Tỷ Số Vàng và Dãy Số Fibonacci

Lê Quang Ánh, Ph.D.

Hình chữ nhật vàng, tỷ số vàng, và dãy số Fibonacci là những vấn đề Toán học được biết tới từ lâu trong giới học sinh Trung Học và sinh viên Đại học. Nay tôi viết lại một cách có hệ thống theo lời yêu cầu của một số số các bạn đọc. Với trình độ Toán năm cuối Trung học độc giả có thể đọc được nội dung bài viết. Ước mong bài viết có ích cho các độc giả ham thích Toán và cung cấp thêm một số tài liệu cho các giáo viên Toán phục vụ công tác giảng dạy.

1. Tỷ số vàng

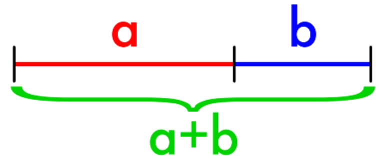
Rõ ràng là có rất nhiều con số thú vị. Chẳng hạn như số 2, đó là số nguyên tố chẵn duy nhất; số 3 là số nguyên tố lẻ đầu tiên; số 6 là một số hoàn hảo (bằng tổng của tất cả các ước số thật sự của nó); số $\sqrt{2}$ là số vô tỷ được tìm thấy đầu tiên (Pythago)….vân vân.

Trong số những con số thú vị ấy có một con số <u>có thể là thú vị</u> nhất, đó là số

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Con số này được biết từ thời Hy Lạp cổ đại, nhưng người ta chưa biết hết tính chất của nó. Trong quá trình phát triển lịch sử Toán học, tính chất của con số này được phát hiện nhiều dần lên, đôi khi người ta thấy nó xuất hiện trong thiên nhiên nữa. Paccioli (1447 - 1517), nhà Toán học Ý, đặt tên nó là *tỷ số thiêng liêng* (*proportion divina*), Kepler (1571 - 1630), nhà Toán học và Thiên văn học Đức, người đầu tiên thấy nó trong thiên nhiên, gọi nó là *con số thiêng liêng* (*sectio divina*), Leonard de Vinci (1452 - 1519), một nghệ sĩ thiên tài và đa tài Ý, đặt tên cho nó là *con số vàng* (*sectio aurea*).

Trước hết bắt đầu bằng một câu khá lạ của Euclid mà ta sẽ dùng để định con số đó: “*Hãy chia một đoạn thẳng theo tỷ số cực và tỷ số trung bình.”* Ý ông muốn nói rằng hãy chia một đoạn thẳng thành hai phần sao cho tỷ số độ dài đoạn thẳng với độ dài đoạn lớn bằng tỷ số độ dài đoạn lớn với độ dài đoạn nhỏ.



Nói rõ hơn: chia một đoạn thẳng thành hai đoạn thẳng độ dài a và b với a > b sao cho các độ dài ấy thỏa điều kiện sau đây:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}\,.$$

Đặt x = $\frac{a}{b}$, ta có

$$1+\frac{1}{x} = x \quad \text{hay là} \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

Nghiệm dương của phương trình này là

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803989\ldots$$

được gọi là *con số vàng*. Nghiệm âm của phương trình là

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\,0.61803989\ldots$$

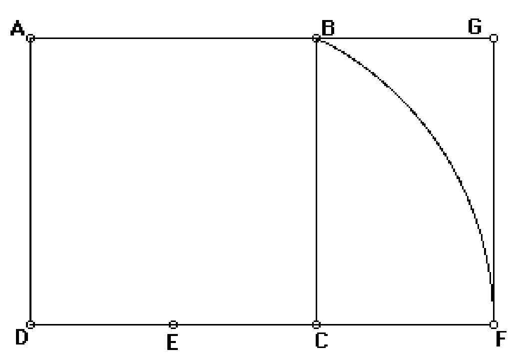
Ta chú ý thấy ngay rằng có vài hệ thức thú vị mà chúng ta sẽ xử dụng rải rác trong các phần sau:

1. $\phi^2 = \phi + 1$
2. $\phi^{-1} = \phi - 1$ và $\psi^{-1} = \psi - 1$
3. $\phi + \psi = 1$
4. $\phi\ \psi = -1$

2. Tỷ số vàng trong Hình học

- ***Hình chữ nhật vàng***:

Làm thế nào để xác định được tỷ số vàng ϕ bằng cách dùng phép dựng hình thông thường (thước kẻ và compa)?



Ta bắt đầu bằng một hình vuông ABCD, chiều dài các cạnh bằng 1. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Vẻ đường tròn tâm E bán kính EB, đường tròn này cắt phần nối dài của DC (về phía C) tại điểm F. Khi ấy DF = ϕ = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Chứng minh:

$$DE = EC = \frac{1}{2}, \quad EB = EF = \sqrt{EC^2 + CB^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$DF = DE + EF = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi. \quad \square$$

Hãy vẽ đầy đủ hình chữ nhật ADFG. Chú ý thấy:

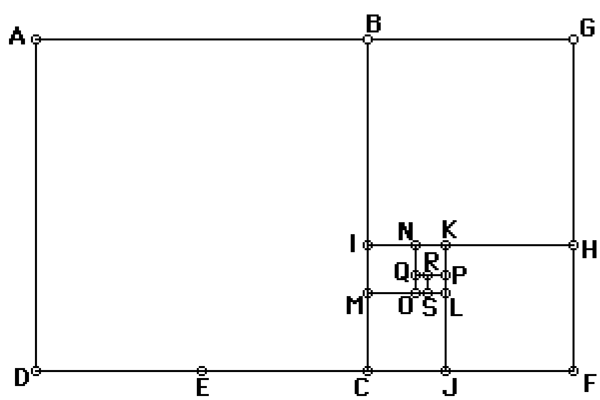
$$\frac{cạnh\ lớn}{cạnh\ nhỏ} = \frac{DF}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

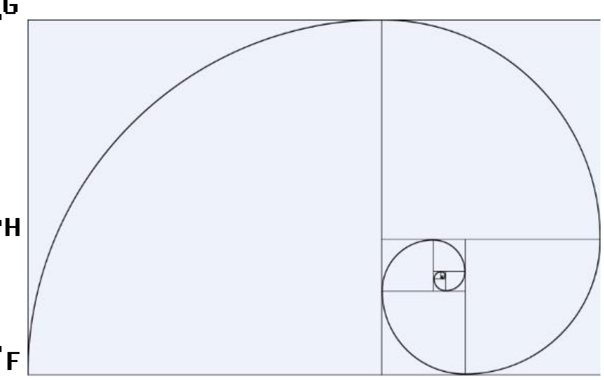
Người ta gọi hình chữ nhật mà tỷ số cạnh lớn trên cạnh nhỏ bằng ϕ là *hình chữ nhật vàng.* Trong hình vẽ trên, hình chữ nhật CFGB cũng là hình chữ nhật vàng. Thật vậy:

$$CF = DF - DC = \phi - 1 = \phi^{-1} \quad \text{(hệ thức 2)}$$

$$\text{và} \quad \frac{cạnh\ lớn}{cạnh\ nhỏ} = \frac{CB}{CF} = \phi.$$

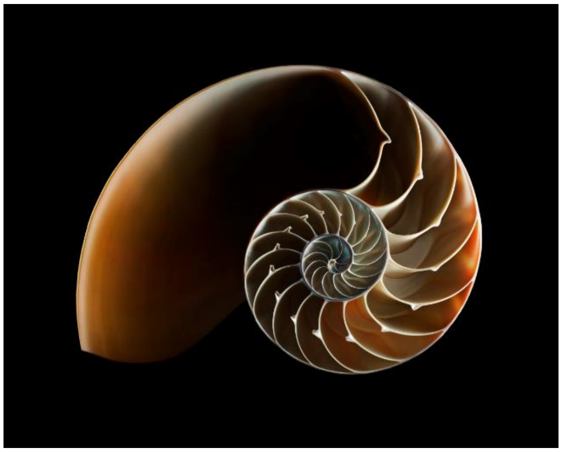
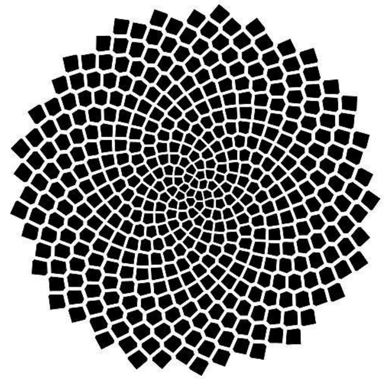
Nếu ta tiếp tục vẽ bên trong hình chữ nhật vàng CFGB hình vuông BGHI, ta sẽ được hình chữ nhật vàng ICFH. Và nếu cứ thế tiếp tục, ta sẽ được một dãy các hình chữ nhật vàng lồng vào nhau.





