

---

---

齋藤正彦『線型代数入門』解答集

---

---

数学書解答集作成班

2025 年 7 月 4 日

## 目次

### はじめに

### 概要

### Special Thanks

## 第 1 章

### p5 : 問 1

### p5 : 問 2

### p7 : 問-(上)

### p7 : 問-(下)

### p8 : 問 1

p8 : 問 1-(イ) . . . . .

p8 : 問 1-(ロ) . . . . .

### p8 : 問 2

p8 : 問 2-(イ) . . . . .

p8 : 問 2-(ロ) . . . . .

### p10 : 問 1

### p10 : 問 2

### p11 : 問 1

### p12 : 問 2

### p12 : 問 3

### p13 : 問 1

### p13 : 問 2

### p18 : 問

### p19 : 問 1-(上)

### p19 : 問 2-(上)

### p19 : 問 1-(下)

### p19 : 問 2-(下)

p19 : 問 2-(下)-(イ) . . . . .

p19 : 問 2-(下)-(ロ) . . . . .

p19 : 問 2-(下)-(ハ) . . . . .

### p22 : 問 1

p22 : 問 1-(イ) . . . . .

p22 : 問 1-(ロ) . . . . .

p22 : 問 1-(ハ) . . . . .

## 第 1 章・章末問題

### p29-30 : 2

### p29-30 : 3

### p29-30 : 4

### p29-30 : 5

### p29-30 : 6

p29-30 : 6-(イ) . . . . .

p29-30 : 6-(ロ) . . . . .

### p29-30 : 7

p29-30 : 7-(イ) . . . . .

p29-30 : 7-(ロ) . . . . .

### p29-30 : 8

### p29-30 : 9

### p29-30 : 10

p29-30 : 10-(イ) . . . . .

p29-30 : 10-(ロ) . . . . .

## 第 2 章

### p34 : 問 1

### p40 : 問

p40 : 問-(イ) . . . . .

### p41 : 問 1

### p42 : 問 1

### p42 : 問 2

### p42 : 問 3

p42 : 問 3-(イ) . . . . .

p42 : 問 3-(ロ) . . . . .

p42 : 問 3-(ハ) . . . . .

### p52 : 問

### p58 : 問

p58 : 問-(イ) . . . . .

p58 : 問-(ロ) . . . . .

p58 : 問-(ハ) . . . . .

### p62-63 : 問 1

### p62 : 問 2

### p62-63 : 問 3

### p65: 問 1

### p65: 問 2

## 第 2 章・章末問題

### p70-73 : 1

p70-73 : 1-(イ) . . . . .

p70-73 : 1-(ロ) . . . . .

### p70-73 : 2

p70-73 : 2-(イ) . . . . .

p70-73 : 2-(ロ) . . . . .

p70-73 : 2-(ハ) . . . . .

p70-73 : 2-(ニ) . . . . .

### p70-73 : 3

p70-73 : 3-(イ) . . . . .

p70-73 : 3-(ロ) . . . . .

### p70-73 : 4

### p70-73 : 5

### p70-73 : 6

p70-73 : 6-(イ) . . . . .

p70-73 : 6-(ロ) . . . . .

p70-73 : 6-(ハ) . . . . .

p70-73 : 6-(ニ) . . . . .

p70-73 : 7	35	第 3 章・章末問題	49	p107-108 : 問 1-(二) . . .	63
p70-73 : 8	36	p90-91 : 1	49	p107-108 : 問 2	63
p70-73 : 9	36	p90-91 : 1-(イ) . . . . .	49	p107-108 : 問 2-(イ) . . .	63
p70-73 : 10	37	p90-91 : 1-(ロ) . . . . .	50	p107-108 : 問 2-(ロ) . . .	63
p70-73 : 10-(イ) . . . . .	37	p90-91 : 1-(ハ) . . . . .	50	p107-108 : 問 2-(ハ) . . .	64
p70-73 : 10-(ロ) . . . . .	37	p90-91 : 1-(ニ) . . . . .	51	p107-108 : 問 2-(ニ) . . .	64
p70-73 : 10-(ハ) . . . . .	38	p90-91 : 2	52	p122 : 問	64
p70-73 : 11	38	p90-91 : 2-(イ) . . . . .	52	p124 : 問-1)	65
p70-73 : 11-(イ) . . . . .	38	p90-91 : 2-(ロ) . . . . .	52	第 4 章・章末問題	66
p70-73 : 11-(ロ) . . . . .	39	p90-91 : 3	52	p127-130 : 1	66
p70-73 : 11-(ハ) . . . . .	39	p90-91 : 3-(イ) . . . . .	52	p127-130 : 2	66
p70-73 : 11-(ハ) . . . . .	39	p90-91 : 3-(ロ) . . . . .	53	p127-130 : 5	67
p70-73 : 12	40	p90-91 : 4	53	p127-130 : 6	68
p70-73 : 13	41	p90-91 : 5	54	p127-130 : 6-(イ) . . . . .	68
p70-73 : 13-(イ) . . . . .	41	p90-91 : 6	54	p127-130 : 6-(ロ) . . . . .	68
p70-73 : 13-(ロ) . . . . .	41	p90-91 : 7	55	p127-130 : 7	69
p70-73 : 13-(ハ) . . . . .	41	p90-91 : 8	55	p127-130 : 8	70
p70-73 : 13-(ニ) . . . . .	42	p90-91 : 9	56	p127-130 : 12	71
p70-73 : 14	43	p90-91 : 10	57	p127-130 : 12-(イ) . . . . .	71
p70-73 : 15	43	p90-91 : 11	57	p127-130 : 12-(ロ) . . . . .	71
p70-73 : 15-(イ) . . . . .	43	p90-91 : 11-(イ) . . . . .	57	p127-130 : 9	72
p70-73 : 15-(ロ) . . . . .	44	p90-91 : 11-(ロ) . . . . .	57	p127-130 : 10	73
p70-73 : 15-(ハ) . . . . .	44	p90-91 : 11-(ハ) . . . . .	58	p127-130 : 10-(イ) . . . . .	73
第 3 章	45	第 4 章	59	第 5 章	75
p77 : 問 1	45	p93 : 問	59	p139 : 問	75
p77 : 問 2	46	p94 : 問	59	附録 III	76
p77 : 問 3	46	p106-107 : 問 1	60	p228 : 問	76
p79 : 問	47	p106-107 : 問 2	60	p228 : 問-(イ) . . . . .	76
p79 : 問-(イ) . . . . .	47	p107-108 : 問 1	61	p228 : 問-(ロ) . . . . .	76
p79 : 問-(ロ) . . . . .	47	p107-108 : 問 1-(イ) . . .	61	p239 : 問 1	76
p83 : 問	47	p107-108 : 問 1-(ロ) . . .	62		
p83 : 問	48	p107-108 : 問 1-(ハ) . . .	62		
p83 : 問-(イ) . . . . .	48				
p83 : 問-(ロ) . . . . .	49				

p239 : 問 1-(イ) . . . . .	76	p239 : 問 2-(イ) . . . . .	77	p249 : 問-(イ) . . . . .	77
p239 : 問 1-(口) . . . . .	76	p239 : 問 2-(口) . . . . .	77	p249 : 問-(口) . . . . .	78
<b>p239 : 問 2</b>	<b>77</b>	<b>p249 : 問</b>	<b>77</b>	<b>p255 : 1</b>	<b>78</b>

# はじめに

## 概要

この文書は、なまちゃんが運営する「数学書解答集作成班」が制作した、齋藤正彦著『線型代数入門』（東京大学出版会）の解答集である。

未完ではあるものの、編集の際の利便性を考慮して、オープンソースでの公開となった。それゆえ、数学的な誤りや誤植、改善案の提案などがあればぜひ Issue に書き込んだり、Pull Request を送っていただきたい<sup>i1</sup>。

## Special Thanks

掲載許可を得た方のみ<sup>i2</sup>を敬称略で掲載する。

- ねたんほ（解答の提供）
- まっちゃん（解答の提供）
- かねこ（解答の提供）
- qwer（解答の提供）
- やたろう（解答の提供, Git 管理）
- 不自然対数（ $\text{\LaTeX}$  関連）

その他、多くの方々。

---

<sup>i1</sup> 永遠の工事中

<sup>i2</sup> 掲載されていないという方は「ニックネーム」を記入のもと、なまちゃんへ連絡していただきたい。

# 第 1 章

## p5 : 問 1

### 証明

線分 PQ の中点を M とする. このとき,

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OP} + \vec{PM} \\ &= \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2} \\ &= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}\end{aligned}$$

である.

□

## p5 : 問 2

### 証明

三角形 PQR の重心を G, PQ の中点を N とする. G は線分 RN を 2:1 に内分する点なので,

$$\begin{aligned}\vec{OG} &= \vec{OR} + \frac{2}{3}\vec{RN} \\ &= \mathbf{c} + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} - \mathbf{c}\right) \\ &= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}\end{aligned}$$

である.

□

## p7 : 問-(上)

### 解答

求めるベクトルを,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  (ただし  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ) とおく. このとき, 内積の定義により,

$$\mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x + y + z = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = x + y + 4z = 1 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 3$$

これらの式から,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \pm \sqrt{2})/4 \\ (2 \mp \sqrt{2})/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

である.

## p7 : 問-(下)

### 解答

ここでは, [1.4] の結果を利用する.

求める三角形の面積を  $S$  とし,

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

とおく, このとき,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|^2 \|\overrightarrow{P_1P_3}\|^2 - (\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2][(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2] \\ &\quad - [(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)]^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である.

## p8 : 問 1

### p8 : 問 1-(イ)

### 解答

与えられた直線を  $l$  とする.  $l$  の方程式に  $x = -1$  を代入すると,  $y = 2$  となるため,  $l$  は点  $(-1, 2)$  を通る. また,  $l$  は点  $(2, 0)$  を通るため,  $l$  の方向ベクトルのひとつは,

$$\begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である. よって,  $l$  のベクトル表示のひとつは,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t < \infty)$  である.

### p8 : 問 1-(ロ)

### 解答

与えられた直線を  $l'$  とする.  $l'$  の方向ベクトルのひとつは,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  である. また,  $l'$  は点  $(3, 0)$  を通る

ので, そのベクトル表示のひとつは,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t < \infty)$  となる.

## p8 : 問 2

### p8 : 問 2-(イ)

**解答**

与えられたベクトル表示から,

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{cases} t = \frac{x-1}{2} \\ t = y+1 \end{cases}$$

である. これから  $t$  を消去すると,

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} &= y+1 \\ \therefore x-2y-3 &= 0 \end{aligned}$$

である.

**p8 : 問 2-(口)****解答**

点  $(-1, -2)$  を通り,  $x$  軸に平行な直線を表すから,  $y = -2$  が求める直線の方程式である.

**p10 : 問 1****解答**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

から,

$$\begin{aligned} -2x + 2z &= 2 \\ \therefore -x + z &= 1 \end{aligned}$$

である. このとき,  $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  はこれを満たす. このときの  $y$  の値を計算すると, それぞれ  $-3, -5$  なので, 結局, 与えられた直線は 2 点  $(1, -3, 2), (2, -5, 3)$  を通る. すなわち, この直線の方角ベクトルのひとつは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. したがって求めるベクトル表示のひとつは, 直線上の任意の位置ベクトルを  $x$  とすると,

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せる.



## p10 : 問 2

### 証明

$\overrightarrow{P_1P_2}$  上の任意の点  $P$  における位置ベクトル  $\boldsymbol{x}$  をとり,

$$t = \frac{\|\overrightarrow{P_1P}\|}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|}.$$

なる実数  $t$  を定める.

$$\|\overrightarrow{P_1P}\| + \|\overrightarrow{PP_2}\| = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|$$

だから, 両辺を  $\|\overrightarrow{P_1P_2}\|$  で割り,

$$t + \frac{\|\overrightarrow{PP_2}\|}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|} = 1$$

より,  $0 \leq t \leq 1$  である.

また,

$$\overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1 &= t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ \therefore \boldsymbol{x} &= (1-t)\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2.\end{aligned}$$

ここで

$$1-t = t_1, \quad t = t_2$$

と置き直すと  $t_1, t_2 \geq 0$ ,  $t_1 + t_2 = 1$  であり,

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{x}_1 + t_2\boldsymbol{x}_2$$

となる. これが証明すべきことであった.

□

## p11 : 問 1

### 解答

与えられた平面を  $(S)$  とおく.  $(S)$  は 3 点  $(-1, 0, 1)$ ,  $(2, 0, -1)$ ,  $(0, -1, 0)$  を通るので,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と改めておくと,

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり,  $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$  と  $\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1$  は線型独立なので, 求めるベクトル表示のひとつは,

$$(S): \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t, s < \infty)$$

## p12 : 問 2

### 解答

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 - t - 2s \\ z = 0 + 2t + s \end{cases}$$

から  $t$  と  $s$  を消去して,

$$x - y - z = -1$$

これが求める直線の方程式である.

