

杉浦・解析入門解答集

数学書解答集作成班

2024 年 5 月 16 日

目次

目次

3

はじめに

3

概要 3

Special Thanks 3

第 1 章：実数と連続

4

p2 : 問 1 4

p3 : 問 2 6

p16-17 : 1-(i) 8

p16-17 : 1-(ii) 8

p16-17 : 1-(iii) 9

p16-17 : 1-(iv) 9

p16-17 : 1-(v) 10

p16-17 : 2) 10

p16-17 : 3) 10

p16-17 : 5) 12

p16-17 : 6) 13

p16-17 : 7) 15

p31-33 : 1-(i) 16

p31-33 : 1-(ii) 16

p31-33 : 1-(iii) 17

p31-33 : 1-(iv) 17

p31-33 : 1-(v) 18

p31-33 : 1-(vi) 18

p31-33 : 2 20

p49-50 : 1 21

p49-50 : 2-(i) 21

p49-50 : 2-(ii) 21

p49-50 : 2-(iii) 22

p49-50 : 2-(iv) 23

p49-50 : 2-(v) 23

p49-50 : 2-(vi) 24

p49-50 : 2-(vii) 24

p49-50 : 2-(viii) 24

p49-50 : 2-(ix) 25

p49-50 : 2-(x) 25

p49-50 : 2-(xi) 25

p49-50 : 3 26

p49-50 : 5 26

p49-50 : 6 27

p49-50 : 8 28

p63-64 : 1-(i) 29

p63-64 : 1-(iii) 29

p63-64 : 2-(i) 29

p63-64 : 2-(iii) 30

p63-64 : 2-(iv) 30

p63-64 : 3-(i) 31

p63-64 : 4-(i) 31

p72~74 : 4 32

p72~74 : 5 34

p72~74 : 6 35

第 2 章：微分法

37

p90-91 : 1-(i) 37

p90-91 : 1-(ii) 37

p90-91 : 1-(iii) 37

p90-91 : 9-(i) 38

p90-91 : 10 39

p106~107 : 1 40

p106-107 : 8-(i) 41

p106-107 : 8-(ii) 42

p106-107 : 10 43

第 3 章：初等函数

44

p191-193 : 1 44

第 4 章：積分法

44

p239 : 1-(i) 44

p239 : 1-(ii) 45

p239 : 1-(iii) 45

p239 : 1-(iv) 46

p239 : 1-(v) 46

p239 : 1-(vi) 47

p239 : 3-(i) 47

p239 : 3-(ii) 48

p239 : 3-(iii) 48

p239 : 3-(iv) 48

p239 : 3-(v) 48

p239 : 3-(vii) 49

p239 : 3-(vi) 49

p239 : 3-(viii) 49

p239 : 3-(ix) 50

p239-240 : 4-(i) 50

p239-240 : 4-(i) 51

p247 : 1-(i) 51

p247 : 1-(ii) 52

p247 : 1-(iii) 52

p247 : 1-(iv) 52

p247 : 1-(v) 53

p247 : 1-(vi) 53

p247 : 1-(vii) 53

p247 : 1-(viii) 53

p247 : 1-(xiii) 54

p247 : 1-(ix) 54

p247 : 1-(x) 54

p247 : 1-(xi) 55

p247 : 1-(xii) 55

p247 : 1-(xiv) 55

p290 : 3 56

p290 : 4 57

第 5 章：級数

58

p366 : 1-(i)	58
p366 : 1-(ii)	58
p366 : 1-(iii)	58
p366 : 2)	59
p366 : 3)	60
p366 : 4)	60

はじめに

概要

この文書は、なまちゃんが運営する「数学書解答集作成班」が制作した、杉浦光夫著『解析入門』(東京大学出版会)の解答集である。

未完ではあるものの、編集の際の利便性を考慮して、オープンソースでの公開となった。それゆえ、数学的な誤りや誤植、改善案の提案などがあればぜひ Issue に書き込んだり、Pull Request を送っていただきたい^{†1}。

Special Thanks

掲載許可を得た方のみ^{†2}を敬称略で掲載する。

- ねたんほ (解答の提供)
- まっちゃん (解答の提供)
- Daiki(解答の提供)
- やたろう (Git 管理)
- 不自然対数 (L^AT_EX 関連)

その他、多くの方々。

^{†1} 永遠の工事中

^{†2} 掲載されていないという方は「ニックネーム」を記入のもと、なまちゃんへ連絡していただきたい。

第1章：実数と連続

p2：問1

(1)

証明. $0, 0' \in K$ がともに加法単位元の性質を満たすとする.

このとき, 0 が加法単位元の性質をもつことから,

$$0' + 0 = 0'$$

同様に, $0'$ が加法単位元の性質をもつことから,

$$0 + 0' = 0$$

交換律より, $0 + 0' = 0' + 0$ なので,

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

これからただちに加法単位元の一意性が従う. \square

(2)

証明. $a, b \in K$ とし,

$$a + b = 0$$

とする. このとき,

$$-a = -a + 0 = -a + (a + b) = (-a + a) + b = 0 + b = b$$

となり, 加法逆元の一意性が従う. \square

(3)

証明. $a \in K$ のとき,

$$a + (-a) = 0$$

$$\therefore (-a) + a = 0$$

他方, $-(-a)$ は $(-a)$ の加法逆元であるから,

$$(-a) + (-(-a)) = 0$$

これと逆元の一意性により, $a = -(-a)$ が従う. \square

(5)

証明. $a \in K$ に対して,

$$a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$$

であるから, $-a$ が a の加法逆元であることと含めて主張が従う. \square

(6)

証明. (4) の結果を用いる. $a = -1$ とすると,

$$(-1)(-1) = -(-1) = 1$$

これが証明すべきことであった. \square

(7)

証明. $a, b \in K$ に対して,

$$a(-b) + ab = a((-b) + b)$$

$$= a0$$

$$= 0$$

$$\therefore a(-b) = -ab$$

$(-a)b = -ab$ も同様に示される. \square

p3 : 問 2

(i)

証明. $a \leq b$ において, (R15) より

$$0 \leq b - a$$

を得る.

逆に, $0 \leq b - a$ において, (R15) より

$$a \leq b$$

を得る.

以上の考察により証明された. \square

(ii)

証明. $a \leq b$ において, (R15) より

$$0 \leq b - a$$

となる. ここで, (R15) を適用して,

$$-b \leq -a$$

を得る.

逆に, $-b \leq -a$ について, (R15) より

$$0 \leq b - a$$

となる. この両辺に a を加えて,

$$a \leq b$$

を得る.

以上の考察により証明された. \square

(iii)

証明. $c \leq 0$ から

$$c + (-c) \leq -c$$

$$\therefore 0 \leq -c$$

である. ここで, $a \leq b$, $-c \leq 0$ であることより

$$a(-c) \leq b(-c)$$

である. これより $-ac \leq -bc$ であるから,

$$-ac + (ac + bc) \leq -bc + (ac + bc)$$

$$\therefore bc \leq ac$$

を得て, これが証明すべきことであった. \square

(iv)

証明. $a < 0$ であると仮定する. このとき,

$$\left(\frac{1}{a}\right)a < 0a$$

なので,

$$1 < 0$$

となるが, これは $1 > 0$ に矛盾.

よって, 仮定したことが誤りであり, $a > 0$ のとき $a^{-1} > 0$ である. \square

(v)

証明.

$$a \leq c$$

において, (R15) より,

$$a + b \leq b + c$$

を得る. 他方,

$$b \leq d$$

において, (R15) より

$$b + c \leq c + d$$

となる. ここで, 推移律を適用すると,

$$a + b \leq c + d$$

が得られ, これが証明すべきことであった. \square

p16-17 : 1-(i)

$a = 0$ のときは明らかに 0 に収束するので, $a \neq 0$ とする. $2|a| \leq N$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとる. このとき,

$$\begin{aligned} 0 &< \left| \frac{a^n}{n!} \right| \\ &\leq \frac{|a|^n}{n!} \\ &= \frac{|a|^N}{N!} \cdot \frac{|a|}{N+1} \cdot \frac{|a|}{N+2} \cdots \frac{|a|}{n} \\ &\leq \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N} \end{aligned}$$

であるから,

$$-\frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N} \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N}$$

となり, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

である

p16-17 : 1-(ii)

$a = 1$ のときは明らかに 1 に収束するので, まず $a > 1$ のときを考える. $\delta_n > 0$ を用いて,

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$$

とおくことができる. 両辺を n 乗すると

$$\begin{aligned} a &= 1 + n\delta_n + \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 + \cdots + \delta_n^n \\ &> 1 + n\delta_n \\ &> n\delta_n \end{aligned}$$

