
齋藤正彦『線型代数入門』解答集

数学書解答集作成班

2025 年 5 月 8 日

目次

はじめに

概要

Special Thanks

第 1 章

p5 : 問 1

p5 : 問 2

p7 : 問-(上)

p7 : 問-(下)

p8 : 問 1

p8 : 問 1-(イ)

p8 : 問 1-(ロ)

p8 : 問 2

p8 : 問 2-(イ)

p8 : 問 2-(ロ)

p10 : 問 1

p10 : 問 2

p11 : 問 1

p12 : 問 2

p12 : 問 3

p13 : 問 1

p13 : 問 2

p18 : 問

p19 : 問 1-(上)

p19 : 問 2-(上)

p19 : 問 1-(下)

p19 : 問 2-(下)

p19 : 問 2-(下)-(イ)

p19 : 問 2-(下)-(ロ)

p19 : 問 2-(下)-(ハ)

p22 : 問 1

p22 : 問 1-(イ)

p22 : 問 1-(ロ)

p22 : 問 1-(ハ)

第 1 章・章末問題

p29-30 : 1

p29-30 : 2

p29-30 : 3

p29-30 : 4

p29-30 : 5

p29-30 : 6

p29-30 : 6-(イ)

p29-30 : 6-(ロ)

p29-30 : 7

p29-30 : 7-(イ)

p29-30 : 7-(ロ)

p29-30 : 8

p29-30 : 9

p29-30 : 10

p29-30 : 10-(イ)

p29-30 : 10-(ロ)

第 2 章

p34 : 問 1

p40 : 問

p40 : 問-(イ)

p41 : 問 1

p42 : 問 1

p42 : 問 2

p42 : 問 3

p42 : 問 3-(イ)

p42 : 問 3-(ロ)

p42 : 問 3-(ハ)

p52 : 問

p58 : 問

p58 : 問-(イ)

p58 : 問-(ロ)

p58 : 問-(ハ)

p62-63 : 問 1

p62 : 問 2

p62-63 : 問 3

p65: 問 1

p65: 問 2

第 2 章・章末問題

p70-73 : 1

p70-73 : 1-(イ)

p70-73 : 1-(ロ)

p70-73 : 2

p70-73 : 2-(イ)

p70-73 : 2-(ロ)

p70-73 : 2-(ハ)

p70-73 : 2-(ニ)

p70-73 : 3

p70-73 : 3-(イ)

p70-73 : 3-(ロ)

p70-73 : 4

p70-73 : 5

p70-73 : 6

p70-73 : 6-(イ)

p70-73 : 6-(ロ)

p70-73 : 6-(ハ)

p70-73 : 6-(二)	36	p83 : 問-(口)	50	p107-108 : 問 1-(口) . . .	63
p70-73 : 7	36			p107-108 : 問 1-(ハ) . . .	63
p70-73 : 8	37	第 3 章・章末問題	51	p107-108 : 問 1-(二) . . .	64
p70-73 : 9	37	p90-91 : 1	51	p107-108 : 問 2	64
p70-73 : 10	38	p90-91 : 1-(イ)	51	p107-108 : 問 2-(イ) . . .	64
p70-73 : 10-(イ)	38	p90-91 : 1-(口)	51	p107-108 : 問 2-(口) . . .	64
p70-73 : 10-(口)	38	p90-91 : 1-(ハ)	52	p107-108 : 問 2-(ハ) . . .	65
p70-73 : 10-(ハ)	39	p90-91 : 1-(二)	53	p107-108 : 問 2-(二) . . .	65
p70-73 : 11	39	p90-91 : 2	53	p122 : 問	65
p70-73 : 11-(イ)	39	p90-91 : 2-(イ)	53	p124 : 問-1)	66
p70-73 : 11-(口)	40	p90-91 : 2-(口)	53		
p70-73 : 11-(ハ)	40	p90-91 : 3	54	第 4 章・章末問題	67
p70-73 : 12	41	p90-91 : 3-(イ)	54	p127-130 : 1	67
p70-73 : 13	42	p90-91 : 3-(口)	54	p127-130 : 2	67
p70-73 : 13-(イ)	42	p90-91 : 4	54	p127-130 : 5	68
p70-73 : 13-(口)	42	p90-91 : 5	55	p127-130 : 6	69
p70-73 : 13-(ハ)	42	p90-91 : 6	55	p127-130 : 6-(イ)	69
p70-73 : 13-(二)	44	p90-91 : 7	56	p127-130 : 6-(口)	69
p70-73 : 14	44	p90-91 : 8	56	p127-130 : 7	70
p70-73 : 15	44	p90-91 : 9	57	p127-130 : 8	70
p70-73 : 15-(イ)	44	p90-91 : 10	57	p127-130 : 12	71
p70-73 : 15-(口)	45	p90-91 : 11	58	p127-130 : 12-(イ)	71
p70-73 : 15-(ハ)	45	p90-91 : 11-(イ)	58	p127-130 : 12-(口)	72
第 3 章	47	p90-91 : 11-(口)	58	p127-130 : 9	72
p77 : 問 1	47	p90-91 : 11-(ハ)	59	p127-130 : 10	73
p77 : 問 2	47	第 4 章	60	p127-130 : 10-(イ)	73
p77 : 問 3	48	p93 : 問	60	第 5 章	75
p79 : 問	48	p94 : 問	60	p139 : 問	75
p79 : 問-(イ)	48	p106-107 : 問 1	61		
p79 : 問-(口)	49	p106-107 : 問 2	62	附録 III	76
p83 : 問	49	p107-108 : 問 1	62	p228 : 問	76
p83 : 問	50	p107-108 : 問 1-(イ) . . .	62	p228 : 問-(イ)	76
p83 : 問-(イ)	50			p228 : 問-(口)	76

p239 : 問 1	76	p239 : 問 2-(イ)	77	p249 : 問-(口)	78
p239 : 問 1-(イ)	76	p239 : 問 2-(口)	77	p255 : 1	78
p239 : 問 1-(口)	76	p249 : 問	77		
p239 : 問 2	77	p249 : 問-(イ)	77		

はじめに

概要

この文書は、なまちゃんが運営する「数学書解答集作成班」が制作した、齋藤正彦著『線型代数入門』（東京大学出版会）の解答集である。

未完ではあるものの、編集の際の利便性を考慮して、オープンソースでの公開となった。それゆえ、数学的な誤りや誤植、改善案の提案などがあればぜひ Issue に書き込んだり、Pull Request を送っていただきたいⁱ¹。

Special Thanks

掲載許可を得た方のみⁱ²を敬称略で掲載する。

- ねたんほ（解答の提供）
- まっちゃん（解答の提供）
- かねこ（解答の提供）
- qwer（解答の提供）
- やたろう（解答の提供, Git 管理）
- 不自然対数（ \LaTeX 関連）

その他、多くの方々。

ⁱ¹ 永遠の工事中

ⁱ² 掲載されていないという方は「ニックネーム」を記入のもと、なまちゃんへ連絡していただきたい。

第 1 章

p5 : 問 1

証明

線分 PQ の中点を M とする. このとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \\ &= \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2} \\ &= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}\end{aligned}$$

である. \square

p5 : 問 2

証明

三角形 PQR の重心を G, PQ の中点を N とする. G は線分 RN を 2:1 に内分する点なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OR} + \frac{2}{3}\overrightarrow{RN} \\ &= \mathbf{c} + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} - \mathbf{c}\right) \\ &= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}\end{aligned}$$

である. \square

p7 : 問-(上)

解答

求めるベクトルを, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ (ただし $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) とおく. このとき, 内積の定義により,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= x + y + z = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \\ \mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} &= x + y + 4z = 1 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 3\end{aligned}$$

これらの式から,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \pm \sqrt{2})/4 \\ (2 \mp \sqrt{2})/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

である.

p7 : 問-(下)

解答

ここでは, [1.4] の結果を利用する.

求める三角形の面積を S とし,

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

とおく, このとき,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|^2 \|\overrightarrow{P_1P_3}\|^2 - (\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \{ [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2][(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2] \\ &\quad - [(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)]^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である.

p8 : 問 1

p8 : 問 1-(イ)

解答

与えられた直線を l とする. l の方程式に $x = -1$ を代入すると, $y = 2$ となるため, l は点 $(-1, 2)$ を通る. また, l は点 $(2, 0)$ を通るため, l の方向ベクトルのひとつは,

$$\begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である. よって, l のベクトル表示のひとつは, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t < \infty)$ である.

p8 : 問 1-(ロ)

解答

与えられた直線を l' とする. l' の方向ベクトルのひとつは, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である. また, l' は点 $(3, 0)$ を通るの

で, そのベクトル表示のひとつは, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t < \infty)$ となる.

p8 : 問 2

p8 : 問 2-(イ)

解答

与えられたベクトル表示から,

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{cases} t = \frac{x-1}{2} \\ t = y+1 \end{cases}$$

である. これから t を消去すると,

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} &= y+1 \\ \therefore x-2y-3 &= 0 \end{aligned}$$

である.

p8 : 問 2-(口)

解答

点 $(-1, -2)$ を通り, x 軸に平行な直線を表すから, $y = -2$ が求める直線の方程式である.

p10 : 問 1

解答

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

から,

$$\begin{aligned} -2x + 2z &= 2 \\ \therefore -x + z &= 1 \end{aligned}$$

である. このとき, $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ はこれを満たす. このときの y の値を計算すると, それぞれ $-3, -5$ なので, 結局, 与えられた直線は 2 点 $(1, -3, 2), (2, -5, 3)$ を通る. すなわち, この直線の方向ベクトルのひとつは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. したがって求めるベクトル表示のひとつは, 直線上の任意の位置ベクトルを x とすると,

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せる.

p10 : 問 2

証明

t を $0 \leq t \leq 1$ をみたす実数, 線分 P_1P_2 上の任意の点の位置ベクトルを \boldsymbol{x} とする. このとき,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{P_1P_2} \\ &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= (1-t)\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2\end{aligned}$$

である. $1-t = t_1$, $t = t_2$ と改めておくと, t の定め方から $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ であり,

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{x}_1 + t_2\boldsymbol{x}_2, \quad t_1 + t_2 = 1$$

となり, これが証明すべきことであった. \square

p11 : 問 1

解答

与えられた平面を (S) とおく. (S) は 3 点 $(-1, 0, 1)$, $(2, 0, -1)$, $(0, -1, 0)$ を通るので,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と改めておくと,

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり, $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1$ は線型独立なので, 求めるベクトル表示のひとつは,

$$(S): \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t, s < \infty)$$

p12 : 問 2

解答

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 - t - 2s \\ z = 0 + 2t + s \end{cases}$$

から t と s を消去して,

$$x - y - z = -1$$

これが求める直線の方程式である.

p12 : 問 3

証明

$$\overrightarrow{OP_1} = \mathbf{x}_1, \quad \overrightarrow{OP_2} = \mathbf{x}_2, \quad \overrightarrow{OP_3} = \mathbf{x}_3$$

とする. このとき, 三角形 $P_1P_2P_3$ 上の任意の点の位置ベクトルを \mathbf{x} , s, t を $0 \leq s, t \leq 1$ を満たす実数とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + t(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \\ \therefore \mathbf{x} &= (1 - s - t)\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2 + t\mathbf{x}_3 \end{aligned}$$

となり, $1 - s - t = t_1$, $s = t_2$, $t = t_3$ と改めて書き直すと, s, t の定め方より, $0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1$ であり

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + t_3\mathbf{x}_3, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

となる. これが証明すべきことであった. \square

p13 : 問 1

解答

(S_1) , (S_2) の法線ベクトルをそれぞれ \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 とおくと,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. ゆえに, 交角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1\| \|\mathbf{x}_2\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{4}$ である.

p13 : 問 2

証明

平面 π_1 , π_2 を考え, π_1 , π_2 の法線ベクトルをそれぞれ \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 とおく.

\mathbf{n}_1 と \mathbf{n}_2 が平行なとき

π_1 に垂直な平面は π_2 にも垂直であり, このような平面を π_3 とすると, π_3 は \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 と平行である. よって π_3 と π_1 , π_2 はそれぞれ並行であり, このような平面は確かに存在する.

\mathbf{n}_1 と \mathbf{n}_2 が平行でないとき

$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \neq \mathbf{0}$ は明らかなので, $\mathbf{n}_3 := \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ とすると, $\mathbf{n}_3 \neq \mathbf{0}$ である. よって, \mathbf{n}_3 は π_1 , π_2 に垂直である. このとき \mathbf{n}_3 を法線ベクトルとする平面を取ればよい.

