

線型代数のノート

Namachan

2026年1月4日

目 次

行列式	2
1 置換	2
1.1 置換の定義 (p.2) 1.2 置換の数え上げ (p.3) 1.3 置換の積と対称群 (p.4)	
2 行列式の定義と基本的性質	11
2.1 行列式の定義 (p.11) 2.2 行列式の基本的性質 (p.13)	
参考文献	17
索引	18

行列式

概要

このセクションでは「行列式」に関連する基本的な用語や概念を定義し、それらの関係性を明確にする。

1 置換

1.1 置換の定義

まず、行列式を定義する際に必要となる置換を定義しよう。

Definition 1.1.1: 置換

n 次の置換とは、集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ から集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ への全単射である。

置換 σ は、以下のように表されることが多い：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

このように、上段の数字と下段の数字を対応させることで、置換を表す。

この定義だけでは、いまいち「置換」というものがイメージしにくいかかもしれない。そこで、具体例を挙げて説明しよう。

Example 1.1.2: 置換

σ が、1 を 2, 2 を 3, 3 を 1 に対応させるとする。つまり、 σ は次のような写像である：

$$\sigma: 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1$$

このとき、 σ は 3 次の置換であり、次のように表すことができる：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、Example 1.1.2 の σ は

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とは異なる概念であることに注意したい。たしかに

$$P_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ではあるが、 σ は行列ではなく、 P_σ とは異なるものである。

また、置換を議論する際には、「動かさない文字は省略してよい」と約束することが多い。たとえば以下のような例である：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 置換の数え上げ

ここまでで、置換の定義について確かめた。次に、「3次の置換はいくつあるか」という問い合わせを考えよう。その過程で我々は、地道に置換を列挙していく方法をとる。まず、以下の命題を証明しよう。

Proposition 1.2.1: n 次の置換の個数

n 次の置換は $n!$ 個ある。

証明.

n 次の置換を考えるとき、まず 1 に対応する文字を n 通りの文字の中から選ぶことができる。次に、2 に対応する文字を残りの $n - 1$ 通りの文字の中から選ぶことができる。同様にして、 $3, 4, \dots, n$ にも文字を対応させていくと、 n 次の置換の個数は

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 1 = n!$$

個である。これが証明すべきことであった。□

そして、以下では n 次の置換すべての集合を S_n で表すことにする。このとき、**Proposition 1.2.1** より、

$$|S_n| = n!$$

である。ただし $|S_n|$ は S_n の元の個数を表す^{†1}。

n 次の置換の個数がわかったので、具体的な数字での例を考えてみよう。

Example 1.2.2: 3 次の置換

3 次の置換は、 $|S_3| = 3! = 6$ より、下記の 6 個でつくられる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4 次以上の置換についても同様に数え上げることができる。

1.3 置換の積と対称群

^{†1} この $|S_n|$ は $n(S_n)$ や $\#S_n$ とも表される。

Definition 1.3.1: 置換の積

$\sigma, \tau \in S_n$ に対して、写像の合成 $\sigma \circ \tau$ を

$$(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i))$$

と定義する。このとき、 $\sigma \circ \tau$ もまた n 次の置換であり、これは σ と τ の積と呼ばれる。

Example 1.3.2: 置換の積

$\sigma, \tau \in S_3$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 $\sigma \circ \tau$ は次のように計算される：

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \tau)(1) &= \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 1, \\ (\sigma \circ \tau)(2) &= \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2, \\ (\sigma \circ \tau)(3) &= \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 3. \end{aligned}$$

よって、

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Definition 1.3.3: 恒等置換

$\sigma \in S_n$ において、すべての $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して $\sigma(i) = i$ を満たす置換 σ を恒等置換とよび。

$$1_n$$

と表す。

Example 1.3.4: 恒等置換

3次の恒等置換 1_3 は、次のように表される：

$$1_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4次の恒等置換 1_4 は、次のように表される：

$$1_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Definition 1.3.5: 逆置換

$\sigma \in S_n$ に対して、逆写像 σ^{-1} を σ の逆置換とよび、次のように定義する：

$$\sigma^{-1}(\sigma(i)) = i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Example 1.3.6: 逆置換

$\sigma \in S_3$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 σ の逆置換 σ^{-1} は次のように計算される：

$$\sigma^{-1}(2) = 1,$$

$$\sigma^{-1}(3) = 2,$$

$$\sigma^{-1}(1) = 3.$$

よって、

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Column I

$\sigma, \tau, \rho \in S_n$ と写像 $\circ: S_n \times S_n \rightarrow S_n$ に対して以下のことが成り立つ：

結合律 $(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho)$ となる^{†1}.

