数学のノート

なまちゃん

2024 年 11 月 5 日

目次

数学の基本

用語

はじめに

大学数学を学ぶにあたって，基本的な用語や記法に慣れておくことは重要である．そのことを踏まえた上で，高校で学んだ用語や記法を復習していこう．まず，以下の用語についてみていくことにする：

- 定義
- 命題
- 定理
- 補題・系
- 証明

定義

定義（definition） とは，用語の意味を明確に述べたものであり，**Def** と略記される．同じ事柄について，2 つ以上の定義の形式があることもある．次の例を見てみよう：

Example 1.2.1: 「絶対値」の定義

$x \in \mathbb{R}$ に対して，x の絶対値を $|x|$ とかき，次のように定義する：

$$|x| := \max\{x, -x\}.$$

この定義は以下のような形式で表現してもよい：

$$|x| := \sqrt{x^2}.$$

次に，定義の性質についてみていこう．線型代数の講義で学ぶことであるが，逆行列の定義は以下のようになる：

Example 1.2.2: 「逆行列」の定義

正方行列 A に対して，$BA = AB = E$ となるような B が存在するとき，このような B を A の逆行列という．

ここで注意するのは **数学では定義は最小限の情報にとどめることが慣習となっている**ということである．たとえば，**Example 1.2.2** の定義から，以下の命題が成り立ち，その証明は容易である．

Proposition 1.2.3: 逆行列の一意性

正方行列 A に対して，A の逆行列は存在するとすればただひとつである．

証明. **Proposition 1.2.3** の証明は，A の逆行列が B，C であるとすると，

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E$$

が成り立つ．このとき，

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$

が成り立つ．よって，$B = C$ であり，逆行列の一意性が示された． □

このことから，**Example 1.2.2** でとりあげた逆行列の定義をもっと詳しく

> 正方行列 A に対して，$BA = AB = E$ となるような B が存在するとき，このような B はただひとつで，B を A の逆行列という．B は一意に存在するので，これを A^{-1} と記す[†1]．もちろん
>
> $$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

と，「逆行列の一意性を定義に含めてもいいのではないか.」と主張する人がいるかもしれない．ただ，数学では「定義は最小限の情報にとどめ，そこから導かれる主張を命題として証明する」という慣習があり，なにが「定義」で，なにが「証明すべきこと」であるかはっきりさせることが多い[†2]．

命題

命題（proposition）とは，真偽が定まっている文を指す[†3]．**Prop** と略記される．このような論理体系を**二値論理**という．

中間として扱われる主張には

(1) 定義が曖昧なもの
(2) 意味が曖昧なもの
(3) パラドックス

などがある．(1)，(2) についてはのちほど説明するとして，ここでは (3) について例をあげよう．

Example 1.3.1: 自己言及のパラドックス

次のような主張を考える：

> この文は偽である．

この主張は，自己言及のパラドックスであり，真偽が決まらない．

以下も自己言及のパラドックスの例である：

> 「この壁に貼り紙をしてはならない」と書かれた貼り紙

[†1] 一意に存在することがわかっていないと，A^{-1} のような記法で表すことはためらわれる．

[†2] ただ，実際はここで取り上げた逆行列の定義も情報過多である．線型代数で学ぶことになるが，$AB = E$ と $BA = E$ のどちらか片方の式のみで定義していいからである．

[†3] 命題はふたつの意味があり，ここでいう命題は「真偽が決まっている文」というニュアンスを持つ「広い意味での命題」というよりかは「定理・命題・補題」などと並列して表記される「狭い意味での命題」である．「狭い意味での命題」は正しい主張である．たとえば，「3 以上の自然数 n に対して $x^n + y^n = z^n$ は自然数解を持たない」という「フェルマーの最終定理」は，アンドリュー・ワイルズが証明するまでは「真偽が決まっているがどちらかはわからない」という「広い意味での命題」であったが，証明されたのちに「広い意味での命題」であると同時に「狭い意味での命題」にもなった．

ここまでで，二値論理でとりあげない主張を述べてきたが，そろそろ二値論理で取り扱う主張のお話に戻ろう．また，以下では簡単のために，「広い意味での命題」と「狭い意味での命題」のどちらも「命題」と記すと約束する．

