齋藤正彦『線型代数入門』解答集

数学書解答集作成班

2025 年 1 月 16 日

目次

はじめに

概要

この文書は，なまちゃんが運営する「数学書解答集作成班」が制作した，齋藤正彦著『線型代数入門』（東京大学出版会）の解答集である．

未完ではあるものの，編集の際の利便性を考慮して，オープンソースでの公開となった．それゆえ，数学的な誤りや誤植，改善案の提案などがあればぜひ Issue に書き込んだり，Pull Request を送っていただきたい[†1]．

Special Thanks

掲載許可を得た方のみ[†2]を敬称略で掲載する．

- ねたんほ（解答の提供）
- まっちゃん（解答の提供）
- かねこ（解答の提供）
- qwer（解答の提供）
- やたろう（解答の提供，Git 管理）
- 不自然対数（LaTeX 関連）

その他，多くの方々．

[†1] 永遠の工事中
[†2] 掲載されていないという方は「ニックネーム」を記入のもと，なまちゃんへ連絡していただきたい．

第 1 章

p5：問 1

証明.

線分 PQ の中点を M とする．このとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}} \\ &= \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{2} \\ &= \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}\end{aligned}$$

である． □

p5：問 2

証明.

三角形 PQR の重心を G，PQ の中点を N とする．G は線分 RN を 2:1 に内分する点なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{RN}} \\ &= \boldsymbol{c} + \frac{2}{3}\left(\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2} - \boldsymbol{c}\right) \\ &= \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}}{3}\end{aligned}$$

である． □

p7：問-(上)

求めるベクトルを，$\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ (ただし $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) とおく．このとき，内積の定義により，

$$\boldsymbol{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x + y + z = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$
$$\boldsymbol{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = x + y + 4z = 1 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 3$$

これらの式から，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \pm \sqrt{2})/4 \\ (2 \mp \sqrt{2})/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

である．

p7：問-(下)

[1.4] の結果を利用する．

求める三角形の面積を S とし．

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

とおく，このとき，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left\|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}}\right\|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}, \overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2} \\ &= \frac{1}{2}\{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2][(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2] \\ &\qquad - [(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)]^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である．

p8：問 1

p8：問 1-(イ)

与えられた直線を l とする．l の方程式に $x=-1$ を代入すると，$y=2$ となるため，l は点 $(-1,2)$ を通る．また，l は点 $(2,0)$ を通るため，l の方向ベクトルのひとつは，

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である．よって，l のベクトル表示のひとつは，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(-\infty < t < \infty)$ である．

p8：問 1-(ロ)

与えられた直線を l' とする．l' の方向ベクトルのひとつは，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．また，l' は点 $(3,0)$ を通るので，そのベクトル表示のひとつは，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(-\infty < t < \infty)$ となる．

p8：問 2

p8：問 2-(イ)

与えられたベクトル表示から．

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-1}{2} \\ t = y+1 \end{cases}$$

である．これから t を消去すると，

$$\frac{x-1}{2} = y+1$$
$$\therefore\ x-2y-3=0$$

である．

p8：問 2-(ロ)

点 $(-1,-2)$ を通り，x 軸に平行な直線を表すから，$y=-2$ が求める直線の方程式である．

p10：問 1

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}$$

から，

$$\begin{aligned} &-2x+2z=2 \\ &\therefore \quad -x+z=1 \end{aligned}$$

である．このとき，$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ はこれを満たす．このときの y の値を計算すると，それぞれ $-3, -5$ なので，結局，与えられた直線は 2 点 $(1,-3,2), (2,-5,3)$ を通る．すなわち，この直線の方向ベクトルのひとつは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．したがって求めるベクトル表示のひとつは，直線上の任意の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せる．

p10：問 2

証明.

t を $0 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 上の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + t\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \\ &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= (1-t)\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

である．$1-t=t_1,\ t=t_2$ と改めておくと，t の定め方から $t_1 \geqq 0,\ t_2 \geqq 0$ であり，

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{x}_1 + t_2\boldsymbol{x}_2, \quad t_1+t_2=1$$

となり，これが証明すべきことであった． □

p11：問 1

与えられた平面を (S) とおく．(S) は 3 点 $(-1,0,1)$, $(2,0,-1)$, $(0,-1,0)$ を通るので，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と改めておくと，

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり，$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1$ は線型独立なので，求めるベクトル表示のひとつは，

$$(S)\colon \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (-\infty < t,\ s < \infty)$$

p12：問 2

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 - t - 2s \\ z = 0 + 2t + s \end{cases}$$

から t と s を消去して，

$$x - y - z = -1$$

これが求める直線の方程式である．

p12：問 3

証明．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \boldsymbol{x}_1, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = \boldsymbol{x}_2, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_3} = \boldsymbol{x}_3$$

とする．このとき，三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ 上の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$，s,t を $0 \leqq s,t \leqq 1$ を満たす実数とすると，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + s(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + t(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1) \\ &\therefore \quad \boldsymbol{x} = (1-s-t)\boldsymbol{x}_1 + s\boldsymbol{x}_2 + t\boldsymbol{x}_3 \end{aligned}$$

となり，$1-s-t = t_1$, $s = t_2$, $t = t_3$ と改めて書き直すと，s,t の定め方より，$0 \leqq t_1, t_2, t_3 \leqq 1$ であり

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{x}_1 + t_2\boldsymbol{x}_2 + t_3\boldsymbol{x}_3, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

となる．これが証明すべきことであった．　□

p13：問 1

(S_1)，(S_2) の法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．ゆえに，交角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2})$ とすると，

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_1\|\|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ である．

p13：問 2

証明.

平面 π_1，π_2 を考え，π_1，π_2 の法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ とおく．

$\boldsymbol{n}_1$ と $\boldsymbol{n}_2$ が平行なとき

π_1 に垂直な平面は π_2 にも垂直であり，このような平面を π_3 とすると，π_3 は $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ と平行である．よって π_3 と π_1，π_2 はそれぞれ並行であり，このような平面は確かに存在する．

$\boldsymbol{n}_1$ と $\boldsymbol{n}_2$ が平行でないとき

$\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \neq \boldsymbol{0}$ は明らかなので，$\boldsymbol{n}_3 \coloneqq \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ とすると，$\boldsymbol{n}_3 \neq \boldsymbol{0}$ である．よって，$\boldsymbol{n}_3$ は π_1，π_2 に垂直である．このとき n_3 を法線ベクトルとする平面を取ればよい．

以上の考察により証明された． □

p18：問

証明.

A，B，C が 2×2 行列の場合を証明する．

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}i & j\\ k & l\end{pmatrix}$$

とし，A，B，C の成分はすべて複素数であるとする．このとき，

$$\begin{aligned}(AB)C&=\begin{pmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & j\\ k & l\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}aei+bgi+afk+bhk & aej+bgj+afl+bhl\\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgj+cfl+dhl\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．他方

$$\begin{aligned}A(BC)&=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ei+fk & ej+fl\\ gi+hk & gj+hl\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}aei+afk+bgi+bhk & aej+afl+bgj+bhl\\ cei+cfk+dgi+dhk & cej+cfl+dgi+dhl\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，たしかに $(AB)C=A(BC)$ である． □

p19：問 1-(上)

証明.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

となり，これは明らかに線型変換である．対応する行列は，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．□

p19：問 2-(上)

証明.

式 (15) より，2×2 行列 A，B とベクトル $\boldsymbol{x}$ について，

$$\begin{aligned} T_B(T_A(\boldsymbol{x})) &= B(A\boldsymbol{x}) \\ &= (BA)\boldsymbol{x} \\ &= T_{BA}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

である．これが証明すべきことであった．□

p19：問 1-(下)

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと，(17) 式より，

$$\begin{aligned} T\boldsymbol{x} &= \frac{ax+by}{a^2+b^2}\boldsymbol{a} \\ &= \begin{pmatrix} a^2x + aby \\ abx + b^2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

であるから，

$$T = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

となる．

p19：問 2-(下)

p19：問 2-(下)-(イ)

証明.
$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}T\boldsymbol{x}&=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\\&=\frac{a_1x+a_2y}{{a_1}^2+{a_2}^2}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{{a_1}^2+{a_2}^2}\begin{pmatrix}{a_1}^2&a_1a_2\\a_1a_2&{a_2}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．つまり，$T=\dfrac{1}{{a_1}^2+{a_2}^2}\begin{pmatrix}{a_1}^2&a_1a_2\\a_1a_2&{a_2}^2\end{pmatrix}$ である．このとき，

$$\begin{aligned}T^2&=\frac{1}{({a_1}^2+{a_2}^2)^2}\begin{pmatrix}{a_1}^4+{a_1}^2{a_2}^2&{a_1}^3a_2+a_1{a_2}^3\\{a_1}^3a_2+a_1{a_2}^3&{a_2}^4+{a_1}^2{a_2}^2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{{a_1}^2+{a_2}^2}\begin{pmatrix}{a_1}^2&a_1a_2\\a_1a_2&{a_2}^2\end{pmatrix}=T\end{aligned}$$

となり，$T^2=T$ である．$S^2=S$ も同様にして示される． □

p19：問 2-(下)-(ロ)

証明.
$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とする．このとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交することから，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\\&\therefore\ a_1b_1+a_2b_2=0\end{aligned}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}TS&=\frac{1}{({a_1}^2+{a_2}^2)}\begin{pmatrix}{a_1}^2&a_1a_2\\a_1a_2&{a_2}^2\end{pmatrix}\frac{1}{({b_1}^2+{b_2}^2)}\begin{pmatrix}{b_1}^2&b_1b_2\\b_1b_2&{b_2}^2\end{pmatrix}\\&=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)}\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2\\a_2b_1&a_2b_2\end{pmatrix}=O\\&\qquad(\because\ a_1b_1+a_2b_2=0)\end{aligned}$$

である．同様に ST を計算すると，$ST=O$ であることもわかり，これで $TS=ST=O$ が証明された． □

p19：問 2-(下)-(ハ)

証明.

イ)，ロ) の文字や結論を用いると，

$$
\begin{aligned}
T\boldsymbol{x}+S\boldsymbol{x} &= \frac{1}{{a_1}^2+{a_2}^2}\begin{pmatrix} {a_1}^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & {a_2}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{{b_1}^2+{b_2}^2}\begin{pmatrix} {b_1}^2 & b_1b_2 \\ b_1b_2 & {b_2}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)}\begin{pmatrix} ({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2) & ({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2) \\ ({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2) & ({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

となる．これが証明すべきことであった． □

p22：問 1

p22：問 1-(イ)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

となり，これは y 軸に関する対象点に移す変換を表す．

p22：問 1-(ロ)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{pmatrix}$$

となり，これは x 軸まわりに角 α だけ回転する変換を表す．

p22：問 1-(ハ)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

第 1 章・章末問題

p29–30:1

証明.