単位元の存在 恒等写像 1_n が単位元として存在し、 $1_n \circ \sigma = \sigma \circ 1_n = \sigma$ となる。

逆元の存在 各元 σ は全単射であるため逆写像 σ^{-1} が存在し、 $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1_n$ となる。

このとき、 (S_n, \circ) は群をなすという^{†2}。特にこれを n 次対称群と呼ぶ。

もし上記の 3 つの条件に加えて、任意の $\sigma, \tau \in S_n$ に対して $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ が成り立つならば、 (S_n, \circ) は可換群であるというが、 $n \geq 3$ のとき、 (S_n, \circ) は可換群ではない。

^{†1} 写像の合成についてこの命題が成り立つことは既知とする。

^{†2} 単に「 S_n は群である」ともいうが、正確には S_n と二項演算 \circ の組 (S_n, \circ) が群である。

Column II

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $S_n \neq \emptyset$ である。なぜならば、恒等置換 1_n が S_n の元としてただひとつ存在するからである。

Proposition 1.3.7: 置換の性質

任意の関数 $f: S_n \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次が成り立つ：

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma^{-1}).$$

証明.

写像 $\varphi: S_n \rightarrow S_n$ を $\varphi(\sigma) = \sigma^{-1}$ で定める。任意の $\sigma \in S_n$ に対し $\sigma^{-1} \in S_n$ であるから、 φ は確かに定義される。

さらに、任意の $\sigma \in S_n$ について

$$(\varphi \circ \varphi)(\sigma) = \varphi(\varphi(\sigma)) = \varphi(\sigma^{-1}) = (\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$$

となるので、 $\varphi \circ \varphi = \text{id}_{S_n}$ である。よって φ は逆写像として φ をもち、したがって全単射である。

φ は全単射であるから、 σ が S_n を動くとき $\tau = \varphi(\sigma) = \sigma^{-1}$ もまた S_n を重複なく動く。したがって

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma^{-1}) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\varphi(\sigma)) = \sum_{\tau \in S_n} f(\tau) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)$$

であり、これが証明すべきことであった。□

Proposition 1.3.7 は、 $\{\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\} = S_n$ という命題と同値である。ここではのちに行列式を定義する際に議論が容易になる形を採用した。この命題は「 σ が S_n を動くとき、 σ^{-1} もまた S_n を重複なく動く」という直感的な理解でも十分である。

Definition 1.3.8: 互換

$\sigma \in S_n$ が、ある $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i$$

かつ

$$\sigma(k) = k, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$$

を満たすとき、 σ を**互換**と呼ぶ。このとき、互換 σ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

ともかけ、これ以下で (i, j) とかく。

Example 1.3.9: 互換

$\sigma \in S_4$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 σ は 2 と 3 を入れ替え、1 と 4 を動かさないので、 σ は互換であり、 $(2, 3)$ ともかける。

Proposition 1.3.10

任意の $\sigma \in S_n$ は、いくつかの互換の積として表される。

証明.

$\sigma \in S_n$ を任意にとる。

σ が恒等置換 1_n であるとき、 σ は $(1, 2) \circ (1, 2)$ のように、同じ入れ替えを 2 回繰り返したものとみなせる。したがって、 1_n は互換の積として表せる。

σ が恒等置換でないとき、 $i \neq \sigma(i)$ となる i がある。ここで、互換 $\tau = (i, \sigma(i))$ を考え、新たな置換 $\sigma' = \tau \circ \sigma$ を定める。すると、 $\sigma'(i) = \tau(\sigma(i)) = i$ となるため、 σ' によって自分自身に写される元の数が 1 つ増加する。この操作を繰り返すと、有限個の互換 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ を用いて $1_n = \tau_k \circ \dots \circ \tau_1 \circ \sigma =$ と表せる。各互換 τ_j の逆置換は自分自身 ($\tau_j^{-1} = \tau_j$) であるから、左から順に τ_k, \dots, τ_1 を乗じることで $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ が得られる。

