
数学のノート

なまちゃん

2024年11月5日

数学の基本

用語	2
はじめに (1.1, p.2) 定義 (1.2, p.2) 命題 (1.3, p.3) 定理 (1.4, p.4) 補題・系 (1.5, p.5) 証明 (1.6, p.5)	
記法	6
論理記号 (2.1, p.6) 集合 (2.2, p.7)	
言い回し	8
存在 (3.1, p.8) 一意性 (3.2, p.9) かつ/または (3.3, p.9)	

用語

はじめに

大学数学を学ぶにあたって、基本的な用語や記法に慣れておくことは重要である。そのことを踏まえた上で、高校で学んだ用語や記法を復習していこう。まず、以下の用語についてみていくことにする：

- 定義
- 命題
- 定理
- 補題・系
- 証明

定義

定義 (definition) とは、用語の意味を明確に述べたものであり、**Def** と略記される。同じ事柄について、2 つ以上の定義の形式があることもある。次の例を見てみよう：

Example 1.2.1: 「絶対値」の定義

$x \in \mathbb{R}$ に対して、 x の絶対値を $|x|$ とかき、次のように定義する：

$$|x| := \max\{x, -x\}.$$

この定義は以下のような形式で表現してもよい：

$$|x| := \sqrt{x^2}.$$

次に、定義の性質についてみていこう。線型代数の講義で学ぶことであるが、逆行列の定義は以下のようになる：

Example 1.2.2: 「逆行列」の定義

正方行列 A に対して、 $BA = AB = E$ となるような B が存在するとき、このような B を A の逆行列という。

ここで注意するのは **数学では定義は最小限の情報にとどめることが慣習となっている** ということである。たとえば、**Example 1.2.2** の定義から、以下の命題が成り立ち、その証明は容易である。

Proposition 1.2.3: 逆行列の一意性

正方行列 A に対して、 A の逆行列は存在するとすればただひとつである。

証明. **Proposition 1.2.3** の証明は、 A の逆行列が B, C であるとする、

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E$$

が成り立つ。このとき、

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$

が成り立つ。よって、 $B = C$ であり、逆行列の一意性が示された。□

このことから、**Example 1.2.2** でとりあげた逆行列の定義をもっと詳しく

正方行列 A に対して、 $BA = AB = E$ となるような B が存在するとき、このような B はただひとつで、 B を A の逆行列という。 B は一意に存在するので、これを A^{-1} と記す^{†1}。もちろん

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

と、「逆行列の一意性を定義に含めてもいいのではないか。」と主張する人がいるかもしれない。ただ、数学では「定義は最小限の情報にとどめ、そこから導かれる主張を命題として証明する」という慣習があり、なにが「定義」で、なにが「証明すべきこと」であるかはっきりさせることが多い^{†2}。

命題

命題 (proposition) とは、真偽が定まっている文を指す^{†3}。 **Prop** と略記される。このような論理体系を**二値論理**という。

中間として扱われる主張には

- (1) 定義が曖昧なもの
- (2) 意味が曖昧なもの
- (3) パラドックス

などがある。(1), (2) についてはのちほど説明するとして、ここでは (3) について例をあげよう。

Example 1.3.1: 自己言及のパラドックス

次のような主張を考える：

この文は偽である。

この主張は、自己言及のパラドックスであり、真偽が決まらない。

以下も自己言及のパラドックスの例である：

「この壁に貼る紙をしてはならない」と書かれた貼り紙

^{†1} 一意に存在することがわかっていないと、 A^{-1} のような記法で表すことはためらわれる。

^{†2} ただ、実際はここで取り上げた逆行列の定義も情報過多である。線型代数で学ぶことになるが、 $AB = E$ と $BA = E$ のどちらか片方の式のみで定義していいからである。

^{†3} 命題はふたつの意味があり、ここでの命題は「真偽が決まっている文」というニュアンスを持つ「広い意味での命題」というよりかは「定理・命題・補題」などと並列して表記される「狭い意味での命題」である。「狭い意味での命題」は正しい主張である。たとえば、「3 以上の自然数 n に対して $x^n + y^n = z^n$ は自然数解を持たない」という「フェルマーの最終定理」は、アンドリュー・ワイルズが証明するまでは「真偽が決まっているがどちらかはわからない」という「広い意味での命題」であったが、証明されたのちに「広い意味での命題」であると同時に「狭い意味での命題」にもなった。