Bây giờ ta vẽ cung tròn phần tư tâm ở C đi qua B và D, rồi tiếp tục vẽ cung tròn phần tư tâm ở I đi qua B và H,…, và cứ thế tiếp tục. Ta sẽ được một đường cong có dạng một hình xoắn ốc. Đường cong này thường được gọi là *đường xoắn ốc vàng* hay *đường xoắn ốc Fibonacci* (tại sao có tên Fibonacci ta sẽ giải thích sau).

Một số hình ảnh trong thiên nhiên có hình giống như đường cong trên:

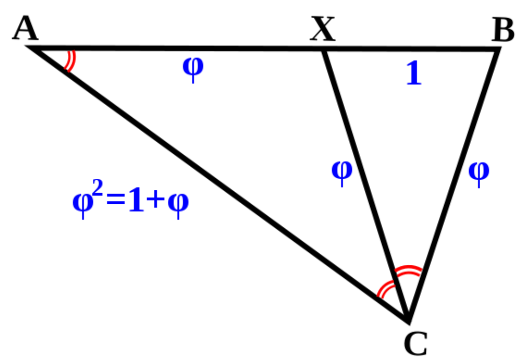
 

Người cổ Hy Lạp và La Mã đã biết xử dụng hình chữ nhật vàng trong xây dựng và kiến trúc như vài hình ảnh sau:

Điện Parthenon ở Hy Lạp được xây vào khoảng 500 năm trước tây lịch.

Khải Hoàn Môn Constantine (The Arch of Constantine) ở La Mã được xây vào năm 315 sau tây lịch.

- ***Tam giác vàng:***



Hãy xem một tam giác cân ABC, có góc ở đỉnh A bằng 36° (và như vậy hai góc ở đáy B và C bằng 72°). Phân giác CX tạo ra trong tam gíac ABC một tam giác mới là CXB đồng dạng với tam giác ABC. Giả sử BC = x và XB =1. Khi đó

$$XA = XC = CB = x .$$

Sự đồng dạng của hai tam giác như đã nêu ra ở trên cho

$$\frac{BC}{XB} = \frac{AB}{CX} \text{ hay là } \frac{x}{1} = \frac{1+x}{x} .$$

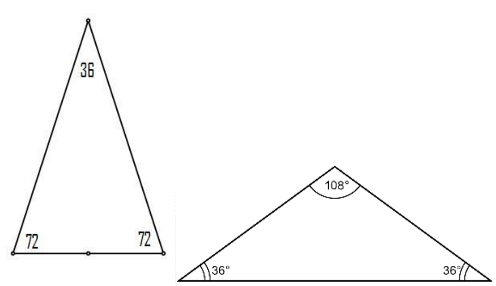
Như vậy ta có

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Nghiệm dương của phương trình này là $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Nói cách khác x = ϕ, tỷ số cạnh bên chia cho cạnh đáy của tam giác cân ABC (cân tại A) chính là tỷ số vàng, và tam giác ấy được gọi là tam giác vàng. Ta cũng nhận xét thấy tam giác CXB cũng là tam giác vàng. Trong tam giác cân XAC ta có

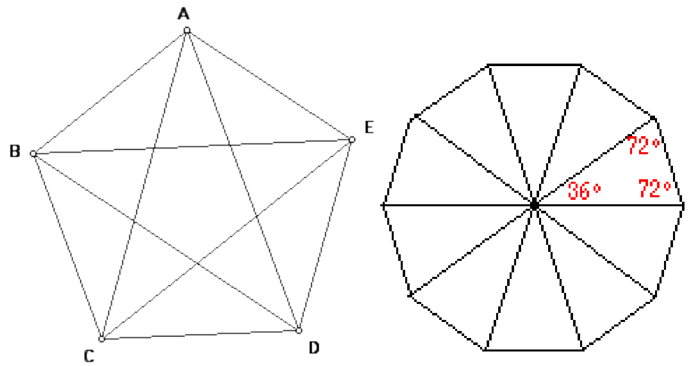
$$\frac{\text{đáy}}{\text{cạnh}} = \frac{AC}{CX} = \frac{x+1}{x} = x = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Tam giác loại này cũng được gọi là tam giác vàng. Để phân biệt ta gọi loại thứ nhất (như tam giác ABC) là loại *tam giác vàng ốm* (gầy), và loại thứ hai (như tam giác XCA) là *tam giác vàng mập*.



Tam giác vàng ốm và tam giác vàng mập.

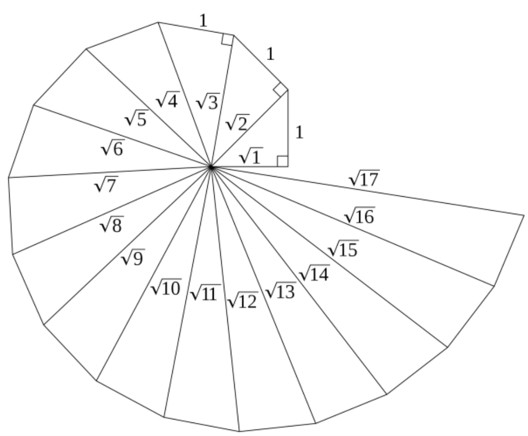
- ***Ngũ giác đều và thập giác đều:***



Xem một ngũ giác đều ABCDE. Các đường chéo chia ngũ giác đều thành những tam giác vàng ốm và mập. Thí dụ như tam giác ABC là tam giác vàng mập, tam giác ACD là tam giác vàng ốm. Các đường chéo tạo bên trong ngũ giác một hình ngôi sao năm cánh. Nếu các cạnh của ngũ giác đều dài bằng 1 thì độ dài các đường chéo sẽ là số $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Còn thập giác đều được tạo thành bởi 10 tam giác vàng ốm. Nếu các cạnh của thập giác đều dài bằng 1 thì bán kính vòng tròn ngoại tiếp của nó là $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Độc giả có thể kiểm chứng qua giá trị các góc).

- **Các đường xoắn ốc khác**

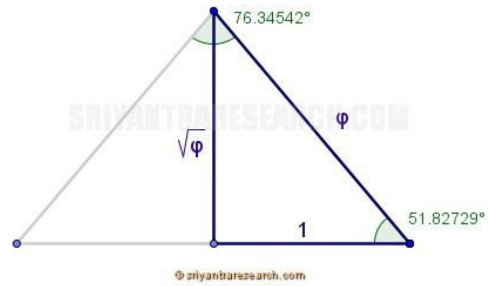
Trong phần trên ta đã giới thiệu đường xoắn ốc vàng. Bây giờ ta muốn giớ thiệu thêm vài đường xoắn ốc thú vị khác. Trước hết là đường xoắn ốc Theodorus[1] hay còn gọi là đường xoắn ốc căn số.