Example 1.3.2: 命題

次に示す文は真偽が真の命題である．

(1)「1+1=2」
(2)「円周率は 100 未満である」
(3)「信号の色は 3 色である」
(4)「霞ヶ浦は日本で二番目に面積が大きい湖である」

また，次に示す文は真偽が偽の命題である．

(a)「1+1=46」
(b)「円周率は 3 未満である」
(c)「信号の色は 5 色である」
(d)「霞ヶ浦は日本で五番目に面積が大きい湖である」

Example 1.3.3: 命題でない文

次に示す文は命題ではない

(A)「$1+1$」(なにも主張しておらず，真か偽か判定できない)
(B)「霞ヶ浦の面積は大きい」(客観的に大きいか判定できない)
(C)「桃はおいしい」(基準が明確でなく，客観的に真か偽か判定できない)
(D)「$x^2 > 4$」(x に具体的な値を代入しないと真か偽か判定できない)

定理

定理（theorem）とは，正しいと分かっている数学の主張[†4]の中でもとりわけ重要なものを指す．**Thm** と略記される．定理は重要な主張であり，「余弦定理」，「加法定理」，「ハイネ・ボレルの被覆定理」など，固有の名前が与えられているものも存在する．

Example 1.4.1: 三平方の定理

三平方の定理の主張は以下のようになる：

直角三角形の斜辺の長さを c とし，他の二辺の長さを a，b としたとき，

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ．

[†4] つまり，「狭い意味での命題」のこと．

Example 1.4.2: 次元定理

次元定理の主張は以下のようになる：

A を $m \times n$ 実行列とするとき，

$$\operatorname{rank} A + \dim(\ker A) = n.$$

補題・系

補題（lemma）とは，定理や命題を示す過程で補助的に使われる命題のことである．**Lem** と略記される．補題は命題の一種である．

系（corollary）とは，先に示した定理の主張からただちに得られる命題のことである．**Cor** と略記される．

補題，系を説明するにあたっては，証明すべき事柄が複数個必要である．その一例をここに示す．

Example 1.5.1: 補題

ユークリッドの補題の主張は以下の通りで，素因数分解の一意性を示すために用いられる：

素数 p が ab を割り切るなら，p は a と b の少なくとも一方を割り切る．

そして素因数分解の一意性から，次の命題が導かれる．

Example 1.5.2: 自然数の約数の個数

自然数 n の約数の個数 $d(n)$ は以下の通りで，素因数分解の一意性からただちにわかる．

$$d(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \dots (e_i + 1)$$

ただし $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_i^{e_1}$ とする．

このことから，以下の系が導かれることは明らかであろう．

Example 1.5.3: 系

自然数 n の約数の個数 $d(n)$ が奇数となる必要十分条件は，n が完全平方数であることである．

証明

ここまでで，正しいか裏付けられた主張を「命題」，「定理」，「補題・系」などとよぶことをみてきた．これらの主張が正しいことを示すプロセスを**証明（proof）**という．

証明は一つの命題にいくつか存在する場合がほとんどであり，たとえば，**Example 1.4.1** の証明は 100 通り以上も存在することが知られている．

Example 1.6.1: 証明

辺の長さが a と b の直角三角形を 4 つ用意する．これらの三角形を組み合わせて，辺の長さが $a+b$ の正方形を作る．このとき，大きな正方形の面積は $(a+b)^2$ である．

一方で，大きな正方形は中央に辺の長さが c の小さな正方形と、4 つの三角形で構成されている．

よって，大きな正方形の面積は，小さい正方形の面積と 4 つの三角形の面積の和に等しい：

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right).$$

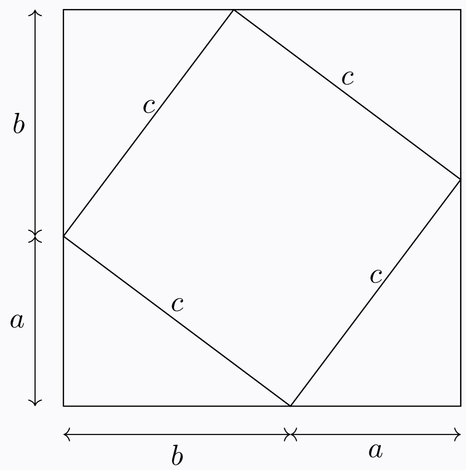
この式を整理すると，

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$$

であるから，

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab,$$
$$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2.$$

