

齋藤正彦・線型代数入門解答集

なまちゃん

2023 年 12 月 28 日

目次

目次

第 1 章

p5 : 問 1	2
p5 : 問 2	2
p7 : 問-(上)	3
p7 : 問-(下)	3
p8 : 問 1	4
p8 : 問 2	4
p10 : 問 1	5
p10 : 問 2	5
p11 : 問 1	6
p12 : 問 2	6
p12 : 問 3	6
p13 : 問 1	7
p18 : 問	8
p19 : 問 1	9
p19 : 問 2	9
p19 : 問 1-(下)	9
p19 : 問 2-(下)	10
p22 : 問 1	11

第 1 章・章末問題

p29-30 : 1	11
p29-30 : 2	13
p29-30 : 3	13
p29-30 : 4	14
p29-30 : 5	14
p29-30 : 7-(1)	15
p29-30 : 8	16
p29-30 : 9	16
p29-30 : 10	17

第 2 章

17

p34 : 問 1	17
p40 : 問	18
p41 : 問 1	19
p42 : 問 1	20
p52 : 問	22
p62 : 問 1	22
p62 : 問 2	22

第 2 章・章末問題

23

p70-73 : 1-イ)	23
p70-73 : 1-ロ)	24
p70-73 : 3-イ)	25
p70-73 : 4	26
p70-73 : 5	27
p70-73 : 6	28
p70-73 : 7	29
p70-73 : 8	30
p70-73 : 11	31
p70-73 : 14	32

第 3 章

33

p77 : 問 2	33
p77 : 問 3	33
p79 : 問	34

附録 III

35

p249 : 問	35
--------------------	----

第 1 章

p5 : 問 1

証明. 線分 PQ の中点を M とする. このとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \\ &= \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{2} \\ &= \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}\end{aligned}$$

である. \square

p5 : 問 2

証明. 三角形 PQR の重心を G, PQ の中点を N とする. G は線分 RN を 2:1 に内分する点なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OR} + \frac{2}{3}\overrightarrow{RN} \\ &= \boldsymbol{c} + \frac{2}{3}\left(\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2} - \boldsymbol{c}\right) \\ &= \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}}{3}\end{aligned}$$

である. \square

p7 : 問-(上)

求めるベクトルを, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) とおく. このとき, 内積の定義により,

$$\mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x + y + z = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = x + y + 4z = 1 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 3$$

これらの式から,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \\ \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

である.

p7 : 問-(下)

[1.4] の結果を利用する.

求める三角形の面積を S とし,

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{P_1 P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

とおく, このとき,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|^2 \|\overrightarrow{P_1 P_3}\|^2 - (\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \overrightarrow{P_1 P_3})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \{ [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2][(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2] \\ &\quad - [(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)]^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である,

p8 : 問 1

- イ 与えられた直線を l とする. l の方程式に $x = -2$ を代入すると, $y = 2$ となるため, l は点 $(-2, 2)$ を通る. また, l の法線ベクトルのひとつは, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ なので, l の方向ベクトルのひとつは, $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ である. よって, l のベクトル表示のひとつは, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t < \infty)$ である.
- ロ 与えられた直線を l' とする. l' の方向ベクトルのひとつは, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である. また, l' は点 $(3, 0)$ を通るので, そのベクトル表示のひとつは, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t < \infty)$ となる.

p8 : 問 2

- イ 与えられたベクトル表示から,

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{cases} t = \frac{x-1}{2} \\ t = y+1 \end{cases}$$

である. これから t を消去すると,

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} &= y+1 \\ \therefore x-2y-3 &= 0 \end{aligned}$$

である.

- ロ 点 $(-1, -2)$ を通り, x 軸に平行な直線を表すから, $y = -2$ が求める直線の方程式である.

p10 : 問 1

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

から,

$$-2x + 2z = 2$$

$$\therefore -x + z = 1$$

である. このとき, $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ はこれを満たす. このときの y の値を計算すると, それぞれ $-3, -5$ なので, 結局, 与えられた直線は 2 点 $(1, -3, 2), (2, -5, 3)$ を通る. すなわち, この直線の方角ベクトルのひとつは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. したがって求めるベクトル表示のひとつは, 直線上の任意の位置ベクトルを \boldsymbol{x} とすると,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せる.

p10 : 問 2

証明. t を $0 \leq t \leq 1$ をみたす実数, 線分 P_1P_2 上の任意の点の位置ベクトルを \boldsymbol{x} とする. このとき,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{P_1P_2} \\ &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= (1-t)\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