## p12 : 問 3

### 証明

$$\overrightarrow{OP_1} = \boldsymbol{x}_1, \quad \overrightarrow{OP_2} = \boldsymbol{x}_2, \quad \overrightarrow{OP_3} = \boldsymbol{x}_3$$

とする. 三角形  $P_1P_2P_3$  上の任意の点の位置ベクトル  $\boldsymbol{x}$  をとり,  $\triangle P_1P_3P$  が三角形  $P_1P_2P_3$  の面積を表すとし,

$$s = \frac{\triangle P_1P_3P}{\triangle P_1P_2P_3}, \quad t = \frac{\triangle P_1PP_2}{\triangle P_1P_2P_3}$$

と  $s, t$  を定める. このとき,

$$\triangle P_1P_3P + \triangle P_1PP_2 + \triangle PP_2P_3 = \triangle P_1P_2P_3$$

の両辺を  $\triangle P_1P_2P_3$  で割ると,

$$s + t + \frac{\triangle PP_2P_3}{\triangle P_1P_2P_3} = 1$$

このことから,  $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s + t \leq 1$  を満たす実数  $s, t$  が存在することがわかる.

また,  $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$  と  $\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1$  は線型独立なので,  $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1$  は, 実数  $a, b$  を用いて,

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1 = a(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + b(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1)$$

と一意に表せる.

ここで,

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) &= (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \times (a(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + b(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)) \\ &= a(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1).\end{aligned}$$

つまり,  $\|(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\| = |a|\|(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\|$  である. そして,  $\triangle P_1 P_2 P_3$  を含む平面上で, 点 P と  $P_2$  は  $\overrightarrow{P_1 P_3}$  に対して同じ側にあるので, 外積の定義により  $a \geq 0$  である. ゆえに,

$$\begin{aligned}2\triangle P_1 P P_3 &= 2a\triangle P_1 P_2 P_3, \\ \therefore a &= \frac{2\triangle P_1 P_3 P}{2\triangle P_1 P_2 P_3} = s.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) &= (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (a(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + b(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)) \\ &= b(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1).\end{aligned}$$

つまり,  $\|(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\| = |b|\|(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)\|$  である. そして,  $\triangle P_1 P_2 P_3$  を含む平面上で, 点 P と  $P_3$  は  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  に対して同じ側にあるので, 外積の定義により  $b \geq 0$  である. ゆえに,

$$\begin{aligned}2\triangle P_1 P P_2 &= 2b\triangle P_1 P_2 P_3, \\ \therefore b &= \frac{2\triangle P_1 P P_2}{2\triangle P_1 P_2 P_3} = t.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 &= s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + t(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \\ \therefore \mathbf{x} &= (1 - s - t)\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2 + t\mathbf{x}_3.\end{aligned}$$

$1 - s - t = t_1$ ,  $s = t_2$ ,  $t = t_3$  と改めて書き直すと, 先に示したことから

$$0 \leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq t_2 \leq 1, \quad 0 \leq t_3 \leq 1$$

であり,

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + t_3 \mathbf{x}_3, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

となる. これが証明すべきことであった.

□

## p13 : 問 1

### 解答

$(S_1)$ ,  $(S_2)$  の法線ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  とおくと,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. ゆえに, 交角を  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) とすると,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1\| \|\mathbf{x}_2\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\theta = \frac{\pi}{4}$  である.

## p13 : 問 2

### 証明

平面  $\pi_1, \pi_2$  を考え,  $\pi_1, \pi_2$  の法線ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  とおく.

#### $\mathbf{n}_1$ と $\mathbf{n}_2$ が平行なとき

$\pi_1$  に垂直な平面は  $\pi_2$  にも垂直であり, このような平面を  $\pi_3$  とすると,  $\pi_3$  は  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  と平行である. よって  $\pi_3$  と  $\pi_1, \pi_2$  はそれぞれ並行であり, このような平面は確かに存在する.

#### $\mathbf{n}_1$ と $\mathbf{n}_2$ が平行でないとき

$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \neq \mathbf{0}$  は明らかなので,  $\mathbf{n}_3 := \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$  とすると,  $\mathbf{n}_3 \neq \mathbf{0}$  である. よって,  $\mathbf{n}_3$  は  $\pi_1, \pi_2$  に垂直である. このとき  $\mathbf{n}_3$  を法線ベクトルとする平面を取ればよい.

以上の考察により証明された.

□

## p18 : 問

### 証明

$A, B, C$  が  $2 \times 2$  行列の場合を証明する.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

とし,  $A, B, C$  の成分はすべて複素数であるとする. このとき,

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk &cej + dgj + cfl + dhl \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. 他方

$$\begin{aligned} A(BC) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei + afk + bgi + bhk & aej + afl + bgj + bhl \\ cei + cfk + dgi + dhk &cej + cfl + dgj + dhl \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, たしかに  $(AB)C = A(BC)$  である.

□

## p19 : 問 1-(上)

### 証明

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

となり, これは明らかに線型変換である. 対応する行列は,  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  である.

□

## p19 : 問 2-(上)

### 証明

式 (15) より,  $2 \times 2$  行列  $A, B$  とベクトル  $x$  について,

$$\begin{aligned} T_B(T_A(x)) &= B(Ax) \\ &= (BA)x \\ &= T_{BA}(x) \end{aligned}$$

である. これが証明すべきことであった.

□

## p19 : 問 1-(下)

### 解答

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とおくと, (17) 式より,

$$\begin{aligned} Tx &= \frac{ax + by}{a^2 + b^2} \mathbf{a} \\ &= \begin{pmatrix} a^2x + aby \\ abx + b^2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

であるから,

$$T = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

となる.

## p19 : 問 2-(下)

### p19 : 問 2-(下)-(イ)

### 証明

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  かつ  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} Tx &= \frac{(\mathbf{a}, x)}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \mathbf{a} \\ &= \frac{a_1x + a_2y}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。つまり、 $T = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix}$  である。このとき、

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)^2} \begin{pmatrix} a_1^4 + a_1^2 a_2^2 & a_1^3 a_2 + a_1 a_2^3 \\ a_1^3 a_2 + a_1 a_2^3 & a_2^4 + a_1^2 a_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} = T \end{aligned}$$

となり、 $T^2 = T$  である。 $S^2 = S$  も同様に示される。

□

## p19 : 問 2-(下)-(口)

### 証明

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  とする。このとき、 $a$  と  $b$  が直交することから、

$$a \cdot b = 0$$

$$\therefore a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} TS &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \frac{1}{(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = O \\ &\quad (\because a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0) \end{aligned}$$

である。同様に  $ST$  を計算すると、 $ST = O$  であることもわかり、これで  $TS = ST = O$  が証明された。

□

## p19 : 問 2-(下)-(ハ)

### 証明

イ), 口) の文字や結論を用いると、

$$\begin{aligned} T\mathbf{x} + S\mathbf{x} &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) & (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \\ (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) & (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

となる。これが証明すべきことであった。

□

## p22 : 問 1

### p22 : 問 1-(イ)

## 解答

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

となり、これは  $y$  軸に関する対象点に移す変換を表す。

## p22 : 問 1-(口)

## 解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{pmatrix}$$

となり、これは  $x$  軸まわりに角  $\alpha$  だけ回転する変換を表す。

## p22 : 問 1-(ハ)

## 解答

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

## 第 1 章・章末問題

## p29-30:2

## 証明

2 点  $P_1, P_2$  を通る直線の方程式を  $ax + by + c = 0$  (ただし  $(a, b) \neq (0, 0)$ ) とおく。このとき、

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

が成立する。すなわちこれは

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

をみtas。これを  $a, b, c$  についての連立方程式とみたとき、与条件により自明でない解があり、

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成立する。転置行列の行列式はもとの行列の行列式に等しいので、行列式の交代性なども用いて、

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

を得る。これが証明すべきことであった。

□

## p29–30:3

### 解答

点を以下の順で移動させる変換を考える。

- (1) 原点中心に  $-\theta$  回転させる。
- (2)  $x$  軸に関して対称移動させる。
- (3) 原点中心に  $\theta$  回転させる。

ここで、(1) から (3) までの変換を表す行列をそれぞれ  $R_{-\theta}$ ,  $A_x$ ,  $R_\theta$  とすると、

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

となる。よって、この変換を表す行列は

$$\begin{aligned} R_\theta A_x R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

## p29–30:4

### 証明

以下では、直線  $y = \tan \theta$  に関する折り返しを  $T_\theta$  とかくことにする。

さて、直線  $y = \tan(\theta/4)x$  に関する折り返しは、

$$T_{\theta/4} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

で表される。

また、直線  $y = \tan(-\theta/4)x$  に関する折り返しは、

$$T_{-\theta/4} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

で表される。



ここで,

$$\begin{aligned} T_{\theta/4}T_{-\theta/4} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, これは原点のまわりに  $\theta$  回転する行列を表す.

以上の考察により証明された.

□

## p29-30 : 5

### 解答

任意の点  $P(p)$ ,  $p \in \mathbb{R}^3$  を平面  $(a, x)$  に対して折り返すことを考える.

点  $P$  から  $(a, x)$  におろした垂線の足は,  $t \in \mathbb{R}$  を用いて

$$p + t \frac{a}{(a, a)}$$

と表せ, これが平面  $(a, x)$  上にあるので,

$$(a, p + t \frac{a}{(a, a)}) = 0$$

$$\therefore t = -(a, p)$$

である.

また, 求める点を  $P'(p')$  とすると,

$$\begin{aligned} p' &= p + t \frac{2a}{(a, a)} \\ &= p - \frac{2(a, p)}{(a, a)} a \end{aligned}$$

であるから, これはたしかに  $V^3$  の線型変換を引き起こし, その変換公式は

$$x \mapsto x - \frac{2(a, x)}{(a, a)} a$$

である,

## p29-30 : 6

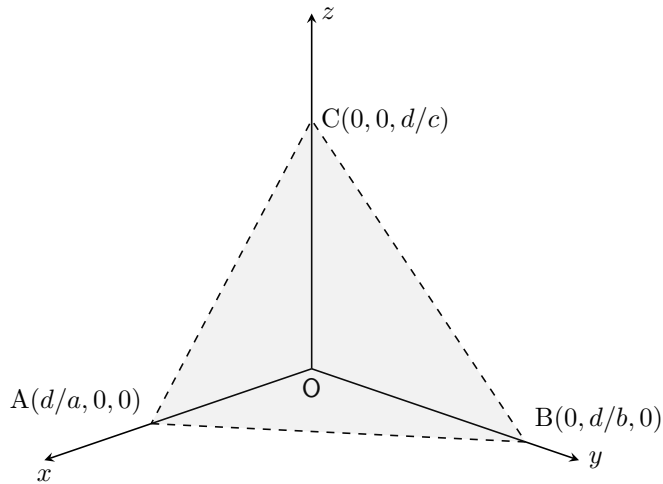
### p29-30 : 6-(イ)

### 解答

( $S$ ) と  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸の交点をそれぞれ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  とする. このとき,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の座標は図のようになり, この三角錐の体積を  $V$  とすると,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot |\det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})| \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{|d|^3}{|abc|} = \frac{|d|^3}{6|abc|} \end{aligned}$$

である。ここで、 $|\det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})|$  が  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$  の張る平行六面体の体積を表すことを用いた。



### p29-30 : 6-(口)

#### 解答

三角形  $ABC$  の体積を  $T$ ,  $O$  から平面  $ABC$  におろした垂線の足を  $H$  とすると,

$$V = \frac{1}{3} \|\vec{OH}\| \cdot T$$

である。ここで,

$$\|\vec{OH}\| = \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

なので、イ)の結果から  $V = \frac{|d|^3}{6|abc|}$  なのを加味すると,

$$T = \frac{d^2 \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2|abc|}$$

である。

### p29-30 : 7

#### p29-30:7-(イ)

#### 解答

$a$ ,  $b$ ,  $c$  が張る平行六面体の体積は,

$$|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$$

で与えられる。

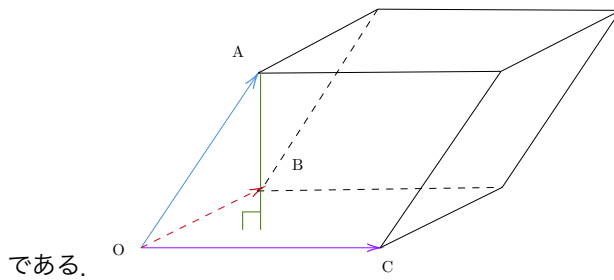
一方、この平行六面体の  $O$ ,  $B$ ,  $C$  を含む面の面積は,

$$\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$$

で与えられる。

以上の考察により, 求める長さは,

$$\frac{|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|}$$



### p29-30:7-(口)

**解答**

$\overrightarrow{BA}$  と  $\overrightarrow{BC}$  の外積は,

$$\|(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b})\|.$$

これを  $\|\overrightarrow{BC}\|$  で割ればよく, 求める長さは

$$\frac{\|(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b})\|}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|}.$$

### p29-30 : 8

**証明**

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 & c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

一方,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1(a_2b_3 - b_2a_3) + c_2(a_3b_1 - b_3a_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

であるから、これと行列式の積の性質により、

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{vmatrix} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$$

である。

□

## p29–30:9

### 解答

$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  は、 $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  の張る平行六面体の体積に符号をつけたものに等しい。与条件より、 $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  が最大になるのは、 $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  の張る図形が立方体のときであり、そのとき

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 1$$

である。これからただちに  $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  の最小値が  $-1$  であることも従う。

以上により、 $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  の最大値は  $1$ 、最小値は  $-1$  である。

## p29–30 : 10

### p29–30 : 10-(イ)

### 証明

単位ベクトル  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  を適当にとり、

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{c} = \gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \alpha_1 \beta_2 \mathbf{e}_3 \times (\gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \alpha_1 \beta_2 \gamma_1 \mathbf{e}_2 - \alpha_1 \beta_2 \gamma_2 \mathbf{e}_1 \\ &= -(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \mathbf{b}\end{aligned}$$

であり、これが証明すべきことであつた<sup>i1</sup>。

□

<sup>i1</sup> この等式をラグランジュの恒等式とよぶ。

## p29-30 : 10-(口)

## 証明

イ) の結果により.

$$(a \times b) \times c = -(b, c)a + (a, c)b,$$

$$(b \times c) \times a = -(c, a)b + (b, a)c,$$

$$(c \times a) \times b = -(a, b)c + (c, b)a.$$

であるから,

$$(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$$

となる. これが証明すべきことであった.

