杉浦・解析入門解答集

なまちゃん

2023 年 12 月 2 日

目次

第 1 章：実数と連続

p2：問 1

(1)

証明. $0, 0' \in K$ がともに加法単位元の性質を満たすとする．
このとき，0 が加法単位元の性質をもつことから，

$$0' + 0 = 0'$$

同様に，$0'$ が加法単位元の性質をもつことから，

$$0 + 0' = 0$$

交換律より，$0 + 0' = 0' + 0$ なので，

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

これからただちに加法単位元の一意性が従う． □

(2)

証明. $a, b \in K$ とし，

$$a + b = 0$$

とする．このとき，

$$-a = -a + 0 = -a + (a + b) = (-a + a) + b = 0 + b = b$$

となり，加法逆元の一意性が従う． □

(3)

証明. $a \in K$ のとき，

$$a + (-a) = 0$$
$$\therefore (-a) + a = 0$$

他方，$-(-a)$ は $(-a)$ の加法逆元であるから，

$$(-a) + (-(-a)) = 0$$

これと逆元の一意性により，$a = -(-a)$ が従う． □

(5)

証明. $a \in K$ に対して，

$$a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$$

であるから，$-a$ が a の加法逆元であることと含めて主張が従う． □

(6)

証明. (4) の結果を用いる．$a=-1$ とすると，

$$(-1)(-1)=-(-1)=1$$

これが証明すべきことであった． □

(7)

証明. $a,b\in K$ に対して，

$$\begin{aligned}a(-b)+ab&=a((-b)+b)\\&=a0\\&=0\\\therefore\quad a(-b)&=-ab\end{aligned}$$

$(-a)b=-ab$ も同様にして示される． □

p3：問 2

(i)

証明. $a \leqq b$ の両辺に $-a$ を加えると，

$$0 \leqq b - a$$

を得る．
逆に，$0 \leqq b - a$ の両辺に a を加えると，

$$a \leqq b$$

を得る．
以上の考察により証明された． □

(ii)

証明. $a \leqq b$ の両辺に $-a$ を加えると，

$$0 \leqq b - a$$

となる．
この両辺に $-b$ を加えて，

$$-b \leqq -a$$

を得る．
逆に，$-b \leqq -a$ の両辺に b を加えると，

$$0 \leqq b - a$$

となる．この両辺に a を加えて，

$$a \leqq b$$

を得る．
以上の考察により証明された． □

p16-17：1-(i)

$a=0$ のときは明らかに 0 に収束するので，$a \neq 0$ とする．$2|a| \leq N$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとる．このとき，

$$\begin{aligned} 0 &< \left|\frac{a^n}{n!}\right| \\ &\leq \frac{|a|^n}{n!} \\ &= \frac{|a|^N}{N!} \cdot \frac{|a|}{N+1} \cdot \frac{|a|}{N+2} \cdots \frac{|a|}{n} \\ &\leq \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \end{aligned}$$

であるから，

$$-\frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

となり，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

である

p16-17：1-(ii)

$a=1$ のときは明らかに 1 に収束するので，まず $a>1$ のときを考える．$\delta_n > 0$ を用いて，

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$$

とおくことができる．両辺を n 乗すると

$$\begin{aligned} a &= 1 + n\delta_n + \frac{1}{2}n(n-1){\delta_n}^2 + \cdots + {\delta_n}^2 \\ &> 1 + n\delta_n \\ &> n\delta_n \end{aligned}$$

となり，$0 < \delta_n < \dfrac{a}{n}$ であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$$

となる．$a<1$ のときは，$a^{\frac{1}{n}} = \left(\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$ を使えば同じ結果が得られ，以上の議論により，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

となる．

p16-17：1-(iii)

$\dfrac{n}{2}$ 以下の最大の自然数を m とおく．与えられた式は，

$$(0 <)\ \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1) \cdots n}{n^n}$$

と表されるので，$\dfrac{(m+1) \cdot (m+2) \cdots n}{n^{n-m}} < 1$ であることと，$m \leq \dfrac{n}{2}$ から $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{1}{2}$ であることを用いると，

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1) \cdots n}{n^n} < \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{n^m} < \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

よって，

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

である．$n \to \infty$ のとき $m \to \infty$ なので，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

である．

p16-17：1-(iv)

のちに $n \to \infty$ の極限を考えることを考慮すると，

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= 1 + n + \frac{1}{2}n(n-1) + \cdots + n + 1 \\ &> \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

となり，この不等式から，

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$$

を得る．ここで，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

である．

p16-17：1-(v)