となり, $0 < \delta_n < \frac{a}{n}$ であるから, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$$

となる. $a < 1$ のときは, $a^{\frac{1}{n}} = \left(\left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$ を使えば同じ結果が得られ, 以上の議論により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

となる.

p16-17 : 1-(iii)

$\frac{n}{2}$ 以下の最大の自然数を m とおく. 与えられた式は,

$$(0 <) \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1) \cdots n}{n^n}$$

と表されるので, $\frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdots n}{n^{n-m}} < 1$ であることと, $m \leq \frac{n}{2}$ から $\frac{m}{n} \leq \frac{1}{2}$ であることを用いると,

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1) \cdots n}{n^n} < \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{n^m} < \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

よって,

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

である. $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$ なので, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

である.

p16-17 : 1-(iv)

のちに $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると,

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= 1 + n + \frac{1}{2}n(n-1) + \cdots + n + 1 \\ &> \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

となり, この不等式から,

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$$

を得る. ここで, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

である.

p16-17 : 1-(v)

まず,

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

である. ここで, のちに $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

であり,

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

を得る. ここで, はさみうちの原理を用いると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

である.

p16-17 : 2)

$n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$f_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2m}$$

とおく. ここで, $n!x \in \mathbb{Z}$ のとき,

$$\cos(n! \pi x) = \pm 1$$

$n!x \notin \mathbb{Z}$ のときは,

$$|\cos(n! \pi x)| < 1$$

であるから,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (n!x \in \mathbb{Z}) \\ 0 & (n!x \notin \mathbb{Z}) \end{cases}$$

となる. さて, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ であるならば, どんな $n \in \mathbb{N}$ に対しても, $n!x$ が整数とならない. また, $x \in \mathbb{Q}$ のとき, $x = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$) とすれば, n が q より十分大きいときに $n!x$ は整数となる. よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2m} \right) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

p16-17 : 3)**《補題》**

任意の $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ について,

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

が成り立つ.

証明. $n = 2$ のときは三角不等式そのものであるから、 $n \geq 3$ とし、 $n - 1$ 個の実数については補題の主張が成り立つものとする。

いま、

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n$$

であるから、これに三角不等式を適用して、

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}| + |a_n|$$

を得る。ここで、数学的帰納法の仮定より、

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}|$$

がいえるので、ここまでの議論で、

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

は n の場合にも成り立つことが示され、以上の議論より補題の主張が従う。□

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_1 \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

となる。

また、

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right|$$

と変形する。この右辺に補題を適用し、

$$\left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}$$

を得る。これにより、

$$n \geq N_1 \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} + \left(\frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon$$

となる。ここで $N_2 := N_1 + 1$ とすると、 $n \geq N_2$ であるとき $\left(\frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon < \varepsilon$ となることに注意する。さて、

$$n \geq N_3 \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} < \varepsilon$$

となるように $N_3 \in \mathbb{N}$ をとる。 $N := \max\{N_2, N_3\}$ とすると、

$$n \geq N \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} + \left(\frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

であり、これより

$$n \geq N \implies \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < 2\varepsilon$$

となる。書き換えると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

となり、これが証明すべきことであつた。□

p16-17 : 5)

証明. イ) の条件により,

$$A \subset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$$

は明らかである. ここで,

$$H = \{0, 1, \dots, m-1\} \cup A$$

と置く. このとき, H の定義から $0 \in H$ である.

次に, $n \in H$ であることを仮定する. このとき,

- (i) $n < m-1$ であれば, $n+1 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ より, $n+1 \in H$ となる
- (ii) $n = m-1$ であれば, $n+1 = m \in A$ より, $n+1 \in H$ となる
- (iii) $n \geq m$ であれば, (ロ) より $n+1 \in A$ であり, $A \subset H$ により $n+1 \in H$ となる

よって, いずれの場合でも

$$n+1 \in H$$

したがって, H は継承的である. \mathbb{N} は最小の継承的な集合であるから, $\mathbb{N} \subset H$ である.

つまり, $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots, m-1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$ であることと, H の定義により,

$$\{0, 1, \dots, m-1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subset \{0, 1, \dots, m-1\} \cup A$$

となる. よって,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subset A$$

となる. これと $A \subset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$ であることを併せると,

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$$

となり, これが証明すべきことであった. \square

p16-17 : 6)《 $m + n$ について》

証明. $n \in \mathbb{N}$ についての命題 $p(n)$ を

$$p(n) : \forall m \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}$$

とする.

- (i) $n = 0$ のとき, $m + 0 = m$ であり, $m \in \mathbb{N}$ であるから, $p(0)$ は真である.
- (ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $p(k)$ が真であると仮定する. このとき, $m + k \in \mathbb{N}$ である. ここで,

$$m + (k + 1) = (m + k) + 1$$

であり, $m + k \in \mathbb{N}$ に注意すると, \mathbb{N} が最小の継承的集合であることから,

$$m + (k + 1) = (m + k) + 1 \in \mathbb{N}$$

である. よって, このとき $p(k + 1)$ も真である.

以上 (i), (ii) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $p(n)$ が真である. これが証明すべきことであった. \square

《 mn について》

証明. $n \in \mathbb{N}$ についての命題 $q(n)$ を

$$q(n) : \forall m \in \mathbb{N} : mn \in \mathbb{N}$$

とする.

- (i) $n = 0$ のとき, $m \cdot 0 = 0$ であり, $0 \in \mathbb{N}$ であるから, $q(0)$ は真である.
- (ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $q(k)$ が真であると仮定する. このとき, $mk \in \mathbb{N}$ である. ここで,

$$m(k + 1) = mk + k$$

であり, $mk \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ に注意すると, 証明したことから

$$mk + k \in \mathbb{N}$$

である. よって, このとき $q(k + 1)$ も真である.

以上 (i), (ii) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $q(n)$ が真である. これが証明すべきことであった. \square

《 $m - n$ について》

証明. $n \in \mathbb{N}$ についての命題 $r(n)$ を

$$r(n) : \forall m \in \mathbb{N} : m < n \vee m - n \in \mathbb{N}$$

とする.

- (i) $n = 0$ のとき, $m - 0 = m$ であり, $m \in \mathbb{N}$ であるから, $r(0)$ は真である.
- (ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $r(k)$ が真であると仮定する. このとき, $k < n \vee k - n \in \mathbb{N}$ である.
 - (I) $m \leq k$ のとき, $m < k + 1$ であり, $r(k + 1)$ も真である.
 - (II) $m > k$ のとき, まず

$$m - (k + 1) = m - k - 1$$

であり, $m - k \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}$ に注意すると, 証明したことから

$$m - k - 1 \in \mathbb{N}$$

である.

よって, このとき $r(k + 1)$ も真である.

以上 (i), (ii) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $r(n)$ が真である. これが証明すべきことであった. \square

p16-17 : 7)

証明. $n < k < n + 1$ となる自然数 k が存在すると仮定する. この不等式から, 辺々 n を引くと

$$0 < k - n < 1$$

を得る. n と k は自然数としたから, 問 6 により, $k - n$ は自然数である.

よって, $0 < a < 1$ となる自然数 a が存在しないことを示せばよい.

$$H = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$$

とおくと,

$$0 \in H$$

$$0 + 1 \in H$$

である. ゆえに $0 \in H$ となる.

また, $k \geq 1$ となる $k \in \mathbb{N}$ に対しては, $k + 1 \geq 1$ であり,

$$k + 1 \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$$

となるため, $k + 1 \in H$ である.

ここまでの考察から,

$$(1) \ 0 \in H$$

$$(2) \ n \in H \implies n + 1 \in H$$

であるから H は継承的である.

したがって, \mathbb{N} が最小の継承的集合であることから, $\mathbb{N} \subset H$ となる.

H の定義により, $a \notin H$ なので, $a \notin \mathbb{N}$ となり, $0 < a < 1$ となる自然数 a は存在しない. これが証明すべきことであった. \square

p31-33 : 1-(i)

$$\begin{aligned}\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} &= \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$a_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $b_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ とおくと, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は明らかに収束するから, 定理 2.5(2) より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

である. また, アルキメデスの原理により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $n_0 \in \mathbb{N}$ を $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ となるようにとることができ, このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_0 \implies 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \varepsilon$$

となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ である. これより,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\} \cdot \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{6}(1+0) \cdot (2+0) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

p31-33 : 1-(ii)

《補題》

正数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して, $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

となるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である.

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ であるから, r ($0 < r < 1$) に対して, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_1 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

が成り立つ. このとき,

$$a_n = a_{N_1} \cdot \frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}} \cdot \frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+1}} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \frac{a_n}{a_{n-1}} < a_{N_1} r^{n-N_1} = \frac{a_{N_1}}{r^{N_1}} r^n$$

となる. $0 < r < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{N_1}}{r^{N_1}} r^n = 0$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である. \square

$a_n = \frac{n^2}{a^n}$ とおく. $0 < a \leq 1$ のときは明らかに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となる.