□

## 第 2 章

### p34 : 問 1

#### 証明

後半二つの主張は明らか。また、二つ目の主張は一つ目の主張と同様にして示すことができるので、一つ目のみ示すことにする。

$A = (a_{pq})$  を  $k \times l$  行列,  $B = (b_{qr})$ ,  $C = (c_{qr})$  を  $l \times m$  行列とする。示したい式の両辺がともに定義され、ともに  $k \times m$  行列であることはよい。行列  $B + C$  の  $(q, r)$  成分は  $b_{qr} + c_{qr}$  であるから、左辺の  $(p, r)$  成分は、

$$\sum_{q=1}^l a_{pq} (b_{qr} + c_{qr}) = \sum_{q=1}^l a_{pq} b_{qr} + \sum_{q=1}^l a_{pq} c_{qr}$$

とかける。この等号の右辺は  $AB$  の  $(p, r)$  成分と  $AC$  の  $(p, r)$  成分の和である。これより、主張が示された。

□

### p40 : 問

#### p40 : 問-(イ)

#### 解答

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ O & A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

### p41 : 問 1

#### 解答

$$(1) \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \text{ とする。このとき、}$$

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 2x_{11} + 4x_{21} & 2x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix}$$

となり, これが  $E_2$  と等しくなるためには

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 2x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases}$$

となることが必要かつ十分であるが, これを満たす  $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{C}$  は存在しない. よって前半の主張が示された.

後半について示す.  $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$  とする. このとき,

$$YA = \begin{pmatrix} y_{11} + 2y_{12} & 2y_{11} + 4y_{12} \\ y_{21} + 2y_{22} & 2y_{21} + 4y_{22} \end{pmatrix}$$

となり, これが  $E_2$  と等しくなるためには

$$\begin{cases} y_{11} + 2y_{12} = 1 \\ 2y_{11} + 4y_{12} = 0 \\ y_{21} + 2y_{22} = 0 \\ 2y_{21} + 4y_{22} = 1 \end{cases}$$

となることが必要かつ十分であるが, これを満たす  $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} \in \mathbb{C}$  は存在しない. よって後半の主張も示された.  $\square$

- (2)  $X, Y$  を (1) で定義したものとする. このとき,

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, これが  $B$  と等しくならないことは明らか.

後半について,

$$YA = \begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} \\ x_{21} & 2x_{21} \end{pmatrix}$$

となり, これが  $B$  と等しくなるためには  $x_{11} = 1, x_{21} = 2$  となることが必要かつ十分であるが,  $x_{12}, x_{22}$  については任意の複素数である. 以上の議論により, このような  $Y$  は無限に存在する.  $\square$

- (3)  $A$  の第  $k$  列の成分が全て 0 であるとする. ただしここで  $1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}$  であるとする.  $XA = E$  をみたす  $X$  が存在すると仮定する. このとき,  $X$  は明らかに  $n \times n$  行列であり, 積  $XA$  は定義される. いま  $X = (x_{jk}), A = (a_{kj}), 1 \leq j, k \leq n$  と表す. このとき,

$$(XA \text{ の } (j, j) \text{ 成分}) = \sum_{k=1}^n x_{jk} a_{kj} = 0$$

となり, これは  $XA = E$  に矛盾する. よってこのような  $X$  は存在しないことが示された.  $\square$

## p42 : 問 1

### 証明

まず,

$$\overline{A} \overline{A^{-1}} = \overline{AA^{-1}} = E, \quad \overline{A^{-1}} \overline{A} = \overline{A^{-1}A} = E$$

より,  $\bar{A}$  は正則で, 逆行列は  $\overline{A^{-1}}$  である. さらに,

$${}^t A {}^t A^{-1} = {}^t (A^{-1} A) = E, \quad {}^t A^{-1} {}^t A = {}^t (A A^{-1}) = E$$

であるから,  ${}^t A$  は正則であり, 逆行列は  ${}^t A^{-1}$  である.

□

## p42 : 問 2

### 解答

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' := \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$AA' = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$$

である.  $AA' = E$  となる条件は,  $x, y, z, w$  についてのふたつの連立方程式

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

が解を持つことで, その条件は  $ad - bc \neq 0$  である. そのときの解は,

$$(x, y, z, w) = \left( \frac{d}{ad - bc}, -\frac{b}{ad - bc}, -\frac{c}{ad - bc}, \frac{a}{ad - bc} \right)$$

である. これを用いて  $A'A$  を計算すると,  $A'A = E$  となり, たしかに  $A'$  は  $A$  の逆行列である.

以上の議論により,  $ad - bc \neq 0$  となることが必要十分条件である.

## p42 : 問 3

### p42 : 問 3-(イ)

### 解答

(2) の結果により,

$$\frac{1}{3 \cdot 3 - 2 \cdot 4} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

が求める逆行列である.

### p42 : 問 3-(ロ)

### 解答

まず,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$



としたときに

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} + x_{12} & -x_{11} + 3x_{12} + x_{13} \\ x_{21} & 2x_{21} + x_{22} & -x_{21} + 3x_{22} + x_{23} \\ x_{31} & 2x_{31} + x_{32} & -x_{31} + 3x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、これに関して

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} + x_{12} & -x_{11} + 3x_{12} + x_{13} \\ x_{21} & 2x_{21} + x_{22} & -x_{21} + 3x_{22} + x_{23} \\ x_{31} & 2x_{31} + x_{32} & -x_{31} + 3x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となれば、行列  $X$  が求める逆行列である。計算すると

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これが求める逆行列であった。

#### p42 : 問 3-(八)

**解答**

まず、

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

としたとき、

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ x_{34} & x_{33} & x_{32} & x_{31} \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & x_{41} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、これに関して

$$\begin{pmatrix} x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ x_{34} & x_{33} & x_{32} & x_{31} \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & x_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となれば、行列  $X$  が求める逆行列である。

計算すると,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり, これが求める逆行列であった.

## p52 : 問

### 解答

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第 1 行の } (-2) \text{ 倍, 第 1 行の 2 倍をそれぞれ第 2 行, 第 3 行に加える}} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を交換する}} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第 2 行の } (-3) \text{ 倍を第 1 行に加え, 第 3 行の } (-4) \text{ 倍を第 1 行に加える}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第 3 行の 2 倍を第 2 行に加え, 第 3 行を } (-1) \text{ 倍する}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって, 求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である.

## p58 : 問

### p58 : 問-(イ)

### 解答

与えられた連立方程式について, 拡大係数行列を考えて基本変形を施すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 1 & 1 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. つまり, 解は存在し, ひとつの任意定数を含む. 任意定数を  $x_3 = \alpha$  とすると,

$$x_1 = -\frac{4}{3} - \alpha, \quad x_2 = \frac{8}{3} - \alpha, \quad x_3 = \alpha$$

とかける. ベクトルの形で表すと,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 8/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である.

### p58 : 問-(口)

#### 解答

与えられた連立方程式について, 拡大係数行列を考えて基本変形を施すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となるが,  $0 = -1$  とはならないため, この連立方程式は解を持たない.

### p58 : 問-(ハ)

#### 解答

与えられた連立方程式について, 拡大係数行列を考えて基本変形を施すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 19 & 14 \end{pmatrix}$$

となる. ただしここで第3列と第4列を入れ替えた.

つまり, 解は存在し, ふたつの任意定数を含む, 任意定数を  $x_3 = \alpha$ ,  $x_5 = \beta$  とすると, この連立方程式の解は

$$x_1 = 6 - 2\alpha - 2\beta, \quad x_2 = -9 + 2\alpha + 11\beta, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = 14 - 19\beta, \quad x_5 = \beta$$

とかける. ベクトルの形で表すと,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 0 \\ -19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である.

### p62-63 : 問 1

#### 証明

定義に従って計算すると,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) \\ &= 2((x, x) + (y, y)) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

となり、これが証明すべきことであった。

□

## p62-63 : 問 2

### 証明

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$$

である。ここで、 $x$  と  $y$  が直交することから、

$$(x, y) + (y, x) = (x, y) + \overline{(x, y)} = 0$$

であり、これを用いると

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

となる。 $x, y$  がともに実ベクトルのときは  $(x, y) = 0$  であるから確かに逆が成り立つが、たとえば  $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix}$  とすれば、等式は成り立つが  $x$  と  $y$  は直交しないため、逆は成り立たない。

□

## p62-63 : 問 3

### 証明

$x, y \in \mathbb{R}^n$  のとき、

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) - (x - y, x - y) \\ &= \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 - (\|x\|^2 - (x, y) - (y, x) + \|y\|^2) \\ &= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 - (\|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2) \\ &= 4(x, y) \end{aligned}$$

であるから、この両辺を 4 で割るとただちに主張が従う。

また、 $x, y \in \mathbb{C}$  のときにはこの等式が成り立たないことがある。 $x = {}^t(2i, 0)$ ,  $y = {}^t(2, 0)$  とすると、

$$\begin{aligned} \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} &= \frac{4 - 4}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるが、

$$\begin{aligned} (x, y) &= (2, 0) \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -4i \end{aligned}$$

となり、確かにこれが反例になっている。

□

## p65: 問 1

## 解答

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} A^t A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, これが  $E$  に等しいので,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1, \\ c^2 + d^2 = 1, \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

となる. このことから  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$  として

$$\begin{aligned} a &= \cos \theta, & b &= \sin \theta, \\ c &= \cos \phi, & d &= \sin \phi \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} ac + bd &= \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \\ &= \cos(\theta - \phi) \end{aligned}$$

となり, これが 0 に等しいので,

$$\begin{aligned} \theta - \phi &= \pi/2, 3\pi/2, \\ \therefore \phi &= \theta - \pi/2, \theta - 3\pi/2. \end{aligned}$$

これより, 任意の二次直交行列は  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$  として

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

のいずれかで表される.

## p65: 問 2

## 証明

$$(A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A, \quad (AA^*)^* = A^{**} A^* = AA^*$$

であるから,  $A^* A$ ,  $AA^*$  はエルミート行列である.

また, 任意の  $n \times 1$  ベクトル  $x$  に対して,

$$\begin{aligned} (x, A^* A x) &= (A^{**} x, A x) \\ &= (A x, A x) \\ &= \|A x\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

であり、また、 $x$  として第  $i$  成分のみ 1 でほかの成分は 0 のベクトル  $e_i$  をとると、

$$(e_i, A^* A e_i) = A^* A \text{ の } (i, i) \text{ 成分}$$

となる。先の不等式よりこれは 0 または正なので、 $A^* A$  の対角成分は 0 または正である。同様にして  $AA^*$  の対角成分も 0 または正である。

以上のことが証明すべきことであった。

□

## 第 2 章・章末問題

p70-73 : 1

p70-73 : 1-(イ)

解答

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を交換する}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & -6 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{(1,1) \text{ をかなめとして左から第 1 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 3 行を } (-1) \text{ 倍して第 2 行と交換し, } (2,2) \text{ をかなめとして左から第 2 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & | & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{(3,3) \text{ をかなめとして左から第 3 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & | & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 4 行を } (-1) \text{ 倍して, } (4,4) \text{ をかなめとして第 4 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

よって、求める逆行列は、

$$\begin{pmatrix} 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

p70-73 : 1-(ロ)

## 解答

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(1,1) \text{ をかなめとして第 1 列を掃き出す}} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(2,2) \text{ をかなめとして第 2 列を掃き出す}} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(3,3) \text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -13 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(3,3) \text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

よって、求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

## p70-73 : 2

## p70-73 : 2-(イ)

## 解答

与えられた連立方程式について、拡大係数行列を考えて基本変形を施すと、

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

となる。ただしここで第 2 列と第 5 列を入れ替えた。

つまり、解は存在し、2 つの任意定数を含む。任意定数を  $x_4 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$  とすると、

$$x_1 = -2\alpha - 2\beta, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \alpha + \frac{1}{5}, \quad x_4 = \alpha, \quad x_5 = -\frac{3}{5}$$

となる. ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる.

### p70-73 : 2-(口)

#### 解答

与えられた連立方程式について, 拡大係数行列を考えて基本変形を施すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

つまり, 解は存在し, 一つの任意定数を含む. 任意定数を  $x_4 = \alpha$  とすると,

$$x_1 = -1 - 2\alpha, \quad x_2 = 1 + \alpha, \quad x_3 = -1 + \alpha, \quad x_4 = \alpha$$

となる. ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる.