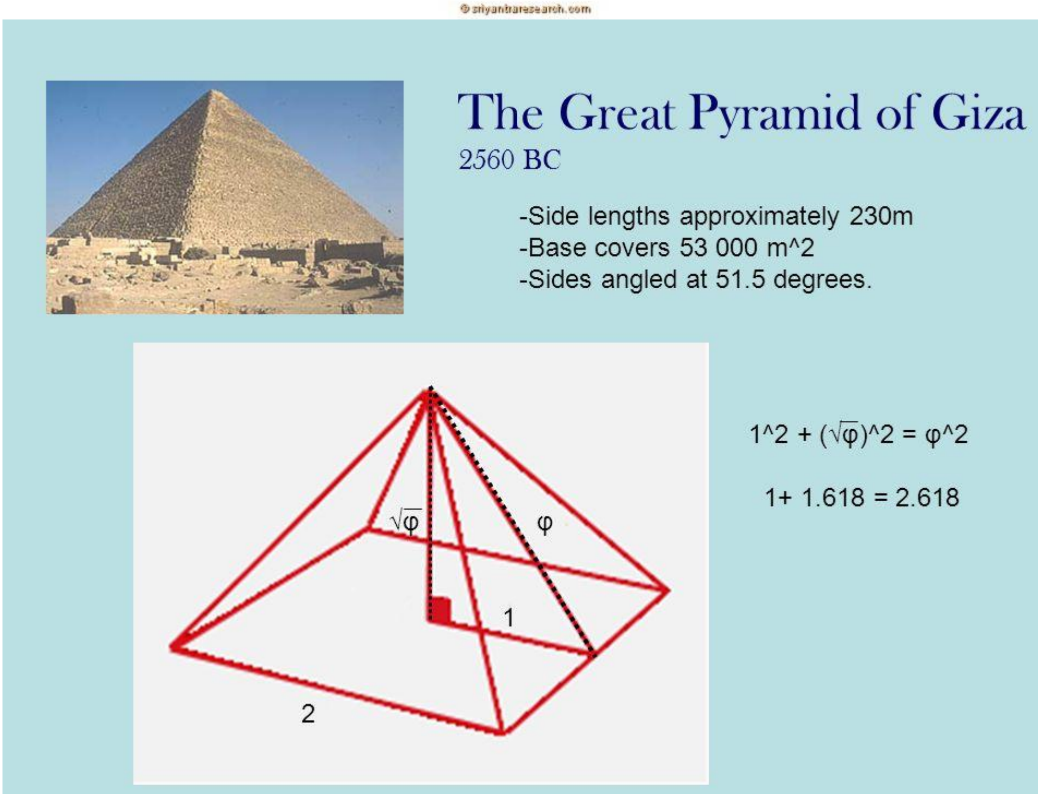


Ta bắt đầu bằng một tam giác vuông cân cạnh bằng 1. Vẽ một tam giác vuông khác với một cạnh góc góc vuông là cạnh huyền của tam giác vuông thứ nhất và cạnh góc vuông kia dài bằng 1. Cứ thế tiếp tục. Đường xoắn ốc này không phải là một đường cong "trơn" (smooth curve) và cũng không liên quan gì đến con số vàng của chúng ta, nhưng nó gợi ý cho Matthew Oster –

[1] Theodorus of Cyrene là một nhà toán học cổ Hy Lạp sống vào khoảng thế kỷ thứ 5 trước tây lịch.

hiện là giáo sư Toán Đại học Stockton, New Jersey – phát triển một đường xoắn ốc tương tự như đường xoắn ốc căn số nhưng lại có liên hệ tới con số vàng ϕ.





Bên trên là một tam giác Kepler, bên dưới là Kim tự tháp lớn nhất của Ai Cập và mô hình thu nhỏ của nó.

Trước hết ta giới thiệu một tam giác gọi tên là tam giác Kepler. Đó là tam giác vuông mà *độ dài hai cạnh góc vuông và cạnh huyền tạo thành một cấp số nhân.* Nếu một cạnh góc vuông là 1, cạnh góc vuông kia là a thì cạnh huyền là a^2. Định lý Pythago cho

$$a^4 = a^2 + 1.$$

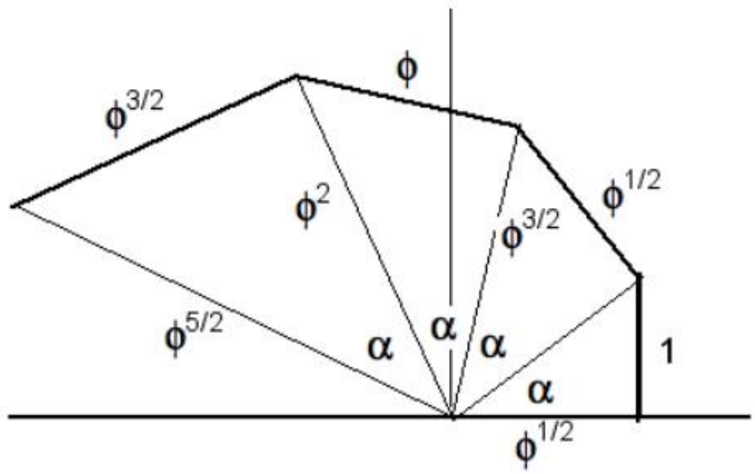
Do đó

$$a^2 = \phi \text{ và } a = \sqrt{\phi}\,.$$

Góc nhọn nhỏ $\propto$ trong tam giác Kepler thỏa hệ thức

$$\tan\propto = \cos\propto = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \text{ và } \propto \approx 38.17^{o}$$

Như vậy mọi tam giác Kepler đồng dạng với tam giác vuông mà ba cạnh là 1, $\sqrt{\phi}$, và ϕ. Người ta đã đo đạt và tìm thấy thiến diện chính của kim tự tháp lớn nhất ở Ai Cập là tam giác cân gồm hai tam vuông Kepler. Đây là chỉ dấu cho thấy số vàng ϕ đã được biết tới từ thời Ai Cập cổ đại.



Để dựng đường xoắn ốc Oster, ta bắt đầu bằng một tam giác Kepler có các cạnh là 1, $\sqrt{\phi}$, và ϕ. Tiếp đến là dựng tam giác Kepler đồng dạng với tam giác thứ nhất, tỷ số đồng dạng là $\sqrt{\phi}$. Nói rõ hơn, các cạnh của tam giác thứ hai là $\sqrt{\phi}$, ϕ, và $\phi\sqrt{\phi}$. Và cứ thế tiếp tục (xem hình trên). Cũng như đường xoắn ốc căn số, đường xoắn ốc Oster không trơn, tạo thành do các đoạn thẳng nối tiếp nhau, góc tương ứng ở tâm đều bằng nhau và bằng $\propto$.

