

線型代数のノート

Namachan

2025年12月27日

目 次

行列式	2
1 置換	2
1.1 置換の定義 (p.2) 1.2 置換の数え上げ (p.3) 1.3 置換の積と対称群 (p.4)	
参考文献	11
索引	12

行列式

概要

このセクションでは「行列式」に関連する基本的な用語や概念を定義し、それらの関係性を明確にする。

1 置換

1.1 置換の定義

まず、行列式を定義する際に必要となる置換を定義しよう。

Definition 1.1.1: 置換

n 次の置換とは、集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ から集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ への全単射である。

置換 σ は、以下のように表されることが多い：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

このように、上段の数字と下段の数字を対応させることで、置換を表す。

この定義だけでは、いまいち「置換」というものがイメージしにくいかかもしれない。そこで、具体例を挙げて説明しよう。

Example 1.1.2: 置換

σ が、1 を 2, 2 を 3, 3 を 1 に対応させるとする。つまり、 σ は次のような写像である：

$$\sigma: 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1$$

このとき、 σ は 3 次の置換であり、次のように表すことができる：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、Example 1.1.2 の σ は

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とは異なる概念であることに注意したい。たしかに

$$P_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ではあるが、 σ は行列ではなく、 P_σ とは異なるものである。

また、置換を議論する際には、「動かさない文字は省略してよい」と約束することが多い。たとえば以下のような例である：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 置換の数え上げ

ここまでで、置換の定義について確かめた。次に、「3次の置換はいくつあるか」という問い合わせを考えよう。その過程で我々は、地道に置換を列挙していく方法をとる。まず、以下の命題を証明しよう。

Proposition 1.2.1: n 次の置換の個数

n 次の置換は $n!$ 個ある。

証明.

n 次の置換を考えるとき、まず 1 に対応する文字を n 通りの文字の中から選ぶことができる。次に、2 に対応する文字を残りの $n - 1$ 通りの文字の中から選ぶことができる。同様にして、 $3, 4, \dots, n$ にも文字を対応させていくと、 n 次の置換の個数は

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 1 = n!$$

個である。これが証明すべきことであった。□

そして、以下では n 次の置換すべての集合を S_n で表すことにする。このとき、**Proposition 1.2.1** より、

$$|S_n| = n!$$

である。ただし $|S_n|$ は S_n の元の個数を表す^{†1}。

n 次の置換の個数がわかったので、具体的な数字での例を考えてみよう。

Example 1.2.2: 3 次の置換

3 次の置換は、 $|S_3| = 3! = 6$ より、下記の 6 個でつくられる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4 次以上の置換についても同様に数え上げることができる。

1.3 置換の積と対称群

^{†1} この $|S_n|$ は $n(S_n)$ や $\#S_n$ とも表される。

Definition 1.3.1: 置換の積

$\sigma, \tau \in S_n$ に対して、写像の合成 $\sigma \circ \tau$ を

$$(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i))$$

と定義する。このとき、 $\sigma \circ \tau$ もまた n 次の置換であり、これは σ と τ の積と呼ばれる。

Example 1.3.2: 置換の積

$\sigma, \tau \in S_3$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 $\sigma \circ \tau$ は次のように計算される：

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \tau)(1) &= \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 1, \\ (\sigma \circ \tau)(2) &= \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2, \\ (\sigma \circ \tau)(3) &= \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 3. \end{aligned}$$

よって、

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Definition 1.3.3: 恒等置換

$\sigma \in S_n$ において、すべての $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して $\sigma(i) = i$ を満たす置換 σ を恒等置換とよび。

$$1_n$$

と表す。

Example 1.3.4: 恒等置換

3次の恒等置換 1_3 は、次のように表される：

$$1_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4次の恒等置換 1_4 は、次のように表される：

$$1_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Definition 1.3.5: 逆置換

$\sigma \in S_n$ に対して、逆写像 σ^{-1} を σ の逆置換とよび、次のように定義する：

$$\sigma^{-1}(\sigma(i)) = i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Example 1.3.6: 逆置換

$\sigma \in S_3$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 σ の逆置換 σ^{-1} は次のように計算される：

$$\sigma^{-1}(2) = 1,$$

$$\sigma^{-1}(3) = 2,$$

$$\sigma^{-1}(1) = 3.$$

よって、

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Column I

$\sigma, \tau, \rho \in S_n$ と写像 $\circ: S_n \times S_n \rightarrow S_n$ に対して以下のことが成り立つ：

結合律 $(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho)$ となる^{†1}.