まず，

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

である．ここで，のちに $n \to \infty$ の極限を考えることを考慮すると，

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

であり，

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

を得る．ここで，はさみうちの原理を用いると，

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

である．

p16-17：2)

$n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$f_n(x) = \lim_{m \to \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}$$

とおく．ここで，$n!x \in \mathbb{Z}$ のとき，

$$\cos(n!\pi x) = \pm 1$$

$n!x \notin \mathbb{Z}$ のときは，

$$|\cos(n!\pi x)| < 1$$

であるから，

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (n!x \in \mathbb{Z}) \\ 0 & (n!x \notin \mathbb{Z}) \end{cases}$$

となる．さて，$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ であるならば，どんな $n \in \mathbb{N}$ に対しても，$n!x$ が整数とならない．また，$x \in \mathbb{Q}$ のとき，$x = \dfrac{p}{q}(p,\ q \in \mathbb{Z},\ q > 0)$ とすれば，n が q より十分大きいときに $n!x$ は整数となる．よって，

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{m \to \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} \right) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

p16-17：3)

《補題》

任意の $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ について，

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

が成り立つ．

証明. $n=2$ のときは三角不等式そのものであるから，$n \geq 3$ とし，$n-1$ 個の実数については補題の主張が成り立つものとする．

いま，

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+a_n$$

であるから，これに三角不等式を適用して，

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}|+|a_n|$$

を得る．ここで，数学的帰納法の仮定より，

$$|a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{n-1}|$$

がいえるので，ここまでの議論で，

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

は n の場合にも成り立つことが示され．以上の議論より補題の主張が従う． □

証明. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

となる．

また，

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| = \left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

と変形する．この右辺に補題を適用し，

$$\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right| \leq \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}$$

を得る．これにより，

$$n \geq N_1 \Longrightarrow \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{n_1-1}-a|}{n}+\left(\frac{n-n_1+1}{n}\right)\varepsilon$$

となる．ここで $N_2 := N_1+1$ とすると，$n \geq N_2$ であるとき $\left(\frac{n-n_1+1}{n}\right)\varepsilon < \varepsilon$ となることに注意する．

さて，

$$n \geq N_3 \Longrightarrow \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{n_1-1}-a|}{n} < \varepsilon$$

となるように $N_3 \in \mathbb{N}$ をとる．$N := \max\{N_2, N_3\}$ とすると，

$$n \geq N \Longrightarrow \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{n_1-1}-a|}{n}+\left(\frac{n-n_1+1}{n}\right)\varepsilon < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$$

であり，これより

$$n \geq N \Longrightarrow \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| < 2\varepsilon$$

となる．書き換えると．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

となり，これが証明すべきことであった． □

p31-33：1-(i)

$$\begin{aligned}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} &= \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}\\ &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$a_n = \dfrac{1}{6}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，$b_n = \left(2+\dfrac{1}{n}\right)$ とおくと，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は明らかに収束するから，定理 2.5(2) より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

である．また，アルキメデスの原理により， 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n_0 \in \mathbb{N}$ を $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ となるようにとることができ，このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \varepsilon$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ である．これより，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\\ &= \left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}\cdot\left\{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{6}(1+0)\cdot(2+0) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

p31-33：1-(ii)

《補題》

正数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束し，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

となるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

証明．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ であるから，r $(0 < r < 1)$ に対して，ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geq N_1 \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

が成り立つ．このとき，

$$a_n = a_{N_1}\cdot\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}}\cdot\frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+1}}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\frac{a_n}{a_{n-1}} < a_{N_1}r^{n-N_1} = \frac{a_{N_1}}{r^{N_1}}r^n$$

となる．$0 < r < 1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{N_1}}{r^{N_1}}r^n = 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である． □

$a_n = \dfrac{n^2}{a^n}$ とおく．$0 < a \leq 1$ のときは明らかに $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ となる．

$a > 1$ のとき，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}{a}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}{a} = \frac{1}{a} < 1$$

であるから，補題により，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる．以上の議論により，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a^n} = \begin{cases} \infty & (0 < a \leq 1) \\ 0 & (a > 1) \end{cases}$$

となる．

p31-33：1-(iii)

明らかに $\sqrt[n]{n} > 1$ なので，$\delta_n > 0$ を用いて，

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$$

とかける．両辺を n 乗して，$n \to \infty$ の極限を考えることを考慮すると，

$$\begin{aligned} n = (1+\delta_n)^n &= 1 + n\delta_n + \frac{1}{2}n(n-1){\delta_n}^2 + \cdots + (\delta_n)^n \\ &> \frac{1}{2}n(n-1){\delta_n}^2 \end{aligned}$$

となり，この不等式から，

$$0 < \delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

を得る．ここで，はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

である．

p31-33：1-(iv)