である. $1-t = t_1, t = t_2$ と改めておくと, t の定め方から $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$ であり,

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{x}_1 + t_2\boldsymbol{x}_2, \quad t_1 + t_2 = 1$$

となり, これが証明すべきことであつた. \square

p11 : 問 1

与えられた平面を (S) とおく. (S) は 3 点 $(-1, 0, 1)$, $(2, 0, -1)$, $(0, -1, 0)$ を通るので,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と改めておくと,

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり, $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$ は線型独立なので, 求めるベクトル表示のひとつは,

$$(S): \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t, s < \infty)$$

p12 : 問 2

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 - t - 2s \\ z = 0 + 2t + s \end{cases}$$

から t と s を消去して,

$$x - y - z = -1$$

これが求める直線の方程式である.

p12 : 問 3

証明.

$$\overrightarrow{OP_1} = \mathbf{x}_1, \quad \overrightarrow{OP_2} = \mathbf{x}_2, \quad \overrightarrow{OP_3} = \mathbf{x}_3$$

とする. このとき, 三角形 $P_1P_2P_3$ 上の任意の点の位置ベクトルを \mathbf{x} , s, t を $0 \leq s, t \leq 1$ を満たす実数とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + s(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + t(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \\ \therefore \mathbf{x} &= (1 - s - t)\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2 + t\mathbf{x}_3 \end{aligned}$$

となり, $1 - s - t = t_1$, $s = t_2$, $t = t_3$ と改めて書き直すと, s, t の定め方より, $0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1$ であり

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + t_3\mathbf{x}_3, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

となる. これが証明すべきことであつた. \square

p13 : 問 1

問 1 :

$(S_1), (S_2)$ の法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とおくと,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. ゆえに, 交角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると,

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_1\| \|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{4}$ である.

p18 : 問

証明. A, B, C が 2×2 行列の場合を証明する.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

とし, A, B, C の成分はすべて複素数であるとする. このとき,

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk &cej + dgj + cfl + dhl \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. 他方

$$\begin{aligned} A(BC) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aei + afk + bgi + bhk & aej + afl + bgj + bhl \\ cei + cfk + dgi + dhk &cej + cfl + dgj + dhl \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, たしかに $(AB)C = A(BC)$ である. \square

p19 : 問 1-(上)

証明.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

となり, これは明らかに線型変換である. 対応する行列は, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である. \square

p19 : 問 2-(上)

証明. 式 (15) より, 2×2 行列 A , B とベクトル \boldsymbol{x} について,

$$\begin{aligned} T_B(T_A(\boldsymbol{x})) &= B(A\boldsymbol{x}) \\ &= (BA)\boldsymbol{x} \\ &= T_{BA}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

である. これが証明すべきことであつた. \square

p19 : 問 1-(下)

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと, (17) 式より,

$$\begin{aligned} T\boldsymbol{x} &= \frac{ax + by}{a^2 + b^2} \boldsymbol{a} \\ &= \begin{pmatrix} a^2x + aby \\ abx + b^2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

であるから,

$$T = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

となる.

p19 : 問 2-(下)

イ 証明. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} T\mathbf{x} &= \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \mathbf{a} \\ &= \frac{a_1x + a_2y}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. つまり, $T = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ である. このとき,

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)^2} \begin{pmatrix} a_1^4 + a_1^2a_2^2 & a_1^3a_2 + a_1a_2^3 \\ a_1^3a_2 + a_1a_2^3 & a_2^4 + a_1^2a_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} = T \end{aligned}$$

となり, $T^2 = T$ である. $S^2 = S$ も同様にして示される. \square

ロ 証明. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とする. このとき, \mathbf{a} と \mathbf{b} が直交することから,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= 0 \\ \therefore a_1b_1 + a_2b_2 &= 0 \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} TS &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \frac{1}{(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 \\ b_1b_2 & b_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix} = O \\ &\quad (\because a_1b_1 + a_2b_2 = 0) \end{aligned}$$

である. 同様に ST を計算すると, $ST = O$ であることもわかり, これで $TS = ST = O$ が証明された. \square

ハ 証明. イ), ロ) の文字や結論を用いると,

$$\begin{aligned} T\mathbf{x} + S\mathbf{x} &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 \\ a_1a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 \\ b_1b_2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) & (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \\ (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) & (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

となる. これが証明すべきことであった. \square

p22 : 問 1

イ

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

となり, これは y 軸に関する対象点に移す変換を表す.

