齋藤正彦・線型代数入門解答集

なまちゃん

2023 年 12 月 20 日

目次

第 1 章

p5：問 1

証明. 線分 PQ の中点を M とする．このとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}} \\ &= \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2} \\ &= \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\end{aligned}$$

である． □

p5：問 2

証明. 三角形 PQR の重心を G，PQ の中点を N とする．G は線分 RN を 2: 1 に内分する点なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{RN}} \\ &= \boldsymbol{c} + \frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2} - \boldsymbol{c}\right) \\ &= \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}\end{aligned}$$

である． □

p7：問-(上)

求めるベクトルを，$\boldsymbol{x}=(x,\ y,\ z)\ (x^2+y^2+z^2=1)$ とおく．このとき，内積の定義により，

$$\boldsymbol{x}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=x+y+z=1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$$
$$\boldsymbol{x}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}=x+y+4z=1\cdot 3\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=3$$

これらの式から，

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}\\\frac{2\mp\sqrt{2}}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad(\text{複号同順})$$

である．

p7：問-(下)

[1.4] の結果を利用する．
求める三角形の面積を S とし．

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),\quad \boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$$

とおく，このとき，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left\|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\right\|^2\left\|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}}\right\|^2-(\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\\&=\frac{1}{2}\{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2][(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2]\\&\qquad-[(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)+(z_2-z_1)(z_3-z_1)]^2\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

である，

p8：問 1

イ 与えられた直線を l とする．l の方程式に $x=-2$ を代入すると，$y=2$ となるため，l は点 $(-2,2)$ を通る．また，l の法線ベクトルのひとつは，$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ なので，l の方向ベクトルのひとつは，$\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ である．よって，l のベクトル表示のひとつは，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ $(-\infty<t<\infty)$ である．

ロ 与えられた直線を l' とする．l' の方向ベクトルのひとつは，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ である．また，l' は点 $(3,0)$ を通るので，そのベクトル表示のひとつは，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $(-\infty<t<\infty)$ となる．

p8：問 2

イ 与えられたベクトル表示から．

$$\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases}t=\dfrac{x-1}{2}\\t=y+1\end{cases}$$

である．これから t を消去すると，

$$\frac{x-1}{2}=y+1$$
$$\therefore\ x-2y-3=0$$

である．

ロ 点 $(-1,-2)$ を通り，x 軸に平行な直線を表すから，$y=-2$ が求める直線の方程式である．

p10：問 1

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}$$

から，

$$\begin{aligned} &-2x+2z=2 \\ \therefore \quad &-x+z=1 \end{aligned}$$

である．このとき，$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ はこれを満たす．このときの y の値を計算すると，それぞれ $-3, -5$ なので，結局，与えられた直線は 2 点 $(1,-3,2),(2,-5,3)$ を通る．すなわち，この直線の方向ベクトルのひとつは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．したがって求めるベクトル表示のひとつは，直線上の任意の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると，

$$\boldsymbol{x} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せる．

p10：問 2

証明. t を $0 \leq t \leq 1$ をみたす実数，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 上の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + t\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \\ &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= (1-t)\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

である．$1-t=t_1,\ t=t_2$ と改めておくと，t の定め方から $t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0$ であり，

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{x}_1 + t_2\boldsymbol{x}_2, \quad t_1+t_2=1$$

となり，これが証明すべきことであった． □

p11：問 1

与えられた平面を (S) とおく．(S) は 3 点 $(-1,0,1)$, $(2,0,-1)$, $(0,-1,0)$ を通るので,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と改めておくと,

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり，$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1$ は線型独立なので，求めるベクトル表示のひとつは,

$$(S)\colon \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (-\infty < t,\ s < \infty)$$

p12：問 2

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 - t - 2s \\ z = 0 + 2t + s \end{cases}$$

から t と s を消去して,

$$x - y - z = -1$$

これが求める直線の方程式である．

p12：問 3

証明.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \boldsymbol{x}_1, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = \boldsymbol{x}_2, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_3} = \boldsymbol{x}_3$$