$a > 1$ のとき, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{a}$ となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{a} = \frac{1}{a} < 1$$

であるから, 補題により, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となる. 以上の議論により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = \begin{cases} \infty & (0 < a \leq 1) \\ 0 & (a > 1) \end{cases}$$

となる.

p31-33 : 1-(iii)

明らかに $\sqrt[n]{n} > 1$ なので, $\delta_n > 0$ を用いて,

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$$

とかける. 両辺を n 乗して, $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると,

$$\begin{aligned} n &= (1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 + \cdots + (\delta_n)^n \\ &> \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 \end{aligned}$$

となり, この不等式から,

$$0 < \delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

を得る. ここで, はさみうちの原理により, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

である.

p31-33 : 1-(iv)

$a_n = n^k e^{-n}$ とおく. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

ゆえに, 補題により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k e^{-n} = 0$$

である.

p31-33 : 1-(v)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= e \cdot \frac{1}{e} = 1 \end{aligned}$$

である.

p31-33 : 1-(vi)**《補題》**

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を実数列とし, $a_n > 0$ とする. もし $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であれば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ である. また, もし $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ であるならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ である,

証明. 前半の主張のみ示せば後半の主張も同様に示せるので, 前半のみ示す. 与えられた条件により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_0 \implies |a_n - 0| < \varepsilon$$

が成り立つ, ここで $\frac{1}{\varepsilon} = M$ とおくと, 上の $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_0 \implies \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

となり, これより $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ が示された. \square

《補題》

$c > 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n} = 0$ である.

証明. $c > 1$ より, $\delta > 0$ を用いて $c = 1 + \delta$ とおける. このとき, のちに $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると,

$$\begin{aligned} c^n &= (1 + \delta)^n \\ &= 1 + n\delta + \frac{1}{2}n(n-1)\delta^2 + \cdots + \delta^n \\ &> 1 + n\delta \end{aligned}$$

このことから, $0 < \frac{1}{c^n} < \frac{1}{1 + n\delta}$ であるから, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n} = 0 \quad (c > 1)$$

である. \square

$a_n = (c^n + c^{-n})^{-1}$ とおく. $c = 1$ のときは明らかに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ である.
 $c > 1$ のとき, 2つの補題により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n}) = \infty$$

であるから, 補題により $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n})^{-1} = 0$ である.

$0 < c < 1$ のときは c の逆数を考えることにより同じ結論に帰着する. 以上の議論により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n})^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (c = 1) \\ 0 & (c \neq 1) \end{cases}$$

である.

p31-33 : 2

証明. 二項定理を用いて $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項を展開すると,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} \cdot \frac{1}{n^r} + \cdots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

同様にして, a_{n+1} の展開式を得たとき, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ であることにより, $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して,

$$\frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) < \frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n+1}\right)$$

が成立する. これと, a_{n+1} の展開式のほうが, 正の項を一つ多く含むことから, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$a_n < a_{n+1}$$

が成立し, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は単調増加数列である. また,

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &< 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2^{-n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= 3 - 2^{-n} \\ &< 3 \end{aligned}$$

であるから, $a_n < 3$ となる.

また, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が単調増加数列であることから, 任意の $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ に対して,

$$a_n > a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

であるから,

$$2 < e < 3$$

を得る. また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq e$$

である. 他方,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{r!}$$

であるから, ここで $r \rightarrow \infty$ として,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq e$$

となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ を得る. \square

p49-50 : 1

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ であるから, $0 < r < 1$ のとき, $r < k < 1$ に対して, ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_1 \implies a_n < k^n$$

となる. ここで, 定理 5.5(比較判定法) と $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ より, $\sum a_n$ は収束する.

$r > 1$ のとき, $1 > 0$ に対して, ある $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_2 \implies a_n > 1$$

が成り立ち, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ となる. よって定理 5.1 系の対偶により $\sum a_n$ は発散する. \square

p49-50 : 2-(i)

$$\frac{2n^2}{n^3 + 1} = \frac{2/3}{n+1} + \frac{4n/3 - 2/3}{n^2 - n + 1}$$

により

$$\begin{aligned} \sum \frac{2n^2}{n^3 + 1} &= \sum \frac{2/3}{n+1} + \sum \frac{4n/3 - 2/3}{n^2 - n + 1} \\ &> \sum \frac{2/3}{n+1} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となる. よってこの級数は発散する

p49-50 : 2-(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2} < \sum \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \left(< 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 3 \right)$$

であるから, この級数は収束する. また

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

が $\alpha > 1$ のときに収束することを用いることもできる.

p49-50 : 2-(iii)

$a = 1$ のときは明らかに収束する.

$a > 1$ の場合を考える. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \log a$$

が成り立つ.

よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ となる全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\log a - \varepsilon < n(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \log a + \varepsilon$$

となる.

ここで $\varepsilon = \frac{\log a}{2}$ とする. このとき, $n \geq N$ において $n(a^{\frac{1}{n}} - 1) > \log a - \frac{\log a}{2}$ すなわち $a^{\frac{1}{n}} - 1 > \frac{\log a}{2n}$ となるから, この級数は発散することがわかる.

$0 < a < 1$ の場合も同様に考えて $\varepsilon = -\frac{\log a}{2}$ とすると, 十分大きな n に対して $-(a^{\frac{1}{n}} - 1) > -\frac{\log a}{2n}$ となるから発散する ($\log a < 0$ に注意).

p49-50 : 2-(iv)

$$S_n = \sum_{k=2}^n a_k \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k+1} + \sum_{k=1}^n a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) \\ &= -\log 2 + \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

同様に,

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

であり, $S_{2n} = S_{2n+1}$ であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = -\log 2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

したがって S_{2n} , S_{2n+1} は同じ値に収束する. これは S_n が収束することを意味するため, この級数は収束する.

p49-50 : 2-(v)

定理 5.7 (ダランベールの収束判定) を用いる. $a_n = n/2^n$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

となることにより, この級数は収束する

p49-50 : 2-(vi)

部分和の数列を S_n として S_{2n} が発散することを示す. 二項ずつ括弧に入れることで,

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(2k-1)!} - \frac{1}{2k} \right)$$

と変形できる. ここで

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{(2k-1)!} = 0$$

であるから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $k \geq N$ となるすべての k に対し

$$\frac{1}{(2k-1)!} \leq \frac{1}{4k}$$

となる. さて,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^n \frac{1}{4k} = \infty$$

であるから, $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{4k}$ は発散する. これをふまえると, 定理 5.5 により,

$$\sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{(2k-1)!} \right) = \infty$$

であるからこの級数は発散する.

p49-50 : 2-(vii)

$\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{2 - \log x}{2x^{3/2}}$ であり, 右辺は十分大きな x に対して 0 以下となる. さらに, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$ であるから, 定理 V. 4.1 よりこの交代級数は収束する.

p49-50 : 2-(viii)

$$\frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} > \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$$

であることから

$$\sum \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} > \sum \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

となる. よってこの級数は発散する.

p49-50 : 2-(ix)

定理 5.7 (Ratio Test) より収束する.

p49-50 : 2-(x)

定理 5.7 (ダランベールの収束判定) より $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1)^2}}{(n+2)^{(n+1)^2}} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} = \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} \frac{(n+1)^{n^2}}{(n+2)^{n^2}} \frac{(n+1)^{2n+1}}{(n+2)^{2n+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{2n+1}\end{aligned}$$

ここで

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n(n+2)} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{-2n}$$

とすることにより, 右辺は $e \times 1 = e$ に収束する.

さらに,

$$\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{2n+1} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)} \right\}^{-2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-3}$$

とすることで, 右辺は $\frac{1}{e^2} \times 1 = \frac{1}{e}$ に収束する. よって

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \times \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e} < 1$$

となる. ゆえにこの級数は収束する.