よって、 σ は互換の積として表される。□

ここで注意しておきたいのは、互換の積の表現は一通りに定まるとは限らないということである。たとえば、次のような例がある：

Example 1.3.11

$\sigma \in S_3$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 σ は互換の積として

$$\sigma = (1, 3) \circ (1, 2)$$

とも

$$\sigma = (2, 3) \circ (1, 3)$$

とも表せる。

このように、互換の積は一意に定まらないが、互換の積に含まれる互換の数の偶奇性は一定である。

Proposition 1.3.12: 置換の符号の偶奇

任意の $\sigma \in S_n$ に対して、 σ を互換の積として表すとき、その互換の数の偶奇は σ により決まり、互換の積の表現によらない。

証明.

まず、多項式

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\&= \left\{ \begin{array}{cccc} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & \cdots & (x_n - x_1) \\ & \times (x_3 - x_2) & \cdots & (x_n - x_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times (x_n - x_{n-1}) \end{array} \right.\end{aligned}$$

を考える^{†1}. さらに、

$$\begin{aligned}\Delta^\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)}) \\&= \left\{ \begin{array}{cccc} (x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(1)}) & (x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(1)}) & \cdots & (x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(1)}) \\ & \times (x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(2)}) & \cdots & (x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(2)}) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times (x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n-1)}) \end{array} \right.\end{aligned}$$

と定める.

ここで、 σ が互換 (i, j) であるとき、 Δ^σ は Δ のうち $(x_j - x_i)$ の符号を反転させたものである。したがって、 $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_t$ であるとき、

$$\begin{aligned}\Delta^\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (-1)^t \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \\&= (-1)^s \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $(-1)^s = (-1)^t$ が成り立ち、 s と t の偶奇は一致する。これが証明すべきことであつた。□

^{†1} この多項式を差積という。以下、単に Δ とも記す。

今までの議論のまとめとして、用語を定義しよう：

Definition 1.3.13: 置換の符号

$\sigma \in S_n$ が互換の積として表されるとき、その互換の数が偶数であれば σ は**偶置換**であり、奇数であれば**奇置換**であるという。

また、 σ が偶置換であれば

$$\text{sgn}(\sigma) = 1$$

と定め、奇置換であれば

$$\text{sgn}(\sigma) = -1$$

と定める。この $\text{sgn}(\sigma)$ を σ の**符号**と呼ぶ。

Column III

Definition 1.3.13 で現れる $\text{sgn}(\sigma)$ は、置換 σ の「符号」(sign / signature) を表す記号である。記号 sgn は“signum”(ラテン語で「しるし」)に由来し、実数 x の符号を返す符号関数 $\text{sgn } x$ にも用いられる。 sgn は「サイン」「シグナム」「シグネチャー」「エス・ジー・エヌ」などと呼ばれることが多い。

Example 1.3.14: 置換の符号

$\sigma \in S_3$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 σ は互換の積として

$$\sigma = (1, 3) \circ (1, 2)$$

と表せるので、互換の個数は偶数である。ゆえに σ は偶置換であり、

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$$

次に、多項式に対する置換の作用を厳密に定義することで、符号の性質を導こう。

Definition 1.3.15: 多項式に対する置換の作用

n 変数多項式 $f(x_1, \dots, x_n)$ と置換 $\sigma \in S_n$ に対して、新たな多項式 f^σ を

$$f^\sigma(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

で定義する。このとき、 f^σ を f に対する置換 σ の作用とよぶ。

この定義に基づくと、差積 Δ に対する作用 Δ^σ は次のようにかける：

$$\Delta^\sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)})$$

このとき、 $\operatorname{sgn}(\sigma)$ は $\Delta^\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma)\Delta$ を満たす定数である。

この定義のもとで、次の補題を証明しよう。

Lemma 1.3.16: 作用の合成

任意の多項式 f と置換 $\sigma, \tau \in S_n$ に対して、次式が成り立つ：

$$(f^\tau)^\sigma = f^{\sigma \circ \tau}$$

証明.

