

# 齋藤正彦・線型代数入門解答集

なまちゃん

2023 年 11 月 30 日

## 目次

### 目次

2

### 第 1 章

2

p5 : 問 1 . . . . .	2
p5 : 問 2 . . . . .	2
p7 : 問-(上) . . . . .	3
p7 : 問-(下) . . . . .	3
p8 : 問 1 . . . . .	4
p8 : 問 2 . . . . .	4
p10 : 問 1 . . . . .	5
p10 : 問 2 . . . . .	5
p11 : 問 1 . . . . .	6
p12 : 問 2 . . . . .	6
p12 : 問 3 . . . . .	6
p13 : 問 1 . . . . .	7
p18 : 問 . . . . .	8
p19 : 問 1 . . . . .	9
p19 : 問 2 . . . . .	9
p19 : 問 1-(下) . . . . .	9
p19 : 問 2-(下) . . . . .	10
p22 : 問 1 . . . . .	11

### 第 1 章・章末問題

12

p30 : 8 . . . . .	12
p30 : 9 . . . . .	13

### 第 2 章

14

p34 : 問 1 . . . . .	14
p40 : 問 . . . . .	14
p41 : 問 1 . . . . .	15
p42 : 問 1 . . . . .	16
p52 : 問 . . . . .	17

p62 : 問 1 . . . . .	17
---------------------	----

p62 : 問 2 . . . . .	17
---------------------	----

### 第 2 章・章末問題

18

p70 : 1-イ) . . . . .	18
p70 : 1-ロ) . . . . .	19
p71 : 3-イ) . . . . .	20
p71 : 7 . . . . .	21

### 附録 III

22

p249 : 問 . . . . .	22
--------------------	----

## 第 1 章

### p5 : 問 1

証明. 線分 PQ の中点を M とする. このとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \\ &= \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{2} \\ &= \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}\end{aligned}$$

である.  $\square$

### p5 : 問 2

証明. 三角形 PQR の重心を G, PQ の中点を N とする. G は線分 RN を 2:1 に内分する点なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OR} + \frac{2}{3}\overrightarrow{RN} \\ &= \boldsymbol{c} + \frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2} - \boldsymbol{c}\right) \\ &= \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}}{3}\end{aligned}$$

である.  $\square$

## p7 : 問-(上)

求めるベクトルを,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ) とおく. このとき, 内積の定義により,

$$\mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x + y + z = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = x + y + 4z = 1 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 3$$

これらの式から,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \\ \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

である.

## p7 : 問-(下)

[1.4] の結果を利用する.

求める三角形の面積を  $S$  とし,

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{P_1 P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

とおく, このとき,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^2 \|\overrightarrow{P_1 P_3}\|^2 - (\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \{ [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2][(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2] \\ &\quad - [(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)]^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である,

## p8 : 問 1

- イ 与えられた直線を  $l$  とする.  $l$  の方程式に  $x = -2$  を代入すると,  $y = 2$  となるため,  $l$  は点  $(-2, 2)$  を通る. また,  $l$  の法線ベクトルのひとつは,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  なので,  $l$  の方向ベクトルのひとつは,  $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  である. よって,  $l$  のベクトル表示のひとつは,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t < \infty)$  である.
- ロ 与えられた直線を  $l'$  とする.  $l'$  の方向ベクトルのひとつは,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  である. また,  $l'$  は点  $(3, 0)$  を通るので, そのベクトル表示のひとつは,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t < \infty)$  となる.

## p8 : 問 2

- イ 与えられたベクトル表示から,

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{cases} t = \frac{x-1}{2} \\ t = y+1 \end{cases}$$

である. これから  $t$  を消去すると,

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} &= y+1 \\ \therefore x-2y-3 &= 0 \end{aligned}$$

である.

- ロ 点  $(-1, -2)$  を通り,  $x$  軸に平行な直線を表すから,  $y = -2$  が求める直線の方程式である.