$a_n = n^k e^{-n}$ とおく．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

ゆえに，補題により，

$$\lim_{n\to\infty} n^k e^{-n} = 0$$

である．

p31-33：1-(v)

$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ とおく．

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= e \cdot \frac{1}{e} = 1 \end{aligned}$$

である．

p31-33：1-(vi)

《補題》

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とし，$a_n > 0$ とする．もし $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であれば $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ である．また，もし $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ であるならば，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ である，

証明. 前半の主張のみ示せば後半の主張も同様に示せるので，前半のみ示す．与えられた条件により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$$

が成り立つ，ここで $\frac{1}{\varepsilon} = M$ とおくと，上の $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

となり，これより $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ が示された． □

《補題》

$c > 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^n} = 0$ である．

証明. $c > 1$ より，$\delta > 0$ を用いて $c = 1 + \delta$ とおける．このとき，のちに $n \to \infty$ の極限を考えることを考慮すると，

$$\begin{aligned} c^n &= (1+\delta)^n \\ &= 1 + n\delta + \frac{1}{2}n(n-1)\delta^2 + \cdots + \delta^n \\ &> 1 + n\delta \end{aligned}$$

このことから，$0 < \frac{1}{c^n} < \frac{1}{1+n\delta}$ であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^n} = 0 \ (c > 1)$$

である． □

$a_n = (c^n + c^{-n})^{-1}$ とおく．$c = 1$ のときは明らかに $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$ である．
$c > 1$ のとき，2 つの補題により，

$$\lim_{n\to\infty} (c^n + c^{-n}) = \infty$$

であるから，補題により $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (c^n + c^{-n})^{-1} = 0$ である．
$0 < c < 1$ のときは c の逆数を考えることにより同じ結論に帰着する．以上の議論により，

$$\lim_{n\to\infty} (c^n + c^{-n})^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (c = 1) \\ 0 & (c \neq 1) \end{cases}$$

である．

p31-33：2

証明．二項定理を用いて $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の一般項を展開すると，

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} \cdot \frac{1}{n^r} + \cdots \frac{n!}{n!} \cdot + \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

同様にして，a_{n+1} の展開式を得たとき，$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ であることにより，$r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，

$$
\frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) < \frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{r-1}{n+1}\right)
$$

が成立する．これと，a_{n+1} の展開式のほうが，正の項を一つ多く含むことから，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$
a_n < a_{n+1}
$$

が成立し，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加数列である．また，

$$
\begin{aligned}
a_n &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&< 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - 2^{-n}}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\
&= 3 - 2^{-n} \\
&< 3
\end{aligned}
$$

であるから，$a_n < 3$ となる．

また，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加数列であることから，任意の $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ に対して，

$$
a_n > a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2
$$

であるから，

$$
2 < e < 3
$$

を得る．また，

$$
\lim_{n\to\infty} a_n \leq e
$$

である．他方，

$$
\lim_{n\to\infty} a_n \geq a_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{r!}
$$

であるから，ここで $r \to \infty$ として，

$$
\lim_{n\to\infty} a_n \geq e
$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = e$ を得る．□

p49-50：1

証明. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ であるから，$0 < r < 1$ のとき，$r < k < 1$ に対して，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geq n_1 \Longrightarrow a_n < k^n$$

となる．ここで，定理 5.5(比較判定法) と $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ より，$\sum a_n$ は収束する．

$r > 1$ のとき，$1 > 0$ に対して，ある $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geq n_2 \Longrightarrow a_n > 1$$

が成り立ち，$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ となる．よって定理 5.1 系の対偶により $\sum a_n$ は発散する． □

p49-50：2-(i)

$$\frac{2n^2}{n^3+1} = \frac{2/3}{n+1} + \frac{4n/3 - 2/3}{n^2 - n + 1}$$

により

$$\begin{aligned}\sum \frac{2n^2}{n^3+1} &= \sum \frac{2/3}{n+1} + \sum \frac{4n/3 - 2/3}{n^2 - n + 1} \\ &> \sum \frac{2/3}{n+1} \to \infty\end{aligned}$$

となる．よってこの級数は発散する

p49-50：2-(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2} < \sum \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \left(< 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 3\right)$$

であるから，この級数は収束する．また

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$$

が $\alpha > 1$ のときに収束することを用いることもできる．

p49-50：2-(iii)