ロ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{pmatrix}$$

となり, これは x 軸まわりに角 α だけ回転する変換を表す.

ハ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

第 1 章・章末問題

p29-30:1

証明. 四面体 $P_1P_2P_3P_4$ を考える. 三角形 $P_2P_3P_4$ の任意の周および内部の点を T とする. $0 \leq k \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ をみたす $k, s \in \mathbb{R}$ によって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_2T} &= k\{s\overrightarrow{P_2P_3} + (1-s)\overrightarrow{P_2P_4}\} \\ &= ks(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) + k(1-s)(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2) \\ &= -k\mathbf{x}_2 + ks\mathbf{x}_3 + k(1-s)\mathbf{x}_4 \end{aligned}$$

と表される.

さて, 線分 P_1T 上の任意の点を Q とすると, $0 \leq t \leq 1$ をみたす $t \in \mathbb{R}$ によって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1Q} &= t\overrightarrow{P_1T} \\ &= t\overrightarrow{P_2T} - t\overrightarrow{P_2P_1} \\ &= t(-k\mathbf{x}_2 + ks\mathbf{x}_3 + k(1-s)\mathbf{x}_4) - t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &= -t\mathbf{x}_1 + (t - kt)\mathbf{x}_2 + kst\mathbf{x}_3 + kt(1-s)\mathbf{x}_4 \end{aligned}$$

と表されるから, $k = 4$ のときの求める位置ベクトルは,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + \overrightarrow{P_1Q} \\ &= (1-t)\mathbf{x}_1 + (t-kt)\mathbf{x}_2 + kst\mathbf{x}_3 + kt(1-s)\mathbf{x}_4 \end{aligned}$$

となり,

$$(1-t) + (t-kt) + kst + kt(1-s) = 1$$

であるから, $1-t = t_1$, $t-kt = t_2$, $kst = t_3$, $kt(1-s) = t_4$ とおくと,

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + t_3\mathbf{x}_3 + t_4\mathbf{x}_4, \quad t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 0, \quad t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1$$

となり、ここまでで $k = 4$ の場合が示された。

ここで、 $n \geq 4$ として $k = n$ のときに主張が成り立つと仮定する。このとき、

$$t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + t_n \mathbf{x}_n$$

は仮定により多面体 $\{P_n\}$ の内部の点であり、これを簡単のために \mathbf{X}_n とおく。

さて、 $\{P_n\}$ の点と P_{n+1} とを結ぶ線分上の点は、 $0 \leq l \leq 1$ をみたす $l \in \mathbb{R}$ によって、

$$l \overbrace{(t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + t_n \mathbf{x}_n)}^{\mathbf{X}_n} + (1-l) \mathbf{x}_{n+1}, \quad t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$$

とかける。ここで、

$$l(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) + (1-l) = 1$$

なので、 $\{P_n\}$ の点と P_{n+1} とを結ぶ線分上の点はこのように表せる。

逆に、

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + t_n \mathbf{x}_n + t_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}, \quad t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1} \geq 0, \quad t_1 + t_2 + \cdots + t_n + t_{n+1} = 1$$

としたとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + t_n \mathbf{x}_n}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n} \cdot (t_1 + t_2 + \cdots + t_n) + t_{n+1} \mathbf{x}_{n+1} \\ &= T_n \mathbf{X}_n + t_{n+1} \mathbf{x}_{n+1} \end{aligned}$$

と変形できる。ただし $T_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$ とおいた。

さて

$$\frac{\mathbf{X}_n}{T_n} = \frac{t_1 \mathbf{x}_1}{T_n} + \frac{t_2 \mathbf{x}_2}{T_n} + \cdots + \frac{t_n \mathbf{x}_n}{T_n}$$

であることと

$$\begin{aligned} \frac{t_1}{T_n} + \frac{t_2}{T_n} + \cdots + \frac{t_n}{T_n} &= \frac{T_n}{T_n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

であることにより、

$$\frac{\mathbf{X}_n}{T_n}$$

は、多面体 $\{P_n\}$ の内部の点であり、

$$T_n \cdot \frac{\mathbf{X}_n}{T_n} + t_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}$$

は多面体 $\{P_n\}$ の内部の点と P_{n+1} を結ぶ線分上の点である。

よって、 $k = n$ のときも問題の主張が成り立つ。

以上の考察により証明された。□

p29-30:2

証明. 2点 P_1, P_2 を通る直線の方程式を $ax + by + 1 = 0$ (ただし $(a, b) \neq (0, 0)$) とおく. このとき,

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

が成立する. すなわちこれは

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

をみたら. これを a, b, c についての連立方程式とみたとき, 与条件により自明でない解があり,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が成立する. 転置行列の行列式はもとの行列の行列式に等しいので, 行列式の交代性なども用いて,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

を得る. これが証明すべきことであつた. \square

p29-30:3

点を以下の順で移動させる変換を考える.