## p10 : 問 1

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

から,

$$-2x + 2z = 2$$

$$\therefore -x + z = 1$$

である. このとき,  $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  はこれを満たす. このときの  $y$  の値を計算すると, それぞれ  $-3, -5$  なので, 結局, 与えられた直線は 2 点  $(1, -3, 2), (2, -5, 3)$  を通る. すなわち, この直線の方法ベクトルのひとつは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. したがって求めるベクトル表示のひとつは, 直線上の任意の位置ベクトルを  $\boldsymbol{x}$  とすると,

$$\boldsymbol{x} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せる.

## p10 : 問 2

**証明.**  $t$  を  $0 \leq t \leq 1$  をみたす実数, 線分  $P_1P_2$  上の任意の点の位置ベクトルを  $\boldsymbol{x}$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{P_1P_2} \\ &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= (1-t)\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

である.  $1-t = t_1, t = t_2$  と改めておくと,  $t$  の定め方から  $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$  であり,

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{x}_1 + t_2\boldsymbol{x}_2, \quad t_1 + t_2 = 1$$

となり, これが証明すべきことであつた.  $\square$

**p11 : 問 1**

与えられた平面を  $(S)$  とおく.  $(S)$  は 3 点  $(-1, 0, 1)$ ,  $(2, 0, -1)$ ,  $(0, -1, 0)$  を通るので,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と改めておくと,

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり,  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  と  $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$  は線型独立なので, 求めるベクトル表示のひとつは,

$$(S): \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t, s < \infty)$$

**p12 : 問 2**

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 - t - 2s \\ z = 0 + 2t + s \end{cases}$$

から  $t$  と  $s$  を消去して,

$$x - y - z = -1$$

これが求める直線の方程式である.

**p12 : 問 3**

証明.

$$\overrightarrow{OP_1} = \mathbf{x}_1, \quad \overrightarrow{OP_2} = \mathbf{x}_2, \quad \overrightarrow{OP_3} = \mathbf{x}_3$$

とする. このとき, 三角形  $P_1P_2P_3$  上の任意の点の位置ベクトルを  $\mathbf{x}$ ,  $s, t$  を  $0 \leq s, t \leq 1$  を満たす実数とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + t(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \\ \therefore \mathbf{x} &= (1 - s - t)\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2 + t\mathbf{x}_3 \end{aligned}$$

となり,  $1 - s - t = t_1$ ,  $s = t_2$ ,  $t = t_3$  と改めて書き直すと,  $s, t$  の定め方より,  $0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1$  であり

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + t_3\mathbf{x}_3, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

となる. これが証明すべきことであった.  $\square$

**p13 : 問 1**

問 1 :

$(S_1), (S_2)$  の法線ベクトルをそれぞれ  $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$  とおくと,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. ゆえに, 交角を  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) とすると,

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_1\| \|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\theta = \frac{\pi}{4}$  である.

**p18 : 問**

**証明.**  $A, B, C$  が  $2 \times 2$  行列の場合を証明する.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

とし,  $A, B, C$  の成分はすべて複素数であるとする. このとき,

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk &cej + dgj + cfl + dhl \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. 他方

$$\begin{aligned} A(BC) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei + afk + bgi + bhk & aej + afl + bgj + bhl \\ cei + cfk + dgi + dhk &cej + cfl + dgj + dhl \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, たしかに  $(AB)C = A(BC)$  である.  $\square$



## p19 : 問 1-(上)

証明.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

となり, これは明らかに線型変換である. 対応する行列は,  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  である.  $\square$

## p19 : 問 2-(上)

証明. 式 (15) より,  $2 \times 2$  行列  $A$ ,  $B$  とベクトル  $\boldsymbol{x}$  について,

$$\begin{aligned} T_B(T_A(\boldsymbol{x})) &= B(A\boldsymbol{x}) \\ &= (BA)\boldsymbol{x} \\ &= T_{BA}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

である. これが証明すべきことであつた.  $\square$

## p19 : 問 1-(下)

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とおくと, (17) 式より,

$$\begin{aligned} T\boldsymbol{x} &= \frac{ax + by}{a^2 + b^2} \boldsymbol{a} \\ &= \begin{pmatrix} a^2x + aby \\ abx + b^2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

であるから,

$$T = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

となる.