$g = f^\tau$ とおくと、定義より $g(y_1, \dots, y_n) = f(y_{\tau(1)}, \dots, y_{\tau(n)})$ である。ここで $y_k = x_{\sigma(k)}$ と置き換えて作用させると、

$$\begin{aligned} (f^\tau)^\sigma &= g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\ &= f(x_{\sigma(\tau(1))}, \dots, x_{\sigma(\tau(n))}) \\ &= f(x_{(\sigma \circ \tau)(1)}, \dots, x_{(\sigma \circ \tau)(n)}) \\ &= f^{\sigma \circ \tau}. \end{aligned}$$

これが証明すべきことであった。□

最後に、置換の符号の基本的な性質をまとめた命題を示す。

Proposition 1.3.17: 置換の符号の性質

任意の $\sigma, \tau \in S_n$ に対して、次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(1_n) &= 1, \\ \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) &= \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau), \\ \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) &= \operatorname{sgn}(\sigma).\end{aligned}$$

証明.

第 1 式について、

$$\Delta^{1_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

なので、 $\operatorname{sgn}(1_n) = 1$ が成り立つ。

第 2 式について、**Lemma 1.3.16** から、任意の置換 σ, τ に対して $(\Delta^\tau)^\sigma = \Delta^{\sigma \circ \tau}$ が成り立つ。これを用いると、

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau)\Delta &= \Delta^{\sigma \circ \tau} \\ &= (\Delta^\tau)^\sigma \\ &= (\operatorname{sgn}(\tau)\Delta)^\sigma \\ &= \operatorname{sgn}(\tau)(\Delta^\sigma) \quad (\operatorname{sgn}(\tau) \text{ は定数なので作用の外に出る}) \\ &= \operatorname{sgn}(\tau)(\operatorname{sgn}(\sigma)\Delta) \\ &= (\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau))\Delta\end{aligned}$$

したがって、 $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$ が成り立つ。

第 3 式について、 $\sigma \circ \sigma^{-1} = 1_n$ であるから、今までの結果を用いると、

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\sigma \circ \sigma^{-1}) &= \operatorname{sgn}(1_n) \\ \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) &= 1\end{aligned}$$

$\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{1, -1\}$ より $\operatorname{sgn}(\sigma)^2 = 1$ であるから、両辺に $\operatorname{sgn}(\sigma)$ を掛ければ

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

を得る。

以上の議論により、命題の 3 つの式がすべて成り立つことが示された。□

ここまでで「置換」と「置換の符号」についての議論を終えた。次章では、これらの概念を用いて行列式を定義しよう。

2 行列式の定義と基本的性質

2.1 行列式の定義

Definition 2.1.1: 行列式

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、 A の行列式 (determinant) を $\det A$ で表し、次のように定義する：

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k\sigma(k)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}\end{aligned}$$

$\det A$ はしばしば $|A|$ ともかく。 A の成分を明記したい場合には下記のようにも表記する：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

また、 A の i 列目の列ベクトルについて

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

のときは $\det A$ を下記のように表記することもある：

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

Column IV

行列式の定義において、 σ が S_n を動くとき、 $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ は A の各行からちょうど 1 つずつ要素を選び、かつ各列からも 1 つずつ要素を選ぶような積である。したがって、行列式は「各行・各列から 1 つずつ要素を選んでできる積」の符号付き和として解釈できる。

Example 2.1.2: 2 次の行列式

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、 A の行列式は次のように計算される：

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= \operatorname{sgn} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) a_{11} a_{22} + \operatorname{sgn} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) a_{12} a_{21} \\ &= 1 \cdot a_{11} a_{22} + (-1) \cdot a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.\end{aligned}$$

Example 2.1.3: 3 次の行列式

3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、 A の行列式は次のように計算される：

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\ &= \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) a_{11} a_{22} a_{33} + \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) a_{11} a_{23} a_{32} \\ &\quad + \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right) a_{12} a_{21} a_{33} + \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) a_{13} a_{22} a_{31} \\ &\quad + \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) a_{12} a_{23} a_{31} + \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) a_{13} a_{21} a_{32} \\ &= 1 \cdot a_{11} a_{22} a_{33} + (-1) \cdot a_{11} a_{23} a_{32} + (-1) \cdot a_{12} a_{21} a_{33} \\ &\quad + (-1) \cdot a_{13} a_{22} a_{31} + 1 \cdot a_{12} a_{23} a_{31} + 1 \cdot a_{13} a_{21} a_{32} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.4: 転置行列の行列式

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、次が成り立つ：

$$\det A = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \cdot a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n}$$

証明.