### p70-73 : 2-(ハ)

#### 解答

与えられた連立方程式について, 拡大係数行列を考えて基本変形を施すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

つまり, 解は存在し,

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1$$

となる. ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる.



## p70-73 : 2-(二)

## 解答

与えられた連立方程式について、拡大係数行列を考えて基本変形を施すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 24 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。ただしここで第2列と第4列を入れ替えた。

つまり、解は存在し、2つの任意定数を含む。  $x_2 = \alpha$ ,  $x_5 = \beta$  とすると、

$$x_1 = -2\alpha + 2\beta, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = 3 - 10\beta, \quad x_4 = 4 - 24\beta, \quad x_5 = \beta$$

となる。ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -10 \\ -24 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

## p70-73 : 3

## p70-73 : 3-(イ)

## 解答

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第1列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第2列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{第3列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

である。ゆえに

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である。だから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

p70-73 : 3-(口)

解答

$P^{-1}AP = B$  とおくと,

$$\begin{aligned} A^n &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3 & -2^n-3 & 2^n-3 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n+2 & -2^n-2 \\ -2^{n+2}+4 & -2^{n+1}-4 & 2^{n+1}-4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.

p70-73 : 4

解答

与えられた行列を  $A$  とする.

$A$  の第 1 列に, 第 2 列から第  $n$  列までを足して変形すると,

$$\begin{pmatrix} (n-1)x+1 & x & x & \cdots & x \\ (n-1)x+1 & 1 & x & \cdots & x \\ (n-1)x+1 & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)x+1 & x & x & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

ここで, この行列の第 2 行から第  $n$  行までの各行から第 1 行を引くと,

$$\begin{pmatrix} (n-1)x+1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}$$

となるので, 行列  $A$  の階数は,  $x = 1$  のとき 1,  $x = -1/(n-1)$  のとき  $n-1$ , それ以外の場合は  $n$  である.

p70-73 : 5

証明

$A$  が正則でないと仮定すると,

$$Ax = 0$$

をみたす  $x \in \mathbb{C}^n$  が存在する.

また,  $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$  とし,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の中で絶対値が最大のものを  $x_p$  とする.

$Ax$  の  $p$  行を考えると,

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p + \cdots + a_{pn}x_n = 0$$

$$\therefore x_p = -(a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n) = - \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} a_{pi}x_i$$

となる.

ここで,

$$\begin{aligned} |x_p| &\leq \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} |a_{pi}| |x_i| \\ &< \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} \frac{1}{n-1} |x_i| \\ &< \frac{n-1}{n-1} \cdot |x_p| = |x_p| \end{aligned}$$

と計算でき,  $|x_p| < |x_p|$  となり, これは矛盾である.

よって, 先の過程が誤りであり, このとき  $A$  は正則である.

□

## p70-73 : 6

### p70-73 : 6-(イ)

証明

$$AA^{k-1} = A^{k-1}A = E$$

なので,  $A$  は正則である.

□

### p70-73 : 6-(ロ)

証明

$A$  が正則であるとする,  $A^{-1}$  が存在して,

$$A^{-1}A^2 = A^{-1}A$$

$$A = E$$

となるが, これは矛盾であるため,  $A$  は正則でない.

□

### p70-73 : 6-(ハ)

証明

$A$  が正則であるとする,

$$\begin{aligned} E &= (A^{-1}A)^k \\ &= A^{-k}A^k \\ &= O \end{aligned}$$

となるが、これは矛盾であるため、 $A$  は正則でない。

□

## p70-73 : 6-(二)

### 証明

$k$  を用いて、 $A^k$  を考えると

$$E = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})$$

であり、逆からかけても同じであるため、 $E - A$  は正則であり、

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

である。

また、

$$E = (E + A)(E - A + A^2 - \cdots + A^{k-1})$$

であり、逆からかけても同じなので、 $E + A$  は正則であり、

$$(E + A)^{-1} = E - A + A^2 - \cdots + A^{k-1}$$

である。

□

## p70-73 : 7

### 証明

$X = (x_{ij})$ ,  $Y = (y_{ij})$  とする。ここで、 $XY$  の  $(i, i)$  成分は  $\sum_{j=1}^n x_{ij}y_{ji}$  であるから、

$$\text{tr}(XY) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_{ij}y_{ji} \right)$$

となる。 $YX$  については、同様の議論により、

$$\begin{aligned} \text{tr}(YX) &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n y_{ij}x_{ji} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_{ji}y_{ij} \right) \end{aligned}$$

である。ここで、 $i$  と  $j$  をおきかえれば、

$$\text{tr}(YX) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_{ij}y_{ji} \right) \quad (1)$$

となる。これより、

$$\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX) \quad (2)$$

を得て、これとトレースの線型性により  $\text{tr}(XY - YX) = 0$  であるが、 $\text{tr}(E_n) = n \neq 0$  であるため、これは矛盾である。

ゆえに、 $XY - YX = E_n$  となる  $n$  次行列  $X, Y$  は存在しないことが示された。

□

## p70-73 : 8

### 証明

行列  $B$  の階数を  $r$  とすると、 $m$  次正則行列  $P$ 、 $n$  次正則行列  $Q$  によって、

$$PBQ = F_{m,n}(r)$$

と表せる。

これにより、

$$ABQ = AP^{-1}F_{m,n}(r)$$

とかける。 $A_{11}$  を  $r$  次の行列として、

$$AP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad F_{m,n}(r) = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

とかくと、

$$\begin{aligned} AP^{-1}F_{m,n}(r) &= AP^{-1}Q \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とかけ、 $A_{11}$  の定義により、 $ABQ$  の階数は  $r$  以下となる。いま  $Q$  は基本行列の積なので、 $AB$  の階数も  $r$  以下である。

行列  $A$  についても同様に示せる。

以上の議論により、行列  $AB$  の階数は行列  $A$ 、行列  $B$  の階数以下であることが証明された。

□

## p70-73 : 9

### 解答

3つの平面が1本の直線を共有する必要十分条件は、与式を  $x, y, z$  に関する方程式とみたときに、解が存在して1つの任意定数を含むことである。

これは

$$\begin{cases} r(A) = 2 \\ r(A) = r(\tilde{A}) \end{cases}$$

と同値であり、したがって、

$$r(A) = r(\tilde{A}) = 2$$

が必要十分条件である。

## p70-73 : 10

## p70-73 : 10-(イ)

## 証明

$AX = E$  をみたす  $n$  次正則行列  $X$  が存在するとする. このとき,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_{11} - bx_{21} & ax_{12} - bx_{22} \\ bx_{11} + ax_{21} & bx_{12} + ax_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, これが  $E$  に等しいので,

$$\begin{cases} ax_{11} - bx_{21} = 1 \\ ax_{12} - bx_{22} = 0 \\ bx_{11} + ax_{21} = 0 \\ bx_{12} + ax_{22} = 1 \end{cases}$$

となり, これを変形すると,

$$\begin{cases} (a^2 + b^2)x_{11} = a \\ (a^2 + b^2)x_{12} = b \\ (a^2 + b^2)x_{21} = -b \\ (a^2 + b^2)x_{22} = a \end{cases}$$

となるから, このような  $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$  が存在する必要十分条件は

$$a^2 + b^2 \neq 0$$

である. このことから直ちに主張が従う.

□

## p70-73 : 10-(ロ)

## 証明

$$A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}, \quad \alpha' = a' + b'i$$

とおく.

和については

$$A + A' = \begin{pmatrix} a + a' & -(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix}, \quad \alpha + \alpha' = (a + a') + (b + b')i$$

となり, このときたしかに  $A + A'$  と  $\alpha + \alpha'$  が一対一に対応する.

積については

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{pmatrix}, \quad \alpha\alpha' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

となり、たしかに  $AA'$  と  $\alpha\alpha'$  が一対一に対応する.

逆数については

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - bi)$$

となり、たしかに  $A^{-1}$  と  $1/\alpha$  が一対一に対応する.

以上の考察により証明された.

□

## p70-73 : 10-(ハ)

### 証明

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表せるとすると,

$$a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

であるから,

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

とかけ、このとき

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる. これが証明すべきことであった.

□

## p70-73 : 11

### p70-73 : 11-(イ)

### 証明

${}^tPP = E$  を加味して  $(P \pm E)$  の転置行列を考えると

$${}^t(P \pm E) = {}^tP \pm {}^tPP = {}^tP^t(E \pm P)$$

となり、これを用いると,

$$\begin{aligned}
 {}^tA &= {}^t\{(P-E)(P+E)^{-1}\} \\
 &= {}^t(P+E)^{-1}{}^t(P-E) \\
 &= (E+{}^tP)^{-1}{}^tP^tP(E-P) \\
 &= \{{}^tP(P+E)\}^{-1}{}^tP(E-P) \\
 &= (P+E)^{-1}P^{-1}{}^tP(E-P) \\
 &= (P+E)^{-1}(E-P) \\
 &= -(P+E)^{-1}\{(P+E)-2E\} \\
 &= -(P+E)^{-1}(P+E)+2E(P+E)^{-1} \\
 &= -(P+E)(P+E)^{-1}+2E(P+E)^{-1} \\
 &= (-(P+E)+2E)(P+E)^{-1} \\
 &= -(P-E)(P+E)^{-1} = -A
 \end{aligned}$$

となり、これが証明すべきことであつた。

□

### p70-73 : 11-(口)

#### 証明

計算すると、

$$\begin{aligned}
 E-A &= E-(P-E)(P+E)^{-1} \\
 &= (P+E)(P+E)^{-1}-(P-E)(P+E)^{-1} \\
 &= \{(P+E)-(P-E)\}(P+E)^{-1} \\
 &= 2(P+E)^{-1}
 \end{aligned}$$

と変形でき、いま  $(P+E)$  が正則だから、 $2(P+E)^{-1}$  も正則であり、

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{2}(P+E)$$

である。

□

### p70-73 : 11-(ハ)

#### 証明

まず、

$$\begin{aligned}
 E+A &= (P+E)(P+E)^{-1}+(P-E)(P+E)^{-1} \\
 &= \{(P+E)+(P-E)\}(P+E)^{-1} \\
 &= 2P(P+E)^{-1}
 \end{aligned}$$

であるから、これを用いると

$$(E+A)(E-A)^{-1} = 2P(P+E)^{-1}\frac{1}{2}(P+E) = P$$

となり、これが証明すべきことであつた。

□



## p70-73 : 12

## 証明

以下の3つの命題が同値であることを示す.

- (1)  $A$  は正規行列である. すなわち  $A^*A = AA^*$  である.
- (2) 任意の  $x \in \mathbb{C}^n$  について,  $\|Ax\| = \|A^*x\|$  が成立する.
- (3) 任意の  $x, y \in \mathbb{C}^n$  について,  $(Ax, Ay) = (A^*x, A^*y)$  が成立する.

(1)  $\Rightarrow$  (2)  $x \in \mathbb{C}^n$  を任意にとる. このとき

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &= (Ax, Ax) \\ &= (x, A^*Ax) \\ &= (x, AA^*x) \quad (\because \text{正規行列の定義}) \\ &= (A^*x, A^*x) = \|A^*x\|^2\end{aligned}$$

であるから,  $\|Ax\| = \|A^*x\|$  が成立する.

(2)  $\Rightarrow$  (3)  $x, y \in \mathbb{C}^n$  を任意にとる. このとき

$$\begin{aligned}\|A(x+y)\|^2 &= (A(x+y), A(x+y)) \\ &= \|Ax\|^2 + (Ax, Ay) + (Ay, Ax) + \|Ay\|^2 \\ &= \|Ax\|^2 + (Ax, Ay) + \overline{(Ax, Ay)} + \|Ay\|^2\end{aligned}$$

であり, 同様に計算すると

$$\|A^*(x+y)\|^2 = \|A^*x\|^2 + (A^*x, A^*y) + \overline{(A^*x, A^*y)} + \|A^*y\|^2$$

を得る.  $\|A(x+y)\| = \|A^*(x+y)\|$ ,  $\|Ax\| = \|A^*x\|$ ,  $\|Ay\| = \|A^*y\|$  を仮定したので,

$$(Ax, Ay) + \overline{(Ax, Ay)} = (A^*x, A^*y) + \overline{(A^*x, A^*y)}$$

となり, これは  $\operatorname{Re}(Ax, Ay) = \operatorname{Re}(A^*x, A^*y)$  であることを表す.

また,  $x$  を  $ix$  におきかえることで,  $\operatorname{Im}(Ax, Ay) = \operatorname{Im}(A^*x, A^*y)$  も示される. ゆえにこのとき

$$(Ax, Ay) = (A^*x, A^*y).$$

(3)  $\Rightarrow$  (1) 任意の  $x, y \in \mathbb{C}^n$  に対して,

$$(x, (A^*A - AA^*)y) = 0$$

である. いま  $y$  をいったん固定すると,  $x$  は任意なので,  $x = (A^*A - AA^*)y$  とすることができ,

$$\begin{aligned}\|(A^*A - AA^*)y\|^2 &= 0, \\ \therefore (A^*A - AA^*)y &= 0.\end{aligned}$$

$y$  は任意だから,  $A^*A = AA^*$  となり,  $A$  は正規行列である.

以上の議論により証明された.

