infty) - \varphi(0) = 0,5 - 0 = 0,5$$

4.4.2 Phân phối chuẩn hóa

Bài tập

4.15. Chiều cao của nam giới đã trưởng thành là biến ngẫu nhiên X (cm) có phân phối chuẩn N(165; 25). Chọn ngẫu nhiên 1 nam giới đã trưởng thành. Tính xác suất người được chọn

a) có chiều cao từ 164 (cm) đến 168 (cm).

b) có chiều cao thấp hơn 165 (cm).

4.16. Giả sử thời gian khách phải chờ để được phục vụ tại một cửa hàng là BNN X (phút) với $X \sim N(4.5; 1.21)$.

a) Tính xác suất khách phải chờ từ 3.5 phút đến 5 phút.

b) Tính thời gian tối thiểu t nếu xác suất khách phải chờ vượt quá t là không quá 5%.

4.4.3 Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Định lý giới hạn trung tâm

Nếu $X_1, \dots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 hữu hạn. Ta đặt $S_n = X_1, \dots, X_n$, S_n có kỳ vọng là $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ và phương sai $\mathbb{V}ar(S_n) = n\sigma^2$. Khi $n \to \infty$ thì biến ngẫu nhiên

$$S_n \to_F X, \quad X \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

Hay biến ngẫu nhiên

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to_F Z, \quad Z \sim N(0,1)$$

Nghĩa là khi n lớn thì với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \approx P(Z < x), \quad Z \sim N(0,1)$$

4.4.3 Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

- Xét $X \sim B(n,p)$, ta có $\mathbb{E}(X) = np$ và $\mathbb{V}ar(X) = npq$. Khi n lớn, theo định lý giới hạn trung tâm thì phân phối của biến ngẫu nhiên X được xấp xỉ bằng phân phối chuẩn $N(np, npq)$. Xác suất

$$
\begin{aligned}
P(a \leq X < b) &= P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{X-np}{\sqrt{npq}} < \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) \\
&\approx \varphi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \varphi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)
\end{aligned}
$$

- Điều kiện xấp xỉ: $np > 5$ và $n(1-p) > 5$.

4.4.3 Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Ví dụ 4.12.

Một khách sạn nhận đặt chỗ của 585 khách hàng cho 500 phòng vào ngày 30/4 vì theo kinh nghiệm của những nuam trước cho thấy có 20% khách đặt chỗ nhưng không đến. Biết mỗi khách đặt 1 phòng, tính xác suất có từ 490 đến 500 khách đặt chỗ và đến nhận phòng.

Giải

Gọi X là số người đến nhận phòng trong số 585 người đặt chỗ.
Khi đó, $X \sim B(585; 0; 8)$. Nghiệm cần tìm

$$P(490 \leq X \leq 500) = \sum_{490}^{500} C_{585}^{k} 0,8^{k} 0,2^{585-k}$$

không thể tính toán được dù sử dụng máy tính.
Áp dụng xấp xỉ bằng phân phối chuẩn, ta có

$$P(490 \leq X \leq 500)$$
$$= \varphi\left(\frac{500 - 585 \cdot 0.8}{\sqrt{585 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \varphi\left(\frac{500 - 585 \cdot 0.8}{\sqrt{490 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = 0,011.$$

4.4.3 Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Bài tập

4.17. Trong một đợt thi tuyển công chức ở một thành phố có 1.000 người dự thi với tỉ lệ đạt là 80%. Tính xác suất để:

a) Có 172 người không đạt?

b) Có khoảng 170 đến 180 người không đạt?

c) Có đúng 200 người không đạt?

4.18. Trong một cuộc bầu cử ở một thành phố, biết rằng 40% người dân ủng hộ ứng cử viên A. Chọn ngẫu nhiên 200 người, hỏi xác suất gặp được từ 76 đến 120 người ủng hộ ứng cử viên A là bao nhiêu?

4.19. Trong một kênh truyền hình tín hiệu số, biết rằng xác suất một bit bị lỗi khi truyền là 1×10^{-5}. Nếu 16 triệu bit được truyền đi, hỏi xác suất có hơn 150 lỗi là bao nhiêu?