以上の考察により証明された. \square

p18 : 問

証明

A, B, C が 2×2 行列の場合を証明する.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

とし, A, B, C の成分はすべて複素数であるとする. このとき,

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk & cej + dgj + cfl + dhl \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. 他方

$$\begin{aligned} A(BC) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei + afk + bgi + bhk & aej + afl + bgj + bhl \\ cei + cfk + dgi + dhk & cej + cfl + dgi + dhl \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, たしかに $(AB)C = A(BC)$ である. \square

p19 : 問 1-(上)

証明

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

となり, これは明らかに線型変換である. 対応する行列は, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である. \square

p19 : 問 2-(上)

証明

式 (15) より, 2×2 行列 A, B とベクトル x について,

$$\begin{aligned} T_B(T_A(x)) &= B(Ax) \\ &= (BA)x \\ &= T_{BA}(x) \end{aligned}$$

である. これが証明すべきことであった. \square

p19 : 問 1-(下)

解答

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと, (17) 式より,

$$\begin{aligned} Tx &= \frac{ax + by}{a^2 + b^2} \mathbf{a} \\ &= \begin{pmatrix} a^2x + aby \\ abx + b^2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

であるから,

$$T = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

となる.

p19 : 問 2-(下)

p19 : 問 2-(下)-(イ)

証明

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} Tx &= \frac{(\mathbf{a}, x)}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \mathbf{a} \\ &= \frac{a_1x + a_2y}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. つまり, $T = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ である. このとき,

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)^2} \begin{pmatrix} a_1^4 + a_1^2a_2^2 & a_1^3a_2 + a_1a_2^3 \\ a_1^3a_2 + a_1a_2^3 & a_2^4 + a_1^2a_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} = T \end{aligned}$$

となり, $T^2 = T$ である. $S^2 = S$ も同様に示される. \square

p19 : 問 2-(下)-(ロ)

証明

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とする. このとき, \mathbf{a} と \mathbf{b} が直交することから,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$\therefore a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} TS &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \frac{1}{(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = O \\ &\quad (\because a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0) \end{aligned}$$

である。同様に ST を計算すると、 $ST = O$ であることもわかり、これで $TS = ST = O$ が証明された。 \square

p19 : 問 2-(下)-(ハ)

証明

イ), ロ) の文字や結論を用いると、

$$\begin{aligned} T\mathbf{x} + S\mathbf{x} &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) & (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \\ (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) & (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

となる。これが証明すべきことであった。 \square

p22 : 問 1

p22 : 問 1-(イ)

解答

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

となり、これは y 軸に関する対象点に移す変換を表す。

p22 : 問 1-(ロ)

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{pmatrix}$$

となり、これは x 軸まわりに角 α だけ回転する変換を表す。

p22 : 問 1-(ハ)

解答

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

第 1 章・章末問題

p29–30:1

証明

四面体 $P_1P_2P_3P_4$ を考える. 三角形 $P_2P_3P_4$ の任意の周および内部の点を T とする. $0 \leq k \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ をみたす $k, s \in \mathbb{R}$ によって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_2T} &= k\{s\overrightarrow{P_2P_3} + (1-s)\overrightarrow{P_2P_4}\} \\ &= ks(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) + k(1-s)(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2) \\ &= -k\mathbf{x}_2 + ks\mathbf{x}_3 + k(1-s)\mathbf{x}_4\end{aligned}$$

と表される.

さて, 線分 P_1T 上の任意の点を Q とすると, $0 \leq t \leq 1$ をみたす $t \in \mathbb{R}$ によって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1Q} &= t\overrightarrow{P_1T} \\ &= t\overrightarrow{P_2T} - t\overrightarrow{P_2P_1} \\ &= t(-k\mathbf{x}_2 + ks\mathbf{x}_3 + k(1-s)\mathbf{x}_4) - t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &= -t\mathbf{x}_1 + (t-kt)\mathbf{x}_2 + kst\mathbf{x}_3 + kt(1-s)\mathbf{x}_4\end{aligned}$$

と表されるから, $k=4$ のときの求める位置ベクトルは,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + \overrightarrow{P_1Q} \\ &= (1-t)\mathbf{x}_1 + (t-kt)\mathbf{x}_2 + kst\mathbf{x}_3 + kt(1-s)\mathbf{x}_4\end{aligned}$$

となり,

$$(1-t) + (t-kt) + kst + kt(1-s) = 1$$

であるから, $1-t=t_1$, $t-kt=t_2$, $kst=t_3$, $kt(1-s)=t_4$ とおくと,

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + t_3\mathbf{x}_3 + t_4\mathbf{x}_4, \quad t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 0, \quad t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1$$

となり, ここまでで $k=4$ の場合が示された.

ここで, $n \geq 4$ として $k=n$ のときに主張が成り立つと仮定する. このとき,

$$t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + t_n\mathbf{x}_n$$

は仮定により多面体 $\{P_n\}$ の内部の点であり, これを簡単のために \mathbf{X}_n とおく.

さて, $\{P_n\}$ の点と P_{n+1} とを結ぶ線分上の点は, $0 \leq l \leq 1$ をみたす $l \in \mathbb{R}$ によって,

$$l(\overbrace{t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + t_n\mathbf{x}_n}^{\mathbf{X}_n}) + (1-l)\mathbf{x}_{n+1}, \quad t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$$

とかける. ここで,

$$l(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) + (1-l) = 1$$

なので, $\{P_n\}$ の点と P_{n+1} とを結ぶ線分上の点はこのように表せる.

逆に,

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + t_n\mathbf{x}_n + t_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}, \quad t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1} \geq 0, \quad t_1 + t_2 + \cdots + t_n + t_{n+1} = 1$$

としたとき,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \frac{t_1 \boldsymbol{x}_1 + t_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + t_n \boldsymbol{x}_n}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n} \cdot (t_1 + t_2 + \cdots + t_n) + t_{n+1} \boldsymbol{x}_{n+1} \\ &= T_n \boldsymbol{X}_n + t_{n+1} \boldsymbol{x}_{n+1} \end{aligned}$$

と変形できる. ただし $T_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$ とおいた.

さて

$$\frac{\boldsymbol{X}_n}{T_n} = \frac{t_1 \boldsymbol{x}_1}{T_n} + \frac{t_2 \boldsymbol{x}_2}{T_n} + \cdots + \frac{t_n \boldsymbol{x}_n}{T_n}$$

であることと

$$\begin{aligned} \frac{t_1}{T_n} + \frac{t_2}{T_n} + \cdots + \frac{t_n}{T_n} &= \frac{T_n}{T_n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

であることにより,

$$\frac{\boldsymbol{X}_n}{T_n}$$

は, 多面体 $\{P_n\}$ の内部の点であり,

$$T_n \cdot \frac{\boldsymbol{X}_n}{T_n} + t_{n+1} \boldsymbol{x}_{n+1}$$

は多面体 $\{P_n\}$ の内部の点と P_{n+1} を結ぶ線分上の点である.

よって, $k = n$ のときも問題の主張が成り立つ.

以上の考察により証明された. \square

p29–30:2

証明

2点 P_1, P_2 を通る直線の方程式を $ax + by + c = 0$ (ただし $(a, b) \neq 0$) とおく. このとき,

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

が成立する. すなわちこれは

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

をみす. これを a, b, c についての連立方程式とみたとき, 与条件により自明でない解があり,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成立する. 転置行列の行列式はもとの行列の行列式に等しいので, 行列式の交代性なども用いて,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

を得る. これが証明すべきことであった. \square

p29–30:3**解答**

点を以下の順で移動させる変換を考える.

- (1) 原点中心に $-\theta$ 回転させる.
- (2) x 軸に関して対称移動させる.
- (3) 原点中心に θ 回転させる.

ここで, (1) から (3) までの変換を表す行列をそれぞれ $R_{-\theta}, A_x, R_\theta$ とすると,

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

となる. よって, この変換を表す行列は

$$\begin{aligned} R_\theta A_x R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

p29–30:4

証明

以下では、直線 $y = \tan \theta$ に関する折り返しを T_θ とかくことにする.

さて、直線 $y = \tan(\theta/4)x$ に関する折り返しは、

$$T_{\theta/4} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

で表される.

また、直線 $y = \tan(-\theta/4)x$ に関する折り返しは、

$$T_{-\theta/4} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

で表される.

ここで、

$$\begin{aligned} T_{\theta/4}T_{-\theta/4} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、これは原点のまわりに θ 回転する行列を表す.

以上の考察により証明された. \square

p29–30 : 5

解答

任意の点 $P(p)$, $p \in \mathbb{R}^3$ を平面 (a, x) に対して折り返すことを考える.

点 P から (a, x) におろした垂線の足は, $t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$p + t \frac{a}{(a, a)}$$

と表せ, これが平面 (a, x) 上にあるので,

$$(a, p + t \frac{a}{(a, a)}) = 0$$

$$\therefore t = -(a, p)$$

である.

また, 求める点を $P'(p')$ とすると,

$$p' = p + t \frac{2a}{(a, a)}$$

$$= p - \frac{2(a, p)}{(a, a)} a$$

であるから, これはたしかに V^3 の線型変換を引き起こし, その変換公式は

$$x \mapsto x - \frac{2(a, x)}{(a, a)} a$$

である,

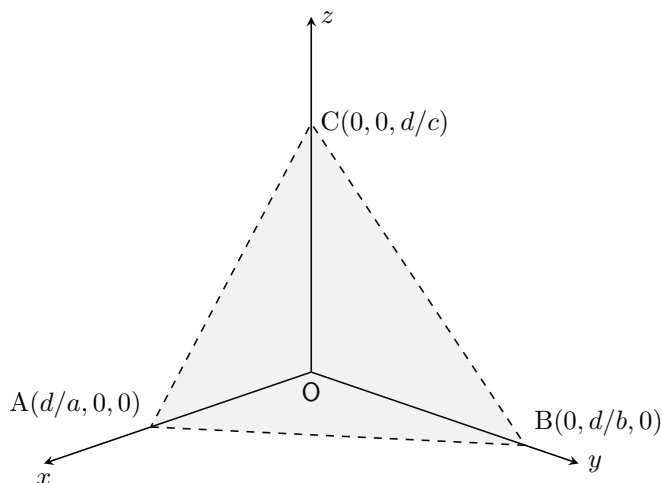
p29-30 : 6**p29-30 : 6-(イ)****解答**

(S) と x 軸, y 軸, z 軸の交点をそれぞれ A , B , C とする. このとき, A , B , C の座標は図のようになり, この三角錐の体積を V とすると,

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot |\det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{|d|^3}{|abc|} = \frac{|d|^3}{6|abc|}$$

である. ここで, $|\det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})|$ が \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} の張る平行六面体の体積を表すことを用いた.



p29-30 : 6-(口)

解答

三角形 ABC の体積を T , O から平面 ABC におろした垂線の足を H とすると,

$$V = \frac{1}{3} \|\vec{OH}\| \cdot T$$

である. ここで,

$$\|\vec{OH}\| = \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

なので, イ) の結果から $V = \frac{|d|^3}{6|abc|}$ なのを加味すると,

$$T = \frac{d^2 \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2|abc|}$$

である.

p29-30 : 7

p29-30:7-(イ)

解答

a, b, c が張る平行六面体の体積は,

$$|\det(a, b, c)|$$

で与えられる.

一方, この平行六面体の O, B, C を含む面の面積は,

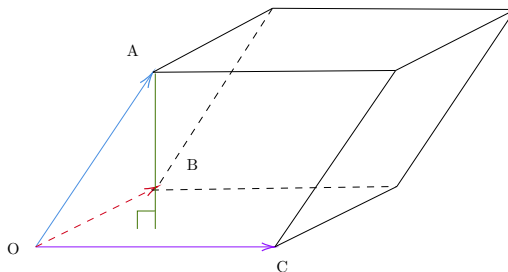
$$\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$$

で与えられる.

以上の考察により, 求める長さは,

$$\frac{|\det(a, b, c)|}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|}$$

である.



p29-30:7-(口)

解答

\vec{BA} と \vec{BC} の外積は,

$$\|(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b})\|.$$

これを $\|\vec{BC}\|$ で割ればよく, 求める長さは

$$\frac{\|(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b})\|}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|}.$$

p29-30 : 8

証明

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

一方,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1(a_2b_3 - b_2a_3) + c_2(a_3b_1 - b_3a_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

であるから, これと行列式の積の性質により,

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{a}) \end{vmatrix} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$$

である. \square

p29–30:9

解答

$\det(x, y, z)$ は, x, y, z の張る平行六面体の体積に符号をつけたものに等しい. 与条件より, $\det(x, y, z)$ が最大になるのは, x, y, z の張る図形が立方体のときであり, そのとき

$$\det(x, y, z) = 1$$

である. これからただちに $\det(x, y, z)$ の最小値が -1 であることも従う.