四面体 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ を考える．三角形 $\mathrm{P_2P_3P_4}$ の任意の周および内部の点を T とする．$0 \leqq k \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$ をみたす $k, s \in \mathbb{R}$ によって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{P_2T}} &= k\{s\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}\} \\ &= ks(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) + k(1-s)(\boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_2) \\ &= -k\boldsymbol{x}_2 + ks\boldsymbol{x}_3 + k(1-s)\boldsymbol{x}_4 \end{aligned}$$

と表される．

さて，線分 $\mathrm{P_1T}$ 上の任意の点を Q とすると，$0 \leqq t \leqq 1$ をみたす $t \in \mathbb{R}$ によって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{P_1Q}} &= t\overrightarrow{\mathrm{P_1T}} \\ &= t\overrightarrow{\mathrm{P_2T}} - t\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}} \\ &= t(-k\boldsymbol{x}_2 + ks\boldsymbol{x}_3 + k(1-s)\boldsymbol{x}_4) - t(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \\ &= -t\boldsymbol{x}_1 + (t-kt)\boldsymbol{x}_2 + kst\boldsymbol{x}_3 + kt(1-s)\boldsymbol{x}_4 \end{aligned}$$

と表されるから，$k = 4$ のときの求める位置ベクトルは．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + \overrightarrow{\mathrm{P_1Q}} \\ &= (1-t)\boldsymbol{x}_1 + (t-kt)\boldsymbol{x}_2 + kst\boldsymbol{x}_3 + kt(1-s)\boldsymbol{x}_4 \end{aligned}$$

となり，

$$(1-t)+(t-kt)+kst+kt(1-s)=1$$

であるから，$1-t=t_1$，$t-kt=t_2$，$kst=t_3$，$kt(1-s)=t_4$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}=t_1\boldsymbol{x}_1+t_2\boldsymbol{x}_2+t_3\boldsymbol{x}_3+t_4\boldsymbol{x}_4,\quad t_1,t_2,t_3,t_4\geqq 0,\quad t_1+t_2+t_3+t_4=1$$

となり，ここまでで $k=4$ の場合が示された．

ここで，$n\geqq 4$ として $k=n$ のときに主張が成り立つと仮定する．このとき，

$$t_1\boldsymbol{x}_1+t_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{x}_n$$

は仮定により多面体 $\{\mathrm{P}_n\}$ の内部の点であり，これを簡単のために $\boldsymbol{X}_n$ とおく．

さて，$\{\mathrm{P}_n\}$ の点と P_{n+1} とを結ぶ線分上の点は，$0\leqq l\leqq 1$ をみたす $l\in\mathbb{R}$ によって，

$$l\overbrace{(t_1\boldsymbol{x}_1+t_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{x}_n)}^{\boldsymbol{x}_n}+(1-l)\boldsymbol{x}_{n+1},\quad t_1+t_2+\cdots+t_n=1$$

とかける．ここで，

$$l(t_1+t_2+\cdots+t_n)+(1-l)=1$$

なので，$\{\mathrm{P}_n\}$ の点と P_{n+1} とを結ぶ線分上の点はこのように表せる．

逆に，

$$\boldsymbol{x}=t_1\boldsymbol{x}_1+t_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{x}_n+t_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1},\quad t_1,t_2,\ldots,t_n,t_{n+1}\geqq 0,\quad t_1+t_2+\cdots+t_n+t_{n+1}=1$$

としたとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\frac{t_1\boldsymbol{x}_1+t_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{x}_n}{t_1+t_2+\cdots+t_n}\cdot(t_1+t_2+\cdots+t_n)+t_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}\\&=T_n\boldsymbol{X}_n+t_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}\end{aligned}$$

と変形できる．ただし $T_n=t_1+t_2+\cdots+t_n$ とおいた．

さて

$$\frac{\boldsymbol{X}_n}{T_n}=\frac{t_1\boldsymbol{x}_1}{T_n}+\frac{t_2\boldsymbol{x}_2}{T_n}+\cdots+\frac{t_n\boldsymbol{x}_n}{T_n}$$

であることと

$$\begin{aligned}\frac{t_1}{T_n}+\frac{t_2}{T_n}+\cdots+\frac{t_n}{T_n}&=\frac{T_n}{T_n}\\&=1\end{aligned}$$

であることにより，

$$\frac{\boldsymbol{X}_n}{T_n}$$

は，多面体 $\{\mathrm{P}_n\}$ の内部の点であり．

$$T_n\cdot\frac{\boldsymbol{X}_n}{T_n}+t_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}$$

は多面体 $\{\mathrm{P}_n\}$ の内部の点と P_{n+1} を結ぶ線分上の点である．

よって，$k=n$ のときも問題の主張が成り立つ．

以上の考察により証明された．□

p29–30:2

証明.

2 点 P_1，P_2 を通る直線の方程式を $ax+by+c=0$（ただし $(a,b)=0$）とおく．このとき，

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \end{cases}$$

が成立する．すなわちこれは

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

をみたす．これを a，b，c についての連立方程式とみたとき，与条件により自明でない解があり，

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成立する．転置行列の行列式はもとの行列の行列式に等しいので，行列式の交代性なども用いて，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

を得る．これが証明すべきことであった． □

p29–30:3

点を以下の順で移動させる変換を考える．

(1) 原点中心に $-\theta$ 回転させる．

(2) x 軸に関して対称移動させる．

(3) 原点中心に θ 回転させる．

ここで，(1) から (3) までの変換を表す行列をそれぞれ $R_{-\theta}$，A_x，R_θ とすると．

$$\begin{aligned} R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \\ A_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

となる．よって，この変換を表す行列は

$$\begin{aligned} R_\theta A_x R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．

p29–30:4

証明.

以下では，直線 $y = \tan\theta$ に関する折り返しを T_θ とかくことにする．

さて，直線 $y = \tan(\theta/4)x$ に関する折り返しは，

$$T_{\theta/4} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

で表される．

また，直線 $y = \tan(-\theta/4)x$ に関する折り返しは．

$$T_{-\theta/4} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

で表される．

ここで，

$$\begin{aligned} T_{\theta/4}T_{-\theta/4} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり，これは原点のまわりに θ 回転する行列を表す．

以上の考察により証明された． □

p29–30：5

任意の点 $\mathrm{P}(\boldsymbol{p})$，$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ を平面 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ に対して折り返すことを考える．

点 P から $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ におろした垂線の足は，$t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{p} + t\frac{\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

と表せ，これが平面 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ 上にあるので，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}, p + t\frac{\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}) = 0\\ &\therefore t = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p})\end{aligned}$$

である．

また，求める点を $\mathrm{P}'(\boldsymbol{p}')$ とすると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{p} + t\frac{2\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\\ &= \boldsymbol{p} - \frac{2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

であるから，これはたしかに V^3 の線型変換を引き起こし，その変換公式は

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - \frac{2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$$

である，

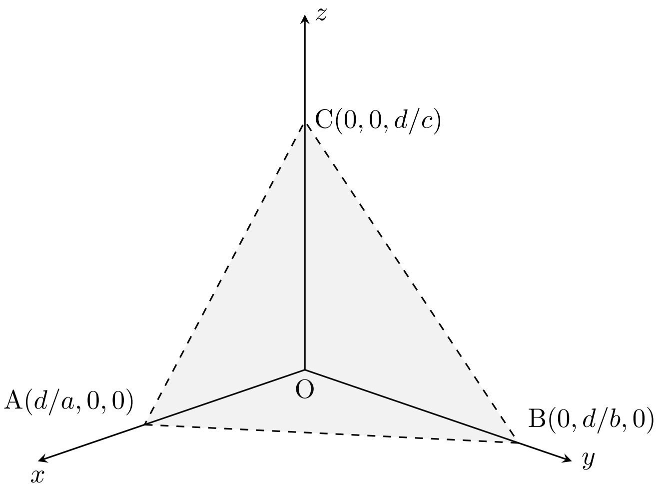
p29–30：6

p29–30：6-(イ)

(S) と x 軸，y 軸，z 軸の交点をそれぞれ A，B，C とする．このとき，A，B，C の座標は図のようになり，この三角錐の体積を V とすると，

$$\begin{aligned} V =& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\right| \\ =& \frac{1}{6}\cdot\frac{|d|^3}{|abc|} = \frac{|d|^3}{6|abc|} \end{aligned}$$

である．ここで，$\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\right|$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の張る平行六面体の体積を表すことを用いた．



p29–30：6-(ロ)

三角形 ABC の体積を T，O から平面 ABC におろした垂線の足を H とすると，

$$V = \frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right\|\cdot T$$

である．ここで，

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right\| = \frac{|a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

なので，イ) の結果から $V = \dfrac{|d|^3}{6|abc|}$ なのを加味すると，

$$T = \frac{d^2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2|abc|}$$

である．

p29–30：7

p29–30:7-(イ)

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積は，

$$|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$$

で与えられる．

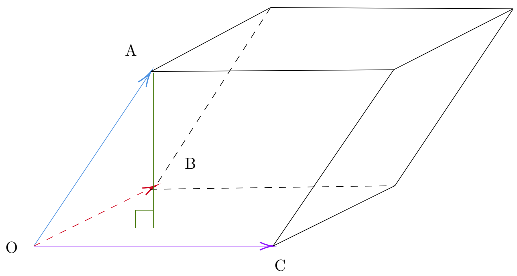
一方，この平行六面体の O，B，C を含む面の面積は，

$$\|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\|$$

で与えられる．

以上の考察により，求める長さは，

$$\frac{|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|}{\|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\|}$$



である．

p29–30:7-(ロ)

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の外積は，

$$\|(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})\|.$$

これを $\left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\|$ で割ればよく，求める長さは

$$\frac{\|(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})\|}{\|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}\|}.$$

p29–30：8

証明.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2&a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3&a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\\b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3&{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2&b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3\\c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3&c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3&{c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\\(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})&(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})&(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\\(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})&(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})&(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．

一方，

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})&=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\\&=c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\\&=c_1(a_2b_3-b_2a_3)+c_2(a_3b_1-b_3a_1)+c_3(a_1b_2-b_1a_2)\\&=a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-b_1a_2)\\&=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

であるから，これと行列式の積の性質により，

$$\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\\(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})&(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})&(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\\(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})&(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})&(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\end{vmatrix}=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2$$

である． □

p29–30:9

$\det(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ は，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ の張る平行六面体の体積に符号をつけたものに等しい．与条件より，$\det(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が最大になるのは，$\boldsymbol{x}$．$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ の張る図形が立方体のときであり，そのとき

$$\det(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=1$$

である．これからただちに $\det(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ の最小値が -1 であることも従う．

以上により，$\det(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ の最大値は 1，最小値は -1 である．

p29–30：10

p29–30：10-(イ)

証明.
単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ を適当にとり，

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{b} = \beta_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{c} = \gamma_1\boldsymbol{e}_1 + \gamma_2\boldsymbol{e}_2 + \gamma_3\boldsymbol{e}_3$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= \alpha_1\beta_2\boldsymbol{e}_3 \times (\gamma_1\boldsymbol{e}_1 + \gamma_2\boldsymbol{e}_2 + \gamma_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= \alpha_1\beta_2\gamma_1\boldsymbol{e}_2 - \alpha_1\beta_2\gamma_2\boldsymbol{e}_1 \\ &= -(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

であり，これが証明すべきことであった[†1]． □

[†1] この等式をラグランジュの恒等式とよぶ．

p29–30：10-(ロ)

証明.
イ) の結果により．

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= -(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}, \\ (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a} &= -(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}, \\ (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} &= -(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

であるから，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

となる．これが証明すべきことであった． □

第 2 章

p34：問 1

証明.

後半二つの主張は明らか．また，二つ目の主張は一つ目の主張と同様にして示すことができるので，一つ目のみ示すことにする．

$A=(a_{pq})$ を $k\times l$ 行列，$B=(b_{qr})$，$C=(c_{qr})$ を $l\times m$ 行列とする．示したい式の両辺がともに定義され，ともに $k\times m$ 行列であることはよい．行列 $B+C$ の (q,r) 成分は $b_{qr}+c_{qr}$ であるから，左辺の (p,r) 成分は，

$$\sum_{q=1}^{l} a_{pq}\left(b_{qr}+c_{qr}\right)=\sum_{q=1}^{l} a_{pq}b_{qr}+\sum_{q=1}^{l} a_{pq}c_{qr}$$

とかける．この等号の右辺は AB の (p,r) 成分と AC の (p,r) 成分の和である．これより，主張が示された． □

p40：問

p40：問-(イ)

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-2\end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix}-2&3\\1&1\end{pmatrix},\quad B_{11}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix},\quad B_{22}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-3\end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&O\\O&B_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}&O\\O&A_{22}B_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&4&-11\\0&0&3&-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．

p41：問 1

(1) $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ とする．このとき，

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11}+2x_{21} & x_{12}+2x_{22} \\ 2x_{11}+4x_{21} & 2x_{12}+4x_{22} \end{pmatrix}$$

となり，これが E_2 と等しくなるためには

$$\begin{cases} x_{11}+2x_{21}=1 \\ x_{12}+2x_{22}=0 \\ 2x_{11}+4x_{21}=0 \\ 2x_{12}+4x_{22}=1 \end{cases}$$

となることが必要かつ十分であるが，これを満たす $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{C}$ は存在しない．よって前半の主張が示された．

後半について示す．$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$ とする．このとき，

$$YA = \begin{pmatrix} y_{11}+2y_{12} & 2y_{11}+4y_{12} \\ y_{21}+2y_{22} & 2y_{21}+4y_{22} \end{pmatrix}$$

となり，これが E_2 と等しくなるためには

$$\begin{cases} y_{11}+2y_{12}=1 \\ 2y_{11}+4y_{12}=0 \\ y_{21}+2y_{22}=0 \\ 2y_{21}+4y_{22}=1 \end{cases}$$

となることが必要かつ十分であるが，これを満たす $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} \in \mathbb{C}$ は存在しない．よって後半の主張も示された． □

(2) X, Y を (1) で定義したものとする．このとき，

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11}+2x_{21} & x_{12}+2x_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，これが B と等しくならないことは明らか．

後半について，

$$YA = \begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} \\ x_{21} & 2x_{21} \end{pmatrix}$$

となり，これが B と等しくなるためには $x_{11}=1$，$x_{21}=2$ となることが必要かつ十分であるが，x_{12}，x_{22} については任意の複素数である．以上の議論により，このような Y は無限に存在する． □

(3) A の第 k 列の成分が全て 0 であるとする．ただしここで $1 \leqq k \leqq n$，$k \in \mathbb{N}$ であるとする．$XA = E$ をみたす X が存在すると仮定する．このとき，X は明らかに $n \times n$ 行列であり，積 XA は定義される．いま $X = (x_{jk})$，$A = (a_{kj})$，$1 \leqq j, k \leqq n$ と表す．このとき，

$$(XA\text{の}(j,j)\text{成分}) = \sum_{k=1}^{n} x_{jk}a_{kj} = 0$$

となり，これは $XA = E$ に矛盾する．よってこのような X は存在しないことが示された． □

p42：問 1

証明.