とする．このとき，三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ 上の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$，s,t を $0 \leq s,t \leq 1$ を満たす実数とすると,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + s(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + t(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1)$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{x} = (1 - s - t)\boldsymbol{x}_1 + s\boldsymbol{x}_2 + t\boldsymbol{x}_3$$

となり，$1 - s - t = t_1$, $s = t_2$, $t = t_3$ と改めて書き直すと，s,t の定め方より，$0 \leq t_1$, t_2, $t_3 \leq 1$ であり

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{x}_1 + t_2\boldsymbol{x}_2 + t_3\boldsymbol{x}_3, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

となる．これが証明すべきことであった． □

p13：問 1

問 1：

(S_1)，(S_2) の法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．ゆえに，交角を θ $(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2})$ とすると，

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_1\|\|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ である．

p18：問

証明. A, B, C が 2×2 行列の場合を証明する．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

とし，A, B, C の成分はすべて複素数であるとする．このとき，

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei+bgi+afk+bhk & aej+bgj+afl+bhl \\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgj+cfl+dhl \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．他方

$$\begin{aligned} A(BC) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei+afk+bgi+bhk & aej+afl+bgj+bhl \\ cei+cfk+dgi+dhk & cej+cfl+dgi+dhl \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり，たしかに $(AB)C = A(BC)$ である． □

p19：問 1-(上)

証明.
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

となり，これは明らかに線型変換である．対応する行列は，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である． □

p19：問 2-(上)

証明. 式 (15) より，2×2 行列 A，B とベクトル $\boldsymbol{x}$ について，

$$\begin{aligned} T_B(T_A(\boldsymbol{x})) &= B(A\boldsymbol{x}) \\ &= (BA)\boldsymbol{x} \\ &= T_{BA}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

である．これが証明すべきことであった． □

p19：問 1-(下)

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと，(17) 式より，

$$\begin{aligned} T\boldsymbol{x} &= \frac{ax+by}{a^2+b^2}\boldsymbol{a} \\ &= \begin{pmatrix} a^2x + aby \\ abx + b^2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

であるから，

$$T = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

となる．

p19：問 2-(下)

イ 証明. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}T\boldsymbol{x}&=\frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\\&=\frac{a_1x+a_2y}{{a_1}^2+{a_2}^2}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{{a_1}^2+{a_2}^2}\begin{pmatrix}{a_1}^2&a_1a_2\\a_1a_2&{a_2}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．つまり，$T=\dfrac{1}{{a_1}^2+{a_2}^2}\begin{pmatrix}{a_1}^2&a_1a_2\\a_1a_2&{a_2}^2\end{pmatrix}$ である．このとき，

$$\begin{aligned}T^2&=\frac{1}{({a_1}^2+{a_2}^2)^2}\begin{pmatrix}{a_1}^4+{a_1}^2{a_2}^2&{a_1}^3a_2+a_1{a_2}^3\\{a_1}^3a_2+a_1{a_2}^3&{a_2}^4+{a_1}^2{a_2}^2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{{a_1}^2+{a_2}^2}\begin{pmatrix}{a_1}^2&a_1a_2\\a_1a_2&{a_2}^2\end{pmatrix}=T\end{aligned}$$

となり，$T^2=T$ である．$S^2=S$ も同様にして示される． □

ロ 証明. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とする．このとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交することから，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\\&\therefore\ a_1b_1+a_2b_2=0\end{aligned}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}TS&=\frac{1}{({a_1}^2+{a_2}^2)}\begin{pmatrix}{a_1}^2&a_1a_2\\a_1a_2&{a_2}^2\end{pmatrix}\frac{1}{({b_1}^2+{b_2}^2)}\begin{pmatrix}{b_1}^2&b_1b_2\\b_1b_2&{b_2}^2\end{pmatrix}\\&=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)}\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2\\a_2b_1&a_2b_2\end{pmatrix}=O\\&\qquad(\because\ a_1b_1+a_2b_2=0)\end{aligned}$$

である．同様に ST を計算すると，$ST=O$ であることもわかり，これで $TS=ST=O$ が証明された． □

ハ 証明. イ)，ロ) の文字や結論を用いると，

$$\begin{aligned}T\boldsymbol{x}+S\boldsymbol{x}&=\frac{1}{{a_1}^2+{a_2}^2}\begin{pmatrix}{a_1}^2&a_1a_2\\a_1a_2&{a_2}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{{b_1}^2+{b_2}^2}\begin{pmatrix}{b_1}^2&b_1b_2\\b_1b_2&{b_2}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)}\begin{pmatrix}({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)&({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)\\({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)&({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

となる．これが証明すべきことであった． □

p22：問 1

イ

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

となり，これは y 軸に関する対象点に移す変換を表す.