《(x) の別解》

1) で証明した命題を用いると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

であるから収束する.

p49-50 : 2-(xi)

十分大きな n に対し $\log n \geq 2$ であるから, $\frac{1}{n^2}$ との比較により収束する.

p49-50 : 3

証明. $\sum a_n$ が絶対収束するので, $\sum |a_n|$ も収束する. よって, 定理 5.1 系より, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ となる. このとき, $1 > 0$ に対して, ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_1 \implies ||a_n| - 0| < 1$$

が成り立つ. また, $|a_n| < 1$ のとき,

$$0 \leq |a_n|^2 \leq |a_n|^2 \leq |a_n|$$

が成り立つ. ここで, $\sum |a_n|$ が収束し, 各項は正なので, 定理 5.5(比較判定法) により, $\sum |a_n|^2$ も収束する. ゆえに $\sum a_n^2$ は絶対収束する. \square

p49-50 : 5

証明. 与えられた条件により, $0 < r < c, r \neq \infty$ をみたす $r \in \mathbb{R}$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N \implies \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < r$$

が成り立つ. これにより,

$$\begin{aligned} 0 < -r + c < \frac{a_n}{b_n} < r + c \\ \therefore (-r + c)b_n < a_n < (r + c)b_n \end{aligned}$$

となる. これと比較原理により, $\sum a_n$ と $\sum b_n$ は同時に収束, 発散することが証明された. \square

p49-50 : 6

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ により, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ は収束する. ここで,

$$1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1}$$

の両辺を 0 から 1 まで x で積分すると,

$$\begin{aligned} \overbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}}^{s_n} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + R_n \end{aligned}$$

である. ただしここで $R_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx$ とおいた. この式から,

$$\begin{aligned} \left| s_n - \frac{\pi}{4} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx \right| \\ &< \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である. よって,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

である.

p49-50 : 8

証明. この級数^{†1}の第 n 部分和を s_n , 分母が n 桁である項の末尾までの和を t_n とする. このとき $s_n < t_n$ である.

分母が k 桁である項の和を考える. このような項は, $8 \cdot 9^{k-1}$ 個ある.

また, このような項の分母の最小値は 10^{k-1} であるから,

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=1}^n \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8 \sum_{k=1}^n \left(\frac{9}{10} \right)^{k-1} \\ &= 8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n}{1 - \frac{9}{10}} \\ &= 80 \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right) \end{aligned}$$

となり, t_n は単調増加かつ上に有界である

よって,

$$0 < s_n < t_n = 80 \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right)$$

であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq 80$$

となり, これが証明すべきことであつた. \square

^{†1} この級数をケンプナー級数という.

p63-64 : 1-(i)

$f(a)$ を考えるため, $a \neq 0$ としてよい. $\delta \leq \frac{|a|}{2}$ とすると, $|x - a| < \delta$ より

$$|x| > |a| - \delta \geq \frac{|a|}{2}$$

である. これに留意すると,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - x|}{|ax|} < \frac{2\delta}{|a|^2}$$

であるから, $\delta = \min\{|a|/2, |a|^2\varepsilon/2\}$ でよい.

p63-64 : 1-(iii)

$t := \min\{x, a\}$ とする. このとき, 指数法則により,

$$|e^x - e^a| = e^t(e^{|x-a|} - 1)$$

が成立する. また, $t \leq a$ であるから,

$$\begin{aligned} e^t &\leq e^a \\ \therefore e^t(e^{|x-a|} - 1) &\leq e^a(e^{|x-a|} - 1) \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\varepsilon = e^a(e^\delta - 1)$$

となればよい. すなわち,

$$\delta = \log(1 + e^{-a}\varepsilon)$$

である.

p63-64 : 2-(i)

$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1, \left| \sin \frac{1}{y} \right| \leq 1$ であるから,

$$\left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |(x+y)| \leq |x| + |y| \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow 0)$$

である. よって,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$$

となる.

p63-64 : 2-(iii)

まず, $\log x^x = x \log x$ である. また,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{1/x}$$

となる. ここで, $\lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} 1/x = \infty$ であるから, ロピタルの定理が適用でき,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{1/x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^x &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\log x^x} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

となり, これが答である.

p63-64 : 2-(iv)

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(r^2)}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - (-2 \sin^2(r^2/2) + 1)}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin^2(r^2/2)}{(r^2/2)^2} \cdot (r^2/2) \\ &= 1^2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

を得て, これが答えである.

p63-64 : 3-(i)

以下、 \mathbb{Q} の閉包は \mathbb{R} であることを示す。

$a \in \mathbb{R}$ に対して、

$$U(a, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

すなわち、

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

となればよい。アルキメデスの原理により、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\frac{1}{n} < 2\varepsilon$$

となる $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在する。また、 n を分母とする有理数は数直線上に幅 $\frac{1}{n}$ で並んでいるから、

$$\frac{m}{n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

となる $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在する。

したがって $a \in \mathbb{R}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ となるため、

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

である。

p63-64 : 4-(i)

証明. $d(x) = 0$ は $\inf_{y \in A} |x - y| = 0$ ともかける。

$$\begin{aligned} \inf_{y \in A} |x - y| = 0 &\iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists y \in A) (|x - y| < \varepsilon) \\ &\iff x \in \overline{A} \end{aligned}$$

これにより示された。 \square

p72~74 : 4

《補題 1》

ノルムに関して, $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ が成り立つ.

証明. 絶対値の定義 ($|a| := \max\{a, -a\}$) に立ち返ると,

$$\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad -\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

なる二つの不等式を示せばよい. これは,

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|$$

より示される. \square

《補題 2》

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^n |x_j| \in \mathbb{R} \text{ とすると,}$$

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ に対して, } \|\mathbf{x}\|_1 \leq M|\mathbf{x}|$$

が成り立つ.

証明. $M := n$ とおく. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ とする. 各 $j (1 \leq j \leq n)$ において,

$$|x_j| \leq |\mathbf{x}|$$

が成り立つ. そこで, j について足し合わせると,

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{x}| + \dots + |\mathbf{x}| = n|\mathbf{x}| = M|\mathbf{x}|$$

が成り立つ. \square

証明. まず,

$$\exists P \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ に対して, } \|\mathbf{x}\| \leq P|\mathbf{x}| \quad \dots (*)$$

となることを示す. \mathbb{R}^n の正規直交基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ とする. $T := \max\{\|\mathbf{e}_j\| \mid 1 \leq j \leq n\}$ とおき, M を補題のものとして, $P := TM$ とおく. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

とすると, $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j$ とかける. これと, ノルムの i), ii) の条件から,

$$\|\mathbf{x}\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \right\| \leq \sum |x_j| \|\mathbf{e}_j\| \leq T \sum |x_j| \leq TM \|\mathbf{x}\| = P|\mathbf{x}|$$

が成り立つ. 以上より (*) は成り立つ. これより, 関数 $\|\cdot\|$ が連続関数になる事を示す. $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ とする. $\varepsilon > 0$ とする. $\delta < \frac{\varepsilon}{P}$ を満たすようにとる. このとき, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ かつ $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}| < \delta$ とする.

$$\|\mathbf{x}\| - \|\boldsymbol{\alpha}\| \leq \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}\| \leq P|\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}| < \varepsilon$$

よって、連続である。 $\mathbb{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| = 1\}$ なるコンパクト集合上で、 $\|\cdot\|$ を考える。ノルムが連続であったことから、コンパクト集合上で最小値をとる。これを m とする。この m を用いると、

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ に対して, } m|\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{x}\|$$

が成り立つ事を示す。 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき、 $\mathbf{x}/|\mathbf{x}| \in \mathbb{S}^{n-1}$ であることに注意すると、 $(\because |\mathbf{x}/|\mathbf{x}|| = |\mathbf{x}|/|\mathbf{x}| = 1)$ m が最小値であることから、

$$m \leq \left\| \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right\|$$

を満たす。

$$\left\| \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right\| = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \|\mathbf{x}\|$$

に注意すると、

$$m|\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{x}\|$$

となる。以上より、示すべき題意は満たされた。□

これは、なかなか背景を語るには、奥深い問題です。まず、注意しておくことは、この性質は有限次元の線型空間だからできる話だということです。無限次元であれば、もう少し条件がないと無理です。(そもそも一般にはユークリッド距離が入りません。) 有限次元であれば、ノルムが定める位相というのが一意に定まるという事を言っています。それだけ有限次元の線型空間は「硬い」という風に定義づけることができるでしょう。

次に証明の中で用いたテクニックです。 \mathbb{S}^{n-1} を用いたところ。これは、無限次元になっても用いられる手法です。線型性がある操作や空間の中では、綺麗な(空間全体に一様に広げていけそうな?) 図形の上でだけ考えておいて、あとは線型に伸ばすということで全体の性質をみるということがあります。ここではそれを行っています。函数解析学などでは、無限次元上に定まる理論上重要な写像(いわゆる有界線型作用素)に対してノルムを定めますが、それらのノルムは、無限次元の球面だけで見れば良いという性質があったりします。

最後に証明の中で出てきた $\|\cdot\|_1$ というノルムですが、これはマンハッタン距離と呼ばれる距離です。解析などでは計算が楽に済むので利用されます。(他にも応用はいくつかあると思いますが、僕は知りません笑)

p72~74 : 5

皆さんには、冗長な指摘かもしれませんが、これ、

- $C(K)$ が線型空間であること
- $\max\{|f(x)| \mid x \in K\}$ が存在していること

を確認しなければそもそもノルムを定義したことにならないです。後輩とのゼミなどでこの辺りうっかりミスが多かったのでコメントしておきました。

証明. 連続函数の定数倍, 連続函数の和が再び連続函数になることから, $C(K)$ は線型空間になる. また, K が compact であるから, $f(K)$ は compact である. また, $|\cdot|$ も連続函数であるから, $|f(K)|$ も compact である. 従って最大値を持つから, $\|f\|$ なる値が存在していることがわかる. ノルムの条件を満たすことを示す.