まず，

$$\overline{A}\ \overline{A^{-1}} = \overline{AA^{-1}} = E, \quad \overline{A^{-1}}\ \overline{A} = \overline{A^{-1}A} = E$$

より，$\overline{A}$ は正則で，逆行列は $\overline{A^{-1}}$ である．さらに，

$${}^tA{}^tA^{-1} = {}^t(A^{-1}A) = E, \quad {}^tA^{-1}{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = E$$

であるから，${}^tA$ は正則であり，逆行列は ${}^tA^{-1}$ である． □

p42：問 2

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' \coloneqq \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$AA' = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

である．$AA' = E$ となる条件は，x，y，z，w についてのふたつの連立方程式

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ay+bw=0 \\ cy+dw=1 \end{cases}$$

が解を持つことで，その条件は $ad-bc \neq 0$ である．そのときの解は，

$$(x,y,z,w) = (\frac{d}{ad-bc}, -\frac{b}{ad-bc}, -\frac{c}{ad-bc}, \frac{a}{ad-bc})$$

である．これを用いて $A'A$ を計算すると，$A'A = E$ となり．たしかに A' は A の逆行列である．

以上の議論により，$ad-bc \neq 0$ となることが必要十分条件である．

p42：問 3

p42：問 3-(イ)

(2) の結果により，

$$\frac{1}{3\cdot 3 - 2\cdot 4}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

が求める逆行列である．

p42：問 3-(ロ)

まず，

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

としたときに

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} + x_{12} & -x_{11} + 3x_{12} + x_{13} \\ x_{21} & 2x_{21} + x_{22} & -x_{21} + 3x_{22} + x_{23} \\ x_{31} & 2x_{31} + x_{32} & -x_{31} + 3x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，これに関して

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} + x_{12} & -x_{11} + 3x_{12} + x_{13} \\ x_{21} & 2x_{21} + x_{22} & -x_{21} + 3x_{22} + x_{23} \\ x_{31} & 2x_{31} + x_{32} & -x_{31} + 3x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となれば，行列 X が求める逆行列である．計算すると

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，これが求める逆行列であった．

p42：問 3-(ハ)

まず，

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

としたとき，

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ x_{34} & x_{33} & x_{32} & x_{31} \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & x_{41} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，これに関して

$$\begin{pmatrix} x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ x_{34} & x_{33} & x_{32} & x_{31} \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & x_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となれば，行列 X が求める逆行列である．

計算すると，

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり．これが求める逆行列であった．

p52：問

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\xrightarrow{\text{第 1 行の }(-2)\text{ 倍，第 1 行の 2 倍をそれぞれ第 2 行，第 3 行に加える}} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を交換する}} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
\xrightarrow{\text{第 2 行の }(-3)\text{ 倍を第 1 行に加え，第 3 行の }(-4)\text{ 倍を第 1 行に加える}} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
\xrightarrow{\text{第 3 行の 2 倍を第 2 行に加え，第 3 行を }(-1)\text{ 倍する}} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

よって，求める逆行列は

$$
\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

である．

p58：問

p58：問-(イ)

与えられた連立方程式について，拡大係数行列を考えて基本変形を施すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 1 & 1 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．つまり，解は存在し，ひとつの任意定数を含む．任意定数を $x_3 = \alpha$ とすると，

$$x_1 = -\frac{4}{3} - \alpha, \quad x_2 = \frac{8}{3} - \alpha, \quad x_3 = \alpha$$

とかける．ベクトルの形で表すと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 8/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．

p58：問-(ロ)

与えられた連立方程式について，拡大係数行列を考えて基本変形を施すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となるが，$0 = -1$ とはならないため，この連立方程式は解を持たない．

p58：問-(ハ)

与えられた連立方程式について，拡大係数行列を考えて基本変形を施すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 19 & 14 \end{pmatrix}$$

となる．ただしここで第 3 列と第 4 列を入れ替えた．

つまり，解は存在し，ふたつの任意定数を含む，任意定数を $x_3 = \alpha$，$x_5 = \beta$ とすると，この連立方程式の解は

$$x_1 = 6 - 2\alpha - 2\beta, \quad x_2 = -9 + 2\alpha + 11\beta, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = 14 - 19\beta, \quad x_5 = \beta$$

とかける．ベクトルの形で表すと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 0 \\ -19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．

p62–63：問 1

証明.
定義に従って計算すると，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \\ &= 2((\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})) \\ &= 2(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2)\end{aligned}$$

となり，これが証明すべきことであった． □

p62-63：問 2

証明.

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$$

である．ここで，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が直交することから，

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=0$$

であり，これを用いると

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$$

となる．$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ がともに実ベクトルのときは $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ であるから確かに逆が成り立つが，たとえば $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}2i\\0\end{pmatrix}$ とすれば，等式は成り立つが $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交しないため，逆は成り立たない． □

p62–63：問 3

証明.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ のとき，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 - (\|\boldsymbol{x}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{y}\|^2) \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 - (\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2) \\
&= 4(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

であるから，この両辺を 4 で割るとただちに主張が従う．

また，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}$ のときにはこの等式が成り立たないことがある．$\boldsymbol{x} = {}^t(2i, 0)$，$\boldsymbol{y} = {}^t(2, 0)$ とすると，

$$\begin{aligned}
\frac{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}{4} &= \frac{4-4}{4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

であるが，

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (2, 0)\begin{pmatrix} -2i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -4i
\end{aligned}$$

となり，確かにこれが反例になっている． □

p65: 問 1

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned} A^t A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり，これが E に等しいので，

$$\begin{cases} a^2+b^2=1, \\ c^2+d^2=1, \\ ac+bd=0 \end{cases}$$

となる．このことから $0 \leqq \theta < 2\pi$，$0 \leqq \phi < 2\pi$ として

$$\begin{aligned} &a=\cos\theta, \quad b=\sin\theta, \\ &c=\cos\phi, \quad d=\sin\phi \end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} ac+bd &= \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi \\ &= \cos(\theta-\phi) \end{aligned}$$

となり，これが 0 に等しいので．

$$\begin{aligned} \theta-\phi &= \pi/2, 3\pi/2, \\ \therefore \phi &= \theta-\pi/2, \theta-3\pi/2. \end{aligned}$$

これより，任意の二次直交行列は $0 \leqq \theta < 2\pi$，$0 \leqq \phi < 2\pi$ として

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

のいずれかで表される．

p65: 問 2

証明.

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A, \quad (AA^*)^* = A^{**}A^* = AA^*$$

であるから，A^*A，AA^* はエルミート行列である．

また，任意の $n \times 1$ ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, A^*A\boldsymbol{x}) &= (A^{**}\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) \\ &= (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) \\ &= \|A\boldsymbol{x}\|^2 \geqq 0\end{aligned}$$

であり，また，$\boldsymbol{x}$ として第 i 成分のみ 1 でほかの成分は 0 のベクトル $\boldsymbol{e}_i$ をとると，

$$(\boldsymbol{e}_i, A^*A\boldsymbol{e}_i) = A^*A \text{ の } (i,i) \text{ 成分}$$

となる．先の不等式よりこれは 0 または正なので，A^*A の対角成分は 0 または正である．同様にして AA^* の対角成分も 0 または正である．

以上のことが証明すべきことであった． □

第 2 章・章末問題

p70–73：1

p70–73：1-(イ)

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
3 & 3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を交換する}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(1,1)\text{ をかなめとして左から第 1 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 4 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{第 3 行を }(-1)\text{ 倍して第 2 行と交換し，}(2,2)\text{ をかなめとして左から第 2 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -1 & -3 & 0 & -3 & 2 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 2 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(3,3)\text{ をかなめとして左から第 3 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -6 & 5 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{第 4 行を }(-1)\text{ 倍して，}(4,4)\text{ をかなめとして第 4 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 18 & -16 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & -5 & -1
\end{array}\right)
$$

よって，求める逆行列は，

$$
\begin{pmatrix}
4 & 18 & -16 & -3 \\
0 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 3 & -3 & 0 \\
1 & 6 & -5 & -1
\end{pmatrix}
$$

である．

p70–73：1-(ロ)

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(1,1)\text{ をかなめとして第 1 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(2,2)\text{ をかなめとして第 2 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -2 & 1 & -5 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(3,3)\text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 1 & -13 & -4 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(3,3)\text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

よって，求める逆行列は

$$
\begin{pmatrix}
-3 & -1 & 1 & -1 \\
-3 & -1 & 0 & 1 \\
-4 & -1 & 1 & 0 \\
-10 & -3 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

である.

p70–73：2

p70–73：2-(イ)

与えられた連立方程式について，拡大係数行列を考えて基本変形を施すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．ただしここで第 2 列と第 5 列を入れ替えた．

つまり，解は存在し，2 つの任意定数を含む．任意定数を $x_4 = \alpha$，$x_2 = \beta$ とすると，

$$x_1 = -2\alpha - 2\beta, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \alpha + \frac{1}{5}, \quad x_4 = \alpha, \quad x_5 = -\frac{3}{5}$$

となる．ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．

p70–73：2-(ロ)

与えられた連立方程式について，拡大係数行列を考えて基本変形を施すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

つまり，解は存在し，一つの任意定数を含む．任意定数を $x_4 = \alpha$ とすると，

$$x_1 = -1 - 2\alpha, \quad x_2 = 1 + \alpha, \quad x_3 = -1 + \alpha, \quad x_4 = \alpha$$

となる．ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．

p70–73：2-(ハ)

与えられた連立方程式について，拡大係数行列を考えて基本変形を施すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

つまり，解は存在し，

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1$$

となる．ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．

p70–73：2-(ニ)

与えられた連立方程式について，拡大係数行列を考えて基本変形を施すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 24 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．ただしここで第 2 列と第 4 列を入れ替えた．

つまり，解は存在し，2 つの任意定数を含む．$x_2 = \alpha$，$x_5 = \beta$ とすると，

$$x_1 = -2\alpha + 2\beta, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = 3 - 10\beta, \quad x_4 = 4 - 24\beta, \quad x_5 = \beta$$

となる．ベクトルの形で表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -10 \\ -24 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．

p70–73：3

p70–73：3-(イ)

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{\text{第 1 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{\text{第 2 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{\text{第 3 列を掃き出す}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)
$$

である．ゆえに

$$
P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

である．だから

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

p70–73：3-(ロ)

$P^{-1}AP = B$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
A^n &= PB^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3 & -2^n-3 & 2^n-3 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n+2 & -2^n-2 \\ -2^{n+2}+4 & -2^{n+1}-4 & 2^{n+1}-4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．

p70–73：4

与えられた行列を A とする．

A の第 1 列に，第 2 列から第 n 列までを足して変形すると，

$$\begin{pmatrix} (n-1)x+1 & x & x & \cdots & x \\ (n-1)x+1 & 1 & x & \cdots & x \\ (n-1)x+1 & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)x+1 & x & x & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

ここで，この行列の第 2 行から第 n 行までの各行から第 1 行を引くと，

$$\begin{pmatrix} (n-1)x+1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}$$

となるので，行列 A の階数は，$x=1$ のとき 1，$x=-1/(n-1)$ のとき $n-1$，それ以外の場合は n である．

p70–73：5

証明.
A が正則でないと仮定すると，

$$Ax = \mathbf{0}$$

をみたす $x \in \mathbb{C}^n$ が存在する．
また，$x = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とし，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の中で絶対値が最大のものを x_p とする．
Ax の p 行を考えると，

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p + \cdots + a_{pn}x_n = 0$$
$$\therefore x_p = -(a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n) = -\sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1,2,\ldots,n\}}} a_{pi}x_i$$

となる．
ここで，

$$|x_p| \leqq \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1,2,\ldots,n\}}} |a_{pi}||x_i|$$
$$< \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1,2,\ldots,n\}}} \frac{1}{n-1}|x_i|$$
$$< \frac{n-1}{n-1} \cdot |x_p| = |x_p|$$

と計算でき，$|x_p| < |x_p|$ となり，これは矛盾である．
よって，先の過程が誤りであり，このとき A は正則である． □

p70–73：6

p70–73：6-(イ)

証明.

$$AA^{k-1} = A^{k-1}A = E$$

なので，A は正則である． □

p70–73：6-(ロ)

証明.