ここまでで、二値論理でとりあげない主張を述べてきたが、そろそろ二値論理で取り扱う主張のお話に戻ろう。また、以下では簡単のために、「広い意味での命題」と「狭い意味での命題」のどちらも「命題」と記すと約束する。

Example 1.3.2: 命題

次に示す文は真偽が真の命題である。

- (1) 「 $1+1=2$ 」
- (2) 「円周率は 100 未満である」
- (3) 「信号の色は 3 色である」
- (4) 「霞ヶ浦は日本で二番目に面積が大きい湖である」

また、次に示す文は真偽が偽の命題である。

- (a) 「 $1+1=46$ 」
- (b) 「円周率は 3 未満である」
- (c) 「信号の色は 5 色である」
- (d) 「霞ヶ浦は日本で五番目に面積が大きい湖である」

Example 1.3.3: 命題でない文

次に示す文は命題ではない

- (A) 「 $1+1$ 」(なにも主張しておらず、真か偽か判定できない)
- (B) 「霞ヶ浦の面積は大きい」(客観的に大きいか判定できない)
- (C) 「桃はおいしい」(基準が明確でなく、客観的に真か偽か判定できない)
- (D) 「 $x^2 > 4$ 」(x に具体的な値を代入しないと真か偽か判定できない)

■ 定理

定理 (theorem) とは、正しいと分かっている数学の主張^{†4}の中でもとりわけ重要なものを指す。Thm と略記される。定理は重要な主張であり、「余弦定理」、「加法定理」、「ハイネ・ボレルの被覆定理」など、固有の名前が与えられているものも存在する。

Example 1.4.1: 三平方の定理

三平方の定理の主張は以下のようになる：

直角三角形の斜辺の長さを c とし、他の二辺の長さを a , b としたとき、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ。

^{†4} つまり、「狭い意味での命題」のこと。

Example 1.4.2: 次元定理

次元定理の主張は以下になる：

A を $m \times n$ 実行列とすると、

$$\text{rank } A + \dim(\ker A) = n.$$

補題・系

補題 (lemma) とは、定理や命題を示す過程で補助的に使われる命題のことである。Lem と略記される。補題は命題の一種である。

系 (corollary) とは、先に示した定理の主張からただちに得られる命題のことである。Cor と略記される。

補題、系を説明するにあたっては、証明すべき事柄が複数個必要である。その一例をここに示す。

Example 1.5.1: 補題

ユークリッドの補題の主張は以下の通りで、素因数分解の一意性を示すために用いられる：

素数 p が ab を割り切るなら、 p は a と b の少なくとも一方を割り切る。

そして素因数分解の一意性から、次の命題が導かれる。

Example 1.5.2: 自然数の約数の個数

自然数 n の約数の個数 $d(n)$ は以下の通りで、素因数分解の一意性からただちにわかる。

$$d(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \dots (e_i + 1)$$

ただし $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_i^{e_i}$ とする。

このことから、以下の系が導かれることは明らかであろう。

Example 1.5.3: 系

自然数 n の約数の個数 $d(n)$ が奇数となる必要十分条件は、 n が完全平方数であることである。

証明

ここまでで、正しいか裏付けられた主張を「命題」、「定理」、「補題・系」などとよぶことをみてきた。これらの主張が正しいことを示すプロセスを**証明 (proof)** という。

証明は一つの命題にいくつか存在する場合がほとんどであり、たとえば、**Example 1.4.1** の証明は 100 通り以上も存在することが知られている。

Example 1.6.1: 証明

辺の長さが a と b の直角三角形を 4 つ用意する. これらの三角形を組み合わせて, 辺の長さが $a + b$ の正方形を作る. このとき, 大きな正方形の面積は $(a + b)^2$ である.