これが証明すべきことであった．



記法

論理記号

論理記号は，命題を結合するために用いられる記号である．代表的な論理記号を列挙してみよう：

表 1　論理記号とその意味

記号	意味
$\wedge$	かつ (論理積)
$\vee$	または (論理和)
$\neg$	否定
$\rightarrow$	ならば
$\Leftrightarrow$	必要十分条件

これらの論理記号を用いて，命題を結合することができる．たとえば，次のような命題を考えてみよう：

Example 2.1.1: 論理記号

P を「x は偶数である」とし，Q を「x は 3 の倍数である」とする．

記号	意味
$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$	x は偶数であり，かつ 3 の倍数である
$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$	x は偶数である，または 3 の倍数である
$\neg\mathrm{P}$	x は偶数でない

集合

Definition 2.2.1: 集合

もののあつまりを**集合**という[†1]集合を構成する物を**元**または**要素**といい，集合 A の元が a であることを $a \in A$，$A \ni a$ などと表す．

[†1] 公理的集合論の立場では，集合とは「無定義語」であるが，ここで詳しくは触れない．

集合に関して，いくつか注意点を挙げよう．

- 集合では書き並べる順序が重要でないため，例えば $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$ である．
- 同じ要素が重複して含まれていても，1 つの要素として扱われるため，例えば $\{1,1,2,2,2,3\} = \{1,2,3\}$ である．
- 集合の要素には，種類が異なるものを同時に含めることができる．例えば，$\{4,\{3\}\}$ では，4 は数であり，$\{3\}$ は集合であるが，集合としての資格がある．

Definition 2.2.2: 部分集合

集合 A の要素はすべて集合 B の要素でもあるとき，A は B の**部分集合**であるといい，これを

$$A \subset B, \quad B \supset A$$

などと表す．

よく使う集合

- $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表している．Real number の頭文字をとった．
- $\mathbb{N} = \{0,1,2,\cdots\}$ は自然数全体の集合を表している．Natural number の頭文字をとった．
- $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ は複素数全体の集合を表している．Complex number の頭文字をとった．
- $\mathbb{Z} = \{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ は整数全体の集合を表している．Z はドイツ語由来である，
- $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ は有理数全体の集合を表している．「商」を表すイタリア語由来である．

Example 2.2.3

$$x \in \mathbb{Q}$$

と書くことで，x は有理数であることを表す．

Example 2.2.4

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

である．つまり，実数全体の集合は複素数全体の集合の部分集合である．

集合の表記は文脈により省略されることがある．たとえば，以下のような問題があったとする．

> 2 次方程式
> $$x^2 - 3x - 4 = 0$$
> を解け．

x が属する全体集合は定められていないが，この場合だと「$x \in \mathbb{C}$」とされることが多い．よってこの方程式の解は $x = -1, 4$ とする場合が多い．だが，もちろん $x \in \mathbb{N}$ とするなら，$-1 \notin \mathbb{N}$ なので，この場合の解は $x = 4$ のみである．ただ，x が属する全体集合は，文脈でわかったり明記されている場合が多いので，あまり心配はいらないと筆者は考える．

言い回し

存在

数学の証明において，「存在」は重要な概念である．といっても，あまりこのことを意識したことのない読者の方もいると思うので，この場を借りて具体例をもとに説明を試みることとする．

まず、「最大値・最小値の定理」を考えてみる．この定理は，

> $[a, b]$ で連続な関数 f に対して，f は $[a, b]$ 上で最大値と最小値を持つ．

というものある．

「最大値・最小値が存在するなんて当たり前だ」と思われる読者もいるかもしれない．しかし，本当にそれは自明なのか．実際には，関数の連続性や区間の閉有界性といった条件が揃って初めて，最大値や最小値の「存在」を保証できる．この定理を証明するにあたっては，厳密な数学的議論が必要となる．