単位元の存在 恒等写像 1_n が単位元として存在し、 $1_n \circ \sigma = \sigma \circ 1_n = \sigma$ となる。

逆元の存在 各元 σ は全単射であるため逆写像 σ^{-1} が存在し、 $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1_n$ となる。

このとき、 (S_n, \circ) は群をなすという^{†2}。特にこれを n 次対称群と呼ぶ。

もし上記の 3 つの条件に加えて、任意の $\sigma, \tau \in S_n$ に対して $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ が成り立つならば、 (S_n, \circ) は可換群であるというが、 $n \geq 3$ のとき、 (S_n, \circ) は可換群ではない。

^{†1} 写像の合成についてこの命題が成り立つことは既知とする。

^{†2} 単に「 S_n は群である」ともいうが、正確には S_n と二項演算 \circ の組 (S_n, \circ) が群である。

Column II

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $S_n \neq \emptyset$ である。なぜならば、恒等置換 1_n が S_n の元としてただひとつ存在するからである。

Proposition 1.3.7: 置換の性質

任意の関数 $f: S_n \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次が成り立つ：

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma^{-1}).$$

証明.

写像 $\varphi: S_n \rightarrow S_n$ を $\varphi(\sigma) = \sigma^{-1}$ で定める。任意の $\sigma \in S_n$ に対し $\sigma^{-1} \in S_n$ であるから、 φ は確かに定義される。

さらに、任意の $\sigma \in S_n$ について

$$(\varphi \circ \varphi)(\sigma) = \varphi(\varphi(\sigma)) = \varphi(\sigma^{-1}) = (\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$$

となるので、 $\varphi \circ \varphi = \text{id}_{S_n}$ である。よって φ は逆写像として φ をもち、したがって全単射である。

φ は全単射であるから、 σ が S_n を動くとき $\tau = \varphi(\sigma) = \sigma^{-1}$ もまた S_n を重複なく動く。したがって

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma^{-1}) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\varphi(\sigma)) = \sum_{\tau \in S_n} f(\tau) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)$$

であり、これが証明すべきことであった。□

Proposition 1.3.7 は、 $\{\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\} = S_n$ という命題と同値である。ここではのちに行列式を定義する際に議論が容易になる形を採用した。この命題は「 σ が S_n を動くとき、 σ^{-1} もまた S_n を重複なく動く」という直感的な理解でも十分である。

Definition 1.3.8: 互換

$\sigma \in S_n$ が、ある $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i$$

かつ

$$\sigma(k) = k, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$$

を満たすとき、 σ を**互換**と呼ぶ。このとき、互換 σ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

ともかけ、これ以下で (i, j) とかく。

Example 1.3.9: 互換

$\sigma \in S_4$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 σ は 2 と 3 を入れ替え、1 と 4 を動かさないので、 σ は互換であり、 $(2, 3)$ ともかける。

Proposition 1.3.10

任意の $\sigma \in S_n$ は、いくつかの互換の積として表される。

証明.

$\sigma \in S_n$ を任意にとる。

σ が恒等置換 1_n であるとき、 σ は $(1, 2) \circ (1, 2)$ のように、同じ入れ替えを 2 回繰り返したものとみなせる。したがって、 1_n は互換の積として表せる。

σ が恒等置換でないとき、 $i \neq \sigma(i)$ となる i がある。ここで、互換 $\tau = (i, \sigma(i))$ を考え、新たな置換 $\sigma' = \tau \circ \sigma$ を定める。すると、 $\sigma'(i) = \tau(\sigma(i)) = i$ となるため、 σ' によって自分自身に写される元の数が 1 つ増加する。この操作を繰り返すと、有限個の互換 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ を用いて $1_n = \tau_k \circ \dots \circ \tau_1 \circ \sigma =$ と表せる。各互換 τ_j の逆置換は自分自身 ($\tau_j^{-1} = \tau_j$) であるから、左から順に τ_k, \dots, τ_1 を乗じることで $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ が得られる。

よって、 σ は互換の積として表される。□

ここで注意しておきたいのは、互換の積の表現は一通りに定まるとは限らないということである。たとえば、次のような例がある：

Example 1.3.11

$\sigma \in S_3$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 σ は互換の積として

$$\sigma = (1, 3) \circ (1, 2)$$

とも

$$\sigma = (2, 3) \circ (1, 3)$$

とも表せる。

このように、互換の積は一意に定まらないが、互換の積に含まれる互換の数の偶奇性は一定である。

Proposition 1.3.12: 置換の符号の偶奇

任意の $\sigma \in S_n$ に対して、 σ を互換の積として表すとき、その互換の数の偶奇は σ により決まり、互換の積の表現によらない。

証明.

まず、多項式

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & \cdots & (x_n - x_1) \\ & \times (x_3 - x_2) & \cdots & (x_n - x_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times (x_n - x_{n-1}) \end{array} \right.\end{aligned}$$

を考える^{†1}. さらに,

$$\begin{aligned}\Delta^\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)}) \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} (x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(1)}) & (x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(1)}) & \cdots & (x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(1)}) \\ & \times (x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(2)}) & \cdots & (x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(2)}) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times (x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n-1)}) \end{array} \right.\end{aligned}$$

と定める.