- (1) 原点中心に $-\theta$ 回転させる.
- (2) x 軸に関して対称移動させる.
- (3) 原点中心に θ 回転させる.

ここで, (1) から (3) までの変換を表す行列をそれぞれ $R_{-\theta}, A_x, R_\theta$ とすると,

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

となる. よって, この変換を表す行列は

$$\begin{aligned} R_\theta A_x R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

p29-30:4

証明. 以下では、直線 $y = \tan \theta$ に関する折り返しを T_θ とかくことにする.

さて、直線 $y = \tan(\theta/4)x$ に関する折り返しは、

$$T_{\theta/4} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

で表される.

また、直線 $y = \tan(-\theta/4)x$ に関する折り返しは、

$$T_{-\theta/4} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

で表される.

ここで、

$$\begin{aligned} T_{\theta/4}T_{-\theta/4} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、これは原点のまわりに θ 回転する行列を表す.

以上の考察により証明された. \square

p29-30 : 5

任意の点 $P(p)$, $p \in \mathbb{R}^3$ を平面 (a, x) に対して折り返すことを考える.

点 P から (a, x) におろした垂線の足は、 $t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$p + t \frac{a}{(a, a)}$$

と表せ、これが平面 (a, x) 上にあるので、

$$(a, p + t \frac{a}{(a, a)}) = 0$$

$$\therefore t = -(a, p)$$

である.

また、求める点を $P'(p')$ とすると、

$$\begin{aligned} p' &= p + t \frac{2a}{(a, a)} \\ &= p - \frac{2(a, p)}{(a, a)} a \end{aligned}$$

であるから、これはたしかに V^3 の線型変換を引き起こし、その変換公式は

$$x \mapsto x - \frac{2(a, x)}{(a, a)} a$$

である,

p29-30:7-(1)

a, b, c が張る平行六面体の体積は,

$$|\det(a, b, c)|$$

で与えられる.

一方, この平行六面体の O, B, C を含む面の面積は,

$$\|b \times c\|$$

で与えられる.

以上の考察により, 求める長さは,

$$\frac{|\det(a, b, c)|}{\|b \times c\|}$$

である.



p29-30 : 8

証明.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

一方,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1(a_2b_3 - b_2a_3) + c_2(a_3b_1 - b_3a_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

であるから, これと行列式の積の性質により,

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{vmatrix} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$$

 である. \square

p29-30:9

$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ は, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ の張る平行六面体の体積に符号をつけたものに等しい. 与条件より, $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ が最大になるのは, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ の張る図形が立方体のときであり, そのとき

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 1$$

である. これからただちに $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ の最小値が -1 であることも従う.

以上により, $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ の最大値は 1 , 最小値は -1 である.

p29-30 : 10

イ 証明. 単位ベクトル e_1, e_2, e_3 を適当にとり,

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{c} = \gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \alpha_1 \beta_2 \mathbf{e}_3 \times (\gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \alpha_1 \beta_2 \gamma_1 \mathbf{e}_2 - \alpha_1 \beta_2 \gamma_2 \mathbf{e}_1 \\ &= -(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \mathbf{b} \end{aligned}$$

であり, これが証明すべきことであつた^{†1}.

ロ イ) の結果により,

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= -(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \mathbf{b}, \\ (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} &= -(\mathbf{c}, \mathbf{a}) \mathbf{b} + (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \mathbf{c}, \\ (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= -(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{c} + (\mathbf{c}, \mathbf{b}) \mathbf{a}. \end{aligned}$$

であるから,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

となる. これが証明すべきことであつた. \square

^{†1} この等式をラグランジュの恒等式とよぶ.

第2章

p34 : 問1

証明. 後半二つの主張は明らか. また, 二つ目の主張は一つ目の主張と同様にして示すことができるので, 一つ目のみ示すことにする.