## p19 : 問 2-(下)

イ 証明.  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  かつ  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} T\mathbf{x} &= \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \mathbf{a} \\ &= \frac{a_1x + a_2y}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. つまり,  $T = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix}$  である. このとき,

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)^2} \begin{pmatrix} a_1^4 + a_1^2a_2^2 & a_1^3a_2 + a_1a_2^3 \\ a_1^3a_2 + a_1a_2^3 & a_2^4 + a_1^2a_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} = T \end{aligned}$$

となり,  $T^2 = T$  である.  $S^2 = S$  も同様に示される.  $\square$

ロ 証明.  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  とする. このとき,  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  が直交することから,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= 0 \\ \therefore a_1b_1 + a_2b_2 &= 0 \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} TS &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \frac{1}{(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 \\ b_1b_2 & b_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\quad (\because a_1b_1 + a_2b_2 = 0) \end{aligned}$$

である. 同様に  $ST$  を計算すると,  $ST = 0$  であることもわかり, これで  $TS = ST = 0$  が証明された.  $\square$

ハ 証明. イ), ロ) の文字や結論を用いると,

$$\begin{aligned} T\mathbf{x} + S\mathbf{x} &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 \\ b_1b_2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) & (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \\ (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) & (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

となる. これが証明すべきことであつた.  $\square$

## p22 : 問 1

イ

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

となり, これは  $y$  軸に関する対象点に移す変換を表す.

ロ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{pmatrix}$$

となり, これは  $x$  軸まわりに角  $\alpha$  だけ回転する変換を表す.

ハ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

# 第 1 章・章末問題

p30 : 8

証明.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

一方,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1(a_2b_3 - b_2a_3) + c_2(a_3b_1 - b_3a_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

であるから, これと行列式の積の性質により,

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{vmatrix} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$$

である.  $\square$

**p30 : 9**

イ 証明. 単位ベクトル  $e_1, e_2, e_3$  を適当にとり,

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{c} = \gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \alpha_1 \beta_2 \mathbf{e}_3 \times (\gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \alpha_1 \beta_2 \gamma_1 \mathbf{e}_2 - \alpha_1 \beta_2 \gamma_2 \mathbf{e}_1 \\ &= -(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \mathbf{b} \end{aligned}$$

であり, これが証明すべきことであつた.  $\square$

## 第2章

## p34 : 問1

**証明.** 後半二つの主張は明らか. また, 二つ目の主張は一つ目の主張と同様にして示すことができるので, 一つ目のみ示すことにする.

$A = (a_{pq})$  を  $k \times l$  行列,  $B = (b_{qr})$ ,  $C = (c_{qr})$  を  $l \times m$  行列とする. 示したい式の両辺がともに定義され, ともに  $k \times m$  行列であることはよい. 行列  $B + C$  の  $(q, r)$  成分は  $b_{qr} + c_{qr}$  であるから, 左辺の  $(p, r)$  成分は,

$$\sum_{q=1}^l a_{pq} (b_{qr} + c_{qr}) = \sum_{q=1}^l a_{pq} b_{qr} + \sum_{q=1}^l a_{pq} c_{qr}$$

とかける. この等号の右辺は  $AB$  の  $(p, r)$  成分と  $AC$  の  $(p, r)$  成分の和である. これより, 主張が示された.  $\square$

## p40 : 問

イ

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ O & A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

## p41 : 問 1

$$(1) \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \text{ とする. このとき,}$$

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 2x_{11} + 4x_{21} & 2x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix}$$

となり, これが  $E_2$  と等しくなるためには

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 2x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases}$$

となる必要があるが, これを満たす  $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{C}$  は存在しない. よって前半の主張が示された.