一方で, 大きな正方形は中央に辺の長さが c の小さな正方形と, 4 つの三角形で構成されている. よって, 大きな正方形の面積は, 小さい正方形の面積と 4 つの三角形の面積の和に等しい:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \left(\frac{1}{2} ab \right).$$

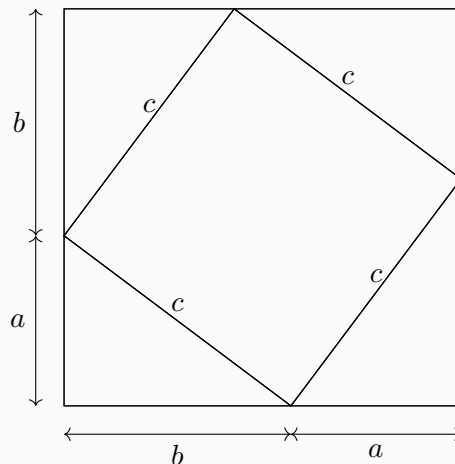
この式を整理すると,

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab$$

であるから,

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab, \\ \therefore a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

これが証明すべきことであった.



記法

論理記号

論理記号は, 命題を結合するために用いられる記号である. 代表的な論理記号を列举してみよう:

表 1 論理記号とその意味

記号	意味
\wedge	かつ (論理積)
\vee	または (論理和)
\neg	否定
\rightarrow	ならば
\Leftrightarrow	必要十分条件

これらの論理記号を用いて, 命題を結合することができる. たとえば, 次のような命題を考えてみよう:

Example 2.1.1: 論理記号

P を「 x は偶数である」とし、 Q を「 x は 3 の倍数である」とする.

記号	意味
$P \wedge Q$	x は偶数であり、かつ 3 の倍数である
$P \vee Q$	x は偶数である、または 3 の倍数である
$\neg P$	x は偶数でない

集合

Definition 2.2.1: 集合

もののあつまりを**集合**という^{†1}集合を構成する物を**元**または**要素**といい、集合 A の元が a であることを $a \in A$, $A \ni a$ などと表す.

^{†1} 公理的集合論の立場では、集合とは「無定義語」であるが、ここで詳しくは触れない.

集合に関して、いくつか注意点を挙げよう.

- 集合では書き並べる順序が重要でないため、例えば $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ である.
- 同じ要素が重複して含まれていても、1 つの要素として扱われるため、例えば $\{1, 1, 2, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ である.
- 集合の要素には、種類が異なるものを同時に含めることができる. 例えば、 $\{4, \{3\}\}$ では、4 は数であり、 $\{3\}$ は集合であるが、集合としての資格がある.

Definition 2.2.2: 部分集合

集合 A の要素はすべて集合 B の要素でもあるとき、 A は B の**部分集合**であるといい、これを

$$A \subset B, \quad B \supset A$$

などと表す.

よく使う集合

- \mathbb{R} は実数全体の集合を表している. Real number の頭文字をとった.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ は自然数全体の集合を表している. Natural number の頭文字をとった.
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ は複素数全体の集合を表している. Complex number の頭文字をとった.
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ は整数全体の集合を表している. \mathbb{Z} はドイツ語由来である.
- $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ は有理数全体の集合を表している. 「商」を表すイタリア語由来である.

Example 2.2.3

$$x \in \mathbb{Q}$$

と書くことで、 x は有理数であることを表す。

Example 2.2.4

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

である。つまり、実数全体の集合は複素数全体の集合の部分集合である。

集合の表記は文脈により省略されることがある。たとえば、以下のような問題があったとする。

2 次方程式

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

を解け。

x が属する全体集合は定められていないが、この場合だと「 $x \in \mathbb{C}$ 」とされることが多い。よってこの方程式の解は $x = -1, 4$ とする場合が多い。だが、もちろん $x \in \mathbb{N}$ とするなら、 $-1 \notin \mathbb{N}$ なので、この場合の解は $x = 4$ のみである。ただ、 x が属する全体集合は、文脈でわかったり明記されている場合が多いので、あまり心配はいらないと筆者は考える。

言い回し

存在

数学の証明において、「存在」は重要な概念である。といっても、あまりこのことを意識したことのない読者の方もいると思うので、この場を借りて具体例をもとに説明を試みることにする。

まず、「最大値・最小値の定理」を考えてみる。この定理は、

$[a, b]$ で連続な関数 f に対して、 f は $[a, b]$ 上で最大値と最小値を持つ。

というものである。

「最大値・最小値が存在するなんて当たり前だ」と思われる読者もいるかもしれない。しかし、本当にそれは自明なのか。実際には、関数の連続性や区間の閉有界性といった条件が揃って初めて、最大値や最小値の「存在」を保証できる。この定理を証明するにあたっては、厳密な数学的議論が必要となる。