次に，指数関数を考える際に有理数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を用いる場合の例を見てみよう：

$x \in \mathbb{R}$ としたとき，a^x を定義するために，

$$\lim_{n \to \infty} a^{x_n} = a^x$$

とするが，この極限が存在することは本当に自明なのか．a^2 や $a^{2/3}$ の具体的な値のイメージは思い浮かぶと思うが，たとえば a^π のイメージについてはどうであろうか．

このように，極限の存在を証明するためには，有理数列の収束性など，細かな数学的性質を確認する必要がある．このようにして初めて，指数関数の定義が厳密なものとなるのである．

一意性

数学において「一意性」が重要である場面は多い．読者の中には線型代数の講義で「逆行列の一意性」などに触れた方もいると思われる．なぜ重要であるのか，一つ例を挙げて考えてることとする．

微分積分の講義で習う定理に「平均値の定理」というものがある．その主張は

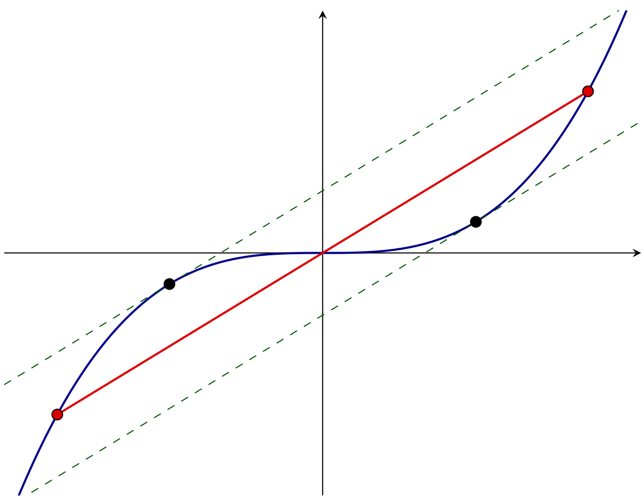
> $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能な関数 f に対して，
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
> をみたす $c\in(a,b)$ が存在する．

というものである．証明はのちに述べるとして，この定理の主張を少し変更してみよう：

> $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能な関数 f に対して，
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
> をみたす $c\in(a,b)$ がただひとつ存在する．

ここでは「$c\in(a,b)$ が存在する」という主張を「$c\in(a,b)$ がただひとつ存在する」というより強い主張に変更した．この主張の真偽は偽である．以下で，このことが問題になる状況を挙げよう．

$f(x)=x^3$ という関数を考える．この関数は $[-1,1]$ で連続，$(-1,1)$ で微分可能である．



このとき，図のように，条件を満たす $c\in(-1,1)$ は複数存在するので，「ただひとつ存在する」という主張は偽である．さらに言えば，2 本より多くこのような接線を引ける場合もある．

このことから，安易に「ただ一つ存在する」などと強い主張をすることは避けるべきであることがわかる．このことは平均値の定理に限らず，中間値の定理なども同様である．

かつ/または

数学と日常における「または」の使い方は異なる．以下に例を挙げよう．

Example 3.3.1: 「または」の使用例

(A) ランチメニューの主食として，米またはパンがついてくる[†1]．

(B)「運転免許を持っていない人」または「18 歳未満の人」はレンタカーを借りることができない．

(A) は「どちらか片方のみ」の意味で「または」を使い，(B) は「いずれかが」の意味で「または」を用いている．

[†1] この文を「米とパンの両方が食べられる」と解釈してもらっては困る．

数学では，「または」は「いずれかが」の意味で使われ，「どちらか片方のみ」の意味で使われることはない．

たとえば，A，B を集合とするとき，

$$x \in A \cup B$$

は「x は A の元であるか，B の元であるか，あるいは両方である」という意味である．つまり，「$x \in A$ であり，$x \notin B$ である」あるいは「$x \notin A$ であり，$x \in B$ である」といった状況のときにも，$x \in A \cup B$ と記す．

[**nakajima**]，[**kaneko**] を参考にした．