A が正則であるとすると，A^{-1} が存在して，

$$A^{-1}A^2 = A^{-1}A$$
$$A = E$$

となるが，これは矛盾であるため，A は正則でない． □

p70–73：6-(ハ)

証明.

A が正則であるとすると，

$$\begin{aligned} E &= (A^{-1}A)^k \\ &= A^{-k}A^k \\ &= O \end{aligned}$$

となるが，これは矛盾であるため，A は正則でない． □

p70–73：6-(ニ)

証明.

k を用いて，A^k を考えると

$$E = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})$$

であり，逆からかけても同じであるため，$E - A$ は正則であり，

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

である．

また，

$$E = (E + A)(E - A + A^2 - \cdots + A^{k-1})$$

であり，逆からかけても同じなので，$E + A$ は正則であり，

$$(E + A)^{-1} = E - A + A^2 - \cdots + A^{k-1}$$

である． □

p70–73：7

証明.

$X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ とする．ここで，XY の (i, i) 成分は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ji}$ であるから，

$$\mathrm{tr}(XY) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ji} \right)$$

となる．YX については，同様の議論により，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(YX) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij} x_{ji} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ji} y_{ij} \right)\end{aligned}$$

である．ここで，i と j をおきかえれば，

$$\mathrm{tr}(YX) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} y_{ji} \right) \tag{1}$$

となる．これより，

$$\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX) \tag{2}$$

を得て，これとトレースの線型性により $\mathrm{tr}(XY - YX) = 0$ であるが，$\mathrm{tr}(E_n) = n \neq 0$ であるため，これは矛盾である．

ゆえに，$XY - YX = E_n$ となる n 次行列 X, Y は存在しないことが示された． □

p70–73：8

証明.
行列 B の階数を r とすると，m 次正則行列 P，n 次正則行列 Q によって，

$$PBQ = F_{m,n}(r)$$

と表せる．
これにより，

$$ABQ = AP^{-1}F_{m,n}(r)$$

とかける．A_{11} を r 次の行列として，

$$AP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad F_{m,n}(r) = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

とかくと，

$$\begin{aligned} AP^{-1}F_{m,n}(r) &= AP^{-1}Q \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とかけ，A_{11} の定義により，ABQ の階数は r 以下となる．いま Q は基本行列の積なので，AB の階数も r 以下である．
行列 A についても同様に示せる．
以上の議論により，行列 AB の階数は行列 A，行列 B の階数以下であることが証明された．
□

p70–73：9

3 つの平面が 1 本の直線を共有する必要十分条件は，与式を x，y，z に関する方程式とみたときに，解が存在して 1 つの任意定数を含むことである．

これは

$$\begin{cases} r(A) = 2 \\ r(A) = r(\tilde{A}) \end{cases}$$

と同値であり，したがって，

$$r(A) = r(\tilde{A}) = 2$$

が必要十分条件である．

p70–73：10

p70–73：10-(イ)

証明.

$AX = E$ をみたす n 次正則行列 X が存在するとする．このとき，

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_{11} - bx_{21} & ax_{12} - bx_{22} \\ bx_{11} + ax_{21} & bx_{12} + ax_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり，これが E に等しいので，

$$\begin{cases} ax_{11} - bx_{21} = 1 \\ ax_{12} - bx_{22} = 0 \\ bx_{11} + ax_{21} = 0 \\ bx_{12} + ax_{22} = 1 \end{cases}$$

となり，これを変形すると，

$$\begin{cases} (a^2 + b^2)x_{11} = a \\ (a^2 + b^2)x_{12} = b \\ (a^2 + b^2)x_{21} = -b \\ (a^2 + b^2)x_{22} = a \end{cases}$$

となるから，このような x_{11}，x_{12}，x_{21}，x_{22} が存在する必要十分条件は

$$a^2 + b^2 \neq 0$$

である．このことから直ちに主張が従う． □

p70–73：10-(ロ)

証明.

$$A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}, \quad \alpha' = a' + b'i$$

とおく．

和については

$$A + A' = \begin{pmatrix} a + a' & -(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix}, \quad \alpha + \alpha' = (a + a') + (b + b')i$$

となり，このときたしかに $A + A'$ と $\alpha + \alpha'$ が一対一に対応する．

積については

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{pmatrix}, \quad \alpha\alpha' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

となり，たしかに AA' と $\alpha\alpha'$ が一対一に対応する．

逆数については

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - bi)$$

となり，たしかに A^{-1} と $1/\alpha$ が一対一に対応する．

以上の考察により証明された． □

p70–73：10-(ハ)

証明.

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表せるとすると，

$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

であるから，

$$a = r\cos\theta, \quad r = r\sin\theta$$

とかけ，このとき

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる．これが証明すべきことであった． □

p70–73：11

p70–73：11-(イ)

証明.

${}^tPP = E$ を加味して $(P \pm E)$ の転置行列を考えると

$$ {}^t(P \pm E) = {}^tP \pm {}^tPP = {}^tP^t(E \pm P) $$

となり，これを用いると，

$$
\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t\{(P-E)(P+E)^{-1}\} \\
&= {}^t(P+E)^{-1t}(P-E) \\
&= (E+{}^tP)^{-1t}P^tP(E-P) \\
&= \{{}^tP(P+E)\}^{-1t}P(E-P) \\
&= (P+E)^{-1t}P^{-1t}P(E-P) \\
&= (P+E)^{-1}(E-P) \\
&= -(P+E)^{-1}\{(P+E)-2E\} \\
&= -(P+E)^{-1}(P+E)+2E(P+E)^{-1} \\
&= -(P+E)(P+E)^{-1}+2E(P+E)^{-1} \\
&= (-(P+E)+2E)(P+E)^{-1} \\
&= -(P-E)(P+E)^{-1} = -A
\end{aligned}
$$

となり，これが証明すべきことであった． □

p70–73：11-(ロ)

証明.

計算すると，

$$
\begin{aligned}
E-A &= E-(P-E)(P+E)^{-1} \\
&= (P+E)(P+E)^{-1}-(P-E)(P+E)^{-1} \\
&= \{(P+E)-(P-E)\}(P+E)^{-1} \\
&= 2(P+E)^{-1}
\end{aligned}
$$

と変形でき，いま $(P+E)$ が正則だから，$2(P+E)^{-1}$ も正則であり，

$$ (E-A)^{-1} = \frac{1}{2}(P+E) $$

である． □

p70–73：11-(ハ)

証明.

まず,

$$\begin{aligned} E + A &= (P+E)(P+E)^{-1} + (P-E)(P+E)^{-1} \\ &= \{(P+E)+(P-E)\}(P+E)^{-1} \\ &= 2P(P+E)^{-1} \end{aligned}$$

であるから，これを用いると

$$(E+A)(E-A)^{-1} = 2P(P+E)^{-1}\frac{1}{2}(P+E) = P$$

となり，これが証明すべきことであった． □ □

p70–73：12

証明.

以下の 3 つの命題が同値であることを示す．

(1) A は正規行列である．すなわち $A^*A = AA^*$ である．

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ について，$\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ が成立する．

(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ について，$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ が成立する．

(1) $\Longrightarrow$ (2) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ を任意にとる．このとき

$$\begin{aligned}\|A\boldsymbol{x}\|^2 &= (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{x}, A^*A\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{x}, AA^*\boldsymbol{x}) \quad (\because \text{正規行列の定義}) \\ &= (A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{x}) = \|A^*\boldsymbol{x}\|^2\end{aligned}$$

であるから，$\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ が成立する．

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ を任意にとる．このとき

$$\begin{aligned}\|A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 &= (A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) \\ &= \|A\boldsymbol{x}\|^2 + (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) + (A\boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x}) + \|A\boldsymbol{y}\|^2 \\ &= \|A\boldsymbol{x}\|^2 + (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) + \overline{(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})} + \|A\boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

であり，同様に計算すると

$$\|A^*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 = \|A^*\boldsymbol{x}\|^2 + (A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y}) + \overline{(A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})} + \|A^*\boldsymbol{y}\|^2$$

を得る．$\|A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\| = \|A^*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|$，$\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$，$\|A\boldsymbol{y}\| = \|A^*\boldsymbol{y}\|$ を仮定したので，

$$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) + \overline{(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})} = (A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y}) + \overline{(A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})}$$

となり，これは $\mathrm{Re}(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = \mathrm{Re}(A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ であることを表す．
また，$\boldsymbol{x}$ を $i\boldsymbol{x}$ におきかえることで，$\mathrm{Im}(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = \mathrm{Im}(A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ も示される．ゆえにこのとき

$$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y}).$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して，

$$(\boldsymbol{x}, (A^*A - AA^*)\boldsymbol{y}) = 0$$

である．いま $\boldsymbol{y}$ をいったん固定すると，$\boldsymbol{x}$ は任意なので，$\boldsymbol{x} = (A^*A - AA^*)\boldsymbol{y}$ とすることができ，

$$\begin{aligned}&\|(A^*A - AA^*)\boldsymbol{y}\|^2 = 0, \\ &\because\ (A^*A - AA^*)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{y}$ は任意だから，$A^*A = AA^*$ となり，A は正規行列である．

以上の議論により証明された． □

p70–73：13

p70–73：13-(イ)

まず,

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z] &= [XY-YX,Z]\\ &= (XY-YX)Z-Z(XY-YX)\\ &= XYZ-YXZ-ZXY+ZYX.\end{aligned}$$

同様に計算すると,

$$\begin{aligned}[[Y,Z],X] &= YZX-ZYX-XYZ+XZY,\\ [[Z,X],Y] &= ZXY-XZY-YZX+YXZ.\end{aligned}$$

よって,

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=O$$

である.

p70–73：13-(ロ)

証明.

X, Y は交代行列だから,

$$X=-{}^tX,\quad Y=-{}^tY.$$

これを用いると,

$$\begin{aligned}[X,Y] &= XY-YX\\ &= (-{}^tX)(-{}^tY)-(-{}^tY)(-{}^tX)\\ &= {}^t(YX)-{}^t(XY)\\ &= -{}^t(XY-YX)\\ &= -{}^t[X,Y]\end{aligned}$$

となる. よってこのとき $[X,Y]$ は交代行列である. □

p70–73：13-(ハ)

証明.
以下では

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

とおく.

【$X + Y$ と $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ について】

$$X+Y = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(z+z)' & y+y' \\ z+z & 0 & -(x+x') \\ -(y+y') & x+x' & 0 \end{pmatrix}$$

であり，なおかつ

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$

であるから，たしかに $X + Y$ と $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ は対応する.

【cX と $c\boldsymbol{x}$ について】

$$cX = c\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -cz & cy \\ cz & 0 & -cx \\ -cy & cx & 0 \end{pmatrix}$$

であり，なおかつ

$$c\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{pmatrix}$$

であるから，たしかに cX と $c\boldsymbol{x}$ は対応する.

【$[X, Y]$ と $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ について】

$$\begin{aligned}[X,Y] &= \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -z'x+x'z & y'x-x'y \\ z'x-x'z & 0 & -y'z+z'y \\ -y'x+x'y & z'y-y'z & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であり，なおかつ

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx' \end{pmatrix}$$

であるから，たしかに $[X, Y]$ と $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は対応する.