ロ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{pmatrix}$$

となり，これは x 軸まわりに角 α だけ回転する変換を表す.

ハ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

第 1 章・章末問題

p29-30:1

証明. 四面体 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ を考える．三角形 $\mathrm{P_2P_3P_4}$ の任意の周および内部の点を T とする．$0 \leqq k \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$ をみたす $k, s \in \mathbb{R}$ によって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{P_2T}} &= k\{s\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}\} \\ &= ks(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) + k(1-s)(\boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_2) \\ &= -k\boldsymbol{x}_2 + ks\boldsymbol{x}_3 + k(1-s)\boldsymbol{x}_4 \end{aligned}$$

と表される.

さて，線分 $\mathrm{P_1T}$ 上の任意の点を Q とすると，$0 \leqq t \leqq 1$ をみたす $t \in \mathbb{R}$ によって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{P_1Q}} &= t\overrightarrow{\mathrm{P_1T}} \\ &= t\overrightarrow{\mathrm{P_2T}} - t\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}} \\ &= t(-k\boldsymbol{x}_2 + ks\boldsymbol{x}_3 + k(1-s)\boldsymbol{x}_4) - t(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \\ &= -t\boldsymbol{x}_1 + (t-kt)\boldsymbol{x}_2 + kst\boldsymbol{x}_3 + kt(1-s)\boldsymbol{x}_4 \end{aligned}$$

と表されるから，$k=4$ のときの求める位置ベクトルは.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + \overrightarrow{\mathrm{P_1Q}} \\ &= (1-t)\boldsymbol{x}_1 + (t-kt)\boldsymbol{x}_2 + kst\boldsymbol{x}_3 + kt(1-s)\boldsymbol{x}_4 \end{aligned}$$

となり，

$$(1-t) + (t-kt) + kst + kt(1-s) = 1$$

であるから，$1-t = t_1$，$t-kt = t_2$，$kst = t_3$，$kt(1-s) = t_4$ とおくと，

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{x}_1 + t_2\boldsymbol{x}_2 + t_3\boldsymbol{x}_3 + t_4\boldsymbol{x}_4, \quad t_1, t_2, t_3, t_4 \geqq 0, \quad t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1$$

となり，ここまでで $k=4$ の場合が示された．

ここで，$n \geqq 4$ として $k=n$ のときに主張が成り立つと仮定する．このとき，

$$t_1\boldsymbol{x}_1+t_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{x}_n$$

は仮定により多面体 $\{\mathrm{P}_n\}$ の内部の点であり，これを簡単のために $\boldsymbol{X}_n$ とおく．

さて，$\{\mathrm{P}_n\}$ の点と P_{n+1} とを結ぶ線分上の点は，$0 \leqq l \leqq 1$ をみたす $l \in \mathbb{R}$ によって，

$$l\overbrace{(t_1\boldsymbol{x}_1+t_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{x}_n)}^{\boldsymbol{x}_n}+(1-l)\boldsymbol{x}_{n+1},\quad t_1+t_2+\cdots+t_n=1$$

とかける．ここで，

$$l(t_1+t_2+\cdots+t_n)+(1-l)=1$$

なので，$\{\mathrm{P}_n\}$ の点と P_{n+1} とを結ぶ線分上の点はこのように表せる．

逆に，

$$\boldsymbol{x}=t_1\boldsymbol{x}_1+t_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{x}_n+t_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1},\quad t_1,t_2,\ldots,t_n,t_{n+1}\geqq 0,\quad t_1+t_2+\cdots+t_n+t_{n+1}=1$$

としたとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\frac{t_1\boldsymbol{x}_1+t_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{x}_n}{t_1+t_2+\cdots+t_n}\cdot(t_1+t_2+\cdots+t_n)+t_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}\\&=T_n\boldsymbol{X}_n+t_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}\end{aligned}$$

と変形できる．ただし $T_n=t_1+t_2+\cdots+t_n$ とおいた．

さて

$$\frac{\boldsymbol{X}_n}{T_n}=\frac{t_1\boldsymbol{x}_1}{T_n}+\frac{t_2\boldsymbol{x}_2}{T_n}+\cdots+\frac{t_n\boldsymbol{x}_n}{T_n}$$

であることと

$$\begin{aligned}\frac{t_1}{T_n}+\frac{t_2}{T_n}+\cdots+\frac{t_n}{T_n}&=\frac{T_n}{T_n}\\&=1\end{aligned}$$

であることにより，

$$\frac{\boldsymbol{X}_n}{T_n}$$

は，多面体 $\{\mathrm{P}_n\}$ の内部の点であり．

$$T_n\cdot\frac{\boldsymbol{X}_n}{T_n}+t_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}$$

は多面体 $\{\mathrm{P}_n\}$ の内部の点と P_{n+1} を結ぶ線分上の点である．

よって，$k=n$ のときも問題の主張が成り立つ．

以上の考察により証明された． □

p29-30:2

証明. 2 点 P_1，P_2 を通る直線の方程式を $ax+by+1=0$（ただし $(a,b)=0$）とおく．このとき，

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \end{cases}$$

が成立する．すなわちこれは

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

をみたす．これを a，b，c についての連立方程式とみたとき，与条件により自明でない解があり，

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成立する．転置行列の行列式はもとの行列の行列式に等しいので，行列式の交代性なども用いて，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

を得る．これが証明すべきことであった． □

p29-30:3

点を以下の順で移動させる変換を考える．

(1) 原点中心に $-\theta$ 回転させる．
(2) x 軸に関して対称移動させる．
(3) 原点中心に θ 回転させる．

ここで，(1) から (3) までの変換を表す行列をそれぞれ $R_{-\theta}$，A_x，R_θ とすると．

$$\begin{aligned} R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \\ A_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

となる．よって，この変換を表す行列は

$$\begin{aligned} R_\theta A_x R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．

p29-30:4

証明. 以下では，直線 $y = \tan\theta$ に関する折り返しを T_θ とかくことにする．

さて，直線 $y = \tan(\theta/4)x$ に関する折り返しは，

$$T_{\theta/4} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

で表される．

また，直線 $y = \tan(-\theta/4)x$ に関する折り返しは．

$$T_{-\theta/4} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

で表される．

ここで，

$$\begin{aligned} T_{\theta/4}T_{-\theta/4} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり，これは原点のまわりに θ 回転する行列を表す．

以上の考察により証明された． □

p29-30：5

任意の点 $\mathrm{P}(\boldsymbol{p})$，$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ を平面 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ に対して折り返すことを考える．

点 P から $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ におろした垂線の足は，$t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{p} + t\frac{\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

と表せ，これが平面 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ 上にあるので，

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{a}, p + t\frac{\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}) = 0 \\ \therefore\ & t = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}) \end{aligned}$$

である．

また，求める点を $\mathrm{P}'(\boldsymbol{p}')$ とすると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{p} + t\frac{2\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \\ &= \boldsymbol{p} - \frac{2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

であるから，これはたしかに V^3 の線型変換を引き起こし，その変換公式は

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - \frac{2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$$

である，

p29-30:7-(1)

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積は，

$$|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$$

で与えられる．

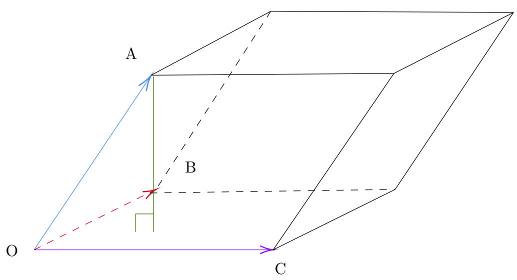
一方，この平行六面体の O，B，C を含む面の面積は，

$$\|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\|$$

で与えられる．

以上の考察により，求める長さは，

$$\frac{|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|}{\|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\|}$$