Toa độ cực (polar coordinates) của các đỉnh lần lượt là

$$(\phi^{\frac{1}{2}}, 0),\ (\phi^{\frac{2}{2}}, \propto), (\phi^{\frac{3}{2}}, 2\propto), \ldots.$$

Hay là

$$(\phi^{\frac{t+1}{2}}, t\propto),\ \ t = 0,1,2,3,\ldots.$$

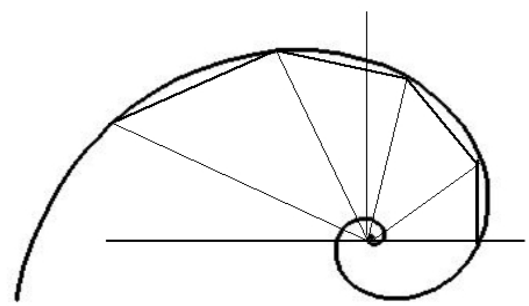
Với

$$\theta = t\propto \text{ và } r = \phi^{\frac{t+1}{2}},$$

Ta có phương trình của một xoắn ốc logarithm:

$$r = f(\theta) = \sqrt{\phi}.\,\phi^{\frac{\theta}{2\alpha}}.$$

Dạng của đường xoắn ốc này như hình dưới đây



3. Những biểu thức khác nhau của tỷ số vàng

Ta nhắc lại rằng tỷ số vàng ϕ là nghiệm dương của phương trình:

$$x^2 - x - 1 = 0. \qquad (1)$$

Ngoài ra ϕ thỏa một số hệ thức sau:

1. $\phi^2 = \phi + 1$
2. $\phi^{-1} = \phi - 1$ và $\psi^{-1} = \psi - 1$
3. $\phi + \psi = 1$
4. $\phi\ \psi = -1$,

trong đó ψ là nghiệm âm của (1), và giá trị của ϕ và ψ được cho bởi:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803989\ldots \text{ và } \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.61803989\ldots$$

1. Biểu thức của tỷ số vàng dưới dạng căn số lồng vào nhau.

- Nếu x > 0 thì phương trình (1) có thể được viết

$$x = \sqrt{x+1}.$$

Từ đó gợi ý cho ta xây dựng dãy số (x_n) như sau:

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1},\quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Ta chứng minh dãy số này hội tụ về ϕ. Ta có

$$|\phi - x_{n+1}| = \frac{|\phi^2 - x_{n+1}^2|}{|\phi + x_{n+1}|} = \frac{|\phi^2 - 1 - x_n|}{|\phi + x_{n+1}|} = \frac{|\phi - x_n|}{|\phi + x_{n+1}|} < \frac{|\phi - x_n|}{\phi} = \phi^{-1}|\phi - x_n|.$$

Từ đó ta có thể dẫn ra được:

$$|\phi - x_{n+1}| < \phi^{-n}|\phi - x_1|.$$

Do $\phi > 1$ nên dãy số (x_n) hội tụ đến ϕ. □

Từ cách xác định truy hồi dãy số (x_n) ta có

$$x_1 = 1,\ x_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ x_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\ ,$$

và vì (x_n) hội tụ đến ϕ nên ta có thể viết

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}\ .$$

- Từ phương trình (1) ta có

$$\frac{1}{x} = x - 1\ .$$

Do đó với $x > 0$ ta có

$$x = \sqrt{x+1} = \sqrt{2+\frac{1}{x}}\ .$$

Do đó ta có thể viết

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{\cdots}}}}}}}.$$

2. Biểu thức của tỷ số vàng dưới dạng phân số liên tiếp

Phương trình (1) cũng có thể được viết lại

$$x = 1 + \frac{1}{x}\ . \qquad (2)$$

Lập dãy số (x_n) một cách quy nạp như sau:

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}\ , \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

Ta chứng minh dãy số này hội tụ về ϕ. Ta có (ta xử dụng hệ thức 1 ở trên):

$$|\phi - x_{n+1}| = \left|\phi - \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\right| = \left|\frac{(\phi-1)x_n - 1}{x_n}\right| = \left|\frac{x_n - \phi}{\phi x_n}\right| < \phi^{-1}|\phi - x_n|.$$

Từ đó ta có thể dẫn ra được:

$$|\phi - x_{n+1}| < \phi^{-n}|\phi - x_1|.$$

Do $\phi > 1$ nên dãy số (x_n) hội tụ đến ϕ. □

Từ cách xác định truy hồi dãy số (x_n) nên ta có

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1 + \frac{1}{1},\ x_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}\ ,$$

và vì dãy số (x_n) hội tụ đến ϕ như đã chứng minh ở trên nên ta có:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

5. Dãy số Fibonacci

Leonardo Bonacci hay Leonardo of Pisa hay Fibonacci (1170 – 1250), nhà Toán học người Ý.

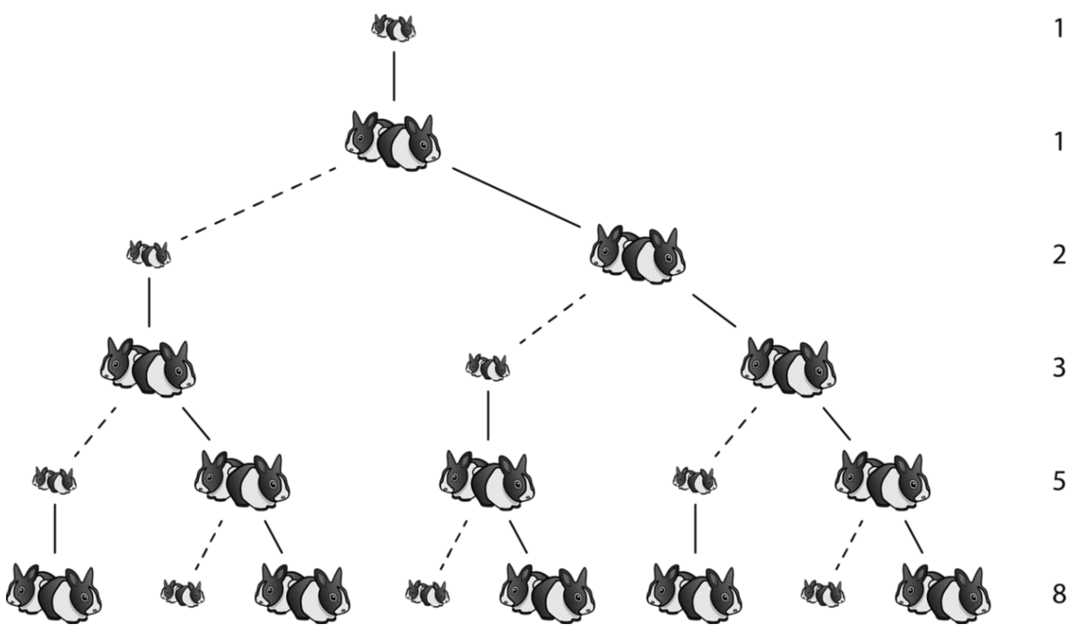
1. Bài toán con thỏ và dãy số Fibonacci

Câu chuyện bắt đầu vào năm 1202 ở thành phố Pisa thuộc nước Ý. Leonardo Bonacci là một chàng thanh niên con một thương gia giàu có, chàng có nhiều dịp đi đây đi đó, từ các thành phố ven Địa Trung Hải cho tới các xứ Ả Rập, có khi qua tới tận Ấn Độ. Ngoài việc giao thương, vì có khiếu về Toán học, qua những chuyến đi xa chàng học hỏi được rất nhiều, nhất là từ các nhà Toán học Ả Rập. Khi trở về lại Pisa, chàng viết cuốn *Liber Abaci;* đó là cuốn sách chứa đựng nhiều kiến thức Toán học của người Ả Rập và Ấn Độ rất mới lạ. Cuốn sách mau chóng lan truyền khắp Châu Âu và nhà Toán học trẻ tuổi Ý bây giờ có biệt danh là Fibonacci, trở thành nhà Toán học nổi tiếng thời Trung cổ.

Có thể chỉ là một trò đùa trí tuệ, một hôm nhà Toán học ra câu đố:

> *Hỏi có bao nhiêu cặp thỏ được sản sinh ra trong một năm, nếu bắt đầu bằng một cặp, biết rằng mỗi một tháng mỗi cặp sẽ cho ra đời một cặp mới, cặp mới này sẽ bắt đầu thụ thai ở tháng thứ hai kế tiếp (giả sử trong thời gian ấy không có con thỏ nào chết). (*Boyer, *A History of Mathematics).*

Câu đố mới đầu xem ra đơn giản, nhưng càng đi sâu vào bài toán các nhà Toán học của thời ấy và của nhiều thế hệ sau phát hiện ra rất nhiều tính chất thú vị của dãy số được suy ra từ bài toán ấy – dãy số Fibonacci. Thậm chí người ta còn thấy dãy số này xuất hiện trong thế giới tự nhiên và có liên hệ đến con số vàng mà chúng ta đã xem xét ở các phần trên.