□

## p70-73 : 13

## p70-73 : 13-(イ)

## 解答

まず,

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [XY - YX, Z] \\ &= (XY - YX)Z - Z(XY - YX) \\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX. \end{aligned}$$

同様に計算すると,

$$\begin{aligned} [[Y, Z], X] &= YZX - ZYX - XYZ + XZY, \\ [[Z, X], Y] &= ZXY - XZY - YZX + YXZ. \end{aligned}$$

よって,

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = O$$

である.

## p70-73 : 13-(ロ)

## 証明

$X, Y$  は交代行列だから,

$$X = -{}^tX, \quad Y = -{}^tY.$$

これを用いると,

$$\begin{aligned} [X, Y] &= XY - YX \\ &= (-{}^tX)(-{}^tY) - (-{}^tY)(-{}^tX) \\ &= {}^t(YX) - {}^t(XY) \\ &= -{}^t(XY - YX) \\ &= -{}^t[X, Y] \end{aligned}$$

となる. よってこのとき  $[X, Y]$  は交代行列である.

□

## p70-73 : 13-(ハ)

## 証明

以下では

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

とおく.

【 $X + Y$  と  $x + y$  について】

$$X + Y = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(z+z') & y+y' \\ z+z' & 0 & -(x+x') \\ -(y+y') & x+x' & 0 \end{pmatrix}$$

であり, なおかつ

$$x + y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$

であるから, たしかに  $X + Y$  と  $x + y$  は対応する.

【 $cX$  と  $cx$  について】

$$cX = c \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -cz & cy \\ cz & 0 & -cx \\ -cy & cx & 0 \end{pmatrix}$$

であり, なおかつ

$$cx = c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{pmatrix}$$

であるから, たしかに  $cX$  と  $cx$  は対応する.

【 $[X, Y]$  と  $x \times y$  について】

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -z'x + x'z & y'x - x'y \\ z'x - x'z & 0 & -y'z + z'y \\ -y'x + x'y & z'y - y'z & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり, なおかつ

$$x \times y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

であるから, たしかに  $[X, Y]$  と  $x \times y$  は対応する.

【 $Xy$  と  $x \times y$  について】

$$\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -zy' + yz' \\ zx' - xz' \\ -yx' + xy' \end{pmatrix}$$

であり, なおかつ

$$x \times y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

であるから, たしかに  $Xy$  と  $x \times y$  は対応する.

□

**証明**

ハ) で証明したことから,  $[X, Y]$  には  $x \times y$  が対応する.

また, イ) で証明したことより,  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  であり, この左辺には  $(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y$  が対応し, 右辺には  $0$  が対応する.

以上の考察により

$$(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$$

であることが示された.

□

**p70-73 : 14**
**証明**

二つに分けて証明する,

イ)  $\Rightarrow$  ロ)

$A$  が正則であると仮定すると,  $A^{-1}$  が存在し,

$$x = A^{-1}(Ax)$$

と変形できるから,  $Ax$  が非負ベクトルであれば,  $x$  も非負ベクトルである.

ロ)  $\Rightarrow$  イ)

まず,  $Ax = 0$  であると仮定する. このとき,  $A(-x) = 0$  であるから,  $A(-x)$  も非負ベクトルであり, 条件から  $x, -x$  は非負ベクトルである. したがって  $x = 0$  となり,  $A$  は正則である.

また, 非負ベクトル  $x$  を任意にとると,

$$x = A(A^{-1}x)$$

も非負ベクトルであり, 条件から  $A^{-1}x$  も非負ベクトルである. ここで,  $A^{-1}$  が非負行列でないとは仮定すると, ある単位ベクトル  $e_j$  について,  $A^{-1}e_j$  が非負ベクトルでないことになり,  $x$  が非負ベクトルであることに反する. これより  $A^{-1}$  は非負行列である.

以上の議論により証明された.

□

**p70-73 : 15**
**p70-73 : 15-(イ)**
**証明**

まず,  $A = (a_{ij})$ ,  $f = {}^t(f_1, f_2, \dots, f_j) = {}^t(1, 1, \dots, 1)$  とおくと,  $Af$  の第  $i$  行の成分は

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから、 $f$  の定義とあわせて、

$$Af = f$$

が成り立つ。

□

### p70-73 : 15-(口)

#### 証明

$C = AB = (c_{ij})$  とすると、 $C$  の  $(i, k)$  成分は

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

である。これにより、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_{ik} &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから、 $C$  すなわち  $AB$  は確率行列である。

□

### p70-73 : 15-(ハ)

#### 証明

$Ax = \alpha x$  において、 $x$  の成分で絶対値が最大のものを  $x_p$  とする。

このとき、 $Ax = \alpha x$  の第  $p$  行成分の絶対値を考えると、

$$\begin{aligned} |\alpha| |x_p| &\leq \sum_{j=1}^n a_{pj} |x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n a_{pj} |x_p| \\ &= |x_p| \end{aligned}$$

であるから、

$$|\alpha| |x_p| \leq |x_p|$$

を得るので、

$$|\alpha| \leq 1$$

となり、これが証明すべきことであった。

□

## 第3章

### p77: 問1

#### 3文字の置換

##### 解答

3文字の置換は  $3! = 6$  個ある。それを互換の数によって分類する。

0つ 1個のみ。偶置換かつ恒等置換。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1つ 3個。奇置換。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2つ 2個。偶置換。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

#### 4文字の置換

##### 解答

4文字の置換は  $4! = 24$  通りある。それを互換の数によって分類する。

0つ 1個。偶置換（恒等置換）。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1つ 6個。奇置換。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2つ 11個。偶置換。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3つ6個. 奇置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## p77 : 問 2

証明

$S_n$  の偶置換全体の集合を  $A_n$ , 偶置換全体の集合を  $B_n$  とする. 置換は必ず奇置換か偶置換のいずれかであるから,

$$S_n = A_n \cup B_n,$$

$$A_n \cap B_n = \emptyset$$

となる.

ここで,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると,  $\tau$  は奇置換であり,  $\sigma \in A_n$  のとき,  $\tau\sigma \in B_n$  である. 同様に,  $\rho \in B_n$  のとき,  $\tau^{-1}\rho = \tau\rho \in A_n$  である. これらにより, 全単射

$$A_n \ni \sigma \mapsto \tau\sigma \in B_n$$

が存在し, 偶置換と奇置換は同数あり, その個数は  $n!/2$  である.

□

## p77 : 問 3

解答

$m \in \mathbb{N}$  とする.

(I)  $n = 2m$  とかけるとき, この置換を互換の積で表すと,

$$(1, 2m)(2, 2m-1) \cdots (m, m+1)$$

となるため, 置換の符号は  $(-1)^m$ , すなわち

$$(-1)^{\frac{n}{2}}$$

となる.

(II)  $n = 2m-1$  とかけるとき, この置換を互換の積で表すと,

$$(1, 2m-1)(2, 2m-2) \cdots (m-1, m+1)$$

となるため, 置換の符号は  $(-1)^{m-1}$ , すなわち

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

となる.

## p79 : 問

## p79 : 問-(イ)

## 解答

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

とすると,  $m \in \mathbb{N}$  として,

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n = 2m-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. また,

$$(\text{与式}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_1 a_2 \cdots a_n$$

だから,

$$(\text{与式}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n & (n = 2m-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

## p79 : 問-(ロ)

## 解答

計算すると,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= a^3 + b^3 + c^3 - abc - bca - cab \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

となる.

## p83 : 問

## 証明

$(n, n)$  行列  $A, X$  を

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

とする. このとき,  $AX$  は定義され,

$$AX = (Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n)$$



と表せる. ここで,  $Ax_j$  を単位ベクトルの線型結合で表すと,

$$\begin{aligned} Ax_j &= A^t(x_{1j}e_1, x_{2j}e_2, \dots, x_{nj}e_n) \\ &= A(x_{1j}e_1 + x_{2j}e_2 + \dots + x_{nj}e_n) \\ &= x_{1j}a_1 + x_{2j}a_2 + x_{nj}a_n \\ &= \sum_{i=1}^n x_{ij}a_i \end{aligned}$$

となる. これにより,  $|AX|$  は, 多重線型性を用いて,

$$\begin{aligned} |AX| &= \left| \sum_{i_1=1}^n x_{i_1 1}a_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n x_{i_2 2}a_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n x_{i_n n}a_{i_n} \right| \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n x_{i_1 1}x_{i_2 2} \dots x_{i_n n} |a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}| \end{aligned}$$

と変形できる. ここで,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$|a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}| = \operatorname{sgn} \sigma |A|$$

$$\begin{aligned} |AX| &= \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \dots x_{\sigma(n)n} \cdot \operatorname{sgn} \sigma |A| \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \dots x_{\sigma(n)n} |A| \\ &= |{}^t X| |A| \\ &= |A| |X| \end{aligned}$$

を得る. これが証明すべきことであった.

□

## p83 : 問

### p83 : 問-(イ)

#### 解答

多重線型性などを用いて変形すると,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= - \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 & 16 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -12 & 17 \\ 0 & -2 & 10 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & -1 & 16 \\ 0 & 3 & -12 & 17 \\ 0 & -2 & 10 & -7 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -1 & 16 \\ 3 & -12 & 17 \\ -2 & 10 & -7 \end{vmatrix} = 539 \end{aligned}$$

となるので, この行列式の値は 539 である.

## p83 : 問-(口)

## 解答

多重線型性などを用いて変形すると,

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & -7 & -8 & 6 \\ 3 & 10 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 17 & 21 & -16 \\ 1 & -7 & -8 & 6 \\ 0 & 31 & 30 & -17 \\ 0 & 37 & 44 & -27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & -8 & 6 \\ 0 & 17 & 21 & -16 \\ 0 & 31 & 30 & -17 \\ 0 & 37 & 44 & -27 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 17 & 21 & -16 \\ 31 & 30 & -17 \\ 37 & 44 & -27 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 第 2 列に第 1 列の  $-1$  倍を加え, 第 3 列に第 1 列を加えると,

$$(\text{与式}) = \begin{vmatrix} 17 & 4 & 1 \\ 31 & -1 & 14 \\ 37 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

を得る. ここで, 第 1 列に第 3 列の  $-2$  倍を加えると,

$$(\text{与式}) = \begin{vmatrix} 15 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 14 \\ 17 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -750$$

となるため, この行列式の値は  $-750$  である.

## 第 3 章・章末問題

## p90-91 : 1

## p90-91 : 1-(イ)

## 解答

$k \in \{2, 3, \dots, n\}$  として, 第 1 列に第  $k$  列の  $x^k$  倍を加えると,

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

第 1 列で余因子展開すると,

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= (-1)^{n+2} (a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{n+2} (a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n) \cdot (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} \quad (*) \\
 &= (-1)^{n+2} (a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n) \cdot (-1)^{n-2} \\
 &= (-1)^{2n} (a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n) \\
 &= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n
 \end{aligned}$$

となる. ただし (\*) では同様の余因子展開を繰り返した.

以上の計算により,

$$(\text{与式}) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n.$$

### p90-91 : 1-(口)

#### 解答

与式の第 2 列から第  $n$  列までを第 1 列に足すと,

$$\begin{vmatrix} x + \sum_{k=1}^n a_k & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x + \sum_{k=1}^n a_k & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x + \sum_{k=1}^n a_k & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x + \sum_{k=1}^n a_k & a_n & a_{n-1} & \cdots & x \end{vmatrix}$$

である. 第 2 行から第  $n$  行のそれぞれから第 1 行を引くと,

$$\begin{vmatrix} x + \sum_{k=1}^n a_k & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n - a_1 & a_{n-1} - a_2 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix}$$

である. 第 1 列で余因子展開すると,

$$\begin{aligned}
 & \left( x + \sum_{k=1}^n a_k \right) \begin{vmatrix} x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 - a_1 & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_{n-1} - a_2 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix} \\
 &= \left( x + \sum_{k=1}^n a_k \right) (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \\
 &= \left( x + \sum_{k=1}^n a_k \right) \prod_{k=1}^n (x - a_k).
 \end{aligned}$$

### p90-91 : 1-(ハ)

#### 解答

この形の  $n \times n$  行列を  $A_n$  とすると,

$$\begin{aligned}
 A_{n+2} &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} \\
 &= (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} \\
 &= (1+x^2)A_{n+1} - x^2A_n
 \end{aligned}$$

となる.

よって,

$$A_{n+2} - A_{n+1} = x^2(A_{n+1} - A_n) \quad (n \geq 2).$$

これと  $A_1 = 1 + x^2$ ,  $A_2 = 1 + x^2 + x^4$  により,  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned}
 A_{n+1} - A_n &= x^2(A_n - A_{n-1}) \\
 &= x^4(A_{n-1} - A_{n-2}) \\
 &= \cdots = x^{2(n-1)}(A_2 - A_1) \\
 &= x^{2(n-1)}((1 + x^2 + x^4) - (1 + x^2)) \\
 &= x^{2(n+1)}
 \end{aligned}$$

であるから,  $n \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned}
 A_n &= A_1 + \sum_{k=1}^{n-1} x^{2k+2} \\
 &= 1 + x^2 + \frac{x^4(1 - x^{2(n-1)})}{1 - x^2} \\
 &= 1 + x^2 + \frac{x^4(1 - x^2)(1 + x^2 + \cdots + x^{2(n-2)})}{1 - x^2} \\
 &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n}
 \end{aligned}$$

となる. この  $A_n$  を用いると,  $A_1 = 1 + x^2$ ,  $A_2 = 1 + x^2 + x^4$  であるから, 与えられた行列式の値は,  $n \times n$  行列の場合

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n}$$

である.