【$X\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ について】

$$\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -zy' + yz' \\ zx' - xz' \\ -yx' + xy' \end{pmatrix}$$

であり，なおかつ

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

であるから，たしかに $X\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ は対応する．

□

p70–73：13-(ニ)

証明.

ハ) で証明したことから，$[X, Y]$ には $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ が対応する．

また，イ) で証明したことより，$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = O$ であり，この左辺には $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y}$ が対応し，右辺には $\mathbf{0}$ が対応する．

以上の考察により

$$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

であることが示された． □

p70–73：14

証明.

二つに分けて証明する，

イ)$\Longrightarrow$ ロ)

A が正則であると仮定すると，A^{-1} が存在し，

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x})$$

と変形できるから，$A\boldsymbol{x}$ が非負ベクトルであれば，$\boldsymbol{x}$ も非負ベクトルである．

ロ)$\Longrightarrow$ イ)

まず，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であると仮定する．このとき，$A(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ であるから，$A(-\boldsymbol{x})$ も非負ベクトルであり，条件から $\boldsymbol{x}$，$-\boldsymbol{x}$ は非負ベクトルである．したがって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり，A は正則である．また，非負ベクトル $\boldsymbol{x}$ を任意にとると，

$$\boldsymbol{x} = A(A^{-1}\boldsymbol{x})$$

も非負ベクトルであり，条件から $A^{-1}\boldsymbol{x}$ も非負ベクトルである．ここで，A^{-1} が非負行列でないと仮定すると，ある単位ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ について，$A^{-1}\boldsymbol{e}_j$ が非負ベクトルでないことになり，$\boldsymbol{x}$ が非負ベクトルであることに反する．これより A^{-1} は非負行列である．

以上の議論により証明された． □

p70–73：15

p70–73：15-(イ)

証明.
まず，$A=(a_{ij})$，$\boldsymbol{f}={}^t(f_1,f_2,\ldots,f_j)={}^t(1,1,\ldots,1)$ とおくと，$A\boldsymbol{f}$ の第 i 行の成分は

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j &= \sum_{j=1}^{n}a_{ij}\\ &=1\end{aligned}$$

であるから，$\boldsymbol{f}$ の定義とあわせて，

$$A\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}$$

が成り立つ． □

p70–73：15-(ロ)

証明.
$C=AB=(c_{ij})$ とすると，C の (i,k) 成分は

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

である．これにより，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}c_{ik} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)\\ &=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sum_{k=1}^{n}b_{jk}\\ &=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot 1\\ &=1\end{aligned}$$

であるから，C すなわち AB は確率行列である． □

p70–73：15-(ハ)

証明.

$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ において，$\boldsymbol{x}$ の成分で絶対値が最大のものを x_p とする．

このとき，$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ の第 p 行成分の絶対値を考えると，

$$\begin{aligned}|\alpha||x_p| &\leqq \sum_{j=1}^{n} a_{pj}|x_j| \\ &\leqq \sum_{j=1}^{n} a_{pj}|x_p| \\ &= |x_p|\end{aligned}$$

であるから，

$$|\alpha||x_p| \leqq |x_p|$$

を得るので，

$$|\alpha| \leqq 1$$

となり，これが証明すべきことであった． □

第 3 章

p77：問 1

《3 文字の置換》

3 文字の置換は $3! = 6$ 通りある．それを互換の回数によって分類する．

0 回 1 つのみ．偶置換かつ恒等置換.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

1 回 3 つ．奇置換.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

2 回 2 つ．偶置換.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

《4 文字の置換》

4 文字の置換は $4! = 24$ 通りある．それを互換の回数によって分類する．

0 回 1 つのみ．偶置換かつ恒等置換.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

1 回 6 つ．奇置換.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

2 回 偶置換.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix},$$

p77：問 2

証明.

S_n の偶置換全体の集合を A_n, 偶置換全体の集合を B_n とする．置換は必ず奇置換か偶置換のいずれかであるから，

$$S_n = A_n \cup B_n,$$
$$A_n \cap B_n = \varnothing$$

となる．

ここで，

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると，τ は奇置換であり，$\sigma \in A_n$ のとき，$\tau\sigma \in B_n$ である．同様に，$\rho \in B_n$ のとき，$\tau^{-1}\rho = \tau\rho \in A_n$ である．これらにより，全単射

$$A_n \ni \sigma \mapsto \tau\sigma \in B_n$$

が存在し，偶置換と奇置換は同数あり，その個数は $n!/2$ である． □

p77：問 3

$m \in \mathbb{N}$ とする．

(I) $n = 2m$ とかけるとき，この置換を互換の積で表すと，

$$(1, 2m)(2, 2m-1) \cdots (m, m+1)$$

となるため，置換の符号は $(-1)^m$，すなわち

$$(-1)^{\frac{n}{2}}$$

となる．

(II) $n = 2m-1$ とかけるとき，この置換を互換の積で表すと，

$$(1, 2m-1)(2, 2m-2) \cdots (m-1, m+1)$$

となるため，置換の符号は $(-1)^{m-1}$，すなわち

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

となる．

p79：問

p79：問-(イ)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$m \in \mathbb{N}$ として，

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n = 2m-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．また，

$$(\text{与式}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_1 a_2 \cdots a_n$$

だから，

$$(\text{与式}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n & (n = 2m-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

p79：問-(ロ)

計算すると，

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= a^3 + b^3 + c^3 - abc - bca - cab \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

となる．

p83：問

証明.

(n, n) 行列 A，X を

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n), \quad X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$$

とする．このとき，AX は定義され，

$$AX = (A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}_n)$$

と表せる．ここで，$A\boldsymbol{x}_j$ を単位ベクトルの線型結合で表すと，

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x}_j &= A^t(x_{1j}\boldsymbol{e}_1, x_{2j}\boldsymbol{e}_2, \ldots, x_{nj}\boldsymbol{e}_n) \\ &= A(x_{1j}\boldsymbol{e}_1 + x_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_{nj}\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_{1j}\boldsymbol{a}_1 + x_{2j}\boldsymbol{a}_2 + x_{nj}\boldsymbol{a}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\boldsymbol{a}_i \end{aligned}$$

となる．これにより，$|AX|$ は，多重線型性を用いて，

$$\begin{aligned} |AX| &= \left| \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1 1}\boldsymbol{a}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} x_{i_2 2}\boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} x_{i_n n}\boldsymbol{a}_{i_n} \right| \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} x_{i_1 1}x_{i_2 2}\ldots x_{i_n n}|\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_n}| \end{aligned}$$

と変形できる．ここで，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\left|\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{a}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}\right| = \operatorname{sgn}\sigma|A|$$

$$\begin{aligned} |AX| &= \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)1}x_{\sigma(2)2}\ldots x_{\sigma(n)n} \cdot \operatorname{sgn}\sigma|A| \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot x_{\sigma(1)1}x_{\sigma(2)2}\ldots x_{\sigma(n)n}|A| \\ &= \left|{}^t X\right||A| \\ &= |A||X| \end{aligned}$$

を得る．これが証明すべきことであった． □

p83：問

p83：問-(イ)

多重線型性などを用いて変形すると,

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= -\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 & 16 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -12 & 17 \\ 0 & -2 & 10 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & -1 & 16 \\ 0 & 3 & -12 & 17 \\ 0 & -2 & 10 & -7 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -1 & 16 \\ 3 & -12 & 17 \\ -2 & 10 & -7 \end{vmatrix} = 539
\end{aligned}
$$

となるので，この行列式の値は 539 である.

p83：問-(ロ)

多重線型性などを用いて変形すると,

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & -7 & -8 & 6 \\ 3 & 10 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 17 & 21 & -16 \\ 1 & -7 & -8 & 6 \\ 0 & 31 & 30 & -17 \\ 0 & 37 & 44 & -27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & -8 & 6 \\ 0 & 17 & 21 & -16 \\ 0 & 31 & 30 & -17 \\ 0 & 37 & 44 & -27 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 17 & 21 & -16 \\ 31 & 30 & -17 \\ 37 & 44 & -27 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，第 2 列に第 1 列の -1 倍を加え，第 3 列に第 1 列を加えると,

$$
(\text{与式}) = \begin{vmatrix} 17 & 4 & 1 \\ 31 & -1 & 14 \\ 37 & 7 & 10 \end{vmatrix}
$$

を得る．ここで，第 1 列に第 3 列の -2 倍を加えると,

$$
(\text{与式}) = \begin{vmatrix} 15 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 14 \\ 17 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -750
$$

となるため，この行列式の値は -750 である.

第 3 章・章末問題

p90–91：1

p90–91：1-(イ)

$k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ として，第 1 列に第 k 列の x^k 倍を加えると，

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

第 1 列で余因子展開すると，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (-1)^{n+2}(a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & \\ x & -1 & \cdots & 0 & \\ 0 & x & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+2}(a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n) \cdot (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} \qquad (*) \\
&= (-1)^{n+2}(a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n) \cdot (-1)^{n-2} \\
&= (-1)^{2n}(a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n) \\
&= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n
\end{aligned}$$

となる．ただし $(*)$ では同様の余因子展開を繰り返した．

以上の計算により，

$$(\text{与式}) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n.$$

p90–91：1-(ロ)

与式の第 2 列から第 n 列までを第 1 列に足すと，

$$\begin{vmatrix} x+\sum_{k=1}^n a_k & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{k=1}^n a_k & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{k=1}^n a_k & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+\sum_{k=1}^n a_k & a_n & a_{n-1} & \cdots & x \end{vmatrix}$$

である．第 2 行から第 n 行のそれぞれから第 1 行を引くと，

$$\begin{vmatrix} x+\sum_{k=1}^n a_k & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n-a_1 & a_{n-1}-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

である．第 1 列で余因子展開すると，

$$\begin{aligned} &(x+\sum_{k=1}^n a_k)\begin{vmatrix} x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-a_1 & a_{n-1}-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix} \\ &= (x+\sum_{k=1}^n a_k)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) \\ &= (x+\sum_{k=1}^n a_k)\prod_{k=1}^n (x-a_k). \end{aligned}$$

p90–91：1-(ハ)

この形の $n\times n$ 行列を A_n とすると，

$$\begin{aligned}
A_{n+2} &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} \\
&= (1+x^2)\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} \\
&= (1+x^2)A_{n+1} - x^2 A_n
\end{aligned}$$

となる．

よって，

$$A_{n+2} - A_{n+1} = x^2(A_{n+1} - A_n) \quad (n \geqq 2).$$

これと $A_1 = 1+x^2$，$A_2 = 1+x^2+x^4$ により，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
A_{n+1} - A_n &= x^2(A_n - A_{n-1}) \\
&= x^4(A_{n-1} - A_{n-2}) \\
&= \cdots = x^{2(n-1)}(A_2 - A_1) \\
&= x^{2(n-1)}((1+x^2+x^4) - (1+x^2)) \\
&= x^{2(n+1)}
\end{aligned}$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
A_n &= A_1 + \sum_{k=1}^{n-1} x^{2k+2} \\
&= 1 + x^2 + \frac{x^4(1-x^{2(n-1)})}{1-x^2} \\
&= 1 + x^2 + \frac{x^4(1-x^2)(1+x^2+\cdots+x^{2(n-2)})}{1-x^2} \\
&= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n}
\end{aligned}$$

となる．この A_n を用いると，$A_1 = 1+x^2$，$A_2 = 1+x^2+x^4$ であるから，与えられた行列式の値は，$n\times n$ 行列の場合

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n}$$

である．

p90–91：1-(ニ)

第 1 列で余因子展開すると

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= -a^2\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 1 \\ 0 & c^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 1 \\ 0 & c^2 & 1 \\ c^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -a^2(b^2+c^2-a^2) + b^2(b^2-c^2-a^2) - (a^2c^2+b^2c^2-c^4) \\
&= a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2.
\end{aligned}
$$

p90–91：2

p90–91：2-(イ)

証明.

余因子展開を用いると，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= -a\begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -d & 0 & f \end{vmatrix} \\
&= -a(-cdf + bfe - af^2) + b(be^2 - cde - adf) - c(-adf + bde - cd^2) \\
&= af(cd - be + af) - be(-be + cd + af) + cf(af - be - cd) \\
&= (af - be + cd)^2.
\end{aligned}
$$

となり，これが証明すべきことであった． □

p90–91：2-(ロ)

証明.

