

# 杉浦・解析入門解答集

なまちゃん

2023 年 11 月 22 日

## 目次

目次	2	p63-64 : 2-(iv) . . . . .	18	p247 : 1-(v) . . . . .	32
		p63-64 : 3-(i) . . . . .	19	p247 : 1-(viii) . . . . .	33
		p63-64 : 4-(i) . . . . .	19	p247 : 1-(xiii) . . . . .	33
目次	2			p247 : 1-(xi) . . . . .	33
第 1 章 : 実数と連続	2	第 2 章 : 微分法	20	p247 : 1-(xii) . . . . .	34
p2 : 問 1 . . . . .	2	p90-91 : 1-(i) . . . . .	20		
p16-17 : 1-(i) . . . . .	4	p90-91 : 1-(ii) . . . . .	20	第 5 章 : 級数	34
p16-17 : 1-(ii) . . . . .	4	p90-91 : 1-(iii) . . . . .	20	p366 : 1-(i) . . . . .	34
p16-17 : 1-(iii) . . . . .	5	p90-91 : 9-(i) . . . . .	21	p366 : 1-(ii) . . . . .	34
p16-17 : 1-(iv) . . . . .	5	p90-91 : 10 . . . . .	22	p366 : 1-(iii) . . . . .	34
p16-17 : 1-(v) . . . . .	6	p106-107 : 10 . . . . .	23		
p16-17 : 2) . . . . .	6	第 3 章 : 初等函数	24		
p16-17 : 3) . . . . .	6	p191-193 : 1 . . . . .	24		
p31-33 : 1-(i) . . . . .	8	第 4 章 : 積分法	24		
p31-33 : 1-(ii) . . . . .	8	p239 : 1-(i) . . . . .	24		
p31-33 : 1-(iii) . . . . .	9	p239 : 1-(ii) . . . . .	25		
p31-33 : 1-(iv) . . . . .	9	p239 : 1-(iii) . . . . .	25		
p31-33 : 1-(v) . . . . .	10	p239 : 1-(iv) . . . . .	26		
p31-33 : 1-(vi) . . . . .	10	p239 : 1-(v) . . . . .	26		
p31-33 : 2 . . . . .	12	p239 : 1-(vi) . . . . .	27		
p49-50 : 1 . . . . .	13	p239 : 3-(i) . . . . .	27		
p49-50 : 2-(i) . . . . .	13	p239 : 3-(ii) . . . . .	28		
p49-50 : 2-(ii) . . . . .	13	p239 : 3-(iii) . . . . .	28		
p49-50 : 2-(iii) . . . . .	14	p239 : 3-(iv) . . . . .	28		
p49-50 : 2-(v) . . . . .	14	p239 : 3-(v) . . . . .	28		
p49-50 : 2-(viii) . . . . .	14	p239 : 3-(vii) . . . . .	29		
p49-50 : 2-(x) . . . . .	15	p239 : 3-(vi) . . . . .	29		
p49-50 : 3 . . . . .	15	p239 : 3-(viii) . . . . .	29		
p49-50 : 5 . . . . .	16	p239 : 3-(ix) . . . . .	30		
p49-50 : 6 . . . . .	16	p239-240 : 4-(i) . . . . .	30		
p63-64 : 1-(i) . . . . .	17	p239-240 : 4-(i) . . . . .	31		
p63-64 : 1-(iii) . . . . .	17	p247 : 1-(i) . . . . .	31		
p63-64 : 2-(i) . . . . .	17	p247 : 1-(ii) . . . . .	32		
p63-64 : 2-(iii) . . . . .	18	p247 : 1-(iii) . . . . .	32		

## 第 1 章：実数と連続

### p2：問 1

(1)

**証明.**  $0, 0' \in K$  がともに加法単位元の性質を満たすとする.

このとき,  $0$  が加法単位元の性質をもつことから,

$$0' + 0 = 0'$$

同様に,  $0'$  が加法単位元の性質をもつことから,

$$0 + 0' = 0$$

交換律より,  $0 + 0' = 0' + 0$  なので,

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

これからただちに加法単位元の一意性が従う.  $\square$

(2)

**証明.**  $a, b \in K$  とし,

$$a + b = 0$$

とする. このとき,

$$-a = -a + 0 = -a + (a + b) = (-a + a) + b = 0 + b = b$$

となり, 加法逆元の一意性が従う.  $\square$

(3)

**証明.**  $a \in K$  のとき,

$$a + (-a) = 0$$

$$\therefore (-a) + a = 0$$

他方,  $-(-a)$  は  $(-a)$  の加法逆元であるから,

$$(-a) + (-(-a)) = 0$$

これと逆元の一意性により,  $a = -(-a)$  が従う.  $\square$

(5)

**証明.**  $a \in K$  に対して,

$$a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$$

であるから,  $-a$  が  $a$  の加法逆元であることと含めて主張が従う.  $\square$

(6)