Gọi F_n là số cặp thỏ ở cuối của tháng thứ *n.* Số cặp thỏ ở cuối tháng thứ (*n + 2*) – tức là F_{n+2} – phải thỏa phương trình sau:

$F_{n+2} = F_{n+1}$ + số cặp thỏ con mới đẻ ra trong tháng thứ (*n + 2*).

Mỗi cặp thỏ có ít nhất hai tháng tuổi mới có thể sinh đẻ trong tháng thứ (*n + 2*). Như vậy trong tháng này có F_n cặp thỏ con mới đẻ. Do đó ta có hệ thức qui nạp sau đây:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ , \ n = = 1,2,3,\ldots \quad (3)$$

Hệ thức qui nạp trên xác định một cách duy nhất dãy số (F_n) gọi là dãy số Fibonacci. Dễ dàng viết ra dưới đây một số các số hạng đầu tiên của dãy số này:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,…

Qua đó ta có câu trả lời cho bài toán con thỏ là: F_{12} = 144. Tuy nhiên vấn đề không dừng ở đây.

2. Công thức Binet cho F_n

- Chúng ta bắt đầu bằng cách xem thử các số hạng của dãy số tăng như thế nào. Muốn vậy ta xét tỷ số hai số hạng liên tiếp nhau:

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Dưới đây là một số giá trị của tỷ số này tính được nhờ các giá trị ban đầu của F_n :

1, 2, 1.5, 1.6666…, 1.625, 1.6154, 1.619, 1.6176, 1.6182,…..

Có vẻ như là x_n tiến tới tỷ số vàng ϕ = 1.61803989… . Thật vậy, theo cách định nghĩa của (x_n) và theo hê thức (3), ta có

$$x_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad n= 1,2,3,....$$

Đây chính là dãy số nói ở đoạn trên, và chúng ta đã thấy x_n tiến tới ϕ khi n tiến tới vô cực. □

- Bây giờ ta thử nhìn kỹ dãy số sau đây:

$$1, \phi, \phi^2, \phi^3, ..., \phi^n, ...$$

Dùng hệ thức $\phi^2 = \phi + 1$, ta viết được:

$$\Phi^{n+2} = \phi^n \phi^2 = \phi^n (\phi + 1)$$

$$= \phi^{n+1} + \phi^n.$$

Ta thấy hệ thức này giống hệ thức qui nạp của dãy Fibonacci (ở đây là lũy thừa thay vì là chỉ số). Vẫn dùng hệ thức $\phi^2 = \phi + 1$, ta liên tiếp có:

$\Phi^3 = \phi^2 \phi = 2\phi + 1$,

$\Phi^4 = \phi^3 \phi = (2\phi + 1)\phi = 3\phi + 2$,

$\Phi^5 = 5\phi + 3$,

$\Phi^6 = 8\phi + 5$,

Và cứ thế tiếp tục. Những hệ thức trên gợi cho ta rằng

$$\Phi^n = F_n \phi + F_{n-1}, \quad n = 2, 3, ... \quad (4)$$

Điều này có thể chứng minh được bằng qui nạp. Chỉ cần hệ thức $\phi^2 = \phi + 1$ là có thể chứng minh hệ thức (4). Phương trình $x^2 = x + 1$ còn có nghiệm âm $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, cho nên ta cũng có hệ thức

$$\psi^n = F_n \psi + F_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots \quad (5)$$

Từ hai phương trình (4) và (5) ta giải ra được

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

Đưa biểu thức của ϕ và ψ vào kết quả trên ta được công thức Binet sau đây:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Điều thú vị trong công thức này là mặc dù vế phải chứa nhiều căn thức phức tạp nhưng kết quả của nó lại là một số nguyên.

3. Một số hằng đẳng thức cho F_n

1. $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$. (6)

Chứng minh.

Đầu tiên ta chú ý rằng

$$\sum_{k=0}^{n} \phi^k = \frac{1-\phi^{n+1}}{1-\phi} = \frac{\phi^{n+1}-1}{\phi-1} = \frac{(\phi^{n+1}-1)(\phi+1)}{\phi^2-1} = (\phi^{n+1}-1)\phi = \phi^{n+2} - \phi.$$

Tương tự như trên ta cũng có:

$$\sum_{k=0}^{n} \psi^k = \psi^{n+2} - \psi.$$

Ta trở lại công thức cần chứng minh. Dựa vào hai kết quả trên, công thức Binet, và do tiện lợi ta đăt $F_0 = 0$ mà không ảnh hưởng gì, nên ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=0}^{n} F_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} = \frac{(\phi^{n+2} - \psi^{n+2}) - (\phi - \psi)}{\sqrt{5}}.$$

Ta nhắc lại rằng:

$$\phi - \psi = \sqrt{5} \quad \text{và} \quad F_{n+2} = \frac{\phi^{n+2} - \psi^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

Do đó ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1. \qquad \square$$

2. $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$. (7) (Tổng n số hạng lẻ)

Chứng minh.

Chứng minh bằng qui nạp như sau:
Với n = 1, ta có:

$$F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1 = F_2 \text{ (Đúng).}$$

Giả sử (7) đúng với n = k > 1, nghĩa là ta có:

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2k-1} = F_{2k}\,.$$

Khi ấy:

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2k-1} + F_{2k+1} = F_{2k} + F_{2k+1} = F_{2k+2} = F_{2(k+1)} : \text{ (7) đúng với } n = k+1.$$

Như vậy (7) đúng với mọi n. □

3. $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$. (8) (Tổng của n số hạng chẵn)

Chứng minh.

Từ hệ thức (6) ta có:

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 \quad (6')$$

Lấy hệ thức (6') trừ hệ thức (7) theo từng vế, ta có:

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 - F_{2n} = (F_{2n+1} + F_{2n}) - F_{2n} - 1 = F_{2n+1} - 1. \quad □$$

4. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n\, F_{n+1}$. (9)

Chứng minh.

Chứng minh bằng qui nạp như sau:

Với n = 1, ta có:

$$F_1^2 = 1,\ F_1 F_2 = 1\times 1 = 1 : \text{ Công thức đúng với } n = 1.$$

Giả sử công thức đúng với n = k > 1, nghĩa là ta có

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_k^2 = F_k\, F_{k+1}\,,$$

Khi ấy

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_k\, F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) = F_{k+1} F_{k+2}\,.$$

Công thức (9) đúng với n = k+ 1.

Như vậy công thức (9) đã được chứng minh đúng với mọi n. □

5. $F_{m-1}\, F_n + F_m\, F_{n+1} = F_{m+n}$. (10)

Chứng minh.

Giữ m cố định. Ta chứng minh (10) đúng với mọi n bằng qui nạp.