である．

p29-30：8

証明.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & {c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．

一方，

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= c_1(a_2b_3 - b_2a_3) + c_2(a_3b_1 - b_3a_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\
&= a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

であるから，これと行列式の積の性質により，

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2$$

である． □

p29-30:9

$\det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ は，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ の張る平行六面体の体積に符号をつけたものに等しい．与条件より，$\det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が最大になるのは，$\boldsymbol{x}$．$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ の張る図形が立方体のときであり，そのとき

$$\det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 1$$

である．これからただちに $\det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ の最小値が -1 であることも従う．

以上により，$\det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ の最大値は 1，最小値は -1 である．

p29-30：10

イ 証明. 単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ を適当にとり，

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{b} = \beta_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{c} = \gamma_1\boldsymbol{e}_1 + \gamma_2\boldsymbol{e}_2 + \gamma_3\boldsymbol{e}_3$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= \alpha_1\beta_2\boldsymbol{e}_3 \times (\gamma_1\boldsymbol{e}_1 + \gamma_2\boldsymbol{e}_2 + \gamma_3\boldsymbol{e}_3)\\ &= \alpha_1\beta_2\gamma_1\boldsymbol{e}_2 - \alpha_1\beta_2\gamma_2\boldsymbol{e}_1\\ &= -(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

であり，これが証明すべきことであった[†1]．

ロ イ) の結果により．

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= -(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b},\\ (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a} &= -(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\boldsymbol{c},\\ (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} &= -(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

であるから，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

となる．これが証明すべきことであった． □

[†1] この等式をラグランジュの恒等式とよぶ．

第 2 章

p34：問 1

証明. 後半二つの主張は明らか．また，二つ目の主張は一つ目の主張と同様にして示すことができるので，一つ目のみ示すことにする．

$A = (a_{pq})$ を $k \times l$ 行列，$B = (b_{qr})$，$C = (c_{qr})$ を $l \times m$ 行列とする．示したい式の両辺がともに定義され，ともに $k \times m$ 行列であることはよい．行列 $B + C$ の (q, r) 成分は $b_{qr} + c_{qr}$ であるから，左辺の (p, r) 成分は，

$$\sum_{q=1}^{l} a_{pq}\left(b_{qr} + c_{qr}\right) = \sum_{q=1}^{l} a_{pq}b_{qr} + \sum_{q=1}^{l} a_{pq}c_{qr}$$

とかける．この等号の右辺は AB の (p, r) 成分と AC の (p, r) 成分の和である．これより，主張が示された． □

p40：問

イ

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & B_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ O & A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．

p41：問 1

(1)　$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ とする．このとき，

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11}+2x_{21} & x_{12}+2x_{22} \\ 2x_{11}+4x_{21} & 2x_{12}+4x_{22} \end{pmatrix}$$

となり，これが E_2 と等しくなるためには

$$\begin{cases} x_{11}+2x_{21}=1 \\ x_{12}+2x_{22}=0 \\ 2x_{11}+4x_{21}=0 \\ 2x_{12}+4x_{22}=1 \end{cases}$$

となることが必要かつ十分であるが，これを満たす $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{C}$ は存在しない．よって前半の主張が示された．

後半について示す．$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$ とする．このとき，

$$YA = \begin{pmatrix} y_{11}+2y_{12} & 2y_{11}+4y_{12} \\ y_{21}+2y_{22} & 2y_{21}+4y_{22} \end{pmatrix}$$

となり，これが E_2 と等しくなるためには

$$\begin{cases} y_{11}+2y_{12}=1 \\ 2y_{11}+4y_{12}=0 \\ y_{21}+2y_{22}=0 \\ 2y_{21}+4y_{22}=1 \end{cases}$$

となることが必要かつ十分であるが，これを満たす $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} \in \mathbb{C}$ は存在しない．よって後半の主張も示された．　□