$a=1$ のとき，この級数は明らかに収束する．$a\neq 1$ のとき，a^x の $x=0$ のまわりでの Taylor 展開

$$a^x = 1 + (\log a)x + \frac{(\log a)^2}{2!}x^2 + O(x^3)$$

を用いて

$$\begin{aligned}\sum (a^{1/n}-1) &= \sum \left\{ \frac{\log a}{n} + \frac{(\log a)^2}{2!n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right\} \\ &> \sum \frac{\log a}{n} \to \infty\end{aligned}$$

となる．よってこの級数は $a=1$ のときは収束し，$a\neq 1$ のときは発散する．

p49-50：2-(v)

定理 5.7（ダランベールの収束判定）を用いる．$a_n = n/2^n$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

となることにより，この級数は収束する

p49-50：2-(viii)

$$\frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} > \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$$

であることから

$$\sum \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} > \sum \frac{1}{n} \to \infty$$

となる．よってこの級数は発散する．

p49-50：2-(x)

定理 5.7（ダランベールの収束判定）より $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1)^2}}{(n+2)^{(n+1)^2}}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} = \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}\frac{(n+1)^{n^2}}{(n+2)^{n^2}}\frac{(n+1)^{2n+1}}{(n+2)^{2n+1}} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n^2}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{2n+1}\end{aligned}$$

ここで

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n(n+2)}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{-2n}$$

とすることにより，右辺は $e \times 1 = e$ に収束する．
さらに，

$$\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{2n+1} = \left\{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right\}^{-2}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{-3}$$

とすることで，右辺は $\dfrac{1}{e^2} \times 1 = \dfrac{1}{e}$ に収束する．よって

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \times \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e} < 1$$

となる．ゆえにこの級数は収束する．

p49-50：3

証明. $\sum a_n$ が絶対収束するので，$\sum |a_n|$ も収束する．よって，定理 5.1 系より，$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ となる．このとき，$1 > 0$ に対して，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geq n_1 \Longrightarrow ||a_n| - 0| < 1$$

が成り立つ．また，$|a_n| < 1$ のとき，

$$0 \leq \left|{a_n}^2\right| \leq |a_n|^2 \leq |a_n|$$

が成り立つ．ここで，$\sum |a_n|$ が収束し，各項は正なので， 定理 5.5(比較判定法) により，$\sum \left|{a_n}^2\right|$ も収束する．ゆえに $\sum {a_n}^2$ は絶対収束する． □

p49-50：5

証明. 与えられた条件により，$0 < r < c, r \neq \infty$ をみたす $r \in \mathbb{R}$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geq N \Longrightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < r$$

が成り立つ．これにより，

$$\begin{aligned} &0 < -r + c < \frac{a_n}{b_n} < r + c \\ &\therefore\ (-r+c)b_n < a_n < (r+c)b_n \end{aligned}$$

となる．これと比較原理により，$\sum a_n$ と $\sum b_n$ は同時に収束，発散することが証明された． □

p49-50：6

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ により，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ は収束する．ここで，

$$1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1}$$

の両辺を 0 から 1 まで x で積分すると，

$$\begin{aligned} \overbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}}^{s_n} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4} + R_n \end{aligned}$$

である．ただしここで $R_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1}\,dx$ とおいた．この式から，

$$\begin{aligned} \left|s_n - \frac{\pi}{4}\right| &= \left|\int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1}\,dx\right| \\ &< \int_0^1 x^{2n}\,dx \\ &= \frac{1}{2n+1} \to 0\ (n \to \infty) \end{aligned}$$

である．よって，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

である．

p63-64：1-(i)

$f(a)$ を考えるため，$a \neq 0$ としてよい．$\delta \leq \dfrac{|a|}{2}$ とすると，$|x-a|<\delta$ より

$$|x| > |a| - \delta \geq \frac{|a|}{2}$$

である．これに留意すると，

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a-x|}{|ax|} < \frac{2\delta}{|a|^2}$$

であるから，$\delta = \min\{|a|/2, |a|^2\varepsilon/2\}$ でよい．

p63-64：1-(iii)

$t := \min\{x, a\}$ とする．このとき，指数法則により，

$$|e^x - e^a| = e^t(e^{|x-a|} - 1)$$

が成立する．また，$t \leq a$ であるから，

$$e^t \leq e^a$$
$$\therefore\ e^t(e^{|x-a|} - 1) \leq e^a(e^{|x-a|} - 1)$$

ゆえに，

$$\varepsilon = e^a(e^\delta - 1)$$

となればよい．すなわち，

$$\delta = \log\bigl(1 + e^{-a}\varepsilon\bigr)$$

である．

p63-64：2-(i)

$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$，$\left|\sin\dfrac{1}{y}\right| \leq 1$ であるから，

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leq |(x+y)| \leq |x| + |y| \to 0 \quad \bigl((x,y)\to 0\bigr)$$