Với n=1, ta có : $F_1 = F_2 = 1$, cho nên (1) trở thành:

$$F_{m-1} + F_m = F_{m+1}\,.$$

Hệ thức này đúng vì đó là hệ thức định nghĩa của dãy số Fibonacci. Giả sử (10) đúng với n, ta chứng minh (10) đúng với n+1.

$$F_{m-1}\,F_{n+1} + F_m\,F_{n+2} = F_{m-1}\,(F_{n-1} + F_n) + F_m\,(F_n + F_{n+1})$$

$$= F_{m-1}\,F_{n-1} + F_{m-1}F_n + F_m\,F_n + F_m\,F_{n+1}$$

$$= (F_{m-1}\,F_{n-1} + F_m\,F_n) + (F_{m-1}\,F_n + F_m\,F_{n+1})$$

$$= F_{m+n-1} + F_{m+n} = F_{m+n+1}.$$

Công thức (10) đúng với n+1, cho nên công thức (10) đúng với mọi n. Số nguyên m cố định nhưng bất kỳ, như vậy công thức (10) đúng với mọi m và n. □

6. $F^2_{n+1} - F^2_{n} = F_{n-1}\,F_{n+2}.$ (11)

Chứng minh.

$$F^2_{n+1} - F^2_{n} = (F_{n-1} + F_n)^2 - F^2_{n} = F^2_{n-1} + 2F_{n-1}\,F_n$$

$$= F_{n-1}(F_{n-1} + F_n + F_n) = F_{n-1}(F_{n+1} + F_n)$$
$$= F_{n-1}\,F_{n+2}\,. \quad \square$$

7. $F^2_{n+1} + F^2_{n} = F_{2n+1}\,.$ (12)

Chứng minh.

Ta sẽ kèm hệ thức (12) với hệ thức khác, rồi chứng minh cả hai hệ thức đều đúng với mọi n.

Xét hệ thống sau:

$$\begin{cases} F_{2n} = F_n\,(F_{n+1} + F_{n-1}) & (i) \\ F_{2n+1} = F^2_{n+1} + F^2_{n} & (12) \end{cases}$$

Ta chứng minh hệ thống bằng qui nạp. Ta có:

$$F_0 = 0,\ F_1 = F_2 = 1,\ F_3 = 2.$$

Cả hai hệ thức đều đúng với n = 1.

Giả sử hệ thống đúng với n. Ta chứng minh hệ thống đúng với n+1. Ta có:

$$F_{2(n+1)} = F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n} = (F^2_{n+1} + F^2_{n}) + F_n\,(F_{n+1} + F_{n-1})$$

$$= F_{n+1}\,(F_n + F_{n+1}) + F_n\,(F_n + F_{n-1})$$

$$= F_{n+1}\,F_{n+2} + F_n\,F_{n+1} = F_{n+1}\,(F_{n+2} + F_n).$$

Như vậy (i) đúng với n+1, và do đó đúng với mọi n. Mặt khác ta có:

$$F_{2(n+1)+1} = F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+1} = F_{n+1}\,(F_{n+2} + F_n) + F_{n+1}^2 + F_n^2$$

$$= F_{n+1}\,(F_{n+1} + 2F_n) + F_{n+1}^2 + F_n^2$$

$$= (F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2) + F_{n+1}^2$$

$$= (F_{n+1} + F_n)^2 + F_{n+1}^2 = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2\ .$$

Như vậy (12) đúng với n+1, và do đó đúng với mọi n. □

8. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$. (13)

Chứng minh.

Ta dùng phương pháp qui nạp. Hiển nhiên công thức đúng với n = 1. Giả sử công thức đúng với n, ta chứng minh nó đúng với n+1.

$$F_{n+2}\,F_n - F_{n+1}^2 = (F_n + F_{n+1})F_n - F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_n\,F_{n+1} - F_{n+1}^2$$

$$= F_n^2 - F_{n+1}\,(F_{n+1} - F_n) = F_n^2 - F_{n+1}\,F_{n-1}$$

$$= -(-1)^n = (-1)^{n+1}\ .$$

Như vậy (13) đúng với n+1, và do đó đúng với mọi n. □

3. Tính chia đúng của các số Fibonacci

Các số Fibonacci có nhiều tính chất chia đúng (divisibility properties) rất thú vị.

Thí dụ $F_3 = 2$, $F_6 = 8$, và F_6 chia đúng cho F_3 . Một thí dụ khác: $F_4 = 3$, $F_8 = 21$, và F_8 chia đúng cho F_4 . Một cách tổng quát ta có:

<u>Định Lý 1.</u> *Nếu n chia đúng cho m thì F_n chia đúng cho F_m .*

Chứng minh.

Nếu n chia đúng cho m thì n = km, trong đó k là một số nguyên dương nào đó. Ta qui nạp trên k. Nếu k = 1 thì rõ ràng là tính chất đúng. Giả sử tính chất đúng với k, ta chứng minh nó đúng với k+1. Theo hệ thức (10) ta có:

$$F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk}F_{m-1} + F_{mk+1}F_m\ .$$

Vì F_{mk} và F_m đều chia đúng cho F_m nên vế phải của hệ thức trên chia đúng cho F_m . Nói cách khác $F_{m(k+1)}$ chia đúng cho F_m. Do đó tính chất đúng với k+1. Theo phương pháp qui nạp, định lý đã được chứng minh. □

Hệ quả: *Nếu n > 4 là một hợp số [2](composite number) thì F_n cũng là một hợp số.*

<u>Định Lý 2.</u> *Hai số Fibonacci liên tiếp là nguyên tố cùng nhau.*

Chứng minh.

Theo công thức (13) ở trên, nếu F_n và F_{n+1} có chung một ước số thì con số đó cũng là ước số của $(-1)^n$, điều này vô lý. □

<u>Định Lý 3.</u> *Nếu n và m là hai số nguyên dương thì*

$$\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(m,n)}.$$

Chứng minh.

Đặt d = gcd[3](m,n). Như thế thì d là ước số của m và n. Theo Định lý 1 thì F_d là ước số của F_m và F_n. Chúng ta chứng tỏ F_d là ước số chung lớn nhất của F_m và F_n. Vì d = gcd (m,n) nên theo Định lý Bezout tồn tại hai số nguyên r và s sao cho d = mr + ns. Theo công thức (10) ta có

$$F_d = F_{mr+ns} = F_{mr-1}F_{ns} + F_{mr}F_{ns+1}.$$

Hệ thức này cho thấy bất cứ ước số nào của F_m và F_n cũng là ước số của F_d . Do đó F_d là ước số chung lớn nhất của F_m và F_n. □

<u>Thí dụ.</u> Lấy m = 12, n = 18. Khi ấy d = gcd (12,18) = 6, và $F_6 = 8$. Trong khi đó $F_{12} = 144$, $F_{18} = 2584$, và gcd (144, 2584) = 8. Như vậy

$$\gcd(144, 2584) = F_{\gcd(12,18)} = 8.$$

Bây giờ ta phát biểu và chứng minh phần đảo của Định lý 1.

<u>Định Lý 4.</u> (Đảo của Định lý 1)

Nếu F_n chia đúng cho F_m thì n chia đúng cho m.

Chứng minh.

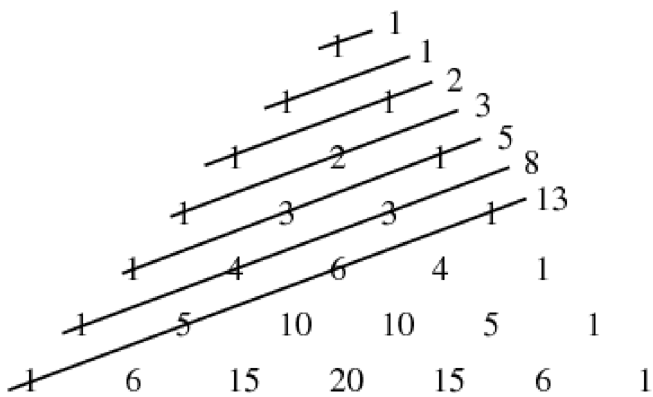
Nếu F_n chia đúng cho F_m thì $\gcd(F_n, F_m) = F_m$. Nhưng theo Định lý 3 thì $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(m,n)}$, cho nên

$$F_{\gcd(m,n)} = F_m.$$

Do đó gcd (n,m) = m. Điều này có nghĩa là n chia đúng cho m. □

[2] Một số nguyên là một hợp số khi nó có ít nhất một ước số thực sự (ước số khác 1 và chính nó).
[3] gcd : the greatest common divisor (ước số chung lớn nhất).