以上により, $\det(x, y, z)$ の最大値は 1 , 最小値は -1 である.

p29–30 : 10

p29–30 : 10-(イ)

証明

単位ベクトル e_1, e_2, e_3 を適当にとり,

$$a = \alpha_1 e_1, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2, \quad c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} (a \times b) \times c &= \alpha_1 \beta_2 e_3 \times (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3) \\ &= \alpha_1 \beta_2 \gamma_1 e_2 - \alpha_1 \beta_2 \gamma_2 e_1 \\ &= -(b, c)a + (a, c)b \end{aligned}$$

であり, これが証明すべきことであった^{†1}. \square

^{†1} この等式をラグランジュの恒等式とよぶ.

p29–30 : 10-(ロ)

証明

イ)の結果により.

$$\begin{aligned} (a \times b) \times c &= -(b, c)a + (a, c)b, \\ (b \times c) \times a &= -(c, a)b + (b, a)c, \\ (c \times a) \times b &= -(a, b)c + (c, b)a. \end{aligned}$$

であるから,

$$(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$$

となる. これが証明すべきことであった. \square

第 2 章

p34 : 問 1

証明

後半二つの主張は明らか。また、二つ目の主張は一つ目の主張と同様にして示すことができるので、一つ目のみ示すことにする。

$A = (a_{pq})$ を $k \times l$ 行列, $B = (b_{qr})$, $C = (c_{qr})$ を $l \times m$ 行列とする。示したい式の両辺がともに定義され、ともに $k \times m$ 行列であることはよい。行列 $B + C$ の (q, r) 成分は $b_{qr} + c_{qr}$ であるから、左辺の (p, r) 成分は、

$$\sum_{q=1}^l a_{pq} (b_{qr} + c_{qr}) = \sum_{q=1}^l a_{pq} b_{qr} + \sum_{q=1}^l a_{pq} c_{qr}$$

とかける。この等号の右辺は AB の (p, r) 成分と AC の (p, r) 成分の和である。これより、主張が示された。 \square

p40 : 問

p40 : 問-(イ)

解答

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ O & A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

p41 : 問 1

解答

$$(1) \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \text{ とする。このとき,}$$

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 2x_{11} + 4x_{21} & 2x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix}$$

となり、これが E_2 と等しくなるためには

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 2x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases}$$

となることが必要かつ十分であるが、これを満たす $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{C}$ は存在しない。よって前半の主張が示された。

後半について示す。 $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$ とする。このとき、

$$YA = \begin{pmatrix} y_{11} + 2y_{12} & 2y_{11} + 4y_{12} \\ y_{21} + 2y_{22} & 2y_{21} + 4y_{22} \end{pmatrix}$$

となり、これが E_2 と等しくなるためには

$$\begin{cases} y_{11} + 2y_{12} = 1 \\ 2y_{11} + 4y_{12} = 0 \\ y_{21} + 2y_{22} = 0 \\ 2y_{21} + 4y_{22} = 1 \end{cases}$$

となることが必要かつ十分であるが、これを満たす $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} \in \mathbb{C}$ は存在しない。よって後半の主張も示された。

(2) X, Y を (1) で定義したものとする。このとき、

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、これが B と等しくならないことは明らか。

後半について、

$$YA = \begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} \\ x_{21} & 2x_{21} \end{pmatrix}$$

となり、これが B と等しくなるためには $x_{11} = 1, x_{21} = 2$ となることが必要かつ十分であるが、 x_{12}, x_{22} については任意の複素数である。以上の議論により、このような Y は無限に存在する。

(3) A の第 k 列の成分が全て 0 であるとする。ただしここで $1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}$ であるとする。 $XA = E$ をみたく X が存在すると仮定する。このとき、 X は明らかに $n \times n$ 行列であり、積 XA は定義される。いま $X = (x_{jk}), A = (a_{kj}), 1 \leq j, k \leq n$ と表す。このとき、

$$(XA \text{ の } (j, j) \text{ 成分}) = \sum_{k=1}^n x_{jk} a_{kj} = 0$$

となり、これは $XA = E$ に矛盾する。よってこのような X は存在しないことが示された。

p42 : 問 1

証明

まず、

$$\overline{A} \overline{A^{-1}} = \overline{AA^{-1}} = E, \quad \overline{A^{-1}} \overline{A} = \overline{A^{-1}A} = E$$

より, \overline{A} は正則で, 逆行列は $\overline{A^{-1}}$ である. さらに,

$${}^t A {}^t A^{-1} = {}^t (A^{-1} A) = E, \quad {}^t A^{-1} {}^t A = {}^t (A A^{-1}) = E$$

であるから, ${}^t A$ は正則であり, 逆行列は ${}^t A^{-1}$ である. \square

p42 : 問 2

解答

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' := \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$AA' = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$$

である. $AA' = E$ となる条件は, x, y, z, w についてのふたつの連立方程式

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

が解を持つことで, その条件は $ad - bc \neq 0$ である. そのときの解は,

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{d}{ad - bc}, -\frac{b}{ad - bc}, -\frac{c}{ad - bc}, \frac{a}{ad - bc} \right)$$

である. これを用いて $A'A$ を計算すると, $A'A = E$ となり. たしかに A' は A の逆行列である.

以上の議論により, $ad - bc \neq 0$ となることが必要十分条件である.

p42 : 問 3

p42 : 問 3-(イ)

解答

(2) の結果により,

$$\frac{1}{3 \cdot 3 - 2 \cdot 4} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

が求める逆行列である.

p42 : 問 3-(ロ)

解答

まず,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

としたときに

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} + x_{12} & -x_{11} + 3x_{12} + x_{13} \\ x_{21} & 2x_{21} + x_{22} & -x_{21} + 3x_{22} + x_{23} \\ x_{31} & 2x_{31} + x_{32} & -x_{31} + 3x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、これに関して

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} + x_{12} & -x_{11} + 3x_{12} + x_{13} \\ x_{21} & 2x_{21} + x_{22} & -x_{21} + 3x_{22} + x_{23} \\ x_{31} & 2x_{31} + x_{32} & -x_{31} + 3x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となれば、行列 X が求める逆行列である。計算すると

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これが求める逆行列であった。

p42 : 問 3-(ハ)

解答

まず,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

としたとき,

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ x_{34} & x_{33} & x_{32} & x_{31} \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & x_{41} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから, これに関して

$$\begin{pmatrix} x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ x_{34} & x_{33} & x_{32} & x_{31} \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & x_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となれば, 行列 X が求める逆行列である.

計算すると,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり, これが求める逆行列であった.

p52 : 問

解答

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第 1 行の } (-2) \text{ 倍, 第 1 行の 2 倍をそれぞれ第 2 行, 第 3 行に加える}} &\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を交換する}} &\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第 2 行の } (-3) \text{ 倍を第 1 行に加え, 第 3 行の } (-4) \text{ 倍を第 1 行に加える}} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第 3 行の 2 倍を第 2 行に加え, 第 3 行を } (-1) \text{ 倍する}} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である.

p58 : 問

p58 : 問-(イ)

解答

与えられた連立方程式について、拡大係数行列を考えて基本変形を施すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 1 & 1 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. つまり、解は存在し、ひとつの任意定数を含む. 任意定数を $x_3 = \alpha$ とすると、

$$x_1 = -\frac{4}{3} - \alpha, \quad x_2 = \frac{8}{3} - \alpha, \quad x_3 = \alpha$$

とかける. ベクトルの形で表すと、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 8/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である.

p58 : 問-(ロ)

解答

与えられた連立方程式について、拡大係数行列を考えて基本変形を施すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となるが、 $0 = -1$ とはならないため、この連立方程式は解を持たない.

p58 : 問-(ハ)

解答

与えられた連立方程式について、拡大係数行列を考えて基本変形を施すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 19 & 14 \end{pmatrix}$$

となる. ただしここで第3列と第4列を入れ替えた.

つまり、解は存在し、ふたつの任意定数を含む. 任意定数を $x_3 = \alpha$, $x_5 = \beta$ とすると、この連立方程式の解は

$$x_1 = 6 - 2\alpha - 2\beta, \quad x_2 = -9 + 2\alpha + 11\beta, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = 14 - 19\beta, \quad x_5 = \beta$$

とかける. ベクトルの形で表すと,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 0 \\ -19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である.

p62-63 : 問 1

証明

定義に従って計算すると,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) \\ &= 2((x, x) + (y, y)) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

となり, これが証明すべきことであった. \square

p62-63 : 問 2

証明

$$\|x+y\|^2 = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$$

である. ここで, x と y が直交することから,

$$(x, y) + (y, x) = (x, y) + \overline{(x, y)} = 0$$

であり, これを用いると

$$\|x+y\|^2 = (x, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

となる. x, y がともに実ベクトルのときは $(x, y) = 0$ であるから確かに逆が成り立つが, たとえば $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix}$ とすれば, 等式は成り立つが x と y は直交しないため, 逆は成り立たない. \square

p62-63 : 問 3

証明

$x, y \in \mathbb{R}^n$ のとき,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) - (x-y, x-y) \\ &= \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 - (\|x\|^2 - (x, y) - (y, x) + \|y\|^2) \\ &= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 - (\|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2) \\ &= 4(x, y) \end{aligned}$$

であるから, この両辺を 4 で割るとただちに主張が従う.

また, $x, y \in \mathbb{C}$ のときにはこの等式が成り立たないことがある. $x = {}^t(2i, 0)$, $y = {}^t(2, 0)$ とすると,

$$\frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} = \frac{4 - 4}{4} = 0$$

であるが,

$$\begin{aligned} (x, y) &= (2, 0) \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -4i \end{aligned}$$

となり, 確かにこれが反例になっている. \square

p65: 問 1

解答

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} A^t A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, これが E に等しいので,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1, \\ c^2 + d^2 = 1, \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

となる. このことから $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ として

$$\begin{aligned} a &= \cos \theta, & b &= \sin \theta, \\ c &= \cos \phi, & d &= \sin \phi \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} ac + bd &= \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \\ &= \cos(\theta - \phi) \end{aligned}$$

となり, これが 0 に等しいので,

$$\begin{aligned} \theta - \phi &= \pi/2, 3\pi/2, \\ \therefore \phi &= \theta - \pi/2, \theta - 3\pi/2. \end{aligned}$$

これより, 任意の二次直交行列は $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ として

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

のいずれかで表される.

p65: 問 2

証明

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A, \quad (AA^*)^* = A^{**}A^* = AA^*$$

であるから, A^*A , AA^* はエルミート行列である.

また, 任意の $n \times 1$ ベクトル x に対して,

$$\begin{aligned} (x, A^*Ax) &= (A^{**}x, Ax) \\ &= (Ax, Ax) \\ &= \|Ax\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

であり, また, x として第 i 成分のみ 1 でほかの成分は 0 のベクトル e_i をとると,

$$(e_i, A^*Ae_i) = A^*A \text{ の } (i, i) \text{ 成分}$$

となる. 先の不等式よりこれは 0 または正なので, A^*A の対角成分は 0 または正である. 同様にして AA^* の対角成分も 0 または正である.