- (1) $\|f\| \geq 0$ であること

各 $x \in K$ に対して, $|f(x)| \geq 0$ である. 従って, $\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in K\} \geq 0$

- (2) $\|f\| = 0 \iff f = 0$ であること ($f = 0$ は写像として定数函数 0 に等しいという意味です.)

$f = 0$ であれば, 各 $x \in K$ に対して $|f(x)| = 0$ であるから, $\|f\| = 0$ は明らか. 逆を示す.

$\|f\| = 0$ とする. 各 $x \in K$ に対して, $|f(x)| = 0$ である. つまり $f(x) = 0$. よって $f = 0$

- (3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ であること

$$\begin{aligned}\|f + g\| &= \max\{|f(x) + g(x)| \mid x \in K\} \\ &\leq \max\{|f(x)| + |g(x)| \mid x \in K\} \\ &= \max\{|f(x)| \mid x \in K\} + \max\{|g(x)| \mid x \in K\} = \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$

よって, 確かにノルムである. \square

p72~74 : 6

証明. 収束先となる函数 f を構成し, i) 収束先であること ii) 連続であることを示す.

各 $x \in K$ において, 実数列 $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である. 実際,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \max\{|f_n(x) - f_m(x)| \mid x \in K\} = \|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

よりわかる. 実数の完備性から列 $(f_n(x))$ は収束する. そこで,

$$f: K \ni x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

と定める. この f が i), ii) を満たすことを示す.

i) を満たすこと. すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して, } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n > N \text{ に対して, } \|f_n - f\| < \varepsilon$$

を示す. ただし, $\|\cdot\|$ の定義から, $\|f_n - f\| < \varepsilon$ は,

$$\forall t \in K \text{ に対して, } |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

を示せばよいことに注意する. (f_n) が一様ノルムに関して Cauchy の収束条件を満たすことに $\varepsilon/2 > 0$ を適用すると, ある自然数 N_1 が存在して,

$$\forall n, m > N_1 \text{ に対して, } \|f_n - f_m\| < \varepsilon/2$$

を満たす. $N := N_1$ とおく. $n > N, t \in K$ とする. 列 $(f_n(t))$ は $f(t)$ に収束するから, ある自然数 N_2 が存在して,

$$\forall m > N_2 \text{ に対して, } |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon/2$$

を満たす. そこで, $m > \max\{N_1, N_2\}$ をとれば,

$$|f_n(t) - f(t)| \leq |f_n(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - f(t)| \leq \|f_n - f_m\| + |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon$$

となる. よって収束先である.

ii) を満たすこと. すなわち, 各 $\alpha \in K$ において

$$\varepsilon > 0 \text{ に対して, } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in K \text{ s.t. } d(\alpha, x) < \delta \text{ に対して, } |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

を満たすことを示す. $\alpha \in K$ とする. $\varepsilon > 0$ とする. 列 $(f_n(\alpha))$ が $f(\alpha)$ に収束することから, ある自然数 N_1 が存在して,

$$\forall n > N_1 \text{ に対して, } |f_n(\alpha) - f(\alpha)| < \varepsilon/3$$

が成り立つ. また, (f_n) が Cauchy の収束条件を満たすことから, ある自然数 N_2 が存在して,

$$\forall n, m > N_2 \text{ に対して, } \|f_n - f_m\| < \varepsilon/3$$

が成り立つ. $N := \max\{N_1, N_2\}$ とおく. f_N は K 上で連続であるから, α での連続性より, ある正数 δ' が存在して,

$$\forall x \in K \text{ s.t. } d(\alpha, x) < \delta' \text{ に対して, } |f_N(x) - f_N(\alpha)| < \varepsilon/3$$

が成り立つ. $\delta := \delta'$ とおく. $x \in K$ かつ $d(\alpha, x) < \delta$ とする.

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(\alpha)| + |f_N(\alpha) - f(\alpha)| \leq \|f - f_N\| + \varepsilon/3 + \|f - f_N\| < \varepsilon$$

より f は連続である. つまり $f \in C(K)$ である.

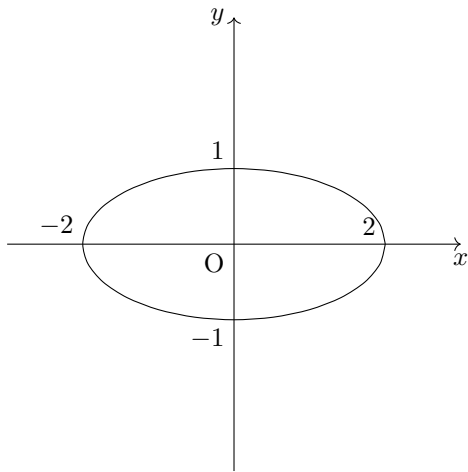
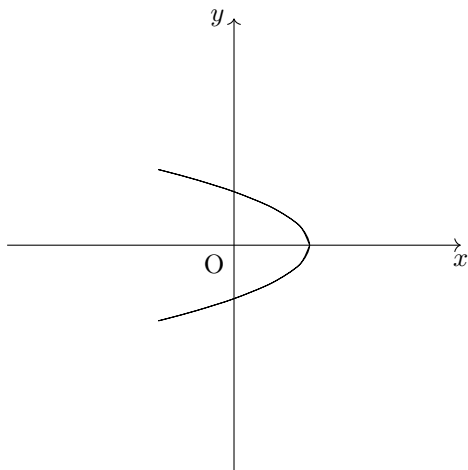
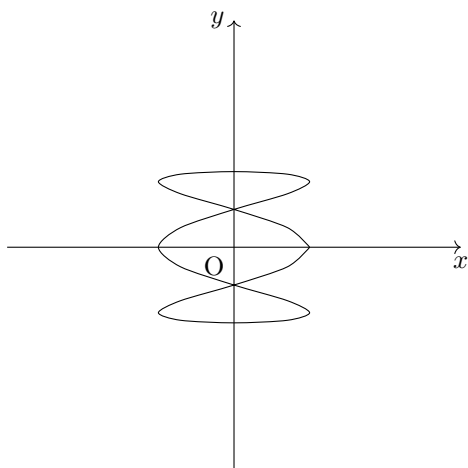
□

これ, Compact 上の連続関数であることはほとんど本質的なことに影響しません. 定義域が Compact である条件を外す代わりに, 有界連続関数に対して適用すれば同様の議論が成り立ちます. (ただし, その場合, 最大値ではなく上限でノルムを定義することになります.) もしくは, 定義域上で Compact - support (ある Compact 集合上で値をもち, それ以外では恒等的に 0) など他にも少し条件を変えて修正することでいくつかの応用が存在します. また, 詳しく調べてないのでわかりませんが, 定義域が距離空間であることもあまり影響しなかったと思います.

関数解析における関数空間の一例です. このような $C(K)$ に相当する空間として, 微分可能関数空間などもあげられます. ここは, 深入りすると, それだけで大学一年間分の解析の授業ができるぐらいですので, ここで止めておきます.

《参考文献》

- (1) 宮寺功 関数解析 (ちくま学芸出版)
- (2) 洲之内治男 関数解析入門 (近代ライブラリ社)

第 2 章：微分法**p90-91 : 1-(i)****p90-91 : 1-(ii)****p90-91 : 1-(iii)**

p90-91 : 9-(i)

$$(\log x)^{(1)} = 1/x, \quad (\log x)^{(2)} = -1/x^2, \quad (\log x)^{(3)} = 2/x^3, \quad (\log x)^{(4)} = -6/x^4$$

であるから,

$$(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

と推測できる. この推測が正しいことを数学的帰納法により証明する.

(1) $n = 1$ のとき, $(\log x)^{(1)} = 1/x$ であり,

$$\frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1} = 1/x$$

であるから, この場合に推測は正しい.

(2) $n = k$ のときに, この推測が正しいと仮定すると,

$$(\log x)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} (\log x)^{(k+1)} &= \left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \right)' \\ &= \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \end{aligned}$$

であるから, $n = k + 1$ のときも推測は正しい.

