Một số công thức xấp xỉ số e

Tạp chí và tư liệu toán học

Ngày 15 tháng 2 năm 2021

Liên quan tới giới hạn dãy số

- $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$
- $e = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} - \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\right]$
- $e = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
- $e = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$
- $e = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$
- $e = \lim_{n\to\infty} (1+n)^{\frac{11n}{6}} (n-1)^{\frac{5n}{6}} \left(\frac{2n+1}{2n^{n+1}}\right)^{\frac{8}{3}}$
- $e = \lim_{n\to\infty} \left((1+n)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - (n-1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right)$
- $e = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^n}{(2n-1)(n-1)^{n-1}}$

Liên quan tới tích vô hạn

- $e = 2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\right)^{1/4}\left(\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\right)^{1/8}\cdots$
- $e = \left(\frac{2}{1}\right)^{1/1}\left(\frac{2^2}{1\cdot 3}\right)^{1/2}\left(\frac{2^3\cdot 4}{1\cdot 3^3}\right)^{1/3}\left(\frac{2^4\cdot 4^4}{1\cdot 3^6\cdot 5}\right)^{1/4}\cdots,$
- $\prod_{k=0}^{n}(k+1)^{(-1)^{k+1}\binom{n}{k}},$
- $e = \frac{2\cdot 2^{(\ln(2)-1)^2}\cdots}{2^{\ln(2)-1}\cdot 2^{(\ln(2)-1)^3}\cdots}.$

Liên quan tới chuỗi vô hạn

- $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
- $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2(k!)}$
- $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{5(k!)}$
- $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{15(k!)}$
- $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{52(k!)}$
- $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^6}{203(k!)}$
- $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{877(k!)}$
- $e = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(n-i)!} + 2$

- $e = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-2k}{(2k)!} \right]^{-1}$
- $e = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(2k+1)!}$
- $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3-4k^2}{(2k+1)!}$
- $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k)^2+1}{(3k)!}$
- $e = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+3}{2^{2k+1}\,(2k+1)!} \right)^2$
- $e = \left(-\frac{12}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ \cos\left(\frac{9}{k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 9}} \right) \right)^{-\frac{1}{3}}$
- $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{B_n(k!)}$, trong đó B_n là số Bell thứ n được tính bởi công thức $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$ và $\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$ là số Stirling.

Liên quan tới liên phân số

- $$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ddots}}}}} = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{6}{6 + \ddots}}}}}$$
- $$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \ddots}}}}} = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \ddots}}}}}$$
- $$e^{\frac{2x}{y}} = 1 + \cfrac{2x}{y - x + \cfrac{x^2}{3y + \cfrac{x^2}{5y + \cfrac{x^2}{7y + \cfrac{x^2}{9y + \ddots}}}}}$$

Một số xấp xỉ khác

- $e \approx 2 + \dfrac{54^2 + 41^2}{80^2}$
- $e \approx \left(\pi^4 + \pi^5\right)^{\frac{1}{6}}$
- $e \approx \dfrac{271801}{99990}$
- $e \approx \left(150 - \dfrac{87^3 + 12^5}{83^3}\right)^{\frac{1}{5}}$
- $e \approx 4 - \dfrac{300^4 - 100^4 - 1291^2 + 9^2}{91^5}$
- $e \approx \left(1097 - \dfrac{55^5 + 311^3 - 11^3}{68^5}\right)^{\frac{1}{7}}$
- $e \approx 3 - \sqrt{\dfrac{5}{63}}$
- $e \approx 163^{\frac{32}{163}}$.
- $e \approx 2^{(0.1+0.3)^{-0.4}}$
- $e \approx 3^{0.5} + 4^{-0.1^2}$

- $e \approx \dfrac{5\left(0.4 + 6^{0.2}\right) - 1}{3}$
- $e \approx 2^{(0.3+0.1)^{-0.4} - 5^{-7.6}}$
- $e \approx \left(1 + 2^{-76}\right)^{4^{38}+0.5}$
- $e \approx \left(1 + 9^{-4^{7\times 6}}\right)^{3^{2^{85}}}.$
- $e \approx 2^{0.4^{-0.4}}$
- $e \approx \dfrac{0.2 + 6^{0.2}}{0.6}$
- $e \approx \left(1 + 9^{-9}\right)^{9^9}$
- $e \approx \left(1 + 9^{-9}\right)^{9^9+0.5}$
- $e \approx -0.1 + (-0.2 + 0.3)^{-0.45}$
- $e \approx (1+2)^{\left(0.3 + 0.4^5 + 0.6\right)}$
- $e \approx -\left(\dfrac{0.1 - 2}{0.3^{0.4}} - 0.5 + \dfrac{6}{7}\right)$
- $e \approx \left(\left(0.1^{-0.2}\right) - \dfrac{\left((3 - 0.4)^{0.5-0.6}\right)}{0.7}\right)^{-0.8}$

- $e \approx \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{\pi + \dfrac{2\phi - 1}{100 - 3.6 \times 10^{-4}}}}$, trong đó $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ là tỉ lệ vàng.
- $e \approx H_8 \left(1 + \dfrac{1}{80^2}\right)$, với $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ là số Harmonic thứ n.
- $e = \sinh(1) + \cosh(1)$