$A = (a_{pq})$ を $k \times l$ 行列, $B = (b_{qr})$, $C = (c_{qr})$ を $l \times m$ 行列とする. 示したい式の両辺がともに定義され, ともに $k \times m$ 行列であることはよい. 行列 $B + C$ の (q, r) 成分は $b_{qr} + c_{qr}$ であるから, 左辺の (p, r) 成分は,

$$\sum_{q=1}^l a_{pq} (b_{qr} + c_{qr}) = \sum_{q=1}^l a_{pq} b_{qr} + \sum_{q=1}^l a_{pq} c_{qr}$$

とかける. この等号の右辺は AB の (p, r) 成分と AC の (p, r) 成分の和である. これより, 主張が示された. \square

p40 : 問

イ

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ O & A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

p41 : 問 1

$$(1) \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \text{ とする. このとき,}$$

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 2x_{11} + 4x_{21} & 2x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix}$$

となり, これが E_2 と等しくなるためには

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 2x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 2x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases}$$

となることが必要かつ十分であるが, これを満たす $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{C}$ は存在しない. よって前半の主張が示された.

$$\text{後半について示す. } Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \text{ とする. このとき,}$$

$$YA = \begin{pmatrix} y_{11} + 2y_{12} & 2y_{11} + 4y_{12} \\ y_{21} + 2y_{22} & 2y_{21} + 4y_{22} \end{pmatrix}$$

となり, これが E_2 と等しくなるためには

$$\begin{cases} y_{11} + 2y_{12} = 1 \\ 2y_{11} + 4y_{12} = 0 \\ y_{21} + 2y_{22} = 0 \\ 2y_{21} + 4y_{22} = 1 \end{cases}$$

となることが必要かつ十分であるが, これを満たす $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} \in \mathbb{C}$ は存在しない. よって後半の主張も示された. \square

$$(2) \quad X, Y \text{ を (1) で定義したものとする. このとき,}$$

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, これが B と等しくならないことは明らか.

後半について,

$$YA = \begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} \\ x_{21} & 2x_{21} \end{pmatrix}$$

となり, これが B と等しくなるためには $x_{11} = 1, x_{21} = 2$ となることが必要かつ十分であるが, x_{12}, x_{22} については任意の複素数である. 以上の議論により, このような Y は無限に存在する. \square

$$(3) \quad A \text{ の第 } k \text{ 列の成分が全て } 0 \text{ であるとする. ただしここで } 1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N} \text{ であるとする.}$$

$XA = E$ をみたす X が存在すると仮定する. このとき, X は明らかに $n \times n$ 行列であり, 積 XA は定義される. いま $X = (x_{jk}), A = (a_{kj}), 1 \leq j, k \leq n$ と表す. このとき,

$$(XA \text{ の } (j, j) \text{ 成分}) = \sum_{k=1}^n x_{jk} a_{kj} = 0$$

となり, これは $XA = E$ に矛盾する. よってこのような X は存在しないことが示された. \square

p42 : 問 1

(1) まず,

$$\overline{A} \overline{A^{-1}} = \overline{AA^{-1}} = E, \quad \overline{A^{-1}} \overline{A} = \overline{A^{-1}A} = E$$

より, \overline{A} は正則で, 逆行列は $\overline{A^{-1}}$ である. さらに,

$${}^t A {}^t A^{-1} = {}^t (A^{-1} A) = E, \quad {}^t A^{-1} {}^t A = {}^t (A A^{-1}) = E$$

であるから, ${}^t A$ は正則であり, 逆行列は ${}^t A^{-1}$ である.

(2)

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' := \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$AA' = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$$

である. $AA' = E$ となる条件は, x, y, z, w についてのふたつの連立方程式

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

が解を持つことで, その条件は $ad - bc \neq 0$ である. そのときの解は,

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{d}{ad - bc}, -\frac{b}{ad - bc}, -\frac{c}{ad - bc}, \frac{a}{ad - bc} \right)$$

である. これを用いて $A'A$ を計算すると, $A'A = E$ となり, たしかに A' は A の逆行列である.以上の議論により, $ad - bc \neq 0$ となることが必要十分条件である.

(3) 計算する.

イ (2) の結果により,

$$\frac{1}{3 \cdot 3 - 2 \cdot 4} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

が求める逆行列である.

□ まず,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

としたときに

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} + x_{12} & -x_{11} + 3x_{12} + x_{13} \\ x_{21} & 2x_{21} + x_{22} & -x_{21} + 3x_{22} + x_{23} \\ x_{31} & 2x_{31} + x_{32} & -x_{31} + 3x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、これに関して

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 2x_{11} + x_{12} & -x_{11} + 3x_{12} + x_{13} \\ x_{21} & 2x_{21} + x_{22} & -x_{21} + 3x_{22} + x_{23} \\ x_{31} & 2x_{31} + x_{32} & -x_{31} + 3x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となれば、行列 X が求める逆行列である.