(1),(2) より,

$$(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

である.

$$\left(\frac{1}{x^2 + 3x + 2} \right)^{(n)} = (-1)^n n! \{ (x+1)^{-n-1} - (x+2)^{-n-1} \}$$

p90-91 : 10

証明. $u(x) = (x^2 - 1)^n$ とおく, このとき,

$$U'(x) = 2xn(x^2 - 1)^{n-1}$$

だから,

$$(x^2 - 1)u'(x) = 2nx \cdot u(x)$$

この両辺を $(n+1)$ 回微分して,

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xu^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)n}{2} \cdot u^{(n)}(x) &= 2n xu^{(n+1)}(x) + 2(n+1)nu^{(n)}(x) \\ \therefore (x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2nu^{(n+1)}(x) - (n+1)nu^{(n)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

ここで, $u^{(n)}(x) = 2^n n! P_n(x)$ なので,

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)\{2^n n! P_n''(x)\} + 2x\{2^n n! P_n'(x)\} - n(n+1)\{2^n n! P_n(x)\} &= 0 \\ \therefore (x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

□

p106~107 : 1

《補題》

$$Q_k(x) = (n!2^n)^{-1} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n \quad (0 \leq k \leq n)$$

とおく. $0 \leq k < n$ のとき, $Q_k(x)$ は $(x^2 - 1)^{n-k}$ で割り切れ.

$$Q_k(1) = Q_k(-1) = 0$$

である.

証明. k に関する帰納法により示す. $k = 0$ のときは

$$Q_0(x) = (n!2^n)^{-1} (x^2 - 1)^n$$

であり, $Q_0(x)$ は $(x^2 - 1)^n$ で割り切れ, $Q_0(1) = Q_0(-1) = 0$ である.

$k > 0$ として, $k - 1$ の場合の主張の成立を仮定すると, $Q_{k-1}(x)$ は x についての式 $g(x)$ を用いて,

$$Q_{k-1} = g(x)(x^2 - 1)^{n-k+1}$$

と表せ,

$$\begin{aligned} Q_k(x) &= Q'_{k-1}(x) \\ &= g'(x)(x^2 - 1)^{n-k+1} + g(x)(x^2 - 1)^{n-k} \cdot 2x \\ &= (g'(x)(x^2 - 1) + g(x) \cdot 2x)(x^2 - 1)^{n-k} \end{aligned}$$

したがって, $Q_k(x)$ は $(x^2 - 1)^{n-k}$ で割り切れ, $n - k > 0$ より,

$$Q_k(1) = Q_k(-1) = 0$$

となり, これが証明すべきことであつた. \square

証明. $Q_k(x)$ が $(-1, 1)$ 上に k 個の相異なる根を持つことを, k に関する数学的帰納法で示す.

(I) $k = 0$ の場合

$$Q_0(x) = (n!2^n)^{-1} (x^2 - 1)^n$$

なので, $(-1, 1)$ に根を持たない.

(II) $k > 0$ として, $k - 1$ の場合の主張の成立を仮定すると, $Q_{k-1}(x)$ は $(-1, 1)$ に $k - 1$ 個の相異なる根を持つから, それらを

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \quad (-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < 1)$$

とおく. ここで, $Q_{k-1}(x)$ は閉区間 $[-1, 1]$ で微分可能なので, 各区間 $[-1, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, 1]$ においても微分可能であり, 補題により,

$$Q_{k-1}(-1) = Q_{k-1}(x_1) = \dots = Q_{k-1}(x_{k-1}) = Q_{k-1}(1) = 0$$

である. したがって各小区間においてロルの定理が適用できて, $Q'_{k-1}(x) = Q_k(x)$ は $(-1, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, 1)$ において根をもつ.

以上 (I), (II) の議論により, $Q_k(x)$ は $(-1, 1)$ において相異なる k 個の根をもつ. 特に $k = n$ のとき, $Q_n(x) = P_n(x)$ で $P_n(x)$ は $(-1, 1)$ において相異なる n 個の根をもつ. \square

p106-107 : 8-(i)

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$$

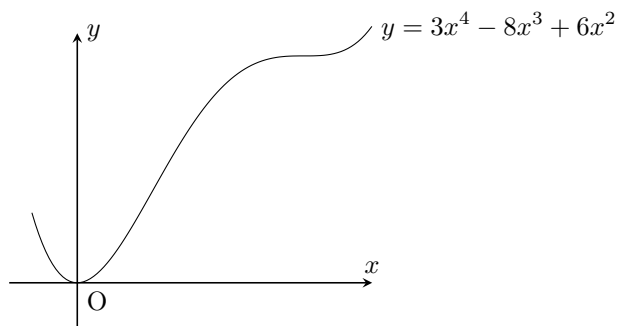
とおくと,

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x-1)^2,$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x-1)(x-1)$$

であるから, 増減表は以下ようになる.

x	...	0	...	1/3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$f(x)$		↘		↗		↖	



p106-107 : 8-(ii)

$x > 0$ のもとで,

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

とおく. ここで,

$$f(x) = \exp(\log x^{1/x}) = \exp(\log x/x)$$

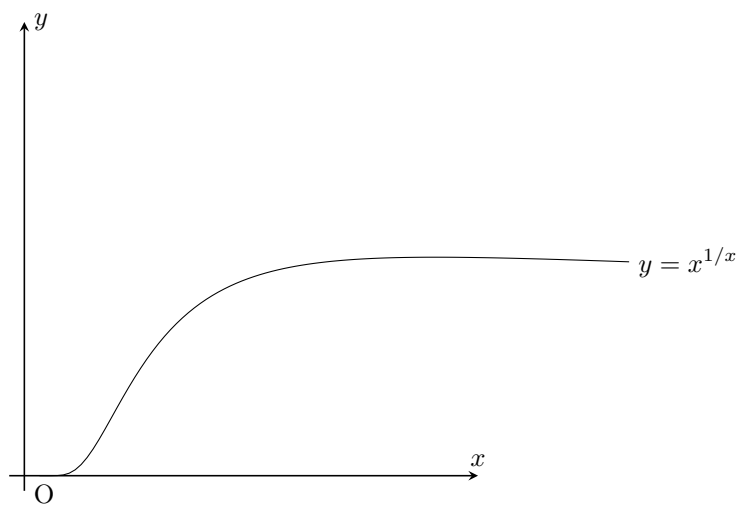
と変形できるので,

$$f'(x) = \exp(\log x/x) \left(\frac{1 - \log x}{x^2} \right),$$

$$f''(x) = \exp(\log x/x) \left(\frac{(\log x - 1)^2 - 3x + 2x \log x}{x^4} \right)$$

であり, 増減表は以下ようになる. ただし α, β は $(\log x - 1)^2 - 3x + 2x \log x = 0$ の 2 解である.

x	0	...	α	...	e	...	β	...
$f'(x)$		+		+	0	-		-
$f''(x)$		+	0	-		-	0	+
$f(x)$		↗		↗		↘		↘



p106-107 : 10

証明. 3つのことを証明する.

a) と b) が同値であること

$a < x \leq y$ または $y \leq x < a$ に対して, $0 \leq t < 1$ を用いて,

$$x = ta + (1-t)y$$

とおく. $a < x \leq y$ とする. このとき,

$$t = \frac{x-y}{a-y} \tag{1}$$

と表せることはよい.

また, f は I で凸であり, これは

$$f(x) = tf(a) + (1-t)f(y) < tf(a) + (1-t)f(y) \tag{2}$$

と同値である. $x < y$ のとき (2) に (1) の t の値を代入すれば,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{3}$$

を得る. $x = y$ のときは明らか.

a) と c) が同値であること

c) を仮定する. (3) の左辺について, 平均値の定理により,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

をみたす ξ ($a < \xi < x$) が存在する. 同様に, (3) の右辺について, 平均値の定理により,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\eta)$$

をみたす η ($x < \eta < y$) が存在する. 仮定により, $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ だから, (3) が成り立ち, a) が従う.

a), すなわち (3) を仮定する. 左辺について, $x \rightarrow +a$ とすれば, これは $f'(a)$ に収束し, 右辺は, これは $(f(y) - f(a))/(y - a)$ に収束する (これを α とおく.). $f'(a) \leq \alpha$ となることはよい. また, $x \rightarrow -y$ とすれば, 左辺は α に, 右辺は $f'(y)$ に収束する. $\alpha \leq f'(y)$ となることもよい.

よって, a) と c) は同値である.

a) と d) が同値であること

d) を仮定する. これは $f'(x)$ は I 上で単調増加であることと同値である.