である．よって，

$$\lim_{(x,y)\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$$

となる．

p63-64：2-(iii)

まず，$\log x^x = x\log x$ である．また，

$$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{1/x}$$

となる．ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0} 1/x = \infty$ であるから，ロピタルの定理が適用でき，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{1/x} &= \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to+0}(-x)\\ &= 0\end{aligned}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0} x^x &= \lim_{x\to+0} e^{\log x^x}\\ &= e^0 = 1\end{aligned}$$

となり，これが答である．

p63-64：2-(iv)

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to 0}\frac{1-\cos\bigl(x^2+y^2\bigr)}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0}\frac{1-\cos\bigl(r^2\bigr)}{r^2}\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1-(-2\sin^2(r^2/2)+1)}{r^2}\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{\sin^2(r^2/2)}{(r^2/2)^2}\cdot(r^2/2)\\ &= 1^2\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

を得て，これが答えである．

p63-64：3-(i)

以下，$\mathbb{Q}$ の閉包は $\mathbb{R}$ であることを示す．
$a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$U(a, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

すなわち，

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

となればよい．アルキメデスの原理により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\frac{1}{n} < 2\varepsilon$$

となる $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在する．また，n を分母とする有理数は数直線上に幅 $\dfrac{1}{n}$ で並んでいるから，

$$\frac{m}{n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

となる $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在する．
したがって $a \in \mathbb{R}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ となるため，

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

である．

p63-64：4-(i)

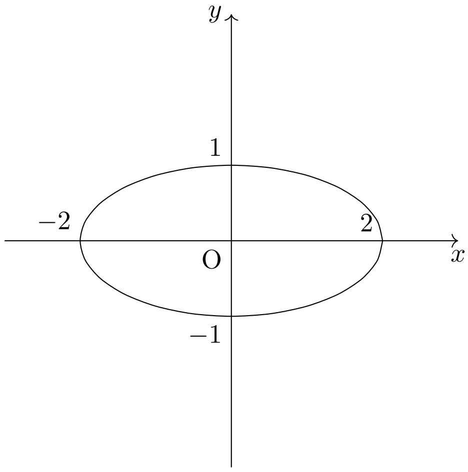
証明. $d(x) = 0$ は $\displaystyle\inf_{y \in A} |x - y| = 0$ ともかける．

$$\begin{aligned} \inf_{y \in A} |x - y| = 0 &\iff (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists y \in A)\ (|x - y| < \varepsilon) \\ &\iff x \in \overline{A} \end{aligned}$$

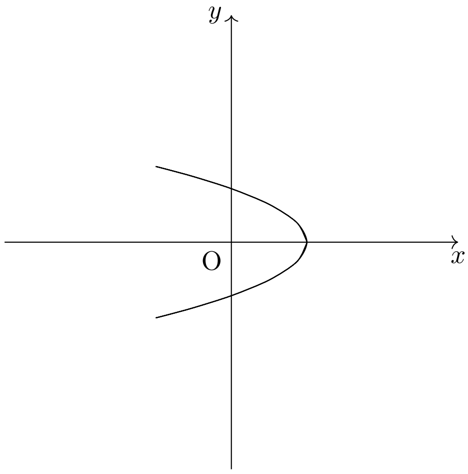
これにより示された． □

第 2 章：微分法

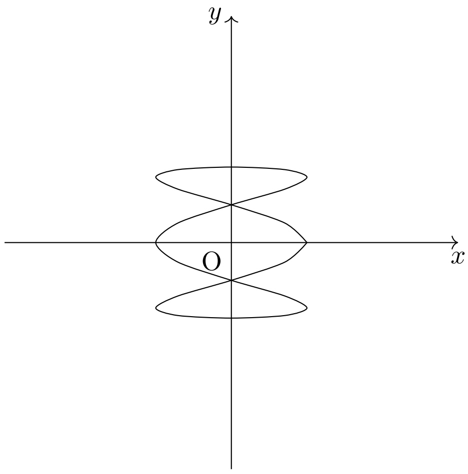
p90-91：1-(i)



p90-91：1-(ii)



p90-91：1-(iii)



p90-91：9-(i)

$$(\log x)^{(1)} = 1/x, \quad (\log x)^{(2)} = -1/x^2, \quad (\log x)^{(3)} = 2/x^3, \quad (\log x)^{(4)} = -6/x^4$$

であるから，

$$(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

と推測できる．この推測が正しいことを数学的帰納法により証明する．

(1) $n=1$ のとき，$(\log x)^{(1)} = 1/x$ であり，

$$\frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1} = 1/x$$

であるから，この場合に推測は正しい．

(2) $n=k$ のときに，この推測が正しいと仮定すると，

$$(\log x)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

である．ここで．

$$\begin{aligned}(\log x)^{(k+1)} &= \left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\right)' \\ &= \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\end{aligned}$$