A を n 次行列とする．${}^tA = -A$ であるから，

$$\left|{}^tA\right| = (-1)^n|A|.$$

ここで，n は奇数であるから，

$$\left|{}^tA\right| = -|A|.$$

また，行列式の転置に関する不変性により，$\left|{}^tA\right| = |A|$ なので，

$$
\begin{aligned}
&|A| = -|A|, \\
&\therefore\ |A| = 0
\end{aligned}
$$

となり，これが証明すべきことであった． □

p90–91：3

p90–91：3-(イ)

証明.
与えられた行列式に対して多重線型性を用いると，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} \\
&= |A+B| \cdot |A-B|
\end{aligned}
$$

となり，これが証明すべきことであった． □

p90–91：3-(ロ)

与えられた行列式に対して多重線型性を用いると，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \begin{vmatrix} A+iB & iA-B \\ B & A \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{vmatrix} \\
&= \det(A+iB) \cdot \det(A-iB)
\end{aligned}
$$

となり，いま A，B は実行列なので，

$$
\begin{aligned}
\det(A+iB) \cdot \det(A-iB) &= \det(A+iB) \cdot \overline{\det(A+iB)} \\
&= |\det(A+iB)|^2
\end{aligned}
$$

である．

p90–91：4

証明.

$\alpha^n = 1$ をみたす $\alpha \in \mathbb{C}$ をひとつ固定する．さて，与えられた行列式の第 j 行を α^{j-1} 倍して第 1 列に足す操作を行うと，この行列式は

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \alpha^2 \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i & x_{n-2} & x_{n-3} & \cdots & x_0 \end{vmatrix}$$

と変形できる．よって，この行列式は

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i x_i = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1}$$

を因数にもつ．すべての α に関してこのことがいえるから，因数定理により，この行列式は

$$\prod_{\alpha^n=1} (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1})$$

を因数にもつ．これは n 次式であり，なおかつ x_0 の係数は 1 であることより，結果として

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{\alpha^n=1} (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1})$$

である．これが証明すべきことであった． □

p90–91：5

前問において，$n = 4$，$x_1 = i$，$x_2 = 1$，$x_3 = -i$ とした場合を考えればよいので，$\alpha = \pm 1, \pm i$ により，

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \prod_{\alpha^4=1} (x + \alpha i + \alpha^2 - \alpha^3 i) \\ &= (x + i + 1 - i)(x - i + 1 + i)(x - 1 - 1 - 1)(x + 1 - 1 + 1) \\ &= (x+1)^3 (x-3) \end{aligned}$$

となる．

p90–91：6

証明.

$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ のもとで，n 個の点を $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ とする．このとき，

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + \cdots + a_n {x_1}^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 {x_2}^2 + \cdots + a_n {x_2}^{n-1} = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 {x_n}^2 + \cdots + a_n {x_n}^{n-1} = y_3 \end{cases}$$

である，これを行列の形に表すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

となる．

ここで，

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

とおくと，$\left|{}^t A\right|$ はヴァンデルモンドの行列式である．

行列式の値は，行列の転置に対して不変なので，

$$|A| = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

となり，条件によりこの値は 0 でない．ゆえに先の連立方程式はただ一つの解をもつ．

以上の考察によって，これら n 個の点を通る直線がただ一つ存在することが示された． □

p90–91：7

与えられた行列式の係数行列式を A，A の第 j 列を ${}^t(1,0,0,0)$ で置き換えた行列を A_j とする．また，

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} T & -T \\ S & S \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2T & -T \\ O & S \end{vmatrix} \\ &= |2T||S| \\ &= 4(a^2+b^2)(c^2+d^2).\end{aligned}$$

クラメールの公式により

$$\begin{cases} x = |A_1|/|A|, \\ y = |A_2|/|A|, \\ z = |A_3|/|A|, \\ u = |A_4|/|A|. \end{cases}$$

さて，

$$\begin{aligned}|A_1| &= \begin{vmatrix} 1 & -b & -a & b \\ 0 & a & -b & -a \\ 0 & -d & c & d \\ 0 & c & d & c \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & -a \\ -d & c & d \\ c & d & c \end{vmatrix} \\ &= 2a(c^2+d^2).\end{aligned}$$

よって，

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2a(c^2+d^2)}{4(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \frac{a}{2(a^2+b^2)}.$$

同様にして y，z，u を求めると

$$x = \frac{a}{2(a^2+b^2)}, \quad y = -\frac{b}{2(a^2+b^2)}, \quad z = -\frac{a}{2(a^2+a^2)}, \quad u = \frac{b}{2(a^2+b^2)}.$$

p90–91：8

与えられた行列式は，

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$$

の拡大係数行列の行列式を表す．基本変形を施すと，この行列式は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & g_1 \\ 0 & 1 & g_2 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

の場合に変形できる．

(I) (3) の場合，行列式が 0 となる条件は $g_3 = 0$ である，このとき，上の連立方程式の解 (x, y) は存在し一意に定まる．これは 3 直線が 1 点で交わることを表す．

(II) (4) の場合，行列式は常に 0 であり，このとき，3 直線はすべて平行であるか一致するかである．

以上の考察により，与えられた行列式が 0 であるのは

(i) 3 直線が 1 点で交わる

(ii) 3 直線が平行である

(iii) 3 直線が一致する

のいずれかの場合である．

p90–91：9

証明.

3 点 P_1，P_2，P_3 を通る平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とおく．このとき，

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax_1+by_1+cz_1+d=0 \\ ax_2+by_2+cz_2+d=0 \\ ax_3+by_3+cz_3+d=0 \end{cases}$$

が成立する．すなわちこれは

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

をみたす．これを a，b，c，d についての連立方程式とみたとき，与条件により自明でない解があり，

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成立する．これが証明すべきことであった． □

p90–91：10

証明.

必要性・十分性をそれぞれ証明する．

(1) A が正則かつ A^{-1} が整数行列であると仮定し，$\det A = \pm 1$ であることを示す．
A は整数行列であり，その行列式は，各要素の和と積でかけているから $\det A \in \mathbb{Z}$ である．同様にして $\det\left(A^{-1}\right) \in \mathbb{Z}$ である．逆行列の行列式は，

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$

であり，つまり $\det A, 1/\det A \in \mathbb{Z}$ である．これを満たす整数は ± 1 だけである．

(2) $\det A = \pm 1$ であることを仮定し，A が正則かつ A^{-1} が整数行列であることを示す．$\det A \neq 0$ より A の正則性がわかる．また，A の余因子行列を $\tilde{A}$ とすると，余因子は A の各要素の和と積によって表現される．つまり，余因子は整数であるから $\tilde{A}$ は整数行列である．また

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$$

となる．$\det A = \pm 1$ であり，余因子は整数であるから，A^{-1} は整数行列である．

以上の議論により証明された． □

p90–91：11

p90–91：11-(イ)

証明.

${}^tA_\sigma$ は $(j,\sigma(j))$ 成分が 1 でそれ以外が 0 である行列である．いま $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
{}^tA_\sigma A_\sigma &= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= E
\end{aligned}
$$

となり，A は直交行列である． □

p90–91：11-(ロ)

証明.

置換 σ，τ に関して

$$
a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=\sigma(j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=\tau(j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

と定義する．このとき，

$$
(A_\sigma A_\tau)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.
$$

b_{jk} が 1 になるのは $j=\tau(k)$ のときなので，

$$
(A_\sigma A_\tau)_{ik} = a_{i,\tau(k)}.
$$

さらに，$a_{i,\tau(k)}$ が 1 になるのは $i=\sigma(\tau(k))$ のときなので，

$$
(A_\sigma A_\tau)_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=\sigma\tau(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.
$$

これは $A_{\sigma\tau}$ の定義そのものなので，

$$
A_\sigma A_\tau = A_{\sigma\tau}.
$$

□

p90–91：11-(ハ)

証明.

$\tau = \sigma^{-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
A_\sigma &= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{\tau^{-1}(1)1} a_{\tau^{-1}(2)2} \cdots a_{\tau^{-1}(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma).
\end{aligned}$$

これにより

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1 \iff A_\sigma = \pm 1.$$

□

第 4 章

p93：問

証明.
$|A \cup B|$ について，$|A \cap B|$ は A と B の共通部分の元の個数を考えているので，

$$
\begin{aligned}
&|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \\
&\therefore\ |A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|
\end{aligned}
$$

である．これが証明すべきことであった． □

p94：問

3 つのことを証明する．

反射律について 明らかに，A に基本変形を施して A 自身にすることができる．
対称律について P を (m,m) 型の基本行列，Q を (n,n) 型の基本行列として，

$$A = PBQ$$

とかくと，P，Q は正則なので，P^{-1}，Q^{-1} が存在し，

$$B = P^{-1}AQ^{-1}$$

とかける．よって，対称律が成り立つことが示された．
推移律について P_1，P_2 を (m,m) 型の基本行列，Q_1，Q_2 を (n,n) 型の基本行列として，

$$A = P_1BQ_1, \quad B = P_2CQ_2$$

とかく．このとき，P_1，Q_1 は正則だから，${P_1}^{-1}$，${Q_1}^{-1}$ が存在し，

$$B = {P_1}^{-1}A{Q_1}^{-1}$$

となる．これにより，

$${P_1}^{-1}A{Q_1}^{-1} = P_2CQ_2$$

となり，同様の議論によって

$$A = P_1P_2CQ_2Q_1$$

となり，推移律も成り立つことが示された． □

さて，行列 A に基本変形を施すと，A の階数を r として $F_{m,n}(r)$ が得られることと，r は 0 から $\min\{m,n\}$ までの整数値を取り得るので，商集合の元の個数は

$$\min\{m,n\} + 1$$

となる．

p106–107：問 1

求める $E \to F$ の取り替え行列を $P = (p_{ij})$ とし，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

とする．ここで，

$$\boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ji}\boldsymbol{e}_j = p_{1i}\boldsymbol{e}_1 + p_{2i}\boldsymbol{e}_2 + p_{3i}\boldsymbol{e}_3$$

であり，$i = 1, 2, 3$ の場合についての連立方程式を作ると

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{11}\boldsymbol{e}_1 + p_{21}\boldsymbol{e}_2 + p_{31}\boldsymbol{e}_3 \\ f_2 &= p_{12}\boldsymbol{e}_1 + p_{22}\boldsymbol{e}_2 + p_{32}\boldsymbol{e}_3 \\ f_3 &= p_{13}\boldsymbol{e}_1 + p_{23}\boldsymbol{e}_2 + p_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

これを解くことにより

$$\begin{aligned} &p_{11} = \frac{9}{2}, \quad p_{21} = -\frac{1}{2}, \quad p_{31} = -\frac{1}{2}, \\ &p_{12} = 5, \quad p_{22} = -2, \quad p_{32} = 3, \\ &p_{13} = \frac{13}{2}, \quad p_{23} = -\frac{3}{2}, \quad p_{33} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

なので，

$$P = \begin{pmatrix} 9/2 & 5 & 13/2 \\ -1/2 & -2 & -3/2 \\ -1/2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

である．また

$$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)P$$

であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \\ P &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

から求めることもできる．

p106–107：問 2

まず,

$$\boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{2} p_{ji}\boldsymbol{e}_j = p_{1i}\boldsymbol{e}_1 + p_{2i}\boldsymbol{e}_2$$

である，これにより

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= p_{11}\boldsymbol{e}_1 + p_{21}\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{f}_2 &= p_{12}\boldsymbol{e}_1 + p_{22}\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= p_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= p_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{22}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり，これにより

$$p_{11} = -1, \quad p_{21} = 1, \quad p_{12} = -1, \quad p_{22} = 2$$

であるから，基底の取り替え $E \to F$ の行列は

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である.

p107–108：問 1

p107–108：問 1-(イ)

この集合を W_1 とおくと，W_1 は $\mathbb{C}^n$ の部分空間をなす．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in W_1$$

であるから，$W_1 \neq \varnothing$ である．

また，

$$\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2, \ldots, v_n), \quad \boldsymbol{w} = {}^t(w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

とおくと，

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = {}^t(v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$$