以上のことが証明すべきことであった. \square

第 2 章・章末問題

p70–73 : 1

p70–73 : 1-(イ)

解答

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を交換する}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & -6 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{(1, 1) \text{ をかなめとして左から第 1 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 3 行を } (-1) \text{ 倍して第 2 行と交換し, } (2, 2) \text{ をかなめとして左から第 2 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & | & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{(3, 3) \text{ をかなめとして左から第 3 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & | & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 4 行を } (-1) \text{ 倍して, } (4, 4) \text{ をかなめとして第 4 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

よって, 求める逆行列は,

$$\begin{pmatrix} 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

である.

p70-73 : 1-(口)

解答

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(1,1) \text{ をかなめとして第 1 列を掃き出す}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(2,2) \text{ をかなめとして第 2 列を掃き出す}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(3,3) \text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -13 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(3,3) \text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

よって、求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

p70-73 : 2

p70-73 : 2-(イ)

解答

与えられた連立方程式について、拡大係数行列を考えて基本変形を施すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。ただしここで第2列と第5列を入れ替えた。

つまり、解は存在し、2つの任意定数を含む。任意定数を $x_4 = \alpha$, $x_2 = \beta$ とすると、

$$x_1 = -2\alpha - 2\beta, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \alpha + \frac{1}{5}, \quad x_4 = \alpha, \quad x_5 = -\frac{3}{5}$$

となる。ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

p70-73 : 2-(口)**解答**

与えられた連立方程式について、拡大係数行列を考えて基本変形を施すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

つまり、解は存在し、一つの任意定数を含む。任意定数を $x_4 = \alpha$ とすると、

$$x_1 = -1 - 2\alpha, \quad x_2 = 1 + \alpha, \quad x_3 = -1 + \alpha, \quad x_4 = \alpha$$

となる。ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

p70-73 : 2-(ハ)**解答**

与えられた連立方程式について、拡大係数行列を考えて基本変形を施すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

つまり、解は存在し、

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1$$

となる。ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

p70-73 : 2-(二)

解答

与えられた連立方程式について、拡大係数行列を考えて基本変形を施すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 24 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。ただしここで第2列と第4列を入れ替えた。

つまり、解は存在し、2つの任意定数を含む。 $x_2 = \alpha$, $x_5 = \beta$ とすると、

$$x_1 = -2\alpha + 2\beta, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = 3 - 10\beta, \quad x_4 = 4 - 24\beta, \quad x_5 = \beta$$

となる。ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -10 \\ -24 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

p70-73 : 3

p70-73 : 3-(イ)

解答

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第1列を掃き出す}} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第2列を掃き出す}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第3列を掃き出す}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. ゆえに

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である. だから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

p70-73 : 3-(口)

解答

$P^{-1}AP = B$ とおくと,

$$\begin{aligned} A^n &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3 & -2^n - 3 & 2^n - 3 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n + 2 & -2^n - 2 \\ -2^{n+2} + 4 & -2^{n+1} - 4 & 2^{n+1} - 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.

p70-73 : 4

解答

与えられた行列を A とする.

A の第 1 列に, 第 2 列から第 n 列までを足して変形すると,

$$\begin{pmatrix} (n-1)x+1 & x & x & \cdots & x \\ (n-1)x+1 & 1 & x & \cdots & x \\ (n-1)x+1 & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)x+1 & x & x & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

ここで, この行列の第 2 行から第 n 行までの各行から第 1 行を引くと,

$$\begin{pmatrix} (n-1)x+1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}$$

となるので, 行列 A の階数は, $x = 1$ のとき 1, $x = -1/(n-1)$ のとき $n-1$, それ以外の場合は n である.

p70-73 : 5

証明

A が正則でないと仮定すると,

$$Ax = 0$$

をみたす $x \in \mathbb{C}^n$ が存在する.

また, $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ とし, x_1, x_2, \dots, x_n の中で絶対値が最大のものを x_p とする.

Ax の p 行を考えると,

$$\begin{aligned} a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p + \cdots + a_{pn}x_n &= 0 \\ \therefore x_p &= -(a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n) = - \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} a_{pi}x_i \end{aligned}$$

となる.

ここで,

$$\begin{aligned} |x_p| &\leq \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} |a_{pi}| |x_i| \\ &< \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} \frac{1}{n-1} |x_i| \\ &< \frac{n-1}{n-1} \cdot |x_p| = |x_p| \end{aligned}$$

と計算でき, $|x_p| < |x_p|$ となり, これは矛盾である.

よって, 先の過程が誤りであり, このとき A は正則である. \square

p70-73 : 6

p70-73 : 6-(イ)

証明

$$AA^{k-1} = A^{k-1}A = E$$

なので, A は正則である. \square

p70-73 : 6-(ロ)

証明

A が正則であるとする, A^{-1} が存在して,

$$A^{-1}A^2 = A^{-1}A$$

$$A = E$$

となるが, これは矛盾であるため, A は正則でない. \square

p70-73 : 6-(ハ)

証明

A が正則であるとする,

$$\begin{aligned} E &= (A^{-1}A)^k \\ &= A^{-k}A^k \\ &= O \end{aligned}$$

となるが, これは矛盾であるため, A は正則でない. \square

p70-73 : 6-(ニ)

証明

k を用いて, A^k を考えると

$$E = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})$$

であり, 逆からかけても同じであるため, $E - A$ は正則であり,

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

である.

また,

$$E = (E + A)(E - A + A^2 - \cdots + A^{k-1})$$

であり, 逆からかけても同じなので, $E + A$ は正則であり,

$$(E + A)^{-1} = E - A + A^2 - \cdots + A^{k-1}$$

である. \square

p70-73 : 7

証明

$X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ とする. ここで, XY の (i, i) 成分は $\sum_{j=1}^n x_{ij}y_{ji}$ であるから,

$$\text{tr}(XY) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}y_{ji} \right)$$

となる. YX については, 同様の議論により,

$$\begin{aligned} \text{tr}(YX) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_{ij}x_{ji} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_{ji}y_{ij} \right) \end{aligned}$$

である。ここで、 i と j をおきかえれば、

$$\operatorname{tr}(YX) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_{ij} y_{ji} \right) \quad (1)$$

となる。これより、

$$\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX) \quad (2)$$

を得て、これとトレースの線型性により $\operatorname{tr}(XY - YX) = 0$ であるが、 $\operatorname{tr}(E_n) = n \neq 0$ であるため、これは矛盾である。

ゆえに、 $XY - YX = E_n$ となる n 次行列 X, Y は存在しないことが示された。 \square

p70-73 : 8

証明

行列 B の階数を r とすると、 m 次正則行列 P 、 n 次正則行列 Q によって、

$$PBQ = F_{m,n}(r)$$

と表せる。

これにより、

$$ABQ = AP^{-1}F_{m,n}(r)$$

とかける。 A_{11} を r 次の行列として、

$$AP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad F_{m,n}(r) = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

とかくと、

$$\begin{aligned} AP^{-1}F_{m,n}(r) &= AP^{-1}Q \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とかけ、 A_{11} の定義により、 ABQ の階数は r 以下となる。いま Q は基本行列の積なので、 AB の階数も r 以下である。

行列 A についても同様に示せる。

以上の議論により、行列 AB の階数は行列 A 、行列 B の階数以下であることが証明された。

\square

p70-73 : 9

解答

3つの平面が1本の直線を共有する必要十分条件は、与式を x, y, z に関する方程式とみたときに、解が存在して1つの任意定数を含むことである。

これは

$$\begin{cases} r(A) = 2 \\ r(A) = r(\tilde{A}) \end{cases}$$

と同値であり、したがって、

$$r(A) = r(\tilde{A}) = 2$$

が必要十分条件である。

p70-73 : 10

p70-73 : 10-(イ)

証明

$AX = E$ をみたす n 次正則行列 X が存在するとする。このとき、

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_{11} - bx_{21} & ax_{12} - bx_{22} \\ bx_{11} + ax_{21} & bx_{12} + ax_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、これが E に等しいので、

$$\begin{cases} ax_{11} - bx_{21} = 1 \\ ax_{12} - bx_{22} = 0 \\ bx_{11} + ax_{21} = 0 \\ bx_{12} + ax_{22} = 1 \end{cases}$$

となり、これを变形すると、

$$\begin{cases} (a^2 + b^2)x_{11} = a \\ (a^2 + b^2)x_{12} = b \\ (a^2 + b^2)x_{21} = -b \\ (a^2 + b^2)x_{22} = a \end{cases}$$

となるから、このような x_{11} , x_{12} , x_{21} , x_{22} が存在する必要十分条件は

$$a^2 + b^2 \neq 0$$

である。このことから直ちに主張が従う。 \square

p70-73 : 10-(ロ)

証明

$$A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}, \quad \alpha' = a' + b'i$$

とおく。

和については

$$A + A' = \begin{pmatrix} a + a' & -(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix}, \quad \alpha + \alpha' = (a + a') + (b + b')i$$

となり、このときたしかに $A + A'$ と $\alpha + \alpha'$ が一対一に対応する。

積については

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{pmatrix}, \quad \alpha\alpha' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

となり、たしかに AA' と $\alpha\alpha'$ が一対一に対応する.

逆数については

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{a^2 + b^2} (a - bi)$$

となり、たしかに A^{-1} と $1/\alpha$ が一対一に対応する.

以上の考察により証明された. \square

p70-73 : 10-(ハ)

証明

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表せるとすると,

$$a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

であるから,

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

とかけ、このとき

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる. これが証明すべきことであった. \square

p70-73 : 11

p70-73 : 11-(イ)

証明

${}^tPP = E$ を加味して $(P \pm E)$ の転置行列を考えると

$${}^t(P \pm E) = {}^tP \pm {}^tPP = {}^tP {}^t(E \pm P)$$

となり、これを用いると,

$$\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t\{(P-E)(P+E)^{-1}\} \\
&= {}^t(P+E)^{-1}{}^t(P-E) \\
&= (E+{}^tP)^{-1}{}^tP^tP(E-P) \\
&= \{{}^tP(P+E)\}^{-1}{}^tP(E-P) \\
&= (P+E)^{-1}P^{-1}{}^tP(E-P) \\
&= (P+E)^{-1}(E-P) \\
&= -(P+E)^{-1}\{(P+E)-2E\} \\
&= -(P+E)^{-1}(P+E) + 2E(P+E)^{-1} \\
&= -(P+E)(P+E)^{-1} + 2E(P+E)^{-1} \\
&= (-(P+E) + 2E)(P+E)^{-1} \\
&= -(P-E)(P+E)^{-1} = -A
\end{aligned}$$

となり、これが証明すべきことであった。 \square

p70-73 : 11-(口)

証明

計算すると、

$$\begin{aligned}
E-A &= E - (P-E)(P+E)^{-1} \\
&= (P+E)(P+E)^{-1} - (P-E)(P+E)^{-1} \\
&= \{(P+E) - (P-E)\}(P+E)^{-1} \\
&= 2(P+E)^{-1}
\end{aligned}$$

と変形でき、いま $(P+E)$ が正則だから、 $2(P+E)^{-1}$ も正則であり、

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{2}(P+E)$$

である。 \square

p70-73 : 11-(ハ)

証明

まず、

$$\begin{aligned}
E+A &= (P+E)(P+E)^{-1} + (P-E)(P+E)^{-1} \\
&= \{(P+E) + (P-E)\}(P+E)^{-1} \\
&= 2P(P+E)^{-1}
\end{aligned}$$

であるから、これを用いると

$$(E+A)(E-A)^{-1} = 2P(P+E)^{-1} \frac{1}{2}(P+E) = P$$

となり、これが証明すべきことであった。 \square

p70-73 : 12

証明

以下の 3 つの命題が同値であることを示す.

- (1) A は正規行列である. すなわち $A^*A = AA^*$ である.
- (2) 任意の $x \in \mathbb{C}^n$ について, $\|Ax\| = \|A^*x\|$ が成立する.
- (3) 任意の $x, y \in \mathbb{C}^n$ について, $(Ax, Ay) = (A^*x, A^*y)$ が成立する.

(1) \implies (2) $x \in \mathbb{C}^n$ を任意にとる. このとき

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &= (Ax, Ax) \\ &= (x, A^*Ax) \\ &= (x, AA^*x) \quad (\because \text{正規行列の定義}) \\ &= (A^*x, A^*x) = \|A^*x\|^2\end{aligned}$$

であるから, $\|Ax\| = \|A^*x\|$ が成立する.

(2) \implies (3) $x, y \in \mathbb{C}^n$ を任意にとる. このとき

$$\begin{aligned}\|A(x+y)\|^2 &= (A(x+y), A(x+y)) \\ &= \|Ax\|^2 + (Ax, Ay) + (Ay, Ax) + \|Ay\|^2 \\ &= \|Ax\|^2 + (Ax, Ay) + \overline{(Ax, Ay)} + \|Ay\|^2\end{aligned}$$

であり, 同様に計算すると

$$\|A^*(x+y)\|^2 = \|A^*x\|^2 + (A^*x, A^*y) + \overline{(A^*x, A^*y)} + \|A^*y\|^2$$

を得る. $\|A(x+y)\| = \|A^*(x+y)\|$, $\|Ax\| = \|A^*x\|$, $\|Ay\| = \|A^*y\|$ を仮定したので,

$$(Ax, Ay) + \overline{(Ax, Ay)} = (A^*x, A^*y) + \overline{(A^*x, A^*y)}$$

となり, これは $\operatorname{Re}(Ax, Ay) = \operatorname{Re}(A^*x, A^*y)$ であることを表す.