(2)　X, Y を (1) で定義したものとする．このとき，

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11}+2x_{21} & x_{12}+2x_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，これが B と等しくならないことは明らか．

後半について，

$$YA = \begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} \\ x_{21} & 2x_{21} \end{pmatrix}$$

となり，これが B と等しくなるためには $x_{11}=1$，$x_{21}=2$ となることが必要かつ十分であるが，x_{12}，x_{22} については任意の複素数である．以上の議論により，このような Y は無限に存在する．　□

(3)　A の第 k 列の成分が全て 0 であるとする．ただしここで $1 \le k \le n$, $k \in \mathbb{N}$ であるとする．$XA = E$ をみたす X が存在すると仮定する．このとき，X は明らかに $n \times n$ 行列であり，積 XA は定義される．いま $X = (x_{jk})$，$A = (a_{kj})$，$1 \le j, k \le n$ と表す．このとき，

$$(XA \text{ の } (j,j) \text{ 成分}) = \sum_{k=1}^{n} x_{jk} a_{kj} = 0$$

となり，これは $XA = E$ に矛盾する．よってこのような X は存在しないことが示された．　□

p42：問 1

(1) まず，

$$\overline{A}\,\overline{A^{-1}} = \overline{AA^{-1}} = E, \quad \overline{A^{-1}}\,\overline{A} = \overline{A^{-1}A} = E$$

より，$\overline{A}$ は正則で，逆行列は $\overline{A^{-1}}$ である．さらに，

$${}^tA{}^tA^{-1} = {}^t(A^{-1}A) = E, \quad {}^tA^{-1}{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = E$$

であるから，${}^tA$ は正則であり，逆行列は ${}^tA^{-1}$ である．

(2)

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' \coloneqq \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$AA' = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

である．$AA' = E$ となる条件は，x，y，z，w についてのふたつの連立方程式

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ay+bw=0 \\ cy+dw=1 \end{cases}$$

が解を持つことで，その条件は $ad-bc \neq 0$ である．そのときの解は，

$$(x,y,z,w) = (\frac{d}{ad-bc}, -\frac{b}{ad-bc}, -\frac{c}{ad-bc}, \frac{a}{ad-bc})$$

である．これを用いて $A'A$ を計算すると，$A'A = E$ となり．たしかに A' は A の逆行列である．以上の議論により，$ad-bc \neq 0$ となることが必要十分条件である．

(3) 計算する．

イ (2) の結果により，

$$\frac{1}{3\cdot 3 - 2\cdot 4}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

が求める逆行列である．

ロ まず，

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

としたときに

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11}+x_{12} & -x_{11}+3x_{12}+x_{13} \\ x_{21} & 2x_{21}+x_{22} & -x_{21}+3x_{22}+x_{23} \\ x_{31} & 2x_{31}+x_{32} & -x_{31}+3x_{32}+x_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，これに関して

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11}+x_{12} & -x_{11}+3x_{12}+x_{13} \\ x_{21} & 2x_{21}+x_{22} & -x_{21}+3x_{22}+x_{23} \\ x_{31} & 2x_{31}+x_{32} & -x_{31}+3x_{32}+x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となれば，行列 X が求める逆行列である．

計算すると

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，これが求める逆行列であった．

ハ まず，

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

としたとき，

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ x_{34} & x_{33} & x_{32} & x_{31} \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & x_{41} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，これに関して

$$\begin{pmatrix} x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ x_{34} & x_{33} & x_{32} & x_{31} \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & x_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となれば，行列 X が求める逆行列である．

計算すると，

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり．これが求める逆行列であった．

p52：問

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行の } (-2) \text{ 倍，第 1 行の 2 倍をそれぞれ第 2 行，第 3 行に加える}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を交換する}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行の } (-3) \text{ 倍を第 1 行に加え，第 3 行の } (-4) \text{ 倍を第 1 行に加える}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行の 2 倍を第 2 行に加え，第 3 行を } (-1) \text{ 倍する}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

よって，求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

p62：問 1

証明. 定義に従って計算すると，

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \\ &= 2((\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})) \\ &= 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2) \end{aligned}$$

となり，これが証明すべきことであった． □

p62：問 2

証明.