となり，これに加えて

$$(v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + \cdots + (v_n + w_n) = (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) + (w_1 + w_2 + \cdots + w_n) = 0 + 0 = 0$$

となるから，$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W_1$ である．さらに，$a \in \mathbb{C}$ をとると，

$$a\boldsymbol{v} = {}^t(av_1, av_2, \ldots, av_n)$$

であり，

$$av_1 + av_2 + \cdots + av_n = a(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = a \cdot 0 = 0$$

であるから，このとき $a\boldsymbol{v} \in W_1$ である．

以上により，W_1 は $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間をなす．

p107–108：問 1-(ロ)

この集合を W_2 とおくと，W_2 は $\mathbb{C}^n$ の部分空間をなす．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in W_2$$

であるから，$W_2 \neq \varnothing$ である．

また，

$$\boldsymbol{v} = {}^t(v_{p+1}, v_{p+2}, \ldots, v_n), \quad \boldsymbol{w} = {}^t(w_{p+1}, w_{p+2}, \ldots, w_n)$$

とおくと，

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = {}^t(v_{p+1} + w_{p+1}, v_{p+2} + w_{p+2}, \ldots, v_n + w_n)$$

であり，

$$\begin{aligned}&(v_{p+1} + w_{p+1}) + (v_{p+2} + w_{p+2}) + \cdots + (v_n + w_n)\\ =&(v_{p+1} + v_{p+2} + \cdots + v_n) + (w_{p+1} + w_{p+2} + \cdots + w_n)\\ =&0 + 0\\ =&0\end{aligned}$$

となるため，このとき $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W_2$ である．

また，

$$a\boldsymbol{v} = {}^t(av_{p+1}, av_{p+2}, \ldots, av_n)$$

であり，

$$av_{p+1} + av_{p+2} + \cdots + av_n = a(v_{p+1} + v_{p+2} + \cdots + v_n) = a \cdot 0 = 0$$

であるため，このとき $a\boldsymbol{v} \in W_2$ である．

以上により，W_2 は $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間をなす．

p107–108：問 1-(ハ)

これは部分空間をなさない．

$$\boldsymbol{v} = {}^t(1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{w} = {}^t(0, 1, 0, \ldots, 0)$$

とすると

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = {}^t(1, 1, 0, \ldots, 0)$$

となり，与えられた条件式に当てはめると

$$1^2 + 1^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = 2 \neq 1$$

であるから，この集合は $\mathbb{C}^n$ の部分空間でない．

p107–108：問 1-(ニ)

この集合を W_3 とおくと，W_3 は $\mathbb{C}^n$ の部分空間をなす．
$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とすると，

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$$

であるため，$W_3 \neq \varnothing$ である．
さて，$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ が条件を満たすとすると，内積の定義から

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}) = 0$$

である．また，$c \in \mathbb{C}$ とすると，

$$(\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = 0$$

である．
以上により，W_3 は $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間をなす．

p107–108：問 2

p107–108：問 2-(イ)

この集合を W_1 とおくと，W_1 は $\mathbb{K}^n$ の線型部分空間とならない．
たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$A, B \in W_1$ であるが，

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，$A + B$ は正則行列である．よって W_1 は $\mathbb{K}^n$ の線型部分空間とならない．

p107–108：問 2-(ロ)

この集合を W_2 とおくと，W_2 は $\mathbb{K}^n$ の線型部分空間となる．
$X = O$ としたとき，$AO = OB$ が成り立つのは明らかなので，$W_2 \neq \varnothing$ である．
また，$X, Y \in W_2$ とすると，

$$A(X + Y) = (X + Y)B$$

が成立し，さらに $a \in \mathbb{K}$ とすると，

$$A(aX) = (aX)B$$

が成立する．
以上により，W_2 は $\mathbb{K}^n$ の線型部分空間である．

p107–108：問 2-(ハ)

この集合を W_3 とおくと，これは $\mathbb{K}^n$ の線型部分空間とならない．
たとえば

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$A^2 = O, \quad B^2 = O$$

となり，$A, B \in W_3$ であるが，

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，これは冪零行列とならない．よって W_3 は $\mathbb{K}^n$ の線型部分空間とならない．

p107–108：問 2-(ニ)

この集合を W_4 とおくと，これは $\mathbb{K}^n$ の線型部分空間とならない．
たとえば，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおき，$1/2 \in \mathbb{K}$ をとると，

$$\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

となり，これは W_4 の元ではない．よって W_4 は $\mathbb{K}^n$ の線型部分空間とならない．

p122：問

まず，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおく．正規直交基底のひとつを $\boldsymbol{e}_1$ とすると，$\|\boldsymbol{a}_1\| = \sqrt{2}$ により，

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．また，

$$\boldsymbol{a}_2' = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$$

とすると，

$$\boldsymbol{a}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である．これを用いると，

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_2'\|}\boldsymbol{a}_2' = \frac{1}{\sqrt{6}/2} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．また，

$$\boldsymbol{a}_3' = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$$

とすると，

$$\boldsymbol{a}_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となり，

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_3'\|}\boldsymbol{a}_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．

以上の考察により，求める正規直交基底は

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．

p124：問-1)

証明.

任意に $\boldsymbol{x} \in W$ をとる．$W^{\perp}$ は「W の任意のベクトルと直交するベクトル全体の集合」であるから，$\boldsymbol{x} \in W$ に対しては，任意の $\boldsymbol{y} \in W^{\perp}$ において $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ が成り立つ．

ゆえに，任意の $\boldsymbol{x} \in W$ は $W^{\perp}$ の元全てと直交することになり，したがって $\boldsymbol{x} \in (W^{\perp})^{\perp}$ が従う．このことから

$$W \subset (W^{\perp})^{\perp}$$

が得られる．また，定理 [4.7] から

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim(W + W^{\perp}) + \dim(W \cap W^{\perp}),$$
$$\dim W + \dim W^{\perp} = n.$$

ここで定理 [6.4] から $\mathbb{R}^n$ の計量空間 V は $W \dot{+} W^{\perp}$ と表されること，[4.8] から，この直和の共通部分は $\{\boldsymbol{o}\}$ のみであることを用いた．□

第 4 章・章末問題

p127–130：1

$s, t, u, v \in \mathbb{R}$ とし．

$$s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 = u\boldsymbol{a}_3 + v\boldsymbol{a}_4$$

とおく．これにより，

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{o},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{o},$$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (a \text{ は任意の定数})$$

とかけるので，$W_1 \cap W_2$ の次元は 1 であり，その基底は

$$s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 = -a \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

により，

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．

p127–130：2

W_1 に関して，$x_3 = s$，$x_4 = t$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とかけるため，$\dim W_1 = 2$ であり，その基底は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．W_2 に関しても同様にして，$\dim W_2 = 2$ であり，その基底は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．したがって $W_1 + W_2$ は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によって生成される．

ここで，

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$

とすると，

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$

となり，これに基本変形を施すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$

となる．したがって，$W_1 + W_2$ の次元は 3 であり，その基底は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．

p127–130：5

A，B の定める線型写像をそれぞれ T_A，T_B とする．$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(T_A + T_B)$ を任意にとると，ある $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ が存在して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (T_A + T_B)(\boldsymbol{y}) \\ &= T_A(\boldsymbol{y}) + T_B(\boldsymbol{y}) \quad (\because T_A \text{ と } T_B \text{ は線型写像}). \end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{Im}(T_A + T_B) \subset \mathrm{Im}\, T_A + \mathrm{Im}\, T_B \tag{$*$}$$

これにより，

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(T_A + T_B) &= \dim(\mathrm{Im}(T_A + T_B)) && (\because \text{階数の定義}) \\ &\leqq \dim(\mathrm{Im}(T_A) + \mathrm{Im}(T_B)) && (\because (*)) \\ &\leqq \dim(\mathrm{Im}(T_A)) + \dim(\mathrm{Im}(T_B)) && (\because \text{定理 [4.7]}) \\ &= \mathrm{rank}(T_A) + \mathrm{rank}(T_B). && (\because \text{階数の定義}) \end{aligned}$$

これを書き換えると

$$\mathrm{rank}(A + B) \leqq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

これが証明すべきことであった．

p127–130：6

p127–130：6-(イ)

証明.

BA は n 次の正方行列である．ここで,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(BA) &\leqq \min\{\operatorname{rank}B, \operatorname{rank}A\}\\ &= m < n\end{aligned}$$

であるから，$\operatorname{rank}(BA) < n$ である．よって BA は正則行列でない． □

p127–130：6-(ロ)

証明.

AB が正則であるとする．$m = \operatorname{rank}AB \leqq \min\{\operatorname{rank}A, \operatorname{rank}B\}$ であるから，$m \leqq \operatorname{rank}A$ かつ $m \leqq \operatorname{rank}B$ である．一方 $\operatorname{rank}A \leqq m$，$\operatorname{rank}B \leqq m$ でもあるから $m = \operatorname{rank}A = \operatorname{rank}B$ である．

行列 X の定める線形写像を T_X と書くことにする（$T_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$，$T_B\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ である）．

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}AB &= \dim(T_{AB}(\mathbb{C}^m))\\ &= \dim((T_A \circ T_B)(\mathbb{C}^m)).\end{aligned}$$

$W = T_B(\mathbb{C}^m)$ とおく．T_A の定義域を W に制限した写像 $T_A \restriction W : W \to \mathbb{C}^n$ について次元定理を適用すると,

$$\dim W = \dim((T_A \restriction W)(W)) + \dim((T_A \restriction W)^{-1}(\{o_m\})).$$

ここで,

$$\begin{aligned}(T_A \restriction W)^{-1}(\{o_m\}) &= \{x \in W : (T_A \restriction W)(x) = o_m\}\\ &= \{x \in W : T_A(x) = o_m\}\\ &= \{x \in \mathbb{C}^n : T_A(x) = o_m\} \cap W\\ &= {T_A}^{-1}(\{o_m\}) \cap W.\end{aligned}$$

であるから,

$$m = \dim((T_A \circ T_B)(\mathbb{C}^m)) + \dim({T_A}^{-1}(\{0_m\}) \cap W).$$

となる．よって,

$$\operatorname{rank}AB = m - \dim({T_A}^{-1}(\{o_m\}) \cap W).$$

だから $\dim({T_A}^{-1}(\{o_m\}) \cap W) = 0$ である．以上より,

(I) $m = \operatorname{rank}A = \operatorname{rank}B$.

(II) $\dim({T_A}^{-1}(\{o_m\}) \cap T_B(\mathbb{C}^m)) = 0$.

は必要条件である．一方，(I) かつ (II) を仮定すると，$\operatorname{rank}AB = m$ であるから AB は正則でもある．よって (I) かつ (II) が必要十分条件である． □

p127–130：7

証明.

$M_n(\mathbb{K})$ の基底 $\langle \boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{12}, \dots, \boldsymbol{e}_{1n}, \boldsymbol{e}_{21}, \dots, \boldsymbol{e}_{nn} \rangle$ を，$\boldsymbol{e}_{ij}$ の (i,j) 成分が 1 で，その他の成分は 0 であるものとして定義する．

$X = (x_{ji}) \in M_n(\mathbb{K})$ を取り，$A = (a_{ij})$ を $a_{ij} = T\boldsymbol{e}_{ji}$ であるものとすれば，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AX) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} T\boldsymbol{e}_{11} & T\boldsymbol{e}_{12} & \dots & T\boldsymbol{e}_{1n} \\ T\boldsymbol{e}_{21} & T\boldsymbol{e}_{22} & \dots & T\boldsymbol{e}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T\boldsymbol{e}_{n1} & T\boldsymbol{e}_{n2} & \dots & T\boldsymbol{e}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} x_{11}T\boldsymbol{e}_{11} + x_{12}T\boldsymbol{e}_{12} + \cdots + x_{1n}T\boldsymbol{e}_{1n} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{n1}T\boldsymbol{e}_{n1} + \cdots + x_{nn}T\boldsymbol{e}_{nn} \end{pmatrix}\right) \\
&= \sum_{1 \leqq i,j \leqq n} x_{ij} T\boldsymbol{e}_{i,j} \\
&= T\left(\sum_{1 \leqq i,j \leqq n} x_{ij}\boldsymbol{e}_{ij}\right) \\
&= T(X)
\end{aligned}
$$

となり，上記のように A をとればよい． □

p127–130：8

例 7 をふまえ，

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned}\|f-g\|^2&=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2\,dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\,dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}2f(x)g(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\,dx\end{aligned}$$

である．さらに，第 2 項と第 3 項に関連して，

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx=a_0\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\,dx=2\pi{a_0}^2+\pi\sum_{k=1}^{n}({a_k}^2+{b_k}^2).$$

これらを用いると，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2\,dx&=2\pi{a_0}^2+\pi\sum_{k=1}^{n}({a_k}^2+{b_k}^2)\\&\quad-2\left(a_0\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\right)\right)\\&\quad+\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\\&=2\pi\left(a_0-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\right)^2+\pi\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(a_k-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\right)^2\right.\\&\quad\left.+\left(b_k-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\right)^2\right\}+R.\end{aligned}$$

ただし，

$$R=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx-2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\right)^2-\pi\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\right)^2+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\right)^2\right).$$

ï したがって，$\|f-g\|^2$ を最小にする $g(x)$ は，

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\right)\cos kx+\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\right)\sin kx\right).$$

p127–130：12

p127–130：12-(イ)

証明.