4. Tam giác Pascal và các số Fibonacci



Tam giác Pascal là một tam giác tạo nên bởi các con số mà các số hạng ở hàng thứ n là

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}, \quad 0 \le j \le n .$$

Đó là các hệ số của x^j trong khai triển của $(1 + x)^n$. Tam giác mang tên nhà Toán học Pháp là Pascal (1623 - 1662). Thật ra nó đã được nhà Toán học Trung Hoa tên là Yanghui và nhà Thiên văn học Ba Tư tên là Omar Khayyám tìm ra và nhiên cứu trước Pascal hơn 500 năm. Ta không đi sâu vào những đặc điểm của tam giác này, chỉ nêu ra một tính chất đặc biệt của nó mà thôi.

Đó là *tổng số các số hạng trong đường chéo nghiêng của tam giác chính là các số hạng trong dạy số Fibonacci.*

Trong hình trên là 7 đường chéo mà tổng các số hạng lần lượt là

$$F_1 = 1, F_2 = 1$$

$$F_3 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = 1 + 2 = 3$$

$$F_5 = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$F_6 = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$F_7 = 1 + 5 + 6 + 1 = 13$$

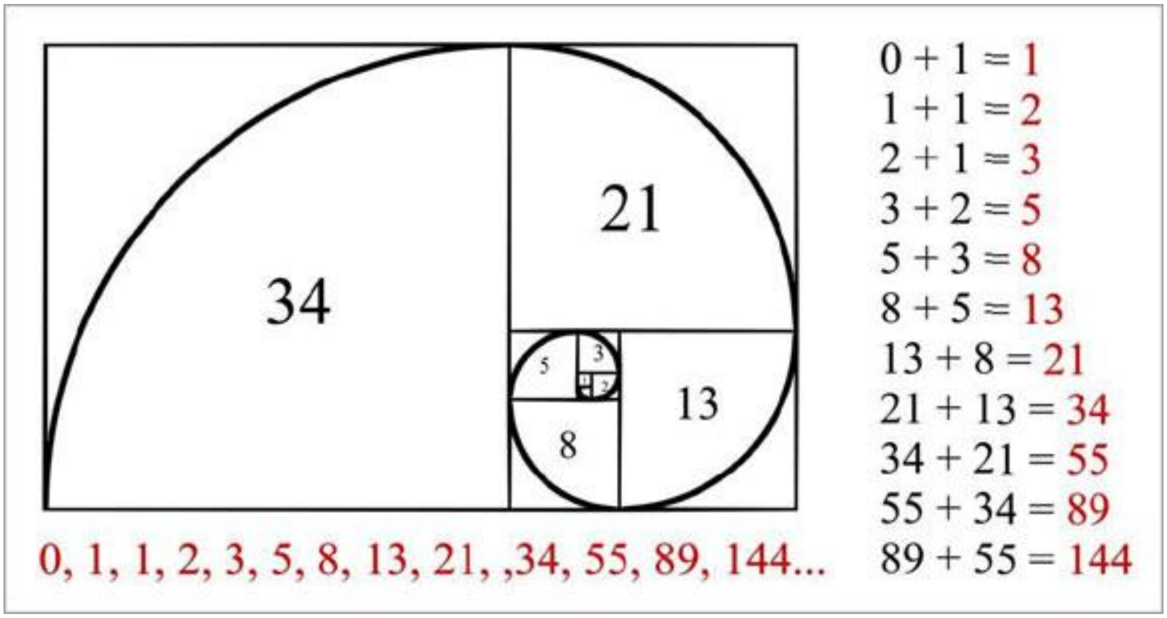
Ở hạng thứ n sẽ là

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots$$

Lưu ý rằng $\binom{n}{j}$ = 0 nếu *j > n.* Khi ấy ta có thể viết

$$F_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n-1-j}{j}, \ \ j = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

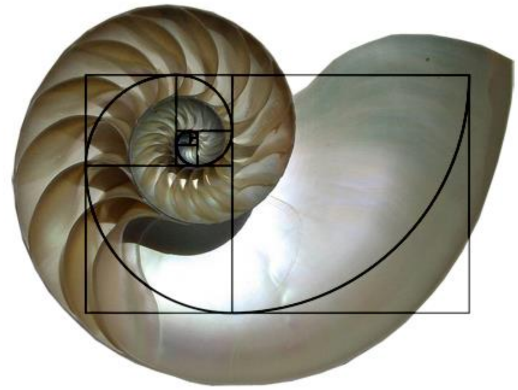
5. Trở lại hình chữ nhật vàng và hình xoắc ốc vàng



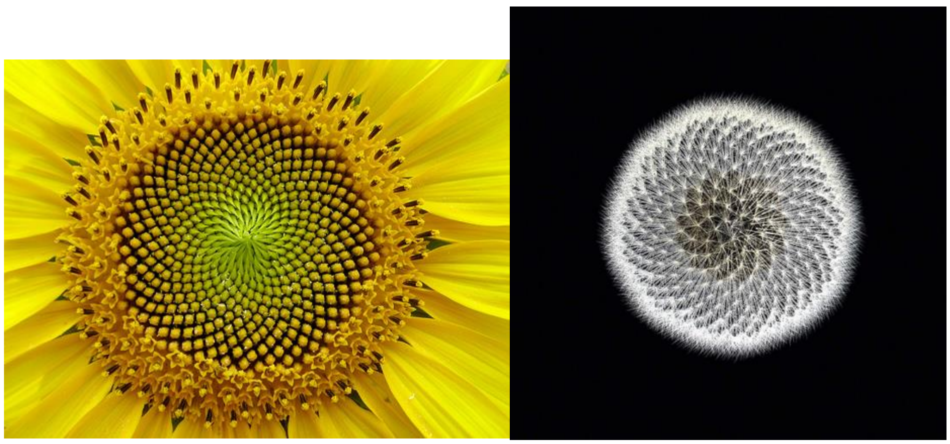
Trong phần đầu chúng ta đã được giới thiệu *hình chữ nhật vàng* và cách dựng nó bằng thước kẻ và compa. Chúng ta cũng đã được biết cách dựng *hình xoắn ốc vàng* từ hình chữ nhật vàng như thế nào.

Bây giờ chúng ta hãy quan sát các cạnh hình vuông – tức là các bề rộng của các hình chữ nhật vàng lồng vào nhau – bên trong hình chữ nhật vàng đầu tiên. Kể từ trong ra ngoài, số đo các cạnh ấy chính là các số hạng trong dãy số Fibonacci như trên hình vẽ trên.

Dưới đây là vài hình ảnh của hình xoắn ốc vàng trong thiên nhiên:



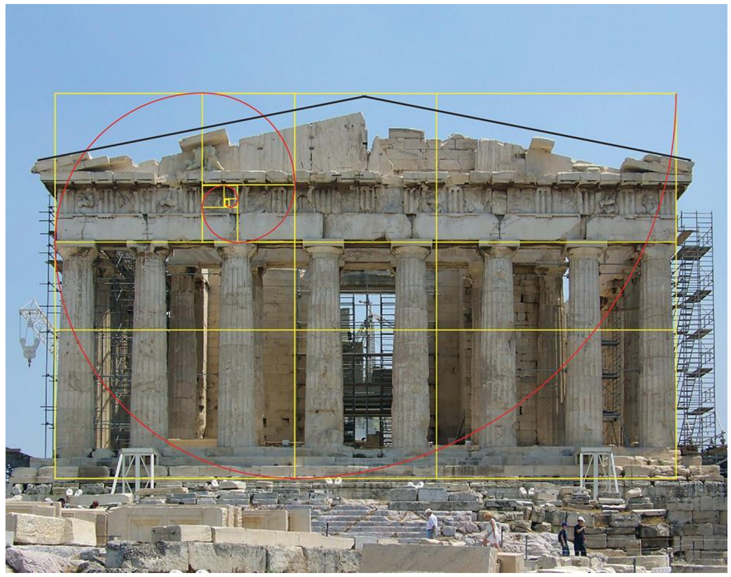
Cây Aloe polyphylla.