$\sigma(k) = i$ とおく。 σ が全単射であることにより、 σ の逆写像として σ^{-1} が存在し、 $\sigma^{-1}(i) = k$ が成立する。このとき、以下の式が成り立つ：

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

ただし、ここでは積の順序を適宜入れ替えた。

したがって、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

であり、**Proposition 1.3.17** の第 2 式を用いると、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \cdot a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

この右辺に **Proposition 1.3.7** の主張を適用すると、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

σ を τ におきかえると、これが証明すべきことであった。□

ここで、転置行列の定義を思い出そう。**Proposition 2.1.4** は、行列 A とその転置行列 A^T の行列式が等しい

ことを主張している。すなわち、

$$\det A = \det A^\top$$

である。

この事実が示唆することは「行列式は行ベクトルに関しても列ベクトルに関しても同様の性質が成り立つ」ということである。

2.2 行列式の基本的性質

先に我々は、行列式を「各行・各列から1つずつ要素を選んでできる積」の符号付き和として解釈できると述べた。

この解釈はもちろん正しいのだが、以下では行列式を「多重線型性」「交代性」「正規化条件」を満たす関数として定義することを考える。

Proposition 2.2.1: 行列式の多重線型性

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、 i 行目を

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i$$

と分解したとき、次が成り立つ：

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{c}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

また、任意の定数 $k \in \mathbb{C}$ に対して、次が成り立つ：

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, k\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) = k \cdot \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

証明.

一つ目の主張について、行列式の定義から、

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (b_{i\sigma(i)} + c_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots c_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{c}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

二つ目の主張についても、行列式の定義から、

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, k\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (ka_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= k \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= k \cdot \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

以上により、命題の両方の主張が成り立つことが示された。□

Proposition 2.2.2: 行列式の交代性

n 次正方行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ に置換 τ を施した行列として $A' = (\mathbf{a}_{\tau(1)}, \mathbf{a}_{\tau(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\tau(n)})$ を考える
と、次が成り立つ：

$$\det A' = \text{sgn}(\tau) \cdot \det A$$

この命題は、特に τ が互換 (i, j) であるとき、次のように書き直せる：

$$\det A' = -\det A$$

これは、行列 A の i 行目と j 行目を入れ替えた行列 A' の行列式は、 A の行列式の符号を反転させたものであることを意味する。

具体例を考えたところで、本題の証明に入ろう：

証明.

行列式の定義から、

$$\begin{aligned}\det A' &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1)\sigma(1)} a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1(\sigma\tau^{-1})(1)} a_{2(\sigma\tau^{-1})(2)} \cdots a_{n(\sigma\tau^{-1})(n)}.\end{aligned}$$

ここで、 $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma\tau^{-1}(\tau)) = \text{sgn}(\sigma\tau^{-1}) \text{sgn}(\tau)$ が成り立つので、

$$\begin{aligned}\det A' &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma\tau^{-1}) \text{sgn}(\tau) \cdot a_{1(\sigma\tau^{-1})(1)} a_{2(\sigma\tau^{-1})(2)} \cdots a_{n(\sigma\tau^{-1})(n)} \\ &= \text{sgn}(\tau) \sum_{\sigma\tau^{-1} \in S_n} \text{sgn}(\sigma\tau^{-1}) \cdot a_{1\sigma\tau^{-1}(1)} a_{2\sigma\tau^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma\tau^{-1}(n)} \\ &= \text{sgn}(\tau) \cdot \det A.\end{aligned}$$