また, x を ix におきかえることで, $\operatorname{Im}(Ax, Ay) = \operatorname{Im}(A^*x, A^*y)$ も示される. ゆえにこのとき

$$(Ax, Ay) = (A^*x, A^*y).$$

(3) \implies (1) 任意の $x, y \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$(x, (A^*A - AA^*)y) = 0$$

である. いま y をいったん固定すると, x は任意なので, $x = (A^*A - AA^*)y$ とすることができ,

$$\begin{aligned}\|(A^*A - AA^*)y\|^2 &= 0, \\ \therefore (A^*A - AA^*)y &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

y は任意だから, $A^*A = AA^*$ となり, A は正規行列である.

以上の議論により証明された. \square

p70-73 : 13

p70-73 : 13-(イ)

解答

まず,

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [XY - YX, Z] \\ &= (XY - YX)Z - Z(XY - YX) \\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX. \end{aligned}$$

同様に計算すると,

$$\begin{aligned} [[Y, Z], X] &= YZX - ZYX - XYZ + XZY, \\ [[Z, X], Y] &= ZXY - XZY - YZX + YXZ. \end{aligned}$$

よって,

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

である.

p70-73 : 13-(ロ)

証明

X, Y は交代行列だから,

$$X = -{}^tX, \quad Y = -{}^tY.$$

これを用いると,

$$\begin{aligned} [X, Y] &= XY - YX \\ &= (-{}^tX)(-{}^tY) - (-{}^tY)(-{}^tX) \\ &= {}^t(YX) - {}^t(XY) \\ &= -{}^t(XY - YX) \\ &= -{}^t[X, Y] \end{aligned}$$

となる. よってこのとき $[X, Y]$ は交代行列である. \square

p70-73 : 13-(ハ)

証明

以下では

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

とおく.

【 $X + Y$ と $x + y$ について】

$$X + Y = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(z+z') & y+y' \\ z+z' & 0 & -(x+x') \\ -(y+y') & x+x' & 0 \end{pmatrix}$$

であり, なおかつ

$$x + y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$

であるから, たしかに $X + Y$ と $x + y$ は対応する.【 cX と cx について】

$$cX = c \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -cz & cy \\ cz & 0 & -cx \\ -cy & cx & 0 \end{pmatrix}$$

であり, なおかつ

$$cx = c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{pmatrix}$$

であるから, たしかに cX と cx は対応する.【 $[X, Y]$ と $x \times y$ について】

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -z'x + x'z & y'x - x'y \\ z'x - x'z & 0 & -y'z + z'y \\ -y'x + x'y & z'y - y'z & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり, なおかつ

$$x \times y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

であるから, たしかに $[X, Y]$ と $x \times y$ は対応する.【 Xy と $x \times y$ について】

$$\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -zy' + yz' \\ zx' - xz' \\ -yx' + xy' \end{pmatrix}$$

であり, なおかつ

$$x \times y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

であるから, たしかに Xy と $x \times y$ は対応する.

□

p70-73 : 13-(二)

証明

ハ) で証明したことから, $[X, Y]$ には $x \times y$ が対応する.

また, イ) で証明したことより, $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ であり, この左辺には $(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y$ が対応し, 右辺には 0 が対応する.

以上の考察により

$$(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$$

であることが示された. \square

p70-73 : 14

証明

二つに分けて証明する,

イ) \Rightarrow ロ)

A が正則であると仮定すると, A^{-1} が存在し,

$$x = A^{-1}(Ax)$$

と変形できるから, Ax が非負ベクトルであれば, x も非負ベクトルである.

ロ) \Rightarrow イ)

まず, $Ax = 0$ であると仮定する. このとき, $A(-x) = 0$ であるから, $A(-x)$ も非負ベクトルであり, 条件から $x, -x$ は非負ベクトルである. したがって $x = 0$ となり, A は正則である.

また, 非負ベクトル x を任意にとると,

$$x = A(A^{-1}x)$$

も非負ベクトルであり, 条件から $A^{-1}x$ も非負ベクトルである. ここで, A^{-1} が非負行列でないと仮定すると, ある単位ベクトル e_j について, $A^{-1}e_j$ が非負ベクトルでないことになり, x が非負ベクトルであることに反する. これより A^{-1} は非負行列である.

以上の議論により証明された. \square

p70-73 : 15

p70-73 : 15-(イ)

証明

まず, $A = (a_{ij})$, $f = {}^t(f_1, f_2, \dots, f_j) = {}^t(1, 1, \dots, 1)$ とおくと, Af の第 i 行の成分は

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_{ij} f_j &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \\ &= 1\end{aligned}$$

であるから, f の定義とあわせて,

$$Af = f$$

が成り立つ. \square

p70-73 : 15-(口)**証明**

$C = AB = (c_{ik})$ とすると, C の (i, k) 成分は

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

である. これにより,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n c_{ik} &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

であるから, C すなわち AB は確率行列である. \square

p70-73 : 15-(ハ)

証明

$A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ において、 \mathbf{x} の成分で絶対値が最大のものを x_p とする。
このとき、 $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ の第 p 行成分の絶対値を考えると、

$$\begin{aligned} |\alpha||x_p| &\leq \sum_{j=1}^n a_{pj}|x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n a_{pj}|x_p| \\ &= |x_p| \end{aligned}$$

であるから、

$$|\alpha||x_p| \leq |x_p|$$

を得るので、

$$|\alpha| \leq 1$$

となり、これが証明すべきことであった。 \square

第3章

p77: 問1

3文字の置換

解答

3文字の置換は $3! = 6$ 通りある。それを互換の回数によって分類する。

0回 1つのみ。偶置換かつ恒等置換。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1回 3つ。奇置換。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2回 2つ。偶置換。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4文字の置換

解答

4文字の置換は $4! = 24$ 通りある。それを互換の回数によって分類する。

0回 1つのみ。偶置換かつ恒等置換。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1回 6つ。奇置換。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2回 偶置換。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

p77: 問2

証明

S_n の偶置換全体の集合を A_n , 偶置換全体の集合を B_n とする。置換は必ず奇置換か偶置換のいずれかであるから,

$$S_n = A_n \cup B_n,$$

$$A_n \cap B_n = \emptyset$$

となる。

ここで,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると, τ は奇置換であり, $\sigma \in A_n$ のとき, $\tau\sigma \in B_n$ である. 同様に, $\rho \in B_n$ のとき, $\tau^{-1}\rho = \tau\rho \in A_n$ である. これらにより, 全単射

$$A_n \ni \sigma \mapsto \tau\sigma \in B_n$$

が存在し, 偶置換と奇置換は同数あり, その個数は $n!/2$ である. \square

p77 : 問 3

解答

$m \in \mathbb{N}$ とする.

(I) $n = 2m$ とかけるとき, この置換を互換の積で表すと,

$$(1, 2m)(2, 2m-1) \cdots (m, m+1)$$

となるため, 置換の符号は $(-1)^m$, すなわち

$$(-1)^{\frac{n}{2}}$$

となる.

(II) $n = 2m-1$ とかけるとき, この置換を互換の積で表すと,

$$(1, 2m-1)(2, 2m-2) \cdots (m-1, m+1)$$

となるため, 置換の符号は $(-1)^{m-1}$, すなわち

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

となる.

p79 : 問

p79 : 問-(イ)

解答

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, $m \in \mathbb{N}$ として,

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n = 2m-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. また,

$$(\text{与式}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_1 a_2 \cdots a_n$$

だから,

$$(\text{与式}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n & (n = 2m - 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

p79 : 問-(口)

解答

計算すると,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= a^3 + b^3 + c^3 - abc - bca - cab \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

となる.

p83 : 問

証明

(n, n) 行列 A, X を

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

とする. このとき, AX は定義され,

$$AX = (Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n)$$

と表せる. ここで, Ax_j を単位ベクトルの線型結合で表すと,

$$\begin{aligned} Ax_j &= A^t(x_{1j}e_1, x_{2j}e_2, \dots, x_{nj}e_n) \\ &= A(x_{1j}e_1 + x_{2j}e_2 + \cdots + x_{nj}e_n) \\ &= x_{1j}a_1 + x_{2j}a_2 + x_{nj}a_n \\ &= \sum_{i=1}^n x_{ij}a_i \end{aligned}$$

となる. これにより, $|AX|$ は, 多重線型性を用いて,

$$\begin{aligned} |AX| &= \left| \sum_{i_1=1}^n x_{i_1 1} a_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n x_{i_2 2} a_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n x_{i_n n} a_{i_n} \right| \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n x_{i_1 1} x_{i_2 2} \cdots x_{i_n n} |a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}| \end{aligned}$$

と変形できる. ここで,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$|a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}| = \operatorname{sgn} \sigma |A|$$

$$\begin{aligned}
 |AX| &= \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \cdots x_{\sigma(n)n} \cdot \operatorname{sgn} \sigma |A| \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \cdots x_{\sigma(n)n} |A| \\
 &= |{}^t X| |A| \\
 &= |A| |X|
 \end{aligned}$$

を得る。これが証明すべきことであった。 \square

p83 : 問

p83 : 問-(イ)

解答

多重線型性などを用いて変形すると,

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= - \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 & 16 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -12 & 17 \\ 0 & -2 & 10 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & -1 & 16 \\ 0 & 3 & -12 & 17 \\ 0 & -2 & 10 & -7 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -1 & 16 \\ 3 & -12 & 17 \\ -2 & 10 & -7 \end{vmatrix} = 539
 \end{aligned}$$

となるので, この行列式の値は 539 である.

p83 : 問-(ロ)

解答

多重線型性などを用いて変形すると,

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & -7 & -8 & 6 \\ 3 & 10 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 17 & 21 & -16 \\ 1 & -7 & -8 & 6 \\ 0 & 31 & 30 & -17 \\ 0 & 37 & 44 & -27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & -8 & 6 \\ 0 & 17 & 21 & -16 \\ 0 & 31 & 30 & -17 \\ 0 & 37 & 44 & -27 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 17 & 21 & -16 \\ 31 & 30 & -17 \\ 37 & 44 & -27 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 第 2 列に第 1 列の -1 倍を加え, 第 3 列に第 1 列を加えると,

$$(\text{与式}) = \begin{vmatrix} 17 & 4 & 1 \\ 31 & -1 & 14 \\ 37 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

を得る. ここで, 第 1 列に第 3 列の -2 倍を加えると,

$$(\text{与式}) = \begin{vmatrix} 15 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 14 \\ 17 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -750$$

となるため, この行列式の値は -750 である.

第 3 章・章末問題

p90-91 : 1

p90-91 : 1-(イ)

解答

$k \in \{2, 3, \dots, n\}$ として, 第 1 列に第 k 列の x^k 倍を加えると,

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

第 1 列で余因子展開すると,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (-1)^{n+2}(a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+2}(a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n) \cdot (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} \quad (*) \\ &= (-1)^{n+2}(a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n) \cdot (-1)^{n-2} \\ &= (-1)^{2n}(a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n) \\ &= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n \end{aligned}$$

となる. ただし (*) では同様の余因子展開を繰り返した.

以上の計算により,

$$(\text{与式}) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n.$$

p90-91 : 1-(ロ)

解答

与式の第 2 列から第 n 列までを第 1 列に足すと,

$$\begin{vmatrix} x + \sum_{k=1}^n a_k & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x + \sum_{k=1}^n a_k & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x + \sum_{k=1}^n a_k & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x + \sum_{k=1}^n a_k & a_n & a_{n-1} & \cdots & x \end{vmatrix}$$

である. 第 2 行から第 n 行のそれぞれから第 1 行を引くと,

$$\begin{vmatrix} x + \sum_{k=1}^n a_k & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n - a_1 & a_{n-1} - a_2 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix}$$

である. 第 1 列で余因子展開すると,

$$\begin{aligned} & \left(x + \sum_{k=1}^n a_k\right) \begin{vmatrix} x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 - a_1 & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_{n-1} - a_2 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix} \\ &= \left(x + \sum_{k=1}^n a_k\right)(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \\ &= \left(x + \sum_{k=1}^n a_k\right) \prod_{k=1}^n (x - a_k). \end{aligned}$$

p90-91 : 1-(八)

解答

この形の $n \times n$ 行列を A_n とすると,

$$\begin{aligned} A_{n+2} &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} \\ &= (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} \\ &= (1+x^2)A_{n+1} - x^2A_n \end{aligned}$$

となる.