次に、指数関数を考える際に有理数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を用いる場合の例を見てみよう：

$x \in \mathbb{R}$ としたとき、 a^x を定義するために、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^x$$

とするが、この極限が存在することは本当に自明なのか。 a^2 や $a^{2/3}$ の具体的な値のイメージは思い浮かぶと思うが、たとえば a^π のイメージについてはどうであろうか。

このように、極限の存在を証明するためには、有理数列の収束性など、細かな数学的性質を確認する必要がある。このようにして初めて、指数関数の定義が厳密なものとなるのである。

一意性

数学において「一意性」が重要である場面は多い。読者の中には線型代数の講義で「逆行列の一意性」などに触れた方もいると思われる。なぜ重要であるのか、一つ例を挙げて考えてみることにする。

微分積分の講義で習う定理に「平均値の定理」というものがある。その主張は

$[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能な関数 f に対して,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

をみたす $c \in (a, b)$ が存在する。

というものである。証明はのちに述べるとして、この定理の主張を少し変更してみよう：

$[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能な関数 f に対して,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

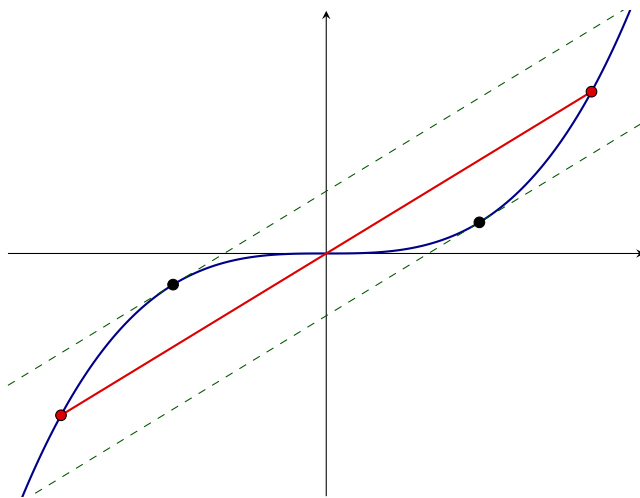
をみたす $c \in (a, b)$ がただひとつ存在する。

ここでは「 $c \in (a, b)$ が存在する」という主張を「 $c \in (a, b)$ がただひとつ存在する」というより強い主張に変更した。この主張の真偽は偽である。以下で、このことが問題になる状況を挙げよう。

$f(x) = x^3$ という関数を考える。この関数は $[-1, 1]$ で連続, $(-1, 1)$ で微分可能である。

このとき、図のように、条件を満たす $c \in (-1, 1)$ は複数存在するので、「ただひとつ存在する」という主張は偽である。さらに言えば、2本より多くこのような接線を引ける場合もある。

このことから、安易に「ただ一つ存在する」などと強い主張をすることは避けるべきであることがわかる。このことは平均値の定理に限らず、中間値の定理なども同様である。



かつ/または

数学と日常における「または」の使い方は異なる。以下に例を挙げよう。

Example 3.3.1: 「または」の使用例

(A) ランチメニューの主食として、米またはパンがついてくる^{†1}。

(B) 「運転免許を持っていない人」または「18歳未満の人」はレンタカーを借りることができない。

(A) は「どちらか片方のみ」の意味で「または」を使い、(B) は「いずれかが」の意味で「または」を用いている。

^{†1} この文を「米とパンの両方が食べられる」と解釈してもらっては困る。

数学では、「または」は「いずれかが」の意味で使われ、「どちらか片方のみ」の意味で使われることはない。

たとえば、 A, B を集合とすると、

$$x \in A \cup B$$

は「 x は A の元であるか、 B の元であるか、あるいは両方である」という意味である。つまり、「 $x \in A$ であり、 $x \notin B$ である」あるいは「 $x \notin A$ であり、 $x \in B$ である」といった状況のときにも、 $x \in A \cup B$ と記す。

[1], [2] を参考にした.

参考文献

- [1] 中島 匠一. 集合・写像・論理: 数学の基本を学ぶ. 共立出版, 2012, p. 240.
- [2] 金子 晃. 数理基礎論講義: 論理・集合・位相 (ライブラリ数理・情報系の数学講義 1). サイエンス社, 2010, p. 263.