ここで、 σ が S_n を動くとき、 $\sigma\tau^{-1}$ も S_n を動くことを用いた。

以上により、命題が正しいことが示された。 \square

先ほどの具体例は、**Proposition 2.2.2** から導ける系としてまとめておこう：

Corollary 2.2.3: 行列式の交代性の系①

n 次正方行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ において、相異なる 2 つの行 \mathbf{a}_i と \mathbf{a}_j を入れ替えた行列を A' とする
と、次が成り立つ：

$$\det A' = -\det A$$

また、**Proposition 2.2.2** から導けるもう一つの系を示そう：

Corollary 2.2.4: 行列式の交代性の系②

n 次正方行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ において、もし $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ となる $i \neq j$ が存在すれば、次が成り立つ：

$$\det A = 0$$

証明.

i 行目と j 行目を入れ替えた行列を A' とすると, **Corollary 2.2.3** より

$$\det A' = -\det A$$

一方で, $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ であるから, $A = A'$ であり,

$$\det A' = \det A$$

が成り立つ. 以上より,

$$\det A = -\det A$$

が成り立ち, $\det A = 0$ が得られる. これが証明すべきことであった. \square

Proposition 2.2.5: 行列式の正規化条件

n 次単位行列 E_n に対して, 次が成り立つ:

$$\det E_n = 1$$

証明.

行列式の定義から,

$$\begin{aligned} \det E_n &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot e_{1\sigma(1)} e_{2\sigma(2)} \cdots e_{n\sigma(n)} \\ &= \operatorname{sgn}(1_n) \cdot e_{11} e_{22} \cdots e_{nn} + \sum_{\sigma \in S_n, \sigma \neq 1_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot e_{1\sigma(1)} e_{2\sigma(2)} \cdots e_{n\sigma(n)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 + 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

ここで, $\sigma \neq 1_n$ であるとき, 少なくとも一つの k に対して $\sigma(k) \neq k$ が成り立ち, したがって $e_{k\sigma(k)} = 0$ であることを用いた.

以上の議論によって, 命題が示された. \square

Proposition 2.2.6: 行列式の特徴づけ

多重線型写像 $F: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ が交代性と正規化条件を満たすとき, F は写像 \det と一致する.

証明.

$\mathbf{x}_j \in \mathbb{C}^n$ をとり, 行列 $A = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ を考える. また, 必要に応じて以下では $\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} \mathbf{e}_i$ と表記し, \mathbf{e}_i は標準基底ベクトルとする.

まず, F が多重線型写像であることから,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= \left(\sum_{i_1=1}^n x_{i_1 1} \mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n x_{i_2 2} \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n x_{i_n n} \mathbf{e}_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n x_{i_1 1} x_{i_2 2} \cdots x_{i_n n} F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}). \end{aligned}$$

ここで, もし (i_1, i_2, \dots, i_n) において, $i_k = i_l$ となる $k \neq l$ が存在すれば, 交代性から

$$F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = 0$$

が成り立つ. したがって, 和の中で非零となるのは, (i_1, i_2, \dots, i_n) が $\{1, 2, \dots, n\}$ の置換である場合に限られる. すなわち, ある $\sigma \in S_n$ に対して $(i_1, i_2, \dots, i_n) = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ である場合に限られる.

したがって,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1) 1} x_{\sigma(2) 2} \cdots x_{\sigma(n) n} F(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1) 1} x_{\sigma(2) 2} \cdots x_{\sigma(n) n} \operatorname{sgn}(\sigma) F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \\ &= F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1) 1} x_{\sigma(2) 2} \cdots x_{\sigma(n) n}. \end{aligned}$$

ここで, 正規化条件から $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ であることを用いると,

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1) 1} x_{\sigma(2) 2} \cdots x_{\sigma(n) n} = \det A$$

が成り立つ. これが証明すべきことであった. \square

[1], [2], [3], [4] を参考にした.

参考文献

- [1] 斎藤 正彦. 線型代数入門. 基礎数学. 東京大学出版会, 1966.
- [2] 新井 仁之. 線形代数 : 基礎と応用. 日本評論社, 龜書房, 2006.
- [3] 雪江 明彦. 群論入門. 代数学 / 雪江明彦著 1. 日本評論社, 2023.
- [4] 藤岡 敦. 手を動かしてまなぶ線形代数. 裳華房, 2021.

索引

か	さ
奇置換.....8	作用.....9
逆置換.....5	
行列式.....11	
偶置換.....8	
恒等置換.....4	
互換.....6	
	た
	置換.....2
	置換の積.....4
	は
	符号.....8