よって,

$$A_{n+2} - A_{n+1} = x^2(A_{n+1} - A_n) \quad (n \geq 2).$$

これと $A_1 = 1 + x^2$, $A_2 = 1 + x^2 + x^4$ により, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= x^2(A_n - A_{n-1}) \\ &= x^4(A_{n-1} - A_{n-2}) \\ &= \cdots = x^{2(n-1)}(A_2 - A_1) \\ &= x^{2(n-1)}((1 + x^2 + x^4) - (1 + x^2)) \\ &= x^{2(n+1)} \end{aligned}$$

であるから, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} A_n &= A_1 + \sum_{k=1}^{n-1} x^{2k+2} \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4(1 - x^{2(n-1)})}{1 - x^2} \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4(1 - x^2)(1 + x^2 + \cdots + x^{2(n-2)})}{1 - x^2} \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} \end{aligned}$$

となる. この A_n を用いると, $A_1 = 1 + x^2$, $A_2 = 1 + x^2 + x^4$ であるから, 与えられた行列式の値は, $n \times n$ 行列の場合

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n}$$

である.

p90-91 : 1-(二)

解答

第 1 列で余因子展開すると

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= -a^2 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 1 \\ 0 & c^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 1 \\ 0 & c^2 & 1 \\ c^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(b^2 - c^2 - a^2) - (a^2c^2 + b^2c^2 - c^4) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2. \end{aligned}$$

p90-91 : 2

p90-91 : 2-(イ)

証明

余因子展開を用いると,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= -a \begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -d & 0 & f \end{vmatrix} \\ &= -a(-cdf + bfe - af^2) + b(be^2 - cde - adf) - c(-adf + bde - cd^2) \\ &= af(cd - be + af) - be(-be + cd + af) + cf(af - be - cd) \\ &= (af - be + cd)^2. \end{aligned}$$

となり, これが証明すべきことであった. \square

p90-91 : 2-(ロ)

証明

A を n 次行列とする. ${}^tA = -A$ であるから,

$$|{}^tA| = (-1)^n |A|.$$

ここで, n は奇数であるから,

$$|{}^tA| = -|A|.$$

また, 行列式の転置に関する不変性により, $|{}^tA| = |A|$ なので,

$$\begin{aligned} |A| &= -|A|, \\ \therefore |A| &= 0 \end{aligned}$$

となり, これが証明すべきことであった. \square

p90-91 : 3

p90-91 : 3-(イ)

証明

与えられた行列式に対して多重線型性を用いると,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} \\ &= |A+B| \cdot |A-B| \end{aligned}$$

となり, これが証明すべきことであった. \square

p90-91 : 3-(ロ)

解答

与えられた行列式に対して多重線型性を用いると,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \begin{vmatrix} A+iB & iA-B \\ B & A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{vmatrix} \\ &= \det(A+iB) \cdot \det(A-iB) \end{aligned}$$

となり, いま A, B は実行列なので,

$$\begin{aligned} \det(A+iB) \cdot \det(A-iB) &= \det(A+iB) \cdot \overline{\det(A+iB)} \\ &= |\det(A+iB)|^2 \end{aligned}$$

である.

p90-91 : 4

証明

$\alpha^n = 1$ をみたす $\alpha \in \mathbb{C}$ をひとつ固定する. さて, 与えられた行列式の第 j 行を α^{j-1} 倍して第 1 列に足す操作を行うと, この行列式は

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \alpha^2 \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_{n-2} & x_{n-3} & \cdots & x_0 \end{vmatrix}$$

と変形できる. よって, この行列式は

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1}$$

を因数にもつ. すべての α に関してこのことがいえるから, 因数定理により, この行列式は

$$\prod_{\alpha^n=1} (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1})$$

を因数にもつ。これは n 次式であり、なおかつ x_0 の係数は 1 であることより、結果として

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{\alpha^n=1} (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1})$$

である。これが証明すべきことであった。 \square

p90-91 : 5

解答

前問において、 $n = 4$, $x_1 = i$, $x_2 = 1$, $x_3 = -i$ とした場合を考えればよいので、 $\alpha = \pm 1, \pm i$ により、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \prod_{\alpha^4=1} (x + \alpha i + \alpha^2 - \alpha^3 i) \\ &= (x + i + 1 - i)(x - i + 1 + i)(x - 1 - 1 - 1)(x + 1 - 1 + 1) \\ &= (x + 1)^3(x - 3) \end{aligned}$$

となる。

p90-91 : 6

証明

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ のもとで、 n 個の点を $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ とする。このとき、

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^{n-1} = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

である、これを行列の形に表すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

となる。

ここで、

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

とおくと、 $|{}^t A|$ はヴァンデルモンドの行列式である。

行列式の値は、行列の転置に対して不変なので、

$$|A| = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

となり、条件によりこの値は 0 でない。ゆえに先の連立方程式はただ一つの解をもつ。

以上の考察によって、これら n 個の点を通る直線がただ一つ存在することが示された。 \square

p90-91 : 7

解答

与えられた行列式の係数行列式を A , A の第 j 列を ${}^t(1, 0, 0, 0)$ で置き換えた行列を A_j とする. また,

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} T & -T \\ S & S \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2T & -T \\ O & S \end{vmatrix} \\ &= |2T||S| \\ &= 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2). \end{aligned}$$

クラメールの公式により

$$\begin{cases} x = |A_1|/|A|, \\ y = |A_2|/|A|, \\ z = |A_3|/|A|, \\ u = |A_4|/|A|. \end{cases}$$

さて,

$$\begin{aligned} |A_1| &= \begin{vmatrix} 1 & -b & -a & b \\ 0 & a & -b & -a \\ 0 & -d & c & d \\ 0 & c & d & c \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & -a \\ -d & c & d \\ c & d & c \end{vmatrix} \\ &= 2a(c^2 + d^2). \end{aligned}$$

よって,

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2a(c^2 + d^2)}{4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \frac{a}{2(a^2 + b^2)}.$$

同様にして y, z, u を求めると

$$x = \frac{a}{2(a^2 + b^2)}, \quad y = -\frac{b}{2(a^2 + b^2)}, \quad z = -\frac{a}{2(a^2 + a^2)}, \quad u = \frac{b}{2(a^2 + b^2)}.$$

p90-91 : 8

解答

与えられた行列式は,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$$

の拡大係数行列の行列式を表す. 基本変形を施すと, この行列式は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & g_1 \\ 0 & 1 & g_2 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

の場合に変形できる.

(I) (3) の場合, 行列式が 0 となる条件は $g_3 = 0$ である, このとき, 上の連立方程式の解 (x, y) は存在し一意に定まる. これは 3 直線が 1 点で交わることを表す.

(II) (4) の場合, 行列式は常に 0 であり, このとき, 3 直線はすべて平行であるか一致するかである.

以上の考察により, 与えられた行列式が 0 であるのは

- (i) 3 直線が 1 点で交わる
- (ii) 3 直線が平行である
- (iii) 3 直線が一致する

のいずれかの場合である.

p90-91 : 9

証明

3 点 P_1, P_2, P_3 を通る平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ とおく. このとき,

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases}$$

が成立する. すなわちこれは

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

をみatus. これを a, b, c, d についての連立方程式とみたとき, 与条件により自明でない解があり,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成立する. これが証明すべきことであった. \square

p90-91 : 10

証明

必要性・十分性をそれぞれ証明する.

(1) A が正則かつ A^{-1} が整数行列であると仮定し, $\det A = \pm 1$ であることを示す.

A は整数行列であり、その行列式は、各要素の和と積でかけているから $\det A \in \mathbb{Z}$ である。同様に $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$ である。逆行列の行列式は、

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

であり、つまり $\det A, 1/\det A \in \mathbb{Z}$ である。これを満たす整数は ± 1 だけである。

- (2) $\det A = \pm 1$ であることを仮定し、 A が正則かつ A^{-1} が整数行列であることを示す。 $\det A \neq 0$ より A の正則性がわかる。また、 A の余因子行列を \tilde{A} とすると、余因子は A の各要素の和と積によって表現される。つまり、余因子は整数であるから \tilde{A} は整数行列である。また

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

となる。 $\det A = \pm 1$ であり、余因子は整数であるから、 A^{-1} は整数行列である。

以上の議論により証明された。 \square

p90-91 : 11

p90-91 : 11-(イ)

証明

${}^t A_\sigma$ は $(j, \sigma(j))$ 成分が 1 でそれ以外が 0 である行列である。いま $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ とすると、

$$\begin{aligned} {}^t A_\sigma A_\sigma &= \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \cdots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \cdots & (a_2, a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & \cdots & (a_n, a_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= E \end{aligned}$$

となり、 A は直交行列である。 \square

p90-91 : 11-(ロ)

証明

置換 σ, τ に関して

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = \tau(j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する。このとき、

$$(A_\sigma A_\tau)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

b_{jk} が 1 になるのは $j = \tau(k)$ のときなので、

$$(A_\sigma A_\tau)_{ik} = a_{i, \tau(k)}.$$

さらに, $a_{i,\tau(k)}$ が 1 になるのは $i = \sigma(\tau(k))$ のときなので,

$$(A_\sigma A_\tau)_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = \sigma\tau(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

これは $A_{\sigma\tau}$ の定義そのものなので,

$$A_\sigma A_\tau = A_{\sigma\tau}.$$

□

p90-91 : 11-(八)

証明

$\tau = \sigma^{-1}$ とおくと,

$$\begin{aligned} A_\sigma &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{\tau^{-1}(1)1} a_{\tau^{-1}(2)2} \cdots a_{\tau^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \text{sgn}(\sigma). \end{aligned}$$

これにより

$$\text{sgn}(\sigma) = \pm 1 \iff A_\sigma = \pm 1.$$

□

第 4 章

p93 : 問

証明

$|A \cup B|$ について, $|A \cap B|$ は A と B の共通部分の元の個数を考えているので,

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ \therefore |A| + |B| &= |A \cup B| + |A \cap B| \end{aligned}$$

である. これが証明すべきことであった. \square

p94 : 問

解答

3つのことを証明する.

反射律について 明らかに, A に基本変形を施して A 自身にすることができる.

対称律について P を (m, m) 型の基本行列, Q を (n, n) 型の基本行列として,

$$A = PBQ$$

とかくと, P, Q は正則なので, P^{-1}, Q^{-1} が存在し,

$$B = P^{-1}AQ^{-1}$$

とかける. よって, 対称律が成り立つことが示された.

推移律について P_1, P_2 を (m, m) 型の基本行列, Q_1, Q_2 を (n, n) 型の基本行列として,

$$A = P_1BQ_1, \quad B = P_2CQ_2$$

とかく. このとき, P_1, Q_1 は正則だから, P_1^{-1}, Q_1^{-1} が存在し,

$$B = P_1^{-1}AQ_1^{-1}$$

となる. これにより,

$$P_1^{-1}AQ_1^{-1} = P_2CQ_2$$

となり, 同様の議論によって

$$A = P_1P_2CQ_2Q_1$$

となり, 推移律も成り立つことが示された.

さて, 行列 A に基本変形を施すと, A の階数を r として $F_{m,n}(r)$ が得られることと, r は 0 から $\min\{m, n\}$ までの整数値を取り得るので, 商集合の元の個数は

$$\min\{m, n\} + 1$$

となる.

p106–107 : 問 1

解答

求める $E \rightarrow F$ の取り替え行列を $P = (p_{ij})$ とし,

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & e_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & e_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ f_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, & f_2 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, & f_3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする. ここで,

$$f_i = \sum_{j=1}^3 p_{ji} e_j = p_{1i} e_1 + p_{2i} e_2 + p_{3i} e_3$$

であり, $i = 1, 2, 3$ の場合についての連立方程式を作ると

$$f_1 = p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + p_{31} e_3$$

$$f_2 = p_{12} e_1 + p_{22} e_2 + p_{32} e_3$$

$$f_3 = p_{13} e_1 + p_{23} e_2 + p_{33} e_3$$

これを解くことにより

$$p_{11} = \frac{9}{2}, \quad p_{21} = -\frac{1}{2}, \quad p_{31} = -\frac{1}{2},$$

$$p_{12} = 5, \quad p_{22} = -2, \quad p_{32} = 3,$$

$$p_{13} = \frac{13}{2}, \quad p_{23} = -\frac{3}{2}, \quad p_{33} = -\frac{1}{2}$$

なので,

$$P = \begin{pmatrix} 9/2 & 5 & 13/2 \\ -1/2 & -2 & -3/2 \\ -1/2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

である. また

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)P$$

であるから

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

から求めることもできる.

p106–107 : 問 2

解答

まず,

$$f_i = \sum_{j=1}^2 p_{ji} e_j = p_{1i} e_1 + p_{2i} e_2$$

である, これにより

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{11} e_1 + p_{21} e_2, \\ f_2 &= p_{12} e_1 + p_{22} e_2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= p_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= p_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, これにより

$$p_{11} = -1, \quad p_{21} = 1, \quad p_{12} = -1, \quad p_{22} = 2$$

であるから, 基底の取り替え $E \rightarrow F$ の行列は

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である.

p107–108 : 問 1

p107–108 : 問 1-(イ)

解答

この集合を W_1 とおくと, W_1 は \mathbb{C}^n の部分空間をなす.

$$x = 0 \in W_1$$

であるから, $W_1 \neq \emptyset$ である.