Hoa hướng dương và hoa Dandelion.

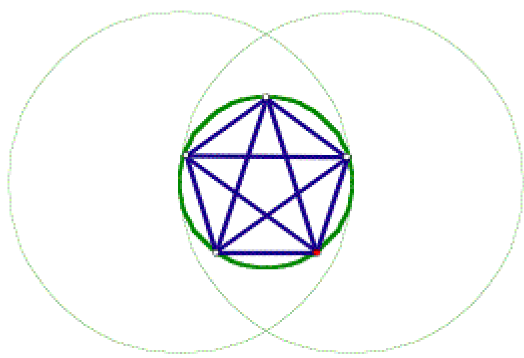
6. Lịch sử về tỷ số vàng và những con số Fibonacci

Người Hy Lạp cổ đại vào thế kỷ thứ năm và thứ tư trước Tây lịch đã đề cập tới bài toán chia một đoạn thẳng "*theo tỷ số cực và tỷ số trung bình*" (extreme and mean ratio). Tuy nhiên họ không đặt cho tỷ số này một cái tên đặc biệt nào cả. Những cái tên riêng cho tỷ số này như *tỷ số vàng*, *con số vàng*,…,đến rất lâu về sau. Năm 1909 ký hiệu ϕ (mẫu tự Hy Lạp đọc là *phi*) chỉ con số vàng, được nhà Toán học Mỹ Mark Bar (Theodore Cook, *Curves of Life*) dùng đầu tiên, gợi ý từ tên của nhà Điêu khắc Hy Lạp cổ đại Philias, người được cho là đã xử dụng tỷ số vàng và hình chữ nhật vàng trong nghệ thuật Kiến trúc.

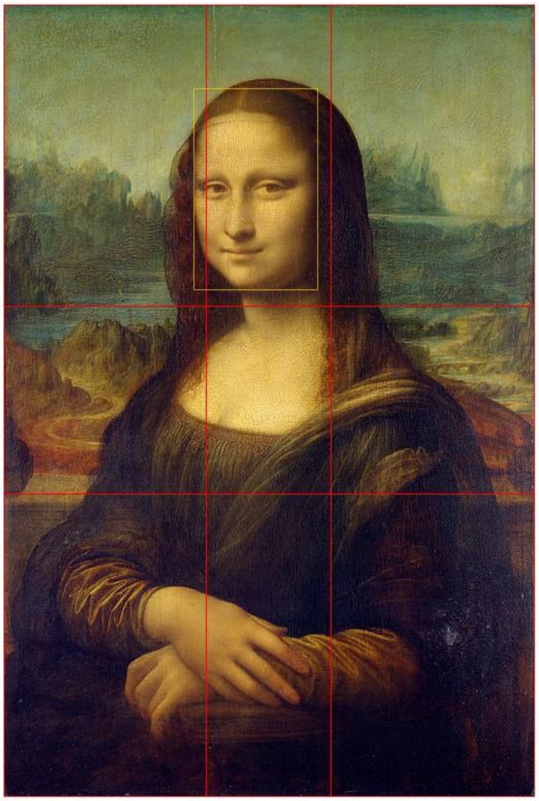


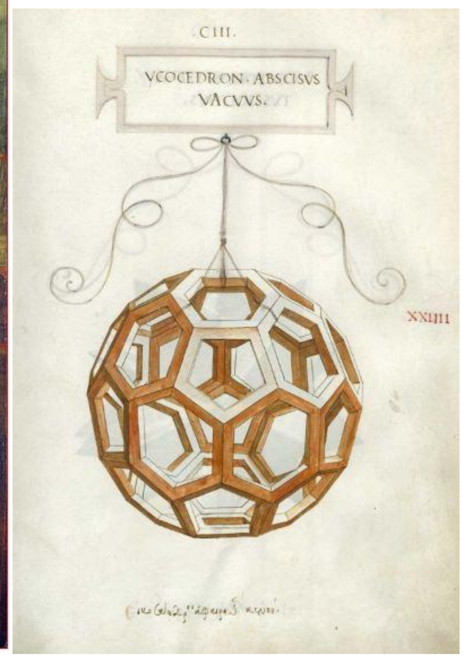
Đền Parthenon ở Hy Lạp, một tác phẩm của Philias.

Trở lại thời xa xưa, người Ai Cập đã biết dụng tỷ số vàng trong khi xây dựng các kim tự tháp (George Marowsky, *Misconceptions about Golden ratio*). Trường phái Pythago vào thế kỷ thứ 6 trước Tây lịch đã biết tỷ lệ vàng trong các ngũ giác đều và hình ngôi sao năm cánh. Họ đã chọn hình ngôi sao năm cánh nội tiếp trong ngũ giác đều làm biểu tượng cho trường phái của mình.



Năm 1509, Luca Pacioli, một nhà Toán học Ý, bạn và là cố vấn Toán học của nghệ sĩ thiên tài Leonardo da Vinci đã có nhiều nghiên cứu về con số vàng trong tác phẩm *Davina Proportione*. Những tranh vẽ trong sách này được chính Da Vinci minh họa. Người nghệ sĩ vĩ đại rất ưa thích con số vàng và đã thể hiện nó trong nhiều tác phẩm của ông.





Những *hình chữ nhật vàng* trong *Mona Lisa* và *The Divine Proportion* (Tỷ lệ thiêng liêng). Đó là một vài tranh vẽ nổi tiếng của Leonardo da Vinci có liên quan đến con số vàng.

Kepler (1571 – 1630), nhà Toán học và Thiên văn học Đức đã nói: "*Hình học có hai báu vật, đó là định lý Pythago và tỷ số vàng. Cái thứ nhất có thể sánh với vàng ròng, còn cái thứ hai sánh với đồ trang sức*." Hơn 400 năm sau Fibobacci, chính Kepler là người đầu tiên kết nối con số vàng với dãy số Fibonacci khi ông ước tính được rằng tỷ số hai số hạng liên tiếp trong dãy số Fibonacci xấp xỉ bằng tỷ số vàng. Phải đến một thế kỷ sau Kepler, vào năm 1753, Robert Simson (1687 – 1768), nhà Toán học Anh, mới chứng minh được dự đoán của Kepler:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi\ .$$

Cũng chính Simson đã chứng minh được công thức (13) ta đã trình bày ở phần trên:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n\ .$$

Công thức của số hạng tổng quát trong dãy số Fibonacci được Jacques Binet (1786 – 1856), nhà Toán học Pháp, tìm ra vào năm 1843. Một năm sau, Gabriel Lamé (1795 – 1870), nhà Toán học Pháp, đã dùng các số Fibonacci vào trong thuật toán tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên. Trong khoảng thời gian 1872 – 1891, Édouard Lucas (1742 – 1891), một nhà Toán học Pháp khác, đã chứng minh được nhiều hệ thức qui nạp trên dãy số Fibonacci, và tìm được những công thức kết nối các con số Fibonacci với các con số trong tam giác Pascal. Và cũng chính Lucas đặt tên cho dãy số 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,….là dãy số Fibonacci.

Tài liệu tham khảo

1. Hình ảnh: lấy từ Internet.
2. Theodore A. Cook. *Curves of Life*. Constable and Company Ltd. London. 1914.
3. Philip J. Davis. *Spirals from Theodorus to Chaos*. Wellesly, MA. 1992.
4. Mario Livio. *The Golden Ratio*. Broadway Books. New York. NY, 2002.
5. Nicholas J. Rose. *The Golden Mean and Fibonacci sequence*. E-book.