であるから，$n=k+1$ のときも推測は正しい．

(1),(2) より，

$$(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

である．

$$\left(\frac{1}{x^2+3x+2}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\{(x+1)^{-n-1} - (x+2)^{-n-1}\}$$

p90-91：10

証明. $u(x) = (x^2-1)^n$ とおく，このとき，

$$U'(x) = 2xn(x^2-1)^{n-1}$$

だから，

$$(x^2-1)u'(x) = 2nx \cdot u(x)$$

この両辺を $(n+1)$ 回微分して，

$$(x^2-1)u^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xu^{(n+1)}x + \frac{(n+1)n}{2} \cdot u^{(n)}(x) = 2nxu^{(n+1)}(x) + 2(n+1)nu^{(n)}(x)$$
$$\therefore\ (x^2-1)u^{(n+2)}(x) + 2nu^{(n+1)}(x) - (n+1)nu^{(n)}(x) = 0$$

ここで，$u^{(n)}(x) = 2^n n! P_n(x)$ なので，

$$(x^2-1)\{2^n n! P_n''(x)\} + 2x\{2^n n! P_n(x)\} - n(n+1)\{2^n n P_n(x)\} = 0$$
$$\therefore\ (x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

□

p106-107：10

証明．3 つのことを証明する．

a) と b) が同値であること

$a < x \leqq y$ または $y \leqq x < a$ に対して，$0 \leqq t < 1$ を用いて，

$$x = ta + (1-t)y$$

とおく．$a < x \leqq y$ とする．このとき，

$$t = \frac{x-y}{a-y} \tag{1}$$

と表せることはよい．

また，f は I で凸であり，これは

$$f(x) = tf(x) + (1-t)f(x) < tf(a) + (1-t)f(y) \tag{2}$$

と同値である．$x < y$ のとき (2) に (1) の t の値を代入すれば，

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \tag{3}$$

を得る．$x = y$ のときは明らか．

a) と c) が同値であること

c) を仮定する．(3) の左辺について，平均値の定理により，

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$$

をみたす ξ $(a < \xi < x)$ が存在する．同様に，(3) の右辺について，平均値の定理により，

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\eta)$$

をみたす η $(x < \eta < y)$ が存在する．仮定により，$f'(\xi) \leqq f'(\eta)$ だから，(3) が成り立ち，a) が従う．

a)，すなわち (3) を仮定する．左辺について，$x \to +a$ とすれば，これは $f'(a)$ に収束し，右辺は，これは $(f(y)-f(a))/(y-a)$ に収束する（これを α とおく．）．$f'(a) \leqq \alpha$ となることはよい．また，$x \to -y$ とすれば，左辺は α に，右辺は $f'(y)$ に収束する．$\alpha \leqq f'(y)$ となることもよい．

よって，a) と c) は同値である．

a) と d) が同値であること

d) を仮定する．これは $f'(x)$ は I 上で単調増加であることと同値である．

以上の議論により，示された． □

第 3 章：初等函数

p191-193：1

証明. $m,\ n \in \mathbb{N},\ n > 0$ とし，$e = \dfrac{m}{n}$ と表される，すなわち e が有理数だと仮定する．このとき，与えられた式を変形して，

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{m}{n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

とする．これにより．

$$\frac{e^\theta}{n+1} = m \cdot n! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$$

であり，$m \cdot n! - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}$ であるから，$\dfrac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$ である．よって，$0 < \theta < 1,\ 2 < e < 3$ とあわせて，

$$1 \leq \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}$$

であり，$\dfrac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$ であるから $n = 1$ となる．ゆえに $e = m$ となり，e は整数である．しかし $2 < e < 3$ であるから，これは矛盾である．よって先の仮定が誤りであり，e は無理数である． □

第 4 章：積分法

p239：1-(i)

$\tan \dfrac{x}{2} = t$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx &= \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\, dt \\
&= \Big[\log\big(t^2+1\big)\Big]_0^1 \\
&= \log 2 - 0 = \log 2
\end{aligned}$$

p239：1-(ii)