計算すると

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これが求める逆行列であった.

八 まず,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

としたとき,

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ x_{34} & x_{33} & x_{32} & x_{31} \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & x_{41} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、これに関して

$$\begin{pmatrix} x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} \\ x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ x_{34} & x_{33} & x_{32} & x_{31} \\ x_{44} & x_{43} & x_{42} & x_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となれば、行列 X が求める逆行列である.

計算すると,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、これが求める逆行列であった.

p52 : 問

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{\text{第 1 行の } (-2) \text{ 倍, 第 1 行の 2 倍をそれぞれ第 2 行, 第 3 行に加える}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を交換する}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{\text{第 2 行の } (-3) \text{ 倍を第 1 行に加え, 第 3 行の } (-4) \text{ 倍を第 1 行に加える}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{\text{第 3 行の 2 倍を第 2 行に加え, 第 3 行を } (-1) \text{ 倍する}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

よって, 求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である.

p62 : 問 1

証明. 定義に従って計算すると,

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) \\
&= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) \\
&= 2((x, x) + (y, y)) \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

となり, これが証明すべきことであった. \square

p62 : 問 2

証明.

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$$

である. ここで, x と y が直交することから,

$$(x, y) + (y, x) = (x, y) + \overline{(x, y)} = 0$$

であり, これを用いると

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

となる. x, y がともに実ベクトルのときは $(x, y) = 0$ であるから確かに逆が成り立つが, たとえば

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix}$ とすれば, 等式は成り立つが x と y は直交しないため, 逆は成り立たない. \square

第2章・章末問題

p70-73 : 1-イ)

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第1行と第2行を交換する}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & -6 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{(1,1) \text{ をかなめとして左から第1列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第3行を}(-1)\text{倍して第2行と交換し, } (2,2) \text{ をかなめとして左から第2列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & | & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{(3,3) \text{ をかなめとして左から第3列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & | & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第4行を}(-1)\text{倍して, } (4,4) \text{ をかなめとして第4列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

よって、求める逆行列は、

$$\begin{pmatrix} 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

p70-73 : 1-口)

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(1,1) \text{ をかなめとして第 1 列を掃き出す}} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(2,2) \text{ をかなめとして第 2 列を掃き出す}} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(3,3) \text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -13 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{(3,3) \text{ をかなめとして第 3 列を掃き出す}} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

よって、求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

p70-73 : 3-イ)

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 1 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 2 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{第 3 列を掃き出す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

である。ゆえに

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である。だから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

p70-73 : 4

与えられた行列を A とする.

A の第 1 列に, 第 2 列から第 n 列までを足して変形すると,

$$\begin{pmatrix} (n-1)x+1 & x & x & \cdots & x \\ (n-1)x+1 & 1 & x & \cdots & x \\ (n-1)x+1 & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)x+1 & x & x & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

ここで, この行列の第 2 行から第 n 行までの各行から第 1 行を引くと,

$$\begin{pmatrix} (n-1)x+1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{pmatrix}$$

となるので, 行列 A の階数は, $x=1$ のとき 1 , $x=-1/(n-1)$ のとき $n-1$, それ以外の場合は n である.

p70-73 : 5

証明. A が正則でないと仮定すると,

$$Ax = 0$$

をみたす $x \in \mathbb{C}^n$ が存在する.

また, $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ とし, x_1, x_2, \dots, x_n の中で絶対値が最大のものを x_p とする.

Ax の p 行を考えると,

$$\begin{aligned} a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p + \cdots + a_{pn}x_n &= 0 \\ \therefore x_p &= -(a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n) = - \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} a_{pi}x_i \end{aligned}$$

となる.

ここで,

$$\begin{aligned} |x_p| &\leq \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} |a_{pi}| |x_i| \\ &< \sum_{\substack{i \neq p \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}}} \frac{1}{n-1} |x_i| \\ &< \frac{n-1}{n-1} \cdot |x_p| = |x_p| \end{aligned}$$

と計算でき, $|x_p| < |x_p|$ となり, これは矛盾である.

よって, 先の過程が誤りであり, このとき A は正則である. \square

p70-73 : 6

イ 計算すると,

$$AA^{k-1} = A^{k-1}A = E$$

なので, A は正則である.