## p90-91: 1-(二)

解答

第1列で余因子展開すると

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= -a^2 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 1 \\ 0 & c^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 1 \\ 0 & c^2 & 1 \\ c^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(b^2 - c^2 - a^2) - (a^2c^2 + b^2c^2 - c^4) \\
 &= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2.
 \end{aligned}$$

## p90-91 : 2

### p90-91 : 2-(イ)

#### 証明

余因子展開を用いると,

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= -a \begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -d & 0 & f \end{vmatrix} \\
 &= -a(-cdf + bfe - af^2) + b(be^2 - cde - adf) - c(-adf + bde - cd^2) \\
 &= af(cd - be + af) - be(-be + cd + af) + cf(af - be - cd) \\
 &= (af - be + cd)^2.
 \end{aligned}$$

となり, これが証明すべきことであった.

□

### p90-91 : 2-(ロ)

#### 証明

$A$  を  $n$  次行列とする.  ${}^tA = -A$  であるから,

$$|{}^tA| = (-1)^n |A|.$$

ここで,  $n$  は奇数であるから,

$$|{}^tA| = -|A|.$$

また, 行列式の転置に関する不変性により,  $|{}^tA| = |A|$  なので,

$$\begin{aligned}
 |A| &= -|A|, \\
 \therefore |A| &= 0
 \end{aligned}$$

となり, これが証明すべきことであった.

□

## p90-91 : 3

### p90-91 : 3-(イ)

#### 証明

与えられた行列式に対して多重線型性を用いると、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} \\ &= |A+B| \cdot |A-B| \end{aligned}$$

となり、これが証明すべきことであった。

□

### p90-91 : 3-(口)

#### 解答

与えられた行列式に対して多重線型性を用いると、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \begin{vmatrix} A+iB & iA-B \\ B & A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{vmatrix} \\ &= \det(A+iB) \cdot \det(A-iB) \end{aligned}$$

となり、いま  $A, B$  は実行列なので、

$$\begin{aligned} \det(A+iB) \cdot \det(A-iB) &= \det(A+iB) \cdot \overline{\det(A+iB)} \\ &= |\det(A+iB)|^2 \end{aligned}$$

である。

### p90-91 : 4

#### 証明

$\alpha^n = 1$  をみたす  $\alpha \in \mathbb{C}$  をひとつ固定する。さて、与えられた行列式の第  $j$  行を  $\alpha^{j-1}$  倍して第 1 列に足す操作を行うと、この行列式は

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \alpha^2 \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_{n-2} & x_{n-3} & \cdots & x_0 \end{vmatrix}$$

と変形できる。よって、この行列式は

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1}$$

を因数にもつ。すべての  $\alpha$  に関してこのことがいえるから、因数定理により、この行列式は

$$\prod_{\alpha^n=1} (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1})$$

を因数にもつ。これは  $n$  次式であり、なおかつ  $x_0$  の係数は 1 であることより、結果として

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{\alpha^n=1} (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1})$$

である。これが証明すべきことであった。

□

## p90-91 : 5

### 解答

前問において、 $n = 4$ ,  $x_1 = i$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -i$  とした場合を考えればよいので、 $\alpha = \pm 1, \pm i$  により、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \prod_{\alpha^4=1} (x + \alpha i + \alpha^2 - \alpha^3 i) \\ &= (x + i + 1 - i)(x - i + 1 + i)(x - 1 - 1 - 1)(x + 1 - 1 + 1) \\ &= (x + 1)^3(x - 3) \end{aligned}$$

となる。

## p90-91 : 6

### 証明

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$  のもとで、 $n$  個の点を  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  とする。このとき、

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^{n-1} = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

である、これを行列の形に表すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

となる。

ここで、

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

とおくと、 $|{}^t A|$  はヴァンデルモンドの行列式である。

行列式の値は、行列の転置に対して不変なので、

$$|A| = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

となり、条件によりこの値は 0 でない。ゆえに先の連立方程式はただ一つの解をもつ。

以上の考察によって、これら  $n$  個の点を通る直線がただ一つ存在することが示された。

□

## p90-91 : 7

### 解答

与えられた行列式の係数行列を  $A$ 、 $A$  の第  $j$  列を  ${}^t(1, 0, 0, 0)$  で置き換えた行列を  $A_j$  とする。また、

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} T & -T \\ S & S \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2T & -T \\ O & S \end{vmatrix} \\ &= |2T||S| \\ &= 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2). \end{aligned}$$

クラメールの公式により

$$\begin{cases} x = |A_1|/|A|, \\ y = |A_2|/|A|, \\ z = |A_3|/|A|, \\ u = |A_4|/|A|. \end{cases}$$

さて、

$$\begin{aligned} |A_1| &= \begin{vmatrix} 1 & -b & -a & b \\ 0 & a & -b & -a \\ 0 & -d & c & d \\ 0 & c & d & c \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & -a \\ -d & c & d \\ c & d & c \end{vmatrix} \\ &= 2a(c^2 + d^2). \end{aligned}$$

よって、

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2a(c^2 + d^2)}{4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \frac{a}{2(a^2 + b^2)}.$$

同様に  $y, z, u$  を求めると

$$x = \frac{a}{2(a^2 + b^2)}, \quad y = -\frac{b}{2(a^2 + b^2)}, \quad z = -\frac{a}{2(a^2 + a^2)}, \quad u = \frac{b}{2(a^2 + b^2)}.$$

## p90-91 : 8

### 解答



与えられた行列式は,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$$

の拡大係数行列の行列式を表す. 基本変形を施すと, この行列式は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & g_1 \\ 0 & 1 & g_2 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

の場合に変形できる.

(I) (3) の場合, 行列式が 0 となる条件は  $g_3 = 0$  である, このとき, 上の連立方程式の解  $(x, y)$  は存在し一意に定まる. これは 3 直線が 1 点で交わることを表す.

(II) (4) の場合, 行列式は常に 0 であり, このとき, 3 直線はすべて平行であるか一致するかである.

以上の考察により, 与えられた行列式が 0 であるのは

- (i) 3 直線が 1 点で交わる
- (ii) 3 直線が平行である
- (iii) 3 直線が一致する

のいずれかの場合である.

## p90-91 : 9

### 証明

3 点  $P_1, P_2, P_3$  を通る平面の方程式を  $ax + by + cz + d = 0$  とおく. このとき,

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases}$$

が成立する. すなわちこれは

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

をみtas. これを  $a, b, c, d$  についての連立方程式とみたとき, 与条件により自明でない解があり,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成立する. これが証明すべきことであった.

□

## p90-91 : 10

### 証明

必要性・十分性をそれぞれ証明する.

- (1)  $A$  が正則かつ  $A^{-1}$  が整数行列であると仮定し,  $\det A = \pm 1$  であることを示す.

$A$  は整数行列であり, その行列式は, 各要素の和と積でかけているから  $\det A \in \mathbb{Z}$  である. 同様にして  $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$  である. 逆行列の行列式は,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

であり, つまり  $\det A, 1/\det A \in \mathbb{Z}$  である. これを満たす整数は  $\pm 1$  だけである.

- (2)  $\det A = \pm 1$  であることを仮定し,  $A$  が正則かつ  $A^{-1}$  が整数行列であることを示す.  $\det A \neq 0$  より  $A$  の正則性がわかる. また,  $A$  の余因子行列を  $\tilde{A}$  とすると, 余因子は  $A$  の各要素の和と積によって表現される. つまり, 余因子は整数であるから  $\tilde{A}$  は整数行列である. また

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

となる.  $\det A = \pm 1$  であり, 余因子は整数であるから,  $A^{-1}$  は整数行列である.

以上の議論により証明された.

□

## p90-91 : 11

### p90-91 : 11-(イ)

### 証明

${}^t A_\sigma$  は  $(j, \sigma(j))$  成分が 1 でそれ以外が 0 である行列である. いま  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  とすると,

$$\begin{aligned} {}^t A_\sigma A_\sigma &= \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \cdots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \cdots & (a_2, a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & \cdots & (a_n, a_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= E \end{aligned}$$

となり,  $A$  は直交行列である.

□

### p90-91 : 11-(ロ)

### 証明

置換  $\sigma, \tau$  に関して

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = \tau(j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する. このとき,

$$(A_\sigma A_\tau)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

$b_{jk}$  が 1 になるのは  $j = \tau(k)$  のときなので,

$$(A_\sigma A_\tau)_{ik} = a_{i, \tau(k)}.$$

さらに,  $a_{i, \tau(k)}$  が 1 になるのは  $i = \sigma(\tau(k))$  のときなので,

$$(A_\sigma A_\tau)_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = \sigma\tau(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

これは  $A_{\sigma\tau}$  の定義そのものなので,

$$A_\sigma A_\tau = A_{\sigma\tau}.$$

□

## p90-91 : 11-(ハ)

### 証明

$\tau = \sigma^{-1}$  とおくと,

$$\begin{aligned} A_\sigma &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{\tau^{-1}(1)1} a_{\tau^{-1}(2)2} \cdots a_{\tau^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \text{sgn}(\sigma). \end{aligned}$$

これにより

$$\text{sgn}(\sigma) = \pm 1 \iff A_\sigma = \pm 1.$$

□

## 第 4 章

### p93 : 問

#### 証明

$|A \cup B|$  について,  $|A \cap B|$  は  $A$  と  $B$  の共通部分の元の個数を考えているので,

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ \therefore |A| + |B| &= |A \cup B| + |A \cap B| \end{aligned}$$

である. これが証明すべきことであった.

□

### p94 : 問

#### 解答

3 つのことを証明する.

**反射律について** 明らかに,  $A$  に基本変形を施して  $A$  自身にすることができる.

**対称律について**  $P$  を  $(m, m)$  型の基本行列,  $Q$  を  $(n, n)$  型の基本行列として,

$$A = PBQ$$

とかくと,  $P, Q$  は正則なので,  $P^{-1}, Q^{-1}$  が存在し,

$$B = P^{-1}AQ^{-1}$$

とかける. よって, 対称律が成り立つことが示された.

**推移律について**  $P_1, P_2$  を  $(m, m)$  型の基本行列,  $Q_1, Q_2$  を  $(n, n)$  型の基本行列として,

$$A = P_1BQ_1, \quad B = P_2CQ_2$$

とかく. このとき,  $P_1, Q_1$  は正則だから,  $P_1^{-1}, Q_1^{-1}$  が存在し,

$$B = P_1^{-1}AQ_1^{-1}$$

となる. これにより,

$$P_1^{-1}AQ_1^{-1} = P_2CQ_2$$

となり, 同様の議論によって

$$A = P_1P_2CQ_2Q_1$$

となり, 推移律も成り立つことが示された.

□

さて, 行列  $A$  に基本変形を施すと,  $A$  の階数を  $r$  として  $F_{m,n}(r)$  が得られることと,  $r$  は 0 から  $\min\{m, n\}$  までの整数値を取り得るので, 商集合の元の個数は

$$\min\{m, n\} + 1$$

となる.

# p106-107 : 問 1

## 解答

求める  $E \rightarrow F$  の取り替え行列を  $P = (p_{ij})$  とし,

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & e_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & e_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ f_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, & f_2 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, & f_3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする. ここで,

$$f_i = \sum_{j=1}^3 p_{ji} e_j = p_{1i} e_1 + p_{2i} e_2 + p_{3i} e_3$$

であり,  $i = 1, 2, 3$  の場合についての連立方程式を作ると

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + p_{31} e_3 \\ f_2 &= p_{12} e_1 + p_{22} e_2 + p_{32} e_3 \\ f_3 &= p_{13} e_1 + p_{23} e_2 + p_{33} e_3 \end{aligned}$$

これを解くことにより

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{9}{2}, & p_{21} &= -\frac{1}{2}, & p_{31} &= -\frac{1}{2}, \\ p_{12} &= 5, & p_{22} &= -2, & p_{32} &= 3, \\ p_{13} &= \frac{13}{2}, & p_{23} &= -\frac{3}{2}, & p_{33} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

なので,

$$P = \begin{pmatrix} 9/2 & 5 & 13/2 \\ -1/2 & -2 & -3/2 \\ -1/2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

である. また

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)P$$

であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \\ P &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から求めることもできる.

# p106-107 : 問 2

**解答**

まず,

$$f_i = \sum_{j=1}^2 p_{ji} e_j = p_{1i} e_1 + p_{2i} e_2$$

である, これにより

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{11} e_1 + p_{21} e_2, \\ f_2 &= p_{12} e_1 + p_{22} e_2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= p_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= p_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, これにより

$$p_{11} = -1, \quad p_{21} = 1, \quad p_{12} = -1, \quad p_{22} = 2$$

であるから, 基底の取り替え  $E \rightarrow F$  の行列は

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である.

## p107-108 : 問 1

### p107-108 : 問 1-(イ)

**解答**

この集合を  $W_1$  とおくと,  $W_1$  は  $\mathbb{C}^n$  の部分空間をなす.

$$x = 0 \in W_1$$

であるから,  $W_1 \neq \emptyset$  である.