ベクトル空間 V に対して，V の線型汎函数全体の集合を V^* とする．

V の基底 $E = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ に対して，V^* の元 $\boldsymbol{f}_i$ を $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ とする．$E^* = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n \rangle$ は V^* の基底である．

任意の $\boldsymbol{f}_i \in V^*$ が線型結合で表されることを示す．

$$(c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{f}_n)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

とする．ここで $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i \quad (1 \leqq i \leqq n)$ を代入すると，$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ となり，$c_i = 0$ と併せると

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

となり線型独立である．

次に，V^* の元が $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ の線型結合で表されることを示す．

V^* の元 $\boldsymbol{f}$ が V の元 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ に対して $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_j) = a_i \quad (1 \leqq i \leqq n)$ とすると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i) && (\because f \text{ の線型性}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{f}_i(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) && (\because \ \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{i,j}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{f}_i \right)(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

と $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ の線型結合として表される．

以上により，E^* は V^* の基底である． □

p127–130：12-(ロ)

証明.

W^* の元 $\boldsymbol{f} = c_1\boldsymbol{f}_1' + \cdots + c_n\boldsymbol{f}_n'$ をとる．V の元 $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k$ に対して

$$
\begin{aligned}
(T^*\boldsymbol{f}')(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{f} \circ T(\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k\boldsymbol{f}_k' \circ T\left(\sum_{l=1}^{n} x_l\boldsymbol{e}_l\right) && (\because \boldsymbol{f}' \text{ の線型性}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k\boldsymbol{f}_k'\left(\sum_{l=1}^{n} x_l T(\boldsymbol{e}_l)\right) && (\because T \text{ の線型性}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{l=1}^{n} x_l\boldsymbol{f}_k'(a_{1l}\boldsymbol{e}_1' + a_{2l}\boldsymbol{e}_2' + \cdots + a_{nl}\boldsymbol{e}_n') \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{l=1}^{n} x_l a_{kl} && (\because \text{双対基底の定義と } \boldsymbol{f}_k' \text{ の線型性}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_K \sum_{l=1}^{n} c_{kl}\boldsymbol{f}_l(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) && (\because \text{双対基底の定義と } \boldsymbol{f}_l' \text{ の線型性}) \\
&= \left(\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k a_{kl}\right)\boldsymbol{f}_l\right)(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

より，基底 E^*，F^* に関する T^* の表現行列 $B = (b_{ij})$ は

$$
\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} c_k a_{k1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} c_k a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}
$$

より，$b_{ij} = a_{ji}$ となり，$B = {}^tA$ である． □

p127–130：9

証明.

この写像を φ とする．まず，φ が線型写像であることを示す．

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して，$\forall \boldsymbol{f} \in V^*$ で

$$\begin{aligned}(\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{f}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \\ &= (\varphi(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{f}) + (\varphi(\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{f}) \\ &= (\varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{f})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi(c\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{f}) &= \boldsymbol{f}(c\boldsymbol{x}) \\ &= c\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ &= c(\varphi(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{f}) \\ &= (c\varphi(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{f})\end{aligned}$$

であるから，φ は線型写像である．

次に，V の基底 $E = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ に対して，$\boldsymbol{e}'_i = \varphi(\boldsymbol{e}_i)$ (ただし $1 \leqq i \leqq n$) としたとき，$(E^*)^* = \langle \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n \rangle$ が $(V^*)^*$ の基底であることを示す．

$E^* = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n \rangle$ を E の双対基底とする．$c_1\boldsymbol{e}'_1 + c_2\boldsymbol{e}'_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}'_n = \boldsymbol{0}$ となるとき，φ は線型写像で $\varphi(c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n) = c_1\boldsymbol{e}'_1 + c_2\boldsymbol{e}'_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}'_n$ であるので，

$$\begin{aligned}(c_1\boldsymbol{e}'_1 + c_2\boldsymbol{e}'_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}'_n)(\boldsymbol{f}_i) &= \boldsymbol{f}_i(c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{ik} \\ &= c_i = 0\end{aligned}$$

となり，$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ であるから，$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ は線型独立であり，$\dim(V^*)^* = n$ より $(E^*)^*$ は基底である．とくに φ の階数は n となる．適当な基底での φ の表現行列 A に対して p.117 の (3) により，$r(A) = n$ となり，これは φ が全単射対応を与えることを示す． □

p127–130：10

p127–130：10-(イ)

証明.

(1)，(2) で双線型性，(3) で対称性，(4) で正値性を証明する．

(1)

$$\begin{aligned}(f, g_1 + g_2)_p &= \int_a^b p(x)f(x)\{g_1(x) + g_2(x)\}\,dx \\ &= \int_a^b p(x)f(x)g_1(x)\,dx + \int_a^b p(x)f(x)g_2(x)\,dx \\ &= (f, g_1)_p + (f, g_2)_p.\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2, g)_p &= \int_a^b p(x)\{f_1(x) + f_2(x)\}g(x)\,dx \\ &= \int_a^b p(x)f_1(x)g(x)\,dx + \int_a^b p(x)f_2(x)g(x)\,dx \\ &= (f_1, g)_p + (f_2, g)_p.\end{aligned}$$

(2) c は任意の実数とする．

$$\begin{aligned}(cf, g)_p &= \int_a^b p(x)\{cf(x)\}g(x)\,dx \\ &= c\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx \\ &= c(f, g)_p.\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}(f, cg)_p &= \int_a^b p(x)f(x)\{cg(x)\}\,dx \\ &= c\int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx \\ &= c(f, g)_p.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(f, g)_p &= \int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx \\ &= \int_a^b p(x)g(x)f(x)\,dx \\ &= (g, f)_p.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(f, f)_p &= \int_a^b p(x)f(x)f(x)\,dx \\ &= \int_a^b p(x)\{f(x)\}^2\,dx \\ &\geq 0. \qquad\qquad (\because\ p(x) \text{ は常に正})\end{aligned}$$

等号が成立するのは $f(x) = 0$ のとき．

(1) から (4) の考察により，$(f, g)_p$ は内積の定義をみたす． □

附録 III

p228：問

p228：問-(イ)

以下により，求める最大公約数は x^2+x-1 である．

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 1 \\
\hline
x^4+3x^3-3x+1 & x^5+2x^4 \qquad\qquad +x-1 \\
 & x^5+3x^4 \qquad -3x^2 +x \\
\cline{2-2}
 & \quad -x^4 \qquad +3x^2 \qquad -1 \\
 & \quad -x^4-3x^3 \qquad +3x-1 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 3x^3+3x^2-3x
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x - 1 \\
\hline
x^2+x-1 & x^4+3x^3 \qquad -3x+1 \\
 & x^4 + x^3 - x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 2x^3 + x^2 - 3x \\
 & \quad 2x^3+2x^2-2x \\
\cline{2-2}
 & \qquad -x^2 - x+1 \\
 & \qquad -x^2 - x+1 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

p228：問-(ロ)

以下により，これらは互いに素である．

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 1 \\
\hline
x^2-2x-3 & x^3 - x^2-4x+4 \\
 & x^3-2x^2-3x \\
\cline{2-2}
 & \qquad x^2 - x+4 \\
 & \qquad x^2-2x-3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad x+7
\end{array}
$$

p239：問 1

p239：問 1-(イ)

計算すると以下のようになる：

$$\begin{aligned}{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_j x_k \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) \quad = s_1^2 - 2s_2.\end{aligned}$$

p239：問 1-(ロ)

計算すると以下のようになる：

$$\begin{aligned}{x_1}^3 + {x_2}^3 + \cdots + {x_n}^3 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^3 - 3\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_i x_j\right) + 3\sum_{1\leqq i<j<k\leqq n} x_i x_j x_k \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3 - 3(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) \\ &\quad + 3(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) \\ &= s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3.\end{aligned}$$

p239：問 2

p239：問 2-(イ)

《補題》

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

まず，

$$(x-y)+(y-z)+(z-x)=0.$$

これをふまえ，補題において $a=x-y$，$b=y-z$，$c=z-x$ とおくと，

$$\begin{aligned}&0 = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 - 3(x-y)(y-z)(z-x) \\ &\therefore\ (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x).\end{aligned}$$

p239：問 2-(ロ)

《補題》

$a+b+c=0$ のとき，

$$a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca).$$

《補題》

$a+b+c=0$ のとき，

$$a^5+b^5+c^5 = -5abc(a^2+b^2+c^2).$$

上記の 2 つの補題により，

$$\begin{aligned}(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5 &= -5(x-y)(y-z)(z-x)\{(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)\}\\ &= -5(x-y)(y-z)(z-x)\{(xy+xz+yz)-(x^2+y^2+z^2)\}\\ &= 5(x-y)(y-z)(z-x)\{(x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)\}.\end{aligned}$$

p249：問

p249：問-(イ)

証明.

体 K の単位元について，$0=0+0$ であるから，

$$
\begin{aligned}
&a0 = a(0+0) = a0 + a0 \\
&\therefore\ a0 = a0 + a0
\end{aligned}
$$

K は加法について可換群であるから，$a0$ の逆元 $-a0$ が K に存在する．これを用いると，

$$
\begin{aligned}
&a0 + (-a0) = a0 + a0 + (-a0) \\
&\therefore\ 0 = a0 + a0 + (-a0)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
a0 + a0 + (-a0) &= a0 + \{a0 + (-a0)\} \\
&= a0 + 0 \\
&= a0
\end{aligned}
$$

となるから，$0 = a0$ である．$0 = 0a$ についても同様． □

p249：問-(ロ)

証明.

$a \neq 0$ とする．このとき，a の逆元 $a^{-1} \in K$ が存在し，$ab=0$ の両辺に a^{-1} をかけると，

$$
\begin{aligned}
a^{-1}(ab) &= a^{-1}0 \\
(a^{-1}a)b &= 0 \\
1b &= 0 \\
\therefore\ b &= 0
\end{aligned}
$$

である．これと $b \neq 0$ を仮定したときの同様の考察により，$ab=0$ のとき，$a=0$ または $b=0$ である． □

p255：1

証明.

$a, b, c \in H$ について，G の演算により，$a(bc) = (ab)c$ が成り立ち，このことから結合法則は成立する．

また，仮定より $H \neq \varnothing$ なので，$x \in H$ をひとつとり，$a = x$，$b = x$ とすると，

$$ab^{-1} = xx^{-1} = e$$

となり，仮定から e は H の元である．よって H は単位元を持つ．

次に，$a = e$，$b = x$ とすると，

$$ab^{-1} = ex^{-1} = x^{-1}$$

となり，仮定により x^{-1} は H の元である．よって H の任意の要素は逆元を持つ．

上の考察により，どの要素も逆元を持つので，$a = x$，$b = y^{-1}$ とすると，

$$ab^{-1} = x(y^{-1})^{-1} = xy.$$

これは H の元であるから，H は G の演算について閉じている．

以上の考察から，

- H は G の演算について閉じている
- H の元は G の演算について結合法則を満たす
- H は単位元 e を持つ
- H の任意の要素は逆元を持つ

ということがわかり，H は G の演算について G の部分群である．□

Column I

本題にはあまり関係のない余談ですが，群が単位元をもつことは群の定義からただちに従います．

参考文献

[1] 齋藤正彦『線型代数入門』，東京大学出版会，1966