また,

$$v = {}^t(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad w = {}^t(w_1, w_2, \dots, w_n)$$

とおくと,

$$v + w = {}^t(v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

となり, これに加えて

$$(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + \dots + (v_n + w_n) = (v_1 + v_2 + \dots + v_n) + (w_1 + w_2 + \dots + w_n) = 0 + 0 = 0$$

となるから, $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W_1$ である. さらに, $a \in \mathbb{C}$ をとると,

$$a\mathbf{v} = {}^t(av_1, av_2, \dots, av_n)$$

であり,

$$av_1 + av_2 + \dots + av_n = a(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = a \cdot 0 = 0$$

であるから, このとき $a\mathbf{v} \in W_1$ である.

以上により, W_1 は \mathbb{C}^n の線型部分空間をなす.

p107-108 : 問 1-(口)

解答

この集合を W_2 とおくと, W_2 は \mathbb{C}^n の部分空間をなす.

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \in W_2$$

であるから, $W_2 \neq \emptyset$ である.

また,

$$\mathbf{v} = {}^t(v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_n), \quad \mathbf{w} = {}^t(w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_n)$$

とおくと,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = {}^t(v_{p+1} + w_{p+1}, v_{p+2} + w_{p+2}, \dots, v_n + w_n)$$

であり,

$$\begin{aligned} & (v_{p+1} + w_{p+1}) + (v_{p+2} + w_{p+2}) + \dots + (v_n + w_n) \\ &= (v_{p+1} + v_{p+2} + \dots + v_n) + (w_{p+1} + w_{p+2} + \dots + w_n) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるため, このとき $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W_2$ である.

また,

$$a\mathbf{v} = {}^t(av_{p+1}, av_{p+2}, \dots, av_n)$$

であり,

$$av_{p+1} + av_{p+2} + \dots + av_n = a(v_{p+1} + v_{p+2} + \dots + v_n) = a \cdot 0 = 0$$

であるため, このとき $a\mathbf{v} \in W_2$ である.

以上により, W_2 は \mathbb{C}^n の線型部分空間をなす.

p107-108 : 問 1-(ハ)

解答

これは部分空間をなさない.

$$\mathbf{v} = {}^t(1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{w} = {}^t(0, 1, 0, \dots, 0)$$

とすると

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = {}^t(1, 1, 0, \dots, 0)$$

となり、与えられた条件式に当てはめると

$$1^2 + 1^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = 2 \neq 1$$

であるから、この集合は \mathbb{C}^n の部分空間でない。

p107-108 : 問 1-(二)

解答

この集合を W_3 とおくと、 W_3 は \mathbb{C}^n の部分空間をなす。

$x = 0$ とすると、

$$(a, x) = 0$$

であるため、 $W_3 \neq \emptyset$ である。

さて、 v, w が条件を満たすとすると、内積の定義から

$$(a, v + w) = (a, v) + (a, w) = 0$$

である。また、 $c \in \mathbb{C}$ とすると、

$$(a, cv) = c(a, v) = 0$$

である。

以上により、 W_3 は \mathbb{C}^n の線型部分空間をなす。

p107-108 : 問 2

p107-108 : 問 2-(イ)

解答

この集合を W_1 とおくと、 W_1 は \mathbb{K}^n の線型部分空間とならない。

たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、 $A, B \in W_1$ であるが、

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、 $A + B$ は正則行列である。よって W_1 は \mathbb{K}^n の線型部分空間とならない。

p107-108 : 問 2-(ロ)

解答

この集合を W_2 とおくと、 W_2 は \mathbb{K}^n の線型部分空間となる。

$X = O$ としたとき、 $AO = OB$ が成り立つのは明らかなので、 $W_2 \neq \emptyset$ である。

また、 $X, Y \in W_2$ とすると、

$$A(X + Y) = (X + Y)B$$

が成立し、さらに $a \in \mathbb{K}$ とすると、

$$A(aX) = (aX)B$$

が成立する.

以上により, W_2 は \mathbb{K}^n の線型部分空間である.

p107-108 : 問 2-(八)

解答

この集合を W_3 とおくと, これは \mathbb{K}^n の線型部分空間とならない.

たとえば

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$A^2 = O, \quad B^2 = O$$

となり, $A, B \in W_3$ であるが,

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり, これは冪零行列とならない. よって W_3 は \mathbb{K}^n の線型部分空間とならない.

p107-108 : 問 2-(二)

解答

この集合を W_4 とおくと, これは \mathbb{K}^n の線型部分空間とならない.

たとえば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおき, $1/2 \in \mathbb{K}$ をとると,

$$\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

となり, これは W_4 の元ではない. よって W_4 は \mathbb{K}^n の線型部分空間とならない.

p122 : 問

解答

まず,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおく. 正規直交基底のひとつを \mathbf{e}_1 とすると, $\|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{2}$ により,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|} \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. また,

$$\mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1$$

とすると,

$$\mathbf{a}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である. これを用いると,

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{a}'_2\|} \mathbf{a}'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}/2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる. また,

$$\mathbf{a}'_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$$

とすると,

$$\mathbf{a}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となり,

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{a}'_3\|} \mathbf{a}'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる.

以上の考察により, 求める正規直交基底は

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である.

p124 : 問-1)

証明

任意に $\mathbf{x} \in W$ をとる. W^\perp は「 W の任意のベクトルと直交するベクトル全体の集合」であるから, $\mathbf{x} \in W$ に対しては, 任意の $\mathbf{y} \in W^\perp$ において $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ が成り立つ.

ゆえに, 任意の $\mathbf{x} \in W$ は W^\perp の元全てと直交することになり, したがって $\mathbf{x} \in (W^\perp)^\perp$ が従う. このことから

$$W \subset (W^\perp)^\perp$$

が得られる. また, 定理 [4.7] から

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp),$$

$$\dim W + \dim W^\perp = n.$$

ここで定理 [6.4] から \mathbb{R}^n の計量空間 V は $W + W^\perp$ と表されること, [4.8] から, この直和の共通部分は $\{\mathbf{o}\}$ のみであることを用いた. \square

第 4 章・章末問題

p127-130 : 1

解答

$s, t, u, v \in \mathbb{R}$ とし.

$$sa_1 + ta_2 = ua_3 + va_4$$

とおく. これにより,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{o},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{o},$$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (a \text{ は任意の定数})$$

とかけるので, $W_1 \cap W_2$ の次元は 1 であり, その基底は

$$sa_1 + ta_2 = -a \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

により,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である.

p127-130 : 2

解答

W_1 に関して, $x_3 = s$, $x_4 = t$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とかけるため, $\dim W_1 = 2$ であり, その基底は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である. W_2 に関しても同様にして, $\dim W_2 = 2$ であり, その基底は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である. したがって $W_1 + W_2$ は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によって生成される.

ここで,

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

となり, これに基本変形を施すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

となる. したがって, $W_1 + W_2$ の次元は 3 であり, その基底は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である.

p127-130 : 5

解答

A, B の定める線型写像をそれぞれ T_A, T_B とする. $\mathbf{x} \in \text{Im}(T_A + T_B)$ を任意にとると, ある $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ が存在して,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (T_A + T_B)(\mathbf{y}) \\ &= T_A(\mathbf{y}) + T_B(\mathbf{y}) \quad (\because T_A \text{ と } T_B \text{ は線型写像}). \end{aligned}$$

よって,

$$\text{Im}(T_A + T_B) \subset \text{Im } T_A + \text{Im } T_B \quad (*)$$

これにより,

$$\begin{aligned}
 \text{rank}(T_A + T_B) &= \dim(\text{Im}(T_A + T_B)) && (\because \text{階数の定義}) \\
 &\leq \dim(\text{Im}(T_A) + \text{Im}(T_B)) && (\because (*)) \\
 &\leq \dim(\text{Im}(T_A)) + \dim(\text{Im}(T_B)) && (\because \text{定理 [4.7]}) \\
 &= \text{rank}(T_A) + \text{rank}(T_B). && (\because \text{階数の定義})
 \end{aligned}$$

これを書き換えると

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

これが証明すべきことであった.

p127-130 : 6

p127-130 : 6-(イ)

証明

BA は n 次の正方行列である. ここで,

$$\begin{aligned}
 \text{rank}(BA) &\leq \min\{\text{rank } B, \text{rank } A\} \\
 &= m < n
 \end{aligned}$$

であるから, $\text{rank}(BA) < n$ である. よって BA は正則行列でない. \square

p127-130 : 6-(ロ)

証明

AB が正則であるとする. $m = \text{rank } AB \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$ であるから, $m \leq \text{rank } A$ かつ $m \leq \text{rank } B$ である. 一方 $\text{rank } A \leq m$, $\text{rank } B \leq m$ でもあるから $m = \text{rank } A = \text{rank } B$ である.

行列 X の定める線形写像を T_X と書くことにする ($T_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, $T_B: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ である).

$$\begin{aligned}
 \text{rank } AB &= \dim(T_{AB}(\mathbb{C}^m)) \\
 &= \dim((T_A \circ T_B)(\mathbb{C}^m)).
 \end{aligned}$$

$W = T_B(\mathbb{C}^m)$ とおく. T_A の定義域を W に制限した写像 $T_A \upharpoonright W: W \rightarrow \mathbb{C}^n$ について次元定理を適用すると,

$$\dim W = \dim((T_A \upharpoonright W)(W)) + \dim((T_A \upharpoonright W)^{-1}(\{o_m\})).$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 (T_A \upharpoonright W)^{-1}(\{o_m\}) &= \{x \in W : (T_A \upharpoonright W)(x) = o_m\} \\
 &= \{x \in W : T_A(x) = o_m\} \\
 &= \{x \in \mathbb{C}^n : T_A(x) = o_m\} \cap W \\
 &= T_A^{-1}(\{o_m\}) \cap W.
 \end{aligned}$$

であるから,

$$m = \dim((T_A \circ T_B)(\mathbb{C}^m)) + \dim(T_A^{-1}(\{o_m\}) \cap W).$$

となる. よって,

$$\text{rank } AB = m - \dim(T_A^{-1}(\{o_m\}) \cap W).$$

だから $\dim(T_A^{-1}(\{o_m\}) \cap W) = 0$ である. 以上より,

- (I) $m = \text{rank } A = \text{rank } B$.
 (II) $\dim(T_A^{-1}(\{o_m\}) \cap T_B(\mathbb{C}^m)) = 0$.

は必要条件である. 一方, (I) かつ (II) を仮定すると, $\text{rank } AB = m$ であるから AB は正則でもある.
 よって (I) かつ (II) が必要十分条件である. \square

p127-130 : 7

証明

$M_n(\mathbb{K})$ の基底 $\langle e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n}, e_{21}, \dots, e_{nn} \rangle$ を, e_{ij} の (i, j) 成分が 1 で, その他の成分は 0 であるものとして定義する.

$X = (x_{ji}) \in M_n(\mathbb{K})$ を取り, $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} = Te_{ji}$ であるものとすれば,

$$\begin{aligned} \text{tr}(AX) &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} Te_{11} & Te_{12} & \dots & Te_{1n} \\ Te_{21} & Te_{22} & \dots & Te_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Te_{n1} & Te_{n2} & \dots & Te_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{tr} \left(\begin{pmatrix} x_{11}Te_{11} + x_{12}Te_{12} + \dots + x_{1n}Te_{1n} & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{n1}Te_{n1} + \dots + x_{nn}Te_{nn} & \\ & & & \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_{ij} Te_{i,j} \\ &= T \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_{ij} e_{ij} \right) \\ &= T(X) \end{aligned}$$

となり, 上記のように A をとればよい. \square

p127-130 : 8

解答

例 7 をふまえ,

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)g(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \end{aligned}$$

である. さらに, 第 2 項と第 3 項に関連して,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right), \\ \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx &= 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

これらを用いると,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx &= 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \\ &\quad - 2 \left(a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \right) \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\ &= 2\pi \left(a_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right)^2 + \pi \sum_{k=1}^n \left\{ \left(a_k - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(b_k - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right)^2 \right\} + R. \end{aligned}$$

ただし,

$$R = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right)^2 - \pi \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right)^2 + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right)^2 \right).$$

したがって, $\|f - g\|^2$ を最小にする $g(x)$ は,

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right) \cos kx + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \sin kx \right).$$

p127-130 : 12

p127-130 : 12-(イ)

証明

ベクトル空間 V に対して, V の線型汎関数全体の集合を V^* とする.