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$$

である．ここで，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が直交することから，

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} = 0$$

であり，これを用いると

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$$

となる．$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ がともに実ベクトルのときは $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ であるから確かに逆が成り立つが，たとえば $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix}$ とすれば，等式は成り立つが $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交しないため，逆は成り立たない． □

第 2 章・章末問題

p70：1-イ）

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
3 & 3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を交換する}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(1,1)\text{ をかなめとして左から第 1 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 4 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{第 3 行を }(-1)\text{ 倍して第 2 行と交換し，}(2,2)\text{ をかなめとして左から第 2 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -1 & -3 & 0 & -3 & 2 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 2 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(3,3)\text{ をかなめとして左から第 3 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -6 & 5 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{第 4 行を }(-1)\text{ 倍して，}(4,4)\text{ をかなめとして第 4 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 18 & -16 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -5 & -1
\end{array}\right)
$$

よって，求める逆行列は，

$$
\begin{pmatrix}
4 & 18 & -16 & -3 \\
0 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 3 & -3 & 0 \\
1 & 6 & -5 & -1
\end{pmatrix}
$$

である．

p70：1-ロ)

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow{(1,1)\text{ をかなめとして第 1 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow{(2,2)\text{ をかなめとして第 2 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -2 & 1 & -5 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow{(3,3)\text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 1 & -13 & -4 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow{(3,3)\text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

よって，求める逆行列は

$$
\begin{pmatrix}
-3 & -1 & 1 & -1 \\
-3 & -1 & 0 & 1 \\
-4 & -1 & 1 & 0 \\
-10 & -3 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

である.

p71：3-イ）

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{第 1 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{第 2 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{第 3 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1
\end{array}\right)
$$

である．ゆえに

$$
P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

である．だから

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

p71：7

証明. $X=(x_{ij})$, $Y=(y_{ij})$ とする．ここで，XY の (i,i) 成分は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ji}$ であるから，

$$\mathrm{tr}(XY)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ji}\right)$$

となる．YX については，同様の議論により，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(YX)&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_{ji}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ji}y_{ij}\right)\end{aligned}$$

である．ここで，i と j をおきかえれば，

$$\mathrm{tr}(YX)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}y_{ji}\right) \tag{1}$$

となる．これより，

$$\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX) \tag{2}$$

を得て，これとトレースの線型性により $\mathrm{tr}(XY-YX)=0$ であるが，$\mathrm{tr}(E_n)=n\neq 0$ であるため，これは矛盾である．

ゆえに，$XY-YX=E_n$ となる n 次行列 X, Y は存在しないことが示された． □

附録 III

p249：問

イ 証明. 体 K の単位元について，$0 = 0 + 0$ であるから，

$$\begin{aligned}&a0 = a(0+0) = a0 + a0\\ &\therefore\ a0 = a0 + a0\end{aligned}$$

K は加法について可換群であるから，$a0$ の逆元 $-a0$ が K に存在する．これを用いると，

$$\begin{aligned}&a0 + (-a0) = a0 + a0 + (-a0)\\ &\therefore\ 0 = a0 + a0 + (-a0)\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}a0 + a0 + (-a0) &= a0 + \{a0 + (-a0)\}\\ &= a0 + 0\\ &= a0\end{aligned}$$

となるから，$0 = a0$ である．$0 = 0a$ についても同様． □

ロ 証明. $a \neq 0$ とする．このとき，a の逆元 $a^{-1} \in K$ が存在し，$ab = 0$ の両辺に a^{-1} をかけると，

$$\begin{aligned}&a^{-1}(ab) = a^{-1}0\\ &(a^{-1}a)b = 0\\ &1b = 0\\ &\therefore\ b = 0\end{aligned}$$

である．これと $b \neq 0$ を仮定したときの同様の考察により，$ab = 0$ のとき，$a = 0$ または $b = 0$ である． □

参考文献

[1] 齋藤正彦『線型代数入門』，東京大学出版会，1966