$x-a=a\sin\theta\ (-\pi\leq\theta<\pi)$ とする置換を用いる．

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}\,dx &= \int_0^a \sqrt{-(x-a)^2+a^2}\,dx\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a|\cos\theta|\cdot a\cos\theta\,d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^2\cos^2\theta\,d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^2\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\\ &= \frac{1}{2}a^2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0\\ &= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

p239：1-(iii)

$$|\sin 2\theta| = \begin{cases}\sin 2\theta & (0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2}\text{のとき})\\ -\sin 2\theta & (\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi\text{のとき})\end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi |\sin 2\theta|\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\sin 2\theta)\,d\theta\\ &= \left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi\\ &= -\frac{(-1-1)}{2}+\frac{1+1}{2}=2\end{aligned}$$

p239：1-(iv)

$$\int_0^{\pi} e^{inx}\,dx = \begin{cases} 2\pi & (n=0\text{ のとき}) \\ 0 & (n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\text{ のとき}) \end{cases}$$

である．$n=0$ のときは

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{inx}\,dx &= \int_0^{2\pi} dx \\ &= \Big[x\Big]_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

となり，$n\neq 0$ のときは

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{inx}\,dx &= \left[\frac{e^{inx}}{in}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{in}(1-1) = 0\end{aligned}$$

となる．

p239：1-(v)

$m=n$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx &= \int_0^{2\pi}\cos mx\sin mx\,dx \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 2mx+\sin 0}{2}\right)dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2mx}{2m}\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

となる．$m\neq n$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(m+n)x+\sin(n-m)x}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

である，ここまでの議論と，m と n の対称性により，

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx = \int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\,dx = 0\ (n,m\in\mathbb{N})$$

となる．

p239：1-(vi)

$m \neq n$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(m+n)x + \cos(n-m)x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

となる．$m = n \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2mx}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2mx}{4m} \right]_0^{2\pi} = \pi\end{aligned}$$

となる．$m = n = 0$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} dx \\ &= [x]_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

となる，以上をまとめて，

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2\pi & (m = n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

p239：3-(i)

部分積分法を用いると，

$$\begin{aligned}\int x^\alpha \log x \, dx &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha \, dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C\end{aligned}$$

となり，これが答えである．

p239：3-(ii)

部分積分法を用いると，

$$\begin{aligned}\int x^n e^x\,dx &= x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx \\ &= x^n e^x - nx^{n-1}e^x + (n-1)\int x^{n-2}e^x\,dx \\ &= \cdots = x^n e^x - nx^{n-1}e^x + \cdots + (-1)^n n!\int e^x\,dx \\ &= e^x(x^n - nx^{n-1} + \cdots + (-1)^n n!) + C\end{aligned}$$

となる．

p239：3-(iii)

部分積分法を用いると，

$$\begin{aligned}\int (\log x)^n\,dx &= \int (\log x)^n (x)'\,dx \\ &= x(\log x)^n - n\int \frac{(\log x)^{n-1}}{x}\cdot x\,dx \\ &= x(\log x)^n - nx(\log x)^{n-1} + (n-1)\int \frac{(\log x)^{n-2}}{x}\cdot x\,dx \\ &= \cdots = x(\log x)^n - nx(\log x)^{n-1} + \cdots + x(-1)^n n! + C\end{aligned}$$

となり，これが答えである．

p239：3-(iv)

部分積分法を用いると，

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx &= \int (x)'\arcsin x\,dx \\ &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

であり，これが答えである．

p239：3-(v)

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ なので，

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

である．

p239：3-(vii)

$x+1=t$ とおくと，$dt=dx$ であり，

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3}\,dx &= \int \frac{(t-1)^2+2}{t^3}\,dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}+\frac{3}{t^3}\right)dt \\ &= \log|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2(x+1)^2} + C\end{aligned}$$

となり，これが答えである．

p239：3-(vi)

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ であることを用いて，

$$\begin{aligned}\int \frac{(\log x)^2}{x}\,dx &= \int (\log x)^2 (\log x)'\,dx \\ &= \frac{(\log x)^3}{3} + C\end{aligned}$$

となり，これが答えである．

p239：3-(viii)

$\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ なので，

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx &= \int \sin^3 x(1-\sin^2 x)\,dx = \int (\sin^3 x - \sin^5 x)\,dx \\ &= \int (\sin^2 x - \sin^4 x)\sin x\,dx \\ &= \int \{(1-t^2)-(1-t^2)^2\}(-1)\,dt \quad (\cos x = t) \\ &= \int (t^4 - t^2)\,dt \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

である．

p239：3-(ix)

$\sqrt[6]{x} = t$ とおくと，$x = t^6$ であるから，$\dfrac{dx}{dt} = 6t^5$ である．これらを用いると，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\,dx &= \int \frac{1}{t^3 - t^2} \cdot 6t^5\,dt \\ &= \int \frac{6t^3}{t-1}\,dt \\ &= \int \frac{(t-1)(6t^2+6t+1)+6}{t-1}\,dt \\ &= \int \left(6t^2 + 6t + 6 + \frac{6}{t-1}\right)\,dt \\ &= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\log\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C\end{aligned}$$