V の基底 $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ に対して, V^* の元 f_i を $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ とする. $E^* = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ は V^* の基底である.

任意の $f_i \in V^*$ が線型結合で表されることを示す.

$$(c_1 f_1 + \dots + c_n f_n)(x) = 0$$

とする. ここで $x = e_i$ ($1 \leq i \leq n$) を代入すると, $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ となり, $c_i = 0$ と併せると

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

となり線型独立である.

次に, V^* の元が f_1, f_2, \dots, f_n の線型結合で表されることを示す.

V^* の元 f が V の元 $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ に対して $f(e_j) = a_j$ ($1 \leq j \leq n$) とすると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) && (\because f \text{ の線型性}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i f_i(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) && (\because f_i(e_j) = \delta_{i,j}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i \right) (x) \end{aligned}$$

と f_1, f_2, \dots, f_n の線型結合として表される.

以上により, E^* は V^* の基底である. \square

p127-130 : 12-(口)

証明

W^* の元 $f = c_1 f'_1 + \dots + c_n f'_n$ をとる. V の元 $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ に対して

$$\begin{aligned}
 (T^* f')(x) &= f \circ T(x) \\
 &= \sum_{k=1}^m c_k f'_k \circ T \left(\sum_{l=1}^n x_l e_l \right) && (\because f' \text{ の線型性}) \\
 &= \sum_{k=1}^m c_k f'_k \left(\sum_{l=1}^n x_l T(e_l) \right) && (\because T \text{ の線型性}) \\
 &= \sum_{k=1}^m c_k \sum_{l=1}^n x_l f'_k(a_{1l} e'_1 + a_{2l} e'_2 + \dots + a_{nl} e'_n) \\
 &= \sum_{k=1}^m c_k \sum_{l=1}^n x_l a_{kl} && (\because \text{双対基底の定義と } f'_k \text{ の線型性}) \\
 &= \sum_{k=1}^m c_k \sum_{l=1}^n c_{kl} f_l(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) && (\because \text{双対基底の定義と } f'_l \text{ の線型性}) \\
 &= \left(\sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m c_k a_{kl} \right) f_l \right) (x)
 \end{aligned}$$

より, 基底 E^* , F^* に関する T^* の表現行列 $B = (b_{ij})$ は

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m c_k a_{k1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m c_k a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

より, $b_{ij} = a_{ji}$ となり, $B = {}^t A$ である. \square

p127-130 : 9

証明

この写像を φ とする. まず, φ が線型写像であることを示す.

$x, y \in V$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して, $\forall f \in V^*$ で

$$\begin{aligned}
 (\varphi(x+y))(f) &= f(x+y) \\
 &= f(x) + f(y) \\
 &= (\varphi(x))(f) + (\varphi(y))(f) \\
 &= (\varphi(x) + \varphi(y))(f)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi(cx))(f) &= f(cx) \\
 &= cf(x) \\
 &= c(\varphi(x))(f) \\
 &= (c\varphi(x))(f)
 \end{aligned}$$

であるから, φ は線型写像である.

次に、 V の基底 $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ に対して、 $e'_i = \varphi(e_i)$ (ただし $1 \leq i \leq n$) としたとき、 $(E^*)^* = \langle e'_1, e'_2, \dots, e'_n \rangle$ が $(V^*)^*$ の基底であることを示す。

$E^* = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ を E の双対基底とする。 $c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + \dots + c_n e'_n = \mathbf{0}$ となるとき、 φ は線型写像で $\varphi(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n) = c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + \dots + c_n e'_n$ であるので、

$$\begin{aligned} (c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + \dots + c_n e'_n)(f_i) &= f_i(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k f_i(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \delta_{ik} \\ &= c_i = 0 \end{aligned}$$

となり、 $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ であるから、 e'_1, e'_2, \dots, e'_n は線型独立であり、 $\dim(V^*)^* = n$ より $(E^*)^*$ は基底である。とくに φ の階数は n となる。適当な基底での φ の表現行列 A に対して p.117 の (3) により、 $r(A) = n$ となり、これは φ が全単射対応を与えることを示す。 \square

p127-130 : 10

p127-130 : 10-(イ)

証明

(1), (2) で双線型性, (3) で対称性, (4) で正値性を証明する。

(1)

$$\begin{aligned} (f, g_1 + g_2)_p &= \int_a^b p(x) f(x) \{g_1(x) + g_2(x)\} dx \\ &= \int_a^b p(x) f(x) g_1(x) dx + \int_a^b p(x) f(x) g_2(x) dx \\ &= (f, g_1)_p + (f, g_2)_p. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2, g)_p &= \int_a^b p(x) \{f_1(x) + f_2(x)\} g(x) dx \\ &= \int_a^b p(x) f_1(x) g(x) dx + \int_a^b p(x) f_2(x) g(x) dx \\ &= (f_1, g)_p + (f_2, g)_p. \end{aligned}$$

(2) c は任意の実数とする。

$$\begin{aligned} (cf, g)_p &= \int_a^b p(x) \{cf(x)\} g(x) dx \\ &= c \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \\ &= c(f, g)_p. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} (f, cg)_p &= \int_a^b p(x) f(x) \{cg(x)\} dx \\ &= c \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \\ &= c(f, g)_p. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(f, g)_p &= \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b p(x) g(x) f(x) dx \\ &= (g, f)_p.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(f, f)_p &= \int_a^b p(x) f(x) f(x) dx \\ &= \int_a^b p(x) \{f(x)\}^2 dx \\ &> 0.\end{aligned}\quad (\because p(x) \text{ は常に正})$$

等号が成立するのは $f(x) = 0$ のとき.

(1) から (4) の考察により, $(f, g)_p$ は内積の定義をみたす. \square

第 5 章

p139 : 問

前半

証明

T をエルミート変換とする。また、 $\lambda \in \mathbb{K}$ を T の固有値、 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ を T の固有値 λ に対する固有ベクトルとする。

このとき、

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) && \text{(内積の定義)} \\ &= (T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) && \text{(固有値の定義)} \\ &= (\boldsymbol{x}, T^*\boldsymbol{x}) && \text{(p139 式 (1))} \\ &= (\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}) && (T \text{ はエルミート変換}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) && \text{(固有値の定義)} \\ &= \bar{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) && \text{(内積の定義)}\end{aligned}$$

となり、 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ より $\lambda = \bar{\lambda}$ であるから $\lambda \in \mathbb{R}$ である。 \square

後半

証明

T をユニタリ変換とする。また、 $\lambda \in \mathbb{K}$ を T の固有値、 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ を T の固有値 λ に対する固有ベクトルとする。

このとき、

$$\begin{aligned}\lambda\bar{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= (\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) && \text{(内積の定義)} \\ &= (T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}) && \text{(固有値の定義)} \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) && (T \text{ はユニタリ変換})\end{aligned}$$

となり、 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ より $|\lambda| = 1$ である。 \square

附録 III

p228 : 問

p228 : 問-(イ)

以下により, 求める最大公約数は $x^2 + x - 1$ である.

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 3x^3 - 3x + 1 \overline{) \begin{array}{r} x^5 + 2x^4 + x - 1 \\ x^5 + 3x^4 + x \\ \hline -x^4 + 3x^2 - 1 \\ -x^4 - 3x^3 + 3x - 1 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 - 3x \end{array}} \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^2 + x - 1 \overline{) \begin{array}{r} x^4 + 3x^3 - 3x + 1 \\ x^4 + x^3 - x^2 \\ \hline 2x^3 + x^2 - 3x \\ 2x^3 + 2x^2 - 2x \\ \hline -x^2 - x + 1 \\ -x^2 - x + 1 \\ \hline 0 \end{array}}
 \end{array}$$

p228 : 問-(ロ)

以下により, これらは互いに素である.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x - 3 \overline{) \begin{array}{r} x^3 - 4x + 4 \\ x^3 - 2x^2 - 3x \\ \hline x^2 + 4 \\ x^2 - 2x - 3 \\ \hline x + 7 \end{array}}
 \end{array}$$

p239 : 問 1

p239 : 問 1-(イ)

解答

計算すると以下ようになる:

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_j x_k \\
 &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n) = s_1^2 - 2s_2.
 \end{aligned}$$

p239 : 問 1-(ロ)

解答

計算すると以下のようになる：

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 - 3 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) + 3 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3 - 3(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n) \\ &\quad + 3(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n) \\ &= s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3. \end{aligned}$$

p239 : 問 2

p239 : 問 2-(イ)

補題

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

解答

まず,

$$(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0.$$

これをふまえ、補題において $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$ とおくと,

$$\begin{aligned} 0 &= (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 - 3(x - y)(y - z)(z - x) \\ \therefore (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 &= 3(x - y)(y - z)(z - x). \end{aligned}$$

p239 : 問 2-(ロ)

補題

$a + b + c = 0$ のとき,

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca).$$

補題

$a + b + c = 0$ のとき,

$$a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

解答

上記の 2 つの補題により,

$$\begin{aligned} (x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 &= -5(x - y)(y - z)(z - x)\{(x - y)(y - z) + (y - z)(z - x) + (z - x)(x - y)\} \\ &= -5(x - y)(y - z)(z - x)\{xy + xz + yz - (x^2 + y^2 + z^2)\} \\ &= 5(x - y)(y - z)(z - x)\{(x + y + z)^2 - 3(xy + xz + yz)\}. \end{aligned}$$

p249 : 問

p249 : 問-(イ)

証明

体 K の単位元について, $0 = 0 + 0$ であるから,

$$\begin{aligned} a0 &= a(0 + 0) = a0 + a0 \\ \therefore a0 &= a0 + a0 \end{aligned}$$

K は加法について可換群であるから, $a0$ の逆元 $-a0$ が K に存在する. これを用いると,

$$\begin{aligned} a0 + (-a0) &= a0 + a0 + (-a0) \\ \therefore 0 &= a0 + a0 + (-a0) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} a0 + a0 + (-a0) &= a0 + \{a0 + (-a0)\} \\ &= a0 + 0 \\ &= a0 \end{aligned}$$

となるから, $0 = a0$ である. $0 = 0a$ についても同様. \square

p249 : 問-(口)

証明

$a \neq 0$ とする. このとき, a の逆元 $a^{-1} \in K$ が存在し, $ab = 0$ の両辺に a^{-1} をかけると,

$$\begin{aligned} a^{-1}(ab) &= a^{-1}0 \\ (a^{-1}a)b &= 0 \\ 1b &= 0 \\ \therefore b &= 0 \end{aligned}$$

である. これと $b \neq 0$ を仮定したときの同様の考察により, $ab = 0$ のとき, $a = 0$ または $b = 0$ である. \square

p255 : 1

証明

$a, b, c \in H$ について, G の演算により, $a(bc) = (ab)c$ が成り立ち, このことから結合法則は成立する.

また, 仮定より $H \neq \emptyset$ なので, $x \in H$ をひとつとり, $a = x$, $b = x$ とすると,

$$ab^{-1} = xx^{-1} = e$$

となり, 仮定から e は H の元である. よって H は単位元を持つ.

次に, $a = e$, $b = x$ とすると,

$$ab^{-1} = ex^{-1} = x^{-1}$$

となり, 仮定により x^{-1} は H の元である. よって H の任意の要素は逆元を持つ.

上の考察により, どの要素も逆元を持つので, $a = x$, $b = y^{-1}$ とすると,

$$ab^{-1} = x(y^{-1})^{-1} = xy.$$

これは H の元であるから, H は G の演算について閉じている.

以上の考察から,

- H は G の演算について閉じている
- H の元は G の演算について結合法則を満たす

- H は単位元 e を持つ
- H の任意の要素は逆元を持つ

ということがわかり、 H は G の部分群である. \square

Column I

本題にはあまり関係のない余談ですが、群が空集合でないことは群の定義からただちに従います.

参考文献

- [1] 齋藤正彦『線型代数入門』, 東京大学出版会, 1966