以上の議論により, 示された. \square

第3章：初等函数

p191-193 : 1

証明. $m, n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ とし, $e = \frac{m}{n}$ と表される, すなわち e が有理数だと仮定する. このとき, 与えられた式を変形して,

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{m}{n} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

とする. これにより,

$$\frac{e^\theta}{n+1} = m \cdot n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$$

であり, $m \cdot n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}$ であるから, $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$ である. よって, $0 < \theta < 1$, $2 < e < 3$ とあわせて,

$$1 \leq \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}$$

であり, $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$ であるから $n = 1$ となる. ゆえに $e = m$ となり, e は整数である. しかし $2 < e < 3$ であるから, これは矛盾である. よって先の仮定が誤りであり, e は無理数である. \square

第4章：積分法

p239 : 1-(i)

$\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx &= \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \left[\log(t^2 + 1) \right]_0^1 \\ &= \log 2 - 0 = \log 2 \end{aligned}$$

p239 : 1-(ii)

$x - a = a \sin \theta$ ($-\pi \leq \theta < \pi$) とする置換を用いる.

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \sqrt{2ax - x^2} dx &= \int_0^a \sqrt{-(x-a)^2 + a^2} dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a |\cos \theta| \cdot a \cos \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} a^2 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= \frac{\pi a^2}{4}
 \end{aligned}$$

p239 : 1-(iii)

$$|\sin 2\theta| = \begin{cases} \sin 2\theta & (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \\ -\sin 2\theta & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi |\sin 2\theta| d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\sin 2\theta) d\theta \\
 &= \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\
 &= -\frac{(-1-1)}{2} + \frac{1+1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

p239 : 1-(iv)

$$\int_0^\pi e^{inx} dx = \begin{cases} 2\pi & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

である. $n = 0$ のときは

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{inx} dx &= \int_0^{2\pi} dx \\ &= \left[x \right]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

となり, $n \neq 0$ のときは

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{inx} dx &= \left[\frac{e^{inx}}{in} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{in} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

となる.

p239 : 1-(v)

$m = n$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx &= \int_0^{2\pi} \cos mx \sin mx dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2mx + \sin 0}{2} \right) dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2mx}{2m} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

となる. $m \neq n$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(m+n)x + \sin(n-m)x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

である, ここまでの議論と, m と n の対称性により,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

となる.

p239 : 1-(vi)

$m \neq n$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(m+n)x + \cos(n-m)x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

となる. $m = n \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2mx}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2mx}{4m} \right]_0^{2\pi} = \pi\end{aligned}$$

となる. $m = n = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} dx \\ &= [x]_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

となる, 以上をまとめて,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2\pi & (m = n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

p239 : 3-(i)

部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}\int x^\alpha \log x \, dx &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

p239 : 3-(ii)

部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}
 \int x^n e^x dx &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \\
 &= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + (n-1) \int x^{n-2} e^x dx \\
 &= \cdots = x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \cdots + (-1)^n n! \int e^x dx \\
 &= e^x (x^n - n x^{n-1} + \cdots + (-1)^n n!) + C
 \end{aligned}$$

となる.

p239 : 3-(iii)

部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}
 \int (\log x)^n dx &= \int (\log x)^n (x)' dx \\
 &= x (\log x)^n - n \int \frac{(\log x)^{n-1}}{x} \cdot x dx \\
 &= x (\log x)^n - n x (\log x)^{n-1} + (n-1) \int \frac{(\log x)^{n-2}}{x} \cdot x dx \\
 &= \cdots = x (\log x)^n - n x (\log x)^{n-1} + \cdots + x (-1)^n n! + C
 \end{aligned}$$

となり、これが答えである.

p239 : 3-(iv)

部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}
 \int \arcsin x dx &= \int (x)' \arcsin x dx \\
 &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
 \end{aligned}$$

であり、これが答えである.

p239 : 3-(v)

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\
 &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C
 \end{aligned}$$

である.

p239 : 3-(vii)

$x+1=t$ とおくと, $dt=dx$ であり,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3} dx &= \int \frac{(t-1)^2+2}{t^3} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{3}{t^3} \right) dt \\ &= \log|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2(x+1)^2} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

p239 : 3-(vi)

$(\log x)' = \frac{1}{x}$ であることを用いて,

$$\begin{aligned}\int \frac{(\log x)^2}{x} dx &= \int (\log x)^2 (\log x)' dx \\ &= \frac{(\log x)^3}{3} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

p239 : 3-(viii)

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) dx = \int (\sin^3 x - \sin^5 x) dx \\ &= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \sin x dx \\ &= \int \{(1-t^2) - (1-t^2)^2\}(-1) dt \quad (\cos x = t) \\ &= \int (t^4 - t^2) dt \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

である.

p239 : 3-(ix)

$\sqrt[6]{x} = t$ とおくと, $x = t^6$ であるから, $\frac{dx}{dt} = 6t^5$ である. これらを用いると,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1}{t^3 - t^2} \cdot 6t^5 dt \\ &= \int \frac{6t^3}{t-1} dt \\ &= \int \frac{(t-1)(6t^2 + 6t + 1) + 6}{t-1} dt \\ &= \int \left(6t^2 + 6t + 6 + \frac{6}{t-1} \right) dt \\ &= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\log|\sqrt[6]{x} - 1| + C \end{aligned}$$

である

p239-240 : 4-(i)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[\log(1+x) \right]_0^1 = \log 2 \end{aligned}$$

である.

p239-240 : 4-(ii)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k/n}}\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k/n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} \cdot 2t dt \\ &= \left[2t \right]_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1)\end{aligned}$$

p247 : 1-(i)

計算すると,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3-x} dx &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{-(x-1) + (x+1)}{(x-1)x(x+1)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ -\frac{1}{(x+1)x} + \frac{1}{x(x-1)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{-(x+1) + x}{(x+1)x} + \frac{x - (x-1)}{x(x-1)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= -\log |x| + \frac{1}{2} \log |x^2 - 1| + C\end{aligned}$$

であり, これが答えである.

p247 : 1-(ii)

$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ であるから,

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \int \left(1 + \frac{6x^2 - 11x + 6}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right) dx$$

である. ここで, A, B, C を定数として,

$$\frac{6x^2 - 11x + 6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

とおく. これより,

$$6x^2 - 11x + 6 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{8}, \quad C = \frac{27}{2}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx &= \int \left\{ 1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{8(x-2)} + \frac{27}{2(x-3)} \right\} dx \\ &= x + \frac{1}{2} \log \left| \frac{(x-1)(x-3)^{27}}{(x-2)^{16}} \right| + C \end{aligned}$$

である.

p247 : 1-(iii)

A, B, C, D を定数として,

$$\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

とおくと, 簡単な計算により, $A = -1, B = 2, C = 1, D = 2$ とわかるので,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx \\ &= \log \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} + C \end{aligned}$$

を得る.

p247 : 1-(iv)

命題 6.2 3) と例 3 の結果を用いると,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} &= \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x \right) \\ &= \frac{3x^3 + 5x}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \arctan x. \end{aligned}$$

p247 : 1-(v)

$\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ であるから,

$$\int \frac{1}{a+b \cos x} dx = \int \frac{1}{(a-b)t^2 + a+b} dt$$

となる. よって,

$$\int \frac{1}{a+b \cos x} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \tan \frac{x}{2} + C & (a=b \neq 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{a \tan \frac{x}{2}} + C & (a=-b \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

p247 : 1-(vi)

$\frac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)'$ と見て部分積分する.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} &= \int \frac{(\tan x)'}{\sin^3 x} dx \\ &= \frac{\tan x}{\sin^3 x} - \int \tan x \left(\frac{1}{\sin^3 x} \right)' dx \\ &= \frac{1}{\sin^2 x \cos x} + 3 \int \frac{dx}{\sin^3 x} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x \cos x} - \frac{3 \cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{3}{2} \log |\tan \frac{x}{2}|. \end{aligned}$$

p247 : 1-(vii)

分母分子に $1 - (\sin x + \cos x)$ を掛ける.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{\sin x - \sin^2 x - \sin x \cos x}{1 - (\sin x + \cos x)^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int (\sec x - \tan x - 1) dx \\ &= -\frac{1}{2} (\log |\sec x + \tan x| + \log |\cos x| - x) \\ &= \frac{1}{2} (x - \log |1 + \sin x|). \end{aligned}$$

p247 : 1-(viii)

$\tan x = t$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ であるから, 求める不定積分は,

$$\begin{aligned} \int \frac{1/\cos^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} dx &= \int \frac{1}{a^2 + b^2 t^2} dt \\ &= \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b}{a} \tan x \right) + C \end{aligned}$$

である.

p247 : 1-(xiii)

$x + \frac{1}{x} = t$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$ であり, 求める不定積分は,

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x^2}{1+x^2\sqrt{1+x^4}} dx &= \int \frac{1-x^2}{x^2(x+1/x)\sqrt{x^2+1/x^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-2}} dt \end{aligned}$$

となる. ここで, $s = \frac{1}{t}$ とすると, $\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{s^2}$ であり,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-2}} dt &= \int \frac{1}{\sqrt{1-2s^2}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}s) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right) + C \end{aligned}$$

となる.

p247 : 1-(ix))

$\log x = t$ と変換して部分積分すると,

$$\begin{aligned} \int \sin \log x \, dx &= \int e^t \sin t \, dt \\ &= e^t \sin t - \int e^t \cos t \, dt \\ &= e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin t \, dt. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \int \sin \log x \, dx &= \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) \\ &= \frac{1}{2}(\sin \log x - \cos \log x). \end{aligned}$$

p247 : 1-(x))

$x = \sin t$ と置く.