また,

$$v = {}^t(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad w = {}^t(w_1, w_2, \dots, w_n)$$

とおくと,

$$v + w = {}^t(v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

となり, これに加えて

$$(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + \dots + (v_n + w_n) = (v_1 + v_2 + \dots + v_n) + (w_1 + w_2 + \dots + w_n) = 0 + 0 = 0$$

となるから,  $v + w \in W_1$  である. さらに,  $a \in \mathbb{C}$  をとると,

$$av = {}^t(av_1, av_2, \dots, av_n)$$

であり,

$$av_1 + av_2 + \dots + av_n = a(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = a \cdot 0 = 0$$

であるから, このとき  $av \in W_1$  である.

以上により,  $W_1$  は  $\mathbb{C}^n$  の線型部分空間をなす.

### p107-108 : 問 1-(口)

#### 解答

この集合を  $W_2$  とおくと,  $W_2$  は  $\mathbb{C}^n$  の部分空間をなす.

$$x = 0 \in W_2$$

であるから,  $W_2 \neq \emptyset$  である.

また,

$$v = {}^t(v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_n), \quad w = {}^t(w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_n)$$

とおくと,

$$v + w = {}^t(v_{p+1} + w_{p+1}, v_{p+2} + w_{p+2}, \dots, v_n + w_n)$$

であり,

$$\begin{aligned} & (v_{p+1} + w_{p+1}) + (v_{p+2} + w_{p+2}) + \dots + (v_n + w_n) \\ &= (v_{p+1} + v_{p+2} + \dots + v_n) + (w_{p+1} + w_{p+2} + \dots + w_n) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるため, このとき  $v + w \in W_2$  である.

また,

$$av = {}^t(av_{p+1}, av_{p+2}, \dots, av_n)$$

であり,

$$av_{p+1} + av_{p+2} + \dots + av_n = a(v_{p+1} + v_{p+2} + \dots + v_n) = a \cdot 0 = 0$$

であるため, このとき  $av \in W_2$  である.

以上により,  $W_2$  は  $\mathbb{C}^n$  の線型部分空間をなす.

### p107-108 : 問 1-(ハ)

#### 解答

これは部分空間をなさない.

$$v = {}^t(1, 0, 0, \dots, 0), \quad w = {}^t(0, 1, 0, \dots, 0)$$

とすると

$$v + w = {}^t(1, 1, 0, \dots, 0)$$

となり、与えられた条件式に当てはめると

$$1^2 + 1^2 + 0^2 + \dots + 0^2 = 2 \neq 1$$

であるから、この集合は  $\mathbb{C}^n$  の部分空間でない。

### p107-108 : 問 1-(二)

#### 解答

この集合を  $W_3$  とおくと、 $W_3$  は  $\mathbb{C}^n$  の部分空間をなす。

$x = 0$  とすると、

$$(a, x) = 0$$

であるため、 $W_3 \neq \emptyset$  である。

さて、 $v, w$  が条件を満たすとする、内積の定義から

$$(a, v + w) = (a, v) + (a, w) = 0$$

である。また、 $c \in \mathbb{C}$  とすると、

$$(a, cv) = c(a, v) = 0$$

である。

以上により、 $W_3$  は  $\mathbb{C}^n$  の線型部分空間をなす。

### p107-108 : 問 2

#### p107-108 : 問 2-(イ)

#### 解答

この集合を  $W_1$  とおくと、 $W_1$  は  $\mathbb{K}^n$  の線型部分空間とならない。

たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、 $A, B \in W_1$  であるが、

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、 $A + B$  は正則行列である。よって  $W_1$  は  $\mathbb{K}^n$  の線型部分空間とならない。

#### p107-108 : 問 2-(ロ)

#### 解答

この集合を  $W_2$  とおくと、 $W_2$  は  $\mathbb{K}^n$  の線型部分空間となる。

$X = O$  としたとき、 $AO = OB$  が成り立つのは明らかなので、 $W_2 \neq \emptyset$  である。



また,  $X, Y \in W_2$  とすると,

$$A(X + Y) = (X + Y)B$$

が成立し, さらに  $a \in \mathbb{K}$  とすると,

$$A(aX) = (aX)B$$

が成立する.

以上により,  $W_2$  は  $\mathbb{K}^n$  の線型部分空間である.

### p107-108 : 問 2-(ハ)

#### 解答

この集合を  $W_3$  とおくと, これは  $\mathbb{K}^n$  の線型部分空間とならない.

たとえば

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$A^2 = O, \quad B^2 = O$$

となり,  $A, B \in W_3$  であるが,

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり, これは冪零行列とならない. よって  $W_3$  は  $\mathbb{K}^n$  の線型部分空間とならない.

### p107-108 : 問 2-(ニ)

#### 解答

この集合を  $W_4$  とおくと, これは  $\mathbb{K}^n$  の線型部分空間とならない.

たとえば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおき,  $1/2 \in \mathbb{K}$  をとると,

$$\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

となり, これは  $W_4$  の元ではない. よって  $W_4$  は  $\mathbb{K}^n$  の線型部分空間とならない.

### p122 : 問

#### 解答

まず,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおく. 正規直交基底のひとつを  $e_1$  とすると,  $\|a_1\| = \sqrt{2}$  により,

$$e_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. また,

$$a'_2 = a_2 - (a_2, e_1)e_1$$

とすると,

$$a'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である. これを用いると,

$$e_2 = \frac{1}{\|a'_2\|} a'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}/2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる. また,

$$a'_3 = a_3 - (a_3, e_1)e_1 - (a_3, e_2)e_2$$

とすると,

$$a'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となり,

$$e_3 = \frac{1}{\|a'_3\|} a'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる.

以上の考察により, 求める正規直交基底は

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である.

## p124 : 問-1)

### 証明

任意に  $x \in W$  をとる.  $W^\perp$  は「 $W$  の任意のベクトルと直交するベクトル全体の集合」であるから,  $x \in W$  に対しては, 任意の  $y \in W^\perp$  において  $(x, y) = 0$  が成り立つ.

ゆえに, 任意の  $x \in W$  は  $W^\perp$  の元全てと直交することになり, したがって  $x \in (W^\perp)^\perp$  が従う. このことから

$$W \subset (W^\perp)^\perp$$

が得られる。また、定理 [4.7] から

$$\begin{aligned}\dim W + \dim W^\perp &= \dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp), \\ \dim W + \dim W^\perp &= n.\end{aligned}$$

ここで定理 [6.4] から  $\mathbb{R}^n$  の計量空間  $V$  は  $W + W^\perp$  と表されること、[4.8] から、この直和の共通部分は  $\{o\}$  のみであることを用いた。

□

## 第 4 章・章末問題

### p127–130 : 1

#### 解答

$s, t, u, v \in \mathbb{R}$  とし.

$$sa_1 + ta_2 = ua_3 + va_4$$

とおく。これにより、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} &= o, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} &= o, \\ \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (a \text{ は任意の定数})\end{aligned}$$

とかけるので、 $W_1 \cap W_2$  の次元は 1 であり、その基底は

$$sa_1 + ta_2 = -a \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

により、

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

### p127–130 : 2

#### 解答

$W_1$  に関して,  $x_3 = s$ ,  $x_4 = t$  とおくと,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とかけるため,  $\dim W_1 = 2$  であり, その基底は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である.  $W_2$  に関して同様に,  $\dim W_2 = 2$  であり, その基底は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である. したがって  $W_1 + W_2$  は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によって生成される.

ここで,

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

となり, これに基本変形を施すと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

となる. したがって,  $W_1 + W_2$  の次元は 3 であり, その基底は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である.

**解答**

$A, B$  の定める線型写像をそれぞれ  $T_A, T_B$  とする.  $x \in \text{Im}(T_A + T_B)$  を任意にとると, ある  $y \in \mathbb{R}^n$  が存在して,

$$\begin{aligned} x &= (T_A + T_B)(y) \\ &= T_A(y) + T_B(y) \quad (\because T_A \text{ と } T_B \text{ は線型写像}). \end{aligned}$$

よって,

$$\text{Im}(T_A + T_B) \subset \text{Im } T_A + \text{Im } T_B \quad (*)$$

これにより,

$$\begin{aligned} \text{rank}(T_A + T_B) &= \dim(\text{Im}(T_A + T_B)) && (\because \text{階数の定義}) \\ &\leq \dim(\text{Im}(T_A) + \text{Im}(T_B)) && (\because (*)) \\ &\leq \dim(\text{Im}(T_A)) + \dim(\text{Im}(T_B)) && (\because \text{定理 [4.7]}) \\ &= \text{rank}(T_A) + \text{rank}(T_B). && (\because \text{階数の定義}) \end{aligned}$$

これを書き換えると

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

これが証明すべきことであった.

## p127–130 : 6

### p127–130 : 6-(イ)

**証明**

$BA$  は  $n$  次の正方行列である. ここで,

$$\begin{aligned} \text{rank}(BA) &\leq \min\{\text{rank } B, \text{rank } A\} \\ &= m < n \end{aligned}$$

であるから,  $\text{rank}(BA) < n$  である. よって  $BA$  は正則行列でない.

□

### p127–130 : 6-(ロ)

**証明**

$AB$  が正則であるとする.  $m = \text{rank } AB \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$  であるから,  $m \leq \text{rank } A$  かつ  $m \leq \text{rank } B$  である. 一方  $\text{rank } A \leq m, \text{rank } B \leq m$  でもあるから  $m = \text{rank } A = \text{rank } B$  である. 行列  $X$  の定める線形写像を  $T_X$  と書くことにする ( $T_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m, T_B: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$  である).

$$\begin{aligned} \text{rank } AB &= \dim(T_{AB}(\mathbb{C}^m)) \\ &= \dim((T_A \circ T_B)(\mathbb{C}^m)). \end{aligned}$$

$W = T_B(\mathbb{C}^m)$  とおく.  $T_A$  の定義域を  $W$  に制限した写像  $T_A \upharpoonright W: W \rightarrow \mathbb{C}^n$  について次元定理を適用すると,

$$\dim W = \dim((T_A \upharpoonright W)(W)) + \dim((T_A \upharpoonright W)^{-1}(\{o_m\})).$$

ここで,

$$\begin{aligned} (T_A \upharpoonright W)^{-1}(\{o_m\}) &= \{x \in W : (T_A \upharpoonright W)(x) = o_m\} \\ &= \{x \in W : T_A(x) = o_m\} \\ &= \{x \in \mathbb{C}^n : T_A(x) = o_m\} \cap W \\ &= T_A^{-1}(\{o_m\}) \cap W. \end{aligned}$$

であるから,

$$m = \dim((T_A \circ T_B)(\mathbb{C}^m)) + \dim(T_A^{-1}(\{o_m\}) \cap W).$$

となる. よって,

$$\text{rank } AB = m - \dim(T_A^{-1}(\{o_m\}) \cap W).$$

だから  $\dim(T_A^{-1}(\{o_m\}) \cap W) = 0$  である. 以上より,

- (I)  $m = \text{rank } A = \text{rank } B.$
- (II)  $\dim(T_A^{-1}(\{o_m\}) \cap T_B(\mathbb{C}^m)) = 0.$

は必要条件である. 一方, (I) かつ (II) を仮定すると,  $\text{rank } AB = m$  であるから  $AB$  は正則でもある. よって (I) かつ (II) が必要十分条件である.

□

## p127-130 : 7

### 証明

$M_n(\mathbb{K})$  の基底  $\langle e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n}, e_{21}, \dots, e_{nn} \rangle$  を,  $e_{ij}$  の  $(i, j)$  成分が 1 で, その他の成分は 0 であるものとして定義する.

$X = (x_{ji}) \in M_n(\mathbb{K})$  を取り,  $A = (a_{ij})$  を  $a_{ij} = T e_{ji}$  であるものとすれば,

$$\begin{aligned} \text{tr}(AX) &= \text{tr} \left( \begin{pmatrix} T e_{11} & T e_{12} & \dots & T e_{1n} \\ T e_{21} & T e_{22} & \dots & T e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T e_{n1} & T e_{n2} & \dots & T e_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{tr} \left( \begin{pmatrix} x_{11} T e_{11} + x_{12} T e_{12} + \dots + x_{1n} T e_{1n} & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{n1} T e_{n1} + \dots + x_{nn} T e_{nn} & \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_{ij} T e_{i,j} \\ &= T \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_{ij} e_{ij} \right) \\ &= T(X) \end{aligned}$$

となり, 上記のように  $A$  をとればよい.

□

p127-130 : 8

解答

例 7 をふまえ,

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)g(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \end{aligned}$$

である. さらに, 第 2 項と第 3 項に関連して,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right), \\ \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx &= 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

これらを用いると,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx &= 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \\ &\quad - 2 \left( a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \right) \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\ &= 2\pi \left( a_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right)^2 + \pi \sum_{k=1}^n \left\{ \left( a_k - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( b_k - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right)^2 \right\} + R. \end{aligned}$$

ただし,

$$R = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - 2\pi \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right)^2 - \pi \sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right)^2 + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right)^2 \right).$$

したがって,  $\|f - g\|^2$  を最小にする  $g(x)$  は,

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right) \cos kx + \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \sin kx \right).$$

## p127-130 : 12

### p127-130 : 12-(イ)

#### 証明

ベクトル空間  $V$  に対して,  $V$  の線型汎関数全体の集合を  $V^*$  とする.