□ A が正則であるとする, A^{-1} が存在して,

$$A^{-1}A^2 = A^{-1}A$$

$$A = E$$

となるが, これは矛盾であるため, A は正則でない.

ハ A が正則であるとする,

$$E = (A^{-1}A)^k$$

$$= A^{-k}A^k$$

$$= O$$

となるが, これは矛盾であるため, A は正則でない.

二 k を用いて, A^k を考えると

$$E = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})$$

であり, 逆からかけても同じであるため, $E - A$ は正則であり,

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

である.

また,

$$E = (E + A)(E - A + A^2 - \cdots + A^{k-1})$$

であり, 逆からかけても同じなので, $E + A$ は正則であり,

$$(E + A)^{-1} = E - A + A^2 - \cdots + A^{k-1}$$

である.

p70-73 : 7

証明. $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ とする. ここで, XY の (i, i) 成分は $\sum_{j=1}^n x_{ij}y_{ji}$ であるから,

$$\operatorname{tr}(XY) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}y_{ji} \right)$$

となる. YX については, 同様の議論により,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(YX) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_{ij}x_{ji} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_{ji}y_{ij} \right) \end{aligned}$$

である. ここで, i と j をおきかえれば,

$$\operatorname{tr}(YX) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_{ij}y_{ji} \right) \quad (1)$$

となる. これより,

$$\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX) \quad (2)$$

を得て, これとトレースの線型性により $\operatorname{tr}(XY - YX) = 0$ であるが, $\operatorname{tr}(E_n) = n \neq 0$ であるため, これは矛盾である.

ゆえに, $XY - YX = E_n$ となる n 次行列 X, Y は存在しないことが示された. \square

p70-73 : 8

証明. 行列 B の階数を r とすると, m 次正則行列 P , n 次正則行列 Q によって,

$$PBQ = F_{m,n}(r)$$

と表せる.

これにより,

$$ABQ = AP^{-1}F_{m,n}(r)$$

とかける. A_{11} を r 次の行列として,

$$AP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad F_{m,n}(r) = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

とかくと,

$$\begin{aligned} AP^{-1}F_{m,n}(r) &= AP^{-1}Q \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とかけ, A_{11} の定義により, ABQ の階数は r 以下となる. いま Q は基本行列の積なので, AB の階数も r 以下である.

行列 A についても同様に示せる.

以上の議論により, 行列 AB の階数は行列 A , 行列 B の階数以下であることが証明された.

□

p70-73 : 11

イ ${}^tPP = E$ を加味して $(P \pm E)$ の転置行列を考えると

$${}^t(P \pm E) = {}^tP \pm {}^tPP = {}^tP^t(E \pm P)$$

となり, これを用いると,

$$\begin{aligned} {}^tA &= {}^t\{(P - E)(P + E)^{-1}\} \\ &= {}^t(P + E)^{-1}{}^t(P - E) \\ &= (E + {}^tP)^{-1}{}^tP^tP(E - P) \\ &= \{{}^tP(P + E)\}^{-1}{}^tP(E - P) \\ &= (P + E)^{-1}P^{-1}{}^tP(E - P) \\ &= (P + E)^{-1}(E - P) \\ &= -(P + E)^{-1}\{(P + E) - 2E\} \\ &= -(P + E)^{-1}(P + E) + 2E(P + E)^{-1} \\ &= -(P + E)(P + E)^{-1} + 2E(P + E)^{-1} \\ &= (-(P + E) + 2E)(P + E)^{-1} \\ &= -(P - E)(P + E)^{-1} = -A \end{aligned}$$

となり, これが証明すべきことであつた. \square

□ 計算すると,

$$\begin{aligned} E - A &= E - (P - E)(P + E)^{-1} \\ &= (P + E)(P + E)^{-1} - (P - E)(P + E)^{-1} \\ &= \{(P + E) - (P - E)\}(P + E)^{-1} \\ &= 2(P + E)^{-1} \end{aligned}$$

と変形でき, いま $(P + E)$ が正則だから, $2(P + E)^{-1}$ も正則であり,

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{2}(P + E)$$

である. \square

ハ まず,

$$\begin{aligned} E + A &= (P + E)(P + E)^{-1} + (P - E)(P + E)^{-1} \\ &= \{(P + E) + (P - E)\}(P + E)^{-1} \\ &= 2P(P + E)^{-1} \end{aligned}$$

であるから, これを用いると

$$(E + A)(E - A)^{-1} = 2P(P + E)^{-1} \frac{1}{2}(P + E) = P$$

となり, これが証明すべきことであつた. \square

p70-73 : 14

証明. 二つに分けて証明する,

イ) \Rightarrow ロ)

A が正則であると仮定すると, A^{-1} が存在し,

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x})$$

と変形できるから, $A\boldsymbol{x}$ が非負ベクトルであれば, \boldsymbol{x} も非負ベクトルである.