である

p239-240：4-(i)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \\ &= \Big[\log(1+x)\Big]_0^1 = \log 2\end{aligned}$$

である．

p239-240：4-(ii)

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k/n}}$$

なので，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k/n}}\\&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx\\&=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{t}\cdot 2t\,dt\\&=\Big[2t\Big]_1^{\sqrt{2}}=2(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

p247：1-(i)

計算すると，

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^3-x}\,dx&=\frac{1}{2}\int\left\{\frac{-(x-1)+(x+1)}{(x-1)x(x+1)}\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\int\left\{-\frac{1}{(x+1)x}+\frac{1}{x(x-1)}\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\int\left\{\frac{-(x+1)+x}{(x+1)x}+\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\int\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx\\&=-\log|x|+\frac{1}{2}\log\left|x^2-1\right|+C\end{aligned}$$

であり，これが答えである．

p247：1-(ii)

$(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$ であるから，

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx=\int\left(1+\frac{6x^2-11x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)}\right)dx$$

である．ここで，A,B,C を定数として，

$$\frac{6x^2-11x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-3)}$$

とおく．これより，

$$\begin{aligned}&6x^2-11x+6=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)\\&\therefore\ A=\frac{1}{2},\quad B=-\frac{1}{8},\quad C=\frac{27}{2}\end{aligned}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx&=\int\left\{1+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{8(x-2)}+\frac{27}{2(x-3)}\right\}dx\\&=x+\frac{1}{2}\log\left|\frac{(x-1)(x-3)^{27}}{(x-2)^{16}}\right|+C\end{aligned}$$

である．

p247：1-(iii)

A,B,C,D を定数として，

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

とおくと，簡単な計算により，$A=-1,\ B=2,\ C=1,\ D=2$ とわかるので，

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx&=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)dx\\&=\log|\frac{(x-1)^2}{x}|-\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}+C\end{aligned}$$

を得る．

p247：1-(v)

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ であるから，

$$\int\frac{1}{a+b\cos x}\,dx=\int\frac{1}{(a-b)t^2+a+b}\,dt$$

となる．よって，

$$\int\frac{1}{a+b\cos x}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{a}\tan\frac{x}{2}+C & (a=b\neq 0\text{ のとき})\\ -\frac{1}{a\tan\frac{x}{2}}+C & (a=-b\neq 0\text{ のとき})\end{cases}$$

p247：1-(viii)

$\tan x = t$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから，求める不定積分は，

$$\begin{aligned}\int \frac{1/\cos^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x}\, dx &= \int \frac{1}{a^2 + b^2 t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + C\end{aligned}$$

である．

p247：1-(xiii)

$x + \dfrac{1}{x} = t$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ であり，求める不定積分は，

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - x^2}{1 + x^2\sqrt{1 + x^4}}\, dx &= \int \frac{1 - x^2}{x^2(x + 1/x)\sqrt{x^2 + 1/x^2}}\, dx \\ &= \int \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 2}}\, dt\end{aligned}$$

となる．ここで，$s = \dfrac{1}{t}$ とすると，$\dfrac{dt}{ds} = -\dfrac{1}{s^2}$ であり，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 2}}\, dt &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - 2s^2}}\, ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{2}s\right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2 + 1}\right) + C\end{aligned}$$

となる．

p247：1-(xi))

$x = \dfrac{1}{t}$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{t^2}$ である．また，$x^2 + 1 = \dfrac{1}{t^2} + 1$ となる．よって，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}\, dx &= \int \frac{t}{\sqrt{1/t^2 + 1}} \cdot (-1/t^2)\, dt \\ &= -\int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}\, dt \\ &= \log\left|t + \sqrt{t^2 + 1}\right| + C \\ &= \log\left|\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}\right| + C\end{aligned}$$

である．

p247：1-(xii)

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}}$$
$$= \arcsin\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) + C$$

第 5 章：級数

p366：1-(i)

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m} = 1, \quad \lim_{m\to\infty} a_{2m-1} = -1$$

であり，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は $\{-1, 1\}$ である．

ゆえに，

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n = -1$$

である．

p366：1-(ii)

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m} = \infty, \quad \lim_{m\to\infty} a_{2m-1} = -\infty$$

であり，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は $\{-\infty, \infty\}$ である[†1]．

ゆえに，

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

である．

[†1] 補完数直線を考えているため，これでよい．

p366：1-(iii)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ である．ゆえに，

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．

参考文献

[1] 杉浦光夫『解析入門 I』，東京大学出版会，1980