$$\text{後半について示す. } Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \text{ とする. このとき,}$$

$$YA = \begin{pmatrix} y_{11} + 2y_{12} & 2y_{11} + 4y_{12} \\ y_{21} + 2y_{22} & 2y_{21} + 4y_{22} \end{pmatrix}$$

となり, これが  $E_2$  と等しくなるためには

$$\begin{cases} y_{11} + 2y_{12} = 1 \\ 2y_{11} + 4y_{12} = 0 \\ y_{21} + 2y_{22} = 0 \\ 2y_{21} + 4y_{22} = 1 \end{cases}$$

となる必要があるが, これを満たす  $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} \in \mathbb{C}$  は存在しない. よって後半の主張も示された.  $\square$

$$(2) \quad X, Y \text{ を (1) で定義したものとする. このとき,}$$

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, これが  $B$  と等しくならないことは明らか.

後半について,

$$YA = \begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} \\ x_{21} & 2x_{21} \end{pmatrix}$$

となり, これが  $B$  と等しくなるためには  $x_{11} = 1, x_{21} = 2$  となる必要があるが,  $x_{12}, x_{22}$  については任意の複素数である. 以上の議論により, このような  $Y$  は無限に存在する.  $\square$

$$(3) \quad A \text{ の第 } k \text{ 列の成分が全て } 0 \text{ であるとする. ただしここで } 1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N} \text{ であるとする.}$$

$XA = E$  をみたす  $X$  が存在すると仮定する. このとき,  $X$  は明らかに  $n \times n$  行列であり, 積  $XA$  は定義される. いま  $X = (x_{jk}), A = (a_{kj}), 1 \leq j, k \leq n$  と表す. このとき,

$$(XA \text{ の } (j, j) \text{ 成分}) = \sum_{k=1}^n x_{jk} a_{kj} = 0$$

となり, これは  $XA = E$  に矛盾する. よってこのような  $X$  は存在しないことが示された.  $\square$

## p42 : 問 1

(1) まず,

$$\overline{A} \overline{A^{-1}} = \overline{AA^{-1}} = E, \quad \overline{A^{-1}} \overline{A} = \overline{A^{-1}A} = E$$

より,  $\overline{A}$  は正則で, 逆行列は  $\overline{A^{-1}}$  である. さらに,

$${}^t A {}^t A^{-1} = {}^t (A^{-1} A) = E, \quad {}^t A^{-1} {}^t A = {}^t (A A^{-1}) = E$$

であるから,  ${}^t A$  は正則であり, 逆行列は  ${}^t A^{-1}$  である.

(2)

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' := \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$AA' = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$$

である.  $AA' = E$  となる条件は,  $x, y, z, w$  についてのふたつの連立方程式

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

が解を持つことで, その条件は  $ad - bc \neq 0$  である. そのときの解は,

$$(x, y, z, w) = \left( \frac{d}{ad - bc}, -\frac{b}{ad - bc}, -\frac{c}{ad - bc}, \frac{a}{ad - bc} \right)$$

である. これを用いて  $A'A$  を計算すると,  $A'A = E$  となり, たしかに  $A'$  は  $A$  の逆行列である. 以上の議論により,  $ad - bc \neq 0$  となればよい.



## p52 : 問

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{\text{第 1 行の } (-2) \text{ 倍, 第 1 行の 2 倍をそれぞれ第 2 行, 第 3 行に加える}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を交換する}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{\text{第 2 行の } (-3) \text{ 倍を第 1 行に加え, 第 3 行の } (-4) \text{ 倍を第 1 行に加える}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{\text{第 3 行の 2 倍を第 2 行に加え, 第 3 行を } (-1) \text{ 倍する}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

よって, 求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である.