ロ) \Rightarrow イ)

まず, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ である \boldsymbol{x} が存在すると仮定する. このとき, $A(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ であるから, $A(-\boldsymbol{x})$ も非負ベクトルであり, 条件から \boldsymbol{x} , $-\boldsymbol{x}$ は非負ベクトルである. したがって $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となり, A は正則である.

また, 非負ベクトル \boldsymbol{x} を任意にとると,

$$\boldsymbol{x} = A(A^{-1}\boldsymbol{x})$$

も非負ベクトルであり, 条件から $A^{-1}\boldsymbol{x}$ も非負ベクトルである. ここで, A^{-1} が非負行列でないと仮定すると, ある単位ベクトル \boldsymbol{e}_j について, $A^{-1}\boldsymbol{e}_j$ が非負ベクトルでないことになり, \boldsymbol{x} が非負ベクトルであることに反する. これより A^{-1} は非負行列である.

以上の議論により証明された. \square

第3章

p77 : 問2

証明. S_n の偶置換全体の集合を A_n , 偶置換全体の集合を B_n とする. 置換は必ず奇置換か偶置換のいずれかであるから,

$$\begin{aligned} S_n &= A_n \cup B_n, \\ A_n \cap B_n &= \emptyset \end{aligned}$$

となる.

ここで,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると, τ は奇置換であり, $\sigma \in A_n$ のとき, $\tau\sigma \in B_n$ である. 同様に, $\rho \in B_n$ のとき, $\tau^{-1}\rho = \tau\rho \in A_n$ である. これらにより, 全単射

$$A_n \ni \sigma \mapsto \tau\sigma \in B_n$$

が存在し, 偶置換と奇置換は同数あり, その個数は $n!/2$ である. \square

p77 : 問3

$m \in \mathbb{N}$ とする.

(I) $n = 2m$ とかけるとき, この置換を互換の積で表すと,

$$(1, 2m)(2, 2m-1) \cdots (m, m+1)$$

となるため, 置換の符号は $(-1)^m$, すなわち

$$(-1)^{\frac{n}{2}}$$

となる.

(II) $n = 2m-1$ とかけるとき, この置換を互換の積で表すと,

$$(1, 2m-1)(2, 2m-2) \cdots (m-1, m+1)$$

となるため, 置換の符号は $(-1)^{m-1}$, すなわち

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

となる.

p79 : 問

イ) まず

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, $m \in \mathbb{N}$ として,

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n = 2m-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. また,

$$(\text{与式}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_1 a_2 \cdots a_n$$

だから,

$$(\text{与式}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n & (n = 2m \text{ のとき}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} - a_1 a_2 \cdots a_n & (n = 2m-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

ロ) 計算すると,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= a^3 + b^3 + c^3 - abc - bca - cab \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

となる.

附録 III

p249 : 問

イ 証明. 体 K の単位元について, $0 = 0 + 0$ であるから,

$$a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$$

$$\therefore a0 = a0 + a0$$

K は加法について可換群であるから, $a0$ の逆元 $-a0$ が K に存在する. これを用いると,

$$a0 + (-a0) = a0 + a0 + (-a0)$$

$$\therefore 0 = a0 + a0 + (-a0)$$

ここで,

$$a0 + a0 + (-a0) = a0 + \{a0 + (-a0)\}$$

$$= a0 + 0$$

$$= a0$$

となるから, $0 = a0$ である. $0 = 0a$ についても同様. \square

ロ 証明. $a \neq 0$ とする. このとき, a の逆元 $a^{-1} \in K$ が存在し, $ab = 0$ の両辺に a^{-1} をかけると,

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0$$

$$(a^{-1}a)b = 0$$

$$1b = 0$$

$$\therefore b = 0$$

である. これと $b \neq 0$ を仮定したときの同様の考察により, $ab = 0$ のとき, $a = 0$ または $b = 0$ である. \square

参考文献

- [1] 齋藤正彦『線型代数入門』, 東京大学出版会, 1966