$V$  の基底  $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  に対して,  $V^*$  の元  $f_i$  を  $f_i(e_j) = \delta_{ij}$  とする.  $E^* = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$  は  $V^*$  の基底である.

任意の  $f_i \in V^*$  が線型結合で表されることを示す.

$$(c_1 f_1 + \dots + c_n f_n)(x) = 0$$

とする. ここで  $x = e_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を代入すると,  $f_i(e_j) = \delta_{ij}$  となり,  $c_i = 0$  と併せると

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

となり線型独立である.

次に,  $V^*$  の元が  $f_1, f_2, \dots, f_n$  の線型結合で表されることを示す.

$V^*$  の元  $f$  が  $V$  の元  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  に対して  $f(e_j) = a_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) とすると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) && (\because f \text{ の線型性}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i f_i(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) && (\because f_i(e_j) = \delta_{ij}) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n a_i f_i \right) (x) \end{aligned}$$

と  $f_1, f_2, \dots, f_n$  の線型結合として表される.

以上により,  $E^*$  は  $V^*$  の基底である.

□

### p127-130 : 12-(ロ)

#### 証明



$W^*$  の元  $f = c_1 f'_1 + \cdots + c_n f'_n$  をとる.  $V$  の元  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  に対して

$$\begin{aligned}
 (T^* f')(x) &= f \circ T(x) \\
 &= \sum_{k=1}^m c_k f'_k \circ T \left( \sum_{l=1}^n x_l e_l \right) && (\because f' \text{ の線型性}) \\
 &= \sum_{k=1}^m c_k f'_k \left( \sum_{l=1}^n x_l T(e_l) \right) && (\because T \text{ の線型性}) \\
 &= \sum_{k=1}^m c_k \sum_{l=1}^n x_l f'_k(a_{1l} e'_1 + a_{2l} e'_2 + \cdots + a_{nl} e'_n) \\
 &= \sum_{k=1}^m c_k \sum_{l=1}^n x_l a_{kl} && (\because \text{双対基底の定義と } f'_k \text{ の線型性}) \\
 &= \sum_{k=1}^m c_k \sum_{l=1}^n c_{kl} f_l(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) && (\because \text{双対基底の定義と } f'_l \text{ の線型性}) \\
 &= \left( \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^m c_k a_{kl} \right) f_l \right) (x)
 \end{aligned}$$

より, 基底  $E^*$ ,  $F^*$  に関する  $T^*$  の表現行列  $B = (b_{ij})$  は

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m c_k a_{k1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m c_k a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

より,  $b_{ij} = a_{ji}$  となり,  $B = {}^t A$  である.

□

## p127-130 : 9

### 証明

この写像を  $\varphi$  とする. まず,  $\varphi$  が線型写像であることを示す.

$x, y \in V$  と  $c \in \mathbb{R}$  に対して,  $\forall f \in V^*$  で

$$\begin{aligned}
 (\varphi(x+y))(f) &= f(x+y) \\
 &= f(x) + f(y) \\
 &= (\varphi(x))(f) + (\varphi(y))(f) \\
 &= (\varphi(x) + \varphi(y))(f)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi(cx))(f) &= f(cx) \\
 &= cf(x) \\
 &= c(\varphi(x))(f) \\
 &= (c\varphi(x))(f)
 \end{aligned}$$

であるから,  $\varphi$  は線型写像である.

次に,  $V$  の基底  $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  に対して,  $e'_i = \varphi(e_i)$  (ただし  $1 \leq i \leq n$ ) としたとき,  $(E^*)^* = \langle e'_1, e'_2, \dots, e'_n \rangle$  が  $(V^*)^*$  の基底であることを示す.

$E^* = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$  を  $E$  の双対基底とする.  $c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + \dots + c_n e'_n = \mathbf{0}$  となるとき,  $\varphi$  は線型写像で  $\varphi(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n) = c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + \dots + c_n e'_n$  であるので,

$$\begin{aligned} (c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + \dots + c_n e'_n)(f_i) &= f_i(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k f_i(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \delta_{ik} \\ &= c_i = 0 \end{aligned}$$

となり,  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  であるから,  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  は線型独立であり,  $\dim(V^*)^* = n$  より  $(E^*)^*$  は基底である. とくに  $\varphi$  の階数は  $n$  となる. 適当な基底での  $\varphi$  の表現行列  $A$  に対して p.117 の (3) により,  $r(A) = n$  となり, これは  $\varphi$  が全単射対応を与えることを示す.

□

## p127–130 : 10

### p127–130 : 10-(イ)

#### 証明

(1), (2) で双線型性, (3) で対称性, (4) で正值性を証明する.

(1)

$$\begin{aligned} (f, g_1 + g_2)_p &= \int_a^b p(x) f(x) \{g_1(x) + g_2(x)\} dx \\ &= \int_a^b p(x) f(x) g_1(x) dx + \int_a^b p(x) f(x) g_2(x) dx \\ &= (f, g_1)_p + (f, g_2)_p. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2, g)_p &= \int_a^b p(x) \{f_1(x) + f_2(x)\} g(x) dx \\ &= \int_a^b p(x) f_1(x) g(x) dx + \int_a^b p(x) f_2(x) g(x) dx \\ &= (f_1, g)_p + (f_2, g)_p. \end{aligned}$$

(2)  $c$  は任意の実数とする.

$$\begin{aligned} (cf, g)_p &= \int_a^b p(x) \{cf(x)\} g(x) dx \\ &= c \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \\ &= c(f, g)_p. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}(f, cg)_p &= \int_a^b p(x)f(x)\{cg(x)\} dx \\ &= c \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx \\ &= c(f, g)_p.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(f, g)_p &= \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx \\ &= \int_a^b p(x)g(x)f(x) dx \\ &= (g, f)_p.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(f, f)_p &= \int_a^b p(x)f(x)f(x) dx \\ &= \int_a^b p(x)\{f(x)\}^2 dx \\ &> 0.\end{aligned}\quad (\because p(x) \text{ は常に正})$$

等号が成立するのは  $f(x) = 0$  のとき.

(1) から (4) の考察により,  $(f, g)_p$  は内積の定義をみたす.

□

## 第 5 章

### p139 : 問

#### 前半

##### 証明

$T$  をエルミート変換とする. また,  $\lambda \in \mathbb{K}$  を  $T$  の固有値,  $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$  を  $T$  の固有値  $\lambda$  に対する固有ベクトルとする.

このとき,

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) && \text{(内積の定義)} \\ &= (T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) && \text{(固有値の定義)} \\ &= (\boldsymbol{x}, T^*\boldsymbol{x}) && \text{(p139 式 (1))} \\ &= (\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}) && (T \text{ はエルミート変換}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) && \text{(固有値の定義)} \\ &= \bar{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) && \text{(内積の定義)}\end{aligned}$$

となり,  $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$  より  $\lambda = \bar{\lambda}$  であるから  $\lambda \in \mathbb{R}$  である.

□

#### 後半

##### 証明

$T$  をユニタリ変換とする. また,  $\lambda \in \mathbb{K}$  を  $T$  の固有値,  $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$  を  $T$  の固有値  $\lambda$  に対する固有ベクトルとする.

このとき,

$$\begin{aligned}\lambda\bar{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) &= (\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) && \text{(内積の定義)} \\ &= (T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}) && \text{(固有値の定義)} \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) && (T \text{ はユニタリ変換})\end{aligned}$$

となり,  $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$  より  $|\lambda| = 1$  である.

□

# 附録 III

## p228 : 問

### p228 : 問-(イ)

以下により, 求める最大公約数は  $x^2 + x - 1$  である.

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 3x^3 - 3x + 1 \overline{) \begin{array}{r} x^5 + 2x^4 \phantom{- 3x^3} + x - 1 \\ x^5 + 3x^4 \phantom{- 3x^3} + x \\ \hline -x^4 \phantom{+ 3x^3} - 1 \\ -x^4 - 3x^3 \phantom{+ 3x} - 1 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 - 3x \end{array}} \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^2 + x - 1 \overline{) \begin{array}{r} x^4 + 3x^3 \phantom{- 3x^2} - 3x + 1 \\ x^4 + x^3 - x^2 \\ \hline 2x^3 + x^2 - 3x \\ 2x^3 + 2x^2 - 2x \\ \hline -x^2 - x + 1 \\ -x^2 - x + 1 \\ \hline 0 \end{array}}
 \end{array}$$

### p228 : 問-(ロ)

以下により, これらは互いに素である.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x - 3 \overline{) \begin{array}{r} x^3 \phantom{- x^2} - 4x + 4 \\ x^3 - 2x^2 - 3x \\ \hline x^2 \phantom{- x} + 4 \\ x^2 - 2x - 3 \\ \hline x + 7 \end{array}}
 \end{array}$$

## p239 : 問 1

### p239 : 問 1-(イ)

#### 解答

計算すると以下のようになる :

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \\
 &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n) = s_1^2 - 2s_2.
 \end{aligned}$$

### p239 : 問 1-(ロ)

#### 解答

計算すると以下ようになる：

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 &= \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^3 - 3 \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) + 3 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3 - 3(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n) \\ &\quad + 3(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n) \\ &= s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3. \end{aligned}$$

## p239 : 問 2

### p239 : 問 2-(イ)

#### Lemma 0.0.1

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

#### 解答

まず,

$$(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0.$$

これをふまえ、補題において  $a = x - y$ ,  $b = y - z$ ,  $c = z - x$  とおくと,

$$\begin{aligned} 0 &= (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 - 3(x - y)(y - z)(z - x) \\ \therefore (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 &= 3(x - y)(y - z)(z - x). \end{aligned}$$

### p239 : 問 2-(ロ)

#### Lemma 0.0.2

$a + b + c = 0$  のとき,

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca).$$

#### Lemma 0.0.3

$a + b + c = 0$  のとき,

$$a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

#### 解答

上記の 2 つの補題により,

$$\begin{aligned} (x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5 &= -5(x - y)(y - z)(z - x)\{(x - y)(y - z) + (y - z)(z - x) + (z - x)(x - y)\} \\ &= -5(x - y)(y - z)(z - x)\{(xy + xz + yz) - (x^2 + y^2 + z^2)\} \\ &= 5(x - y)(y - z)(z - x)\{(x + y + z)^2 - 3(xy + xz + yz)\}. \end{aligned}$$

## p249 : 問

### p249 : 問-(イ)

**証明**

体  $K$  の単位元について,  $0 = 0 + 0$  であるから,

$$\begin{aligned} a0 &= a(0 + 0) = a0 + a0 \\ \therefore a0 &= a0 + a0 \end{aligned}$$

$K$  は加法について可換群であるから,  $a0$  の逆元  $-a0$  が  $K$  に存在する. これを用いると,

$$\begin{aligned} a0 + (-a0) &= a0 + a0 + (-a0) \\ \therefore 0 &= a0 + a0 + (-a0) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} a0 + a0 + (-a0) &= a0 + \{a0 + (-a0)\} \\ &= a0 + 0 \\ &= a0 \end{aligned}$$

となるから,  $0 = a0$  である.  $0 = 0a$  についても同様.

□

**p249 : 問-(口)**
**証明**

$a \neq 0$  とする. このとき,  $a$  の逆元  $a^{-1} \in K$  が存在し,  $ab = 0$  の両辺に  $a^{-1}$  をかけると,

$$\begin{aligned} a^{-1}(ab) &= a^{-1}0 \\ (a^{-1}a)b &= 0 \\ 1b &= 0 \\ \therefore b &= 0 \end{aligned}$$

である. これと  $b \neq 0$  を仮定したときの同様の考察により,  $ab = 0$  のとき,  $a = 0$  または  $b = 0$  である.

□

**p255 : 1**
**証明**

$a, b, c \in H$  について,  $G$  の演算により,  $a(bc) = (ab)c$  が成り立ち, このことから結合法則は成立する. また, 仮定より  $H \neq \emptyset$  なので,  $x \in H$  をひとつとり,  $a = x$ ,  $b = x$  とすると,

$$ab^{-1} = xx^{-1} = e$$

となり, 仮定から  $e$  は  $H$  の元である. よって  $H$  は単位元を持つ.

次に,  $a = e$ ,  $b = x$  とすると,

$$ab^{-1} = ex^{-1} = x^{-1}$$

となり, 仮定により  $x^{-1}$  は  $H$  の元である. よって  $H$  の任意の要素は逆元を持つ.

上の考察により, どの要素も逆元を持つので,  $a = x$ ,  $b = y^{-1}$  とすると,

$$ab^{-1} = x(y^{-1})^{-1} = xy.$$

これは  $H$  の元であるから、 $H$  は  $G$  の演算について閉じている.

以上の考察から,

- $H$  は  $G$  の演算について閉じている
- $H$  の元は  $G$  の演算について結合法則を満たす
- $H$  は単位元  $e$  を持つ
- $H$  の任意の要素は逆元を持つ

ということがわかり、 $H$  は  $G$  の部分群である.

□

### Column I

本題にはあまり関係のない余談ですが、群が空集合でないことは群の定義からただちに従います.



## 参考文献

- [1] 齋藤正彦『線型代数入門』, 東京大学出版会, 1966