ここで、 σ が互換 (i, j) であるとき、 Δ^σ は Δ のうち $(x_j - x_i)$ の符号を反転させたものである。したがって、 $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_t$ であるとき、

$$\begin{aligned}\Delta^\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (-1)^t \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (-1)^s \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $(-1)^s = (-1)^t$ が成り立ち、 s と t の偶奇は一致する。これが証明すべきことであつた。□

^{†1} この多項式を差積という。以下、単に Δ とも記す。

今までの議論のまとめとして、用語を定義しよう：

Definition 1.3.13: 置換の符号

$\sigma \in S_n$ が互換の積として表されるとき、その互換の数が偶数であれば σ は**偶置換**であり、奇数であれば**奇置換**であるという。

また、 σ が偶置換であれば

$$\text{sgn}(\sigma) = 1$$

と定め、奇置換であれば

$$\text{sgn}(\sigma) = -1$$

と定める。この $\text{sgn}(\sigma)$ を σ の**符号**と呼ぶ。

Example 1.3.14: 置換の符号

$\sigma \in S_3$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 σ は互換の積として

$$\sigma = (1, 3) \circ (1, 2)$$

と表せるので、互換の個数は偶数である。ゆえに σ は偶置換であり、

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$$

次に、多項式に対する置換の作用を厳密に定義することで、符号の性質を導こう。

Definition 1.3.15: 多項式への置換の作用

n 変数多項式 $f(x_1, \dots, x_n)$ と置換 $\sigma \in S_n$ に対して、新たな多項式 f^σ を

$$f^\sigma(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

で定義する。

この定義に基づくと、差積 Δ に対する作用 Δ^σ は次のように書ける：

$$\Delta^\sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)})$$

このとき、 $\operatorname{sgn}(\sigma)$ は $\Delta^\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma)\Delta$ を満たす定数である。

Lemma 1.3.16: 作用の合成

任意の多項式 f と置換 $\sigma, \tau \in S_n$ に対して、次が成り立つ：

$$(f^\tau)^\sigma = f^{\sigma \circ \tau}$$

証明.

$g = f^\tau$ とおくと、定義より $g(y_1, \dots, y_n) = f(y_{\tau(1)}, \dots, y_{\tau(n)})$ である。ここで $y_k = x_{\sigma(k)}$ と置き換えて作用させると、

$$\begin{aligned} (f^\tau)^\sigma &= g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\ &= f(x_{\sigma(\tau(1))}, \dots, x_{\sigma(\tau(n))}) \\ &= f(x_{(\sigma \circ \tau)(1)}, \dots, x_{(\sigma \circ \tau)(n)}) \\ &= f^{\sigma \circ \tau}. \end{aligned}$$

これが証明すべきことであった。 \square

Proposition 1.3.17: 置換の符号の性質

任意の $\sigma, \tau \in S_n$ に対して、次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(1_n) &= 1, \\ \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) &= \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau), \\ \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) &= \operatorname{sgn}(\sigma).\end{aligned}$$

証明.

第 1 式について、

$$\Delta^{1_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

なので、 $\operatorname{sgn}(1_n) = 1$ が成り立つ。

第 2 式について、**Lemma 1.3.16** から、任意の置換 σ, τ に対して $(\Delta^\tau)^\sigma = \Delta^{\sigma \circ \tau}$ が成り立つ。これを用いると、

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau)\Delta &= \Delta^{\sigma \circ \tau} \\ &= (\Delta^\tau)^\sigma \\ &= (\operatorname{sgn}(\tau)\Delta)^\sigma \\ &= \operatorname{sgn}(\tau)(\Delta^\sigma) \quad (\operatorname{sgn}(\tau) \text{ は定数なので作用の外に出る}) \\ &= \operatorname{sgn}(\tau)(\operatorname{sgn}(\sigma)\Delta) \\ &= (\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau))\Delta\end{aligned}$$

したがって、 $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$ が成り立つ。

第 3 式について、 $\sigma \circ \sigma^{-1} = 1_n$ であるから、今までの結果を用いると、

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\sigma \circ \sigma^{-1}) &= \operatorname{sgn}(1_n) \\ \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) &= 1\end{aligned}$$

$\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{1, -1\}$ より $\operatorname{sgn}(\sigma)^2 = 1$ であるから、両辺に $\operatorname{sgn}(\sigma)$ を掛ければ

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

を得る。

以上の議論により、命題の 3 つの式がすべて成り立つことが示された。 \square

[1], [2], [3] を参考にした.

参考文献

- [1] 斎藤 正彦. 線型代数入門. 基礎数学. 東京大学出版会, 1966.
- [2] 新井 仁之. 線形代数 : 基礎と応用. 日本評論社, 龜書房, 2006.
- [3] 雪江 明彦. 群論入門. 代数学 / 雪江明彦著 1. 日本評論社, 2023.

索引

か	
奇置換	8
逆置換	5
偶置換	8
恒等置換	4
互換	6
た	
置換	2
置換の積	4
は	
符号	8