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} dx \\
 &= \int \frac{\cos^2 t}{1+\sin t} dt \\
 &= \int \frac{\cos^2 t(1-\sin t)}{(1+\sin t)(1-\sin t)} dt \\
 &= \int (1-\sin t) dt \\
 &= t + \cos t \\
 &= \arcsin x + \cos \arcsin x \\
 &= \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.
 \end{aligned}$$

p247 : 1-(xi)

$x = \frac{1}{t}$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ である. また, $x^2 + 1 = \frac{1}{t^2} + 1$ となる. よって,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{t}{\sqrt{1/t^2+1}} \cdot (-1/t^2) dt \\
 &= - \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\
 &= \log \left| t + \sqrt{t^2+1} \right| + C \\
 &= \log \left| \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C
 \end{aligned}$$

である.

p247 : 1-(xii)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}} \\
 &= \arcsin \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) + C
 \end{aligned}$$

p247 : 1-(xiv)

$1 = (x)'$ と見て部分積分する.

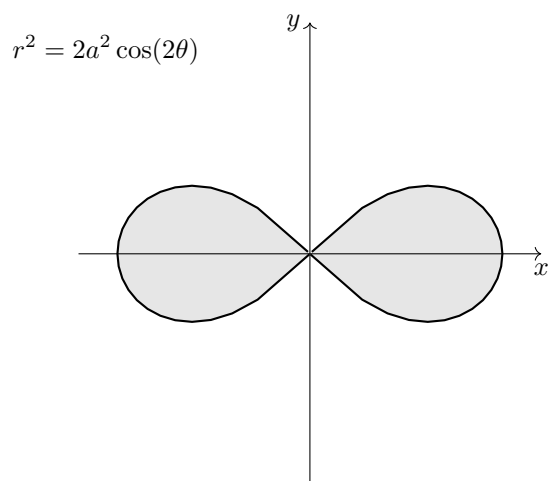
$$\begin{aligned}
 \int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\
 &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2+1).
 \end{aligned}$$

p290 : 3

求める面積を S とすると、第 1 象限の面積を 4 倍すればよいので、

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a^2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2 \left[a^2 \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 (a^2 \sin(\pi/2) - a^2 \sin(0)) \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

となる.

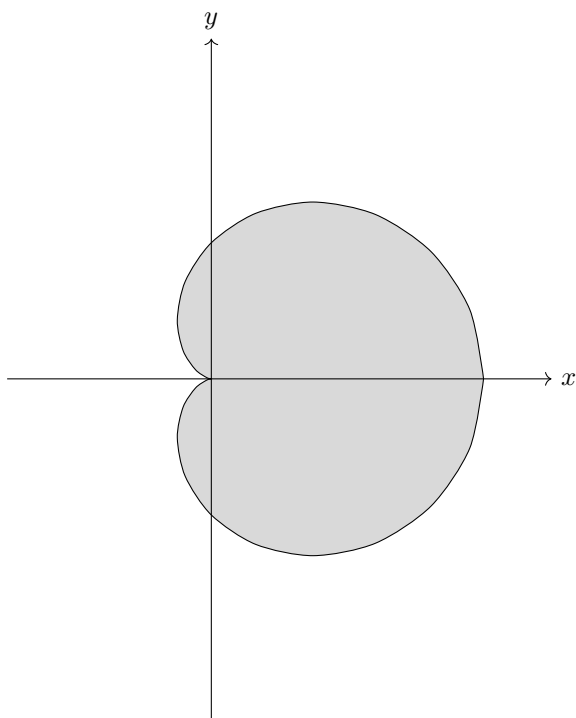


p290 : 4

求める面積を S ，求める求める体積を V とおくと，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \left(1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= a^2 \left[\frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{3\pi a^2}{2} \end{aligned}$$

となる.



第5章：級数

p366 : 1-(i)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m-1} = -1$$

であり, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は $\{-1, 1\}$ である.

ゆえに,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

である.

p366 : 1-(ii)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m-1} = -\infty$$

であり, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は $\{-\infty, \infty\}$ である^{†1}.

ゆえに,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

である.

^{†1} 補完数直線を考えているため, これでよい.

p366 : 1-(iii)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ である. ゆえに,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である.

証明の前に, $\pm\infty$ について演算を定義しておく.

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty + a = \infty && \text{if } a \in (-\infty, \infty], \\ a - \infty &= a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty && \text{if } a \in [-\infty, \infty), \\ a \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & \text{if } a \in (0, \infty], \\ \mp\infty & \text{if } a \in [-\infty, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

$0 \cdot \infty$ や $\infty - \infty$ などは定義しない. このとき, 補完数直線において次の命題が成り立つ.

補題 1 :

実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ を満たしており, $a + b$, ab が定義されるとき, それぞれ $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$, $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$ が成り立つ.

問題 2), 3) において, 演算が定義されないような場合は除外したものを証明する.

p366 : 2)

証明.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

を示す. その他の不等式についても同様である. $n \in \mathbb{N}$ を任意に取って固定する. 上限の定義より, $m \geq n$ に対して,

$$\begin{aligned} a_m &\leq \sup_{k \geq n} a_k, \\ b_m &\leq \sup_{k \geq n} b_k \end{aligned}$$

であるから,

$$a_m + b_m \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k$$

が成り立つ. 左辺で m についての上限を取ると,

$$\sup_{k \geq n} (a_k + b_k) \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k$$

となる. (右辺は $\{a_m + b_m; m \geq n\}$ の上界であり, \sup は最小上界であるからこの操作は正当.) $n \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

となって右側の不等式が示される. また, $m \geq n$ に対し,

$$a_m + \inf_{k \geq n} b_k \leq a_m + b_m \leq \sup_{k \geq n} (a_k + b_k)$$

であるから, 左辺の上限を取って,

$$\sup_{k \geq n} a_k + \inf_{k \geq n} b_k \leq \sup_{k \geq n} (a_k + b_k)$$

となる. $n \rightarrow \infty$ とすれば左側の不等式も示される.

□

p366 : 3)

証明. \limsup についてのみ示す. \liminf についても同様である. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ の場合, $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < \infty$ であるから $\sup_{k \geq n} b_k < \infty$ となり $\left(\sup_{k \geq n} a_k\right) \left(\sup_{k \geq n} b_k\right)$ が定義されることに注意する. $a_n, b_n \geq 0$ であるから, $m \geq n$ に対して,

$$a_m b_m \leq \left(\sup_{k \geq n} a_k\right) \left(\sup_{k \geq n} b_k\right)$$

が成り立つ. 左辺で m について上限を取ってから $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n\right)$$

となる. また, 第 I 章の命題 1.4, 1.6 より,

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq n} (ca_k) &= c \sup_{k \geq n} a_k \quad (c > 0), \\ \sup_{k \geq n} (ca_k) &= - \inf_{k \geq n} (-ca_k) = c \inf_{k \geq n} a_k \quad (c < 0), \end{aligned}$$

が成り立つ. $n \rightarrow \infty$ とすれば残りの等式が得られる. \square

p366 : 4)

証明. p16 の問題 4) の一般化である. 右側の不等式のみ示す. $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ とする. $\alpha = \infty$ ならば明らかであるから $\alpha \neq \infty$ の場合を考える. $\varepsilon > 0$ を任意にとると, 定理 1.4 より,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N)$$

となるような N が取れる. この不等式を繰り返し用いて,

$$\begin{aligned} a_n &< (\alpha + \varepsilon) a_{n-1} \\ &< (\alpha + \varepsilon)^2 a_{n-2} \\ &< \dots \\ &< (\alpha + \varepsilon)^{n-N} a_N \end{aligned}$$

がわかる. 両側の式を $1/n$ 乗してから \limsup を取ると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha + \varepsilon)^{1-N/n} \sqrt[n]{a_N} = \alpha + \varepsilon$$

となる. $\varepsilon \rightarrow +0$ とすると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha$$

である. これが証明すべきことであつた. \square

参考文献

- [1] 杉浦光夫『解析入門Ⅰ』, 東京大学出版会, 1980