## p62 : 問 1

**証明.** 定義に従って計算すると,

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) \\
&= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) \\
&= 2((x, x) + (y, y)) \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

となり, これが証明すべきことであった.  $\square$

## p62 : 問 2

**証明.**

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$$

である. ここで,  $x$  と  $y$  が直交することから,

$$(x, y) + (y, x) = (x, y) + \overline{(x, y)} = 0$$

であり, これを用いると

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

となる.  $x, y$  がともに実ベクトルのときは  $(x, y) = 0$  であるから確かに逆が成り立つが, たとえば

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix}$  とすれば, 等式は成り立つが  $x$  と  $y$  は直交しないため, 逆は成り立たない.  $\square$

## 第2章・章末問題

p70 : 1-1)

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \text{第1行と第2行を交換する} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{c} (1, 1) \text{ をかなめとして左から第1列を掃き出す} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{c} \text{第3行を} (-1) \text{ 倍して第2行と交換し, } (2, 2) \text{ をかなめとして左から第2列を掃き出す} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & | & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{c} (3, 3) \text{ をかなめとして左から第3列を掃き出す} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & | & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{c} \text{第4行を} (-1) \text{ 倍して, } (4, 4) \text{ をかなめとして第4列を掃き出す} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

よって, 求める逆行列は,

$$\begin{pmatrix} 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

である.

p70 : 1-口)

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(1,1) \text{ をかなめとして第 1 列を掃き出す}} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(2,2) \text{ をかなめとして第 2 列を掃き出す}} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(3,3) \text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -13 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(3,3) \text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

よって、求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

p71 : 3-イ)

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 1 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 2 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 3 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

である. ゆえに

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である. だから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## p71 : 7

証明.  $X = (x_{ij})$ ,  $Y = (y_{ij})$  とする. ここで,  $XY$  の  $(i, i)$  成分は  $\sum_{j=1}^n x_{ij}y_{ji}$  であるから,

$$\operatorname{tr}(XY) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_{ij}y_{ji} \right)$$

となる.  $YX$  については, 同様の議論により,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(YX) &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n y_{ij}x_{ji} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_{ji}y_{ij} \right) \end{aligned}$$

である. ここで,  $i$  と  $j$  をおきかえれば,

$$\operatorname{tr}(YX) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_{ij}y_{ji} \right) \quad (1)$$

となる. これより,

$$\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX) \quad (2)$$

を得て, これとトレースの線型性により  $\operatorname{tr}(XY - YX) = 0$  であるが,  $\operatorname{tr}(E_n) = n \neq 0$  であるため, これは矛盾である.

ゆえに,  $XY - YX = E_n$  となる  $n$  次行列  $X, Y$  は存在しないことが示された.  $\square$

## 附録 III

## p249 : 問

イ 証明. 体  $K$  の単位元について,  $0 = 0 + 0$  であるから,

$$\begin{aligned} a0 &= a(0 + 0) = a0 + a0 \\ \therefore a0 &= a0 + a0 \end{aligned}$$

$K$  は加法について可換群であるから,  $a0$  の逆元  $-a0$  が  $K$  に存在する. これを用いると,

$$\begin{aligned} a0 + (-a0) &= a0 + a0 + (-a0) \\ \therefore 0 &= a0 + a0 + (-a0) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} a0 + a0 + (-a0) &= a0 + \{a0 + (-a0)\} \\ &= a0 + 0 \\ &= a0 \end{aligned}$$

となるから,  $0 = a0$  である.  $0 = 0a$  についても同様.  $\square$

ロ 証明.  $a \neq 0$  とする. このとき,  $a$  の逆元  $a^{-1} \in K$  が存在し,  $ab = 0$  の両辺に  $a^{-1}$  をかけると,

$$\begin{aligned} a^{-1}(ab) &= a^{-1}0 \\ (a^{-1}a)b &= 0 \\ 1b &= 0 \\ \therefore b &= 0 \end{aligned}$$

である. これと  $b \neq 0$  を仮定したときの同様の考察により,  $ab = 0$  のとき,  $a = 0$  または  $b = 0$  である.  $\square$

## 参考文献

- [1] 齋藤正彦『線型代数入門』, 東京大学出版会, 1966