**証明.** (4) の結果を用いる.  $a = -1$  とすると,

$$(-1)(-1) = -(-1) = 1$$

これが証明すべきことであった.  $\square$

(7)

**証明.**  $a, b \in K$  に対して,

$$a(-b) + ab = a((-b) + b)$$

$$= a0$$

$$= 0$$

$$\therefore a(-b) = -ab$$

$(-a)b = -ab$  も同様に示される.  $\square$

**p16-17 : 1-(i)**

$a = 0$  のときは明らかに 0 に収束するので,  $a \neq 0$  とする.  $2|a| \leq N$  となる  $N \in \mathbb{N}$  をとる. このとき,

$$\begin{aligned} 0 &< \left| \frac{a^n}{n!} \right| \\ &\leq \frac{|a|^n}{n!} \\ &= \frac{|a|^N}{N!} \cdot \frac{|a|}{N+1} \cdot \frac{|a|}{N+2} \cdots \frac{|a|}{n} \\ &\leq \frac{|a|^N}{N!} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-N} \end{aligned}$$

であるから,

$$-\frac{|a|^N}{N!} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-N} \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{|a|^N}{N!} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-N}$$

となり, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

である

**p16-17 : 1-(ii)**

$a = 1$  のときは明らかに 1 に収束するので, まず  $a > 1$  のときを考える.  $\delta_n > 0$  を用いて,

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$$

とおくことができる. 両辺を  $n$  乗すると

$$\begin{aligned} a &= 1 + n\delta_n + \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 + \cdots + \delta_n^n \\ &> 1 + n\delta_n \\ &> n\delta_n \end{aligned}$$

となり,  $0 < \delta_n < \frac{a}{n}$  であるから, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$$

となる.  $a < 1$  のときは,  $a^{\frac{1}{n}} = \left( \left( \frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$  を使えば同じ結果が得られ, 以上の議論により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

となる.

**p16-17 : 1-(iii)**

$\frac{n}{2}$  以下の最大の自然数を  $m$  とおく. 与えられた式は,

$$(0 <) \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1) \cdots n}{n^n}$$

と表されるので,  $\frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdots n}{n^{n-m}} < 1$  であることと,  $m \leq \frac{n}{2}$  から  $\frac{m}{n} \leq \frac{1}{2}$  であることを用いると,

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1) \cdots n}{n^n} < \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{n^m} < \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

よって,

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

である.  $n \rightarrow \infty$  のとき  $m \rightarrow \infty$  なので, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

である.

**p16-17 : 1-(iv)**

のちに  $n \rightarrow \infty$  の極限を考えることを考慮すると,

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= 1 + n + \frac{1}{2}n(n-1) + \cdots + n + 1 \\ &> \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

となり, この不等式から,

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$$

を得る. ここで, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

である.

**p16-17 : 1-(v)**

まず,

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

である. ここで, のちに  $n \rightarrow \infty$  の極限を考えることを考慮すると,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

であり,

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

を得る. ここで, はさみうちの原理を用いると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

である.

**p16-17 : 2)**

$n = 1, 2, \dots$  に対して,

$$f_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2m}$$

とおく. ここで,  $n!x \in \mathbb{Z}$  のとき,

$$\cos(n! \pi x) = \pm 1$$

$n!x \notin \mathbb{Z}$  のときは,

$$|\cos(n! \pi x)| < 1$$

であるから,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (n!x \in \mathbb{Z}) \\ 0 & (n!x \notin \mathbb{Z}) \end{cases}$$

となる. さて,  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  であるならば, どんな  $n \in \mathbb{N}$  に対しても,  $n!x$  が整数とならない. また,  $x \in \mathbb{Q}$  のとき,  $x = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ ) とすれば,  $n$  が  $q$  より十分大きいときに  $n!x$  は整数となる. よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2m} \right) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

**p16-17 : 3)****《補題》**

任意の  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  について,

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

が成り立つ.

**証明.**  $n = 2$  のときは三角不等式そのものであるから,  $n \geq 3$  とし,  $n - 1$  個の実数については補題の主張が成り立つものとする.

いま,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n$$

であるから, これに三角不等式を適用して,

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}| + |a_n|$$

を得る. ここで, 数学的帰納法の仮定より,

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}|$$

がいえるので, ここまでの議論で,

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

は  $n$  の場合にも成り立つことが示され, 以上の議論より補題の主張が従う.  $\square$

**証明.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  であるから, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある  $N_1 \in \mathbb{N}$  が存在して, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$n \geq N_1 \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

となる.

また,

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right|$$

と変形する. この右辺に補題を適用し,

$$\left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}$$

を得る. これにより,

$$n \geq N_1 \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} + \left( \frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon$$

となる. ここで  $N_2 := N_1 + 1$  とすると,  $n \geq N_2$  であるとき  $\left( \frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon < \varepsilon$  となることに注意する. さて,

$$n \geq N_3 \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} < \varepsilon$$

となるように  $N_3 \in \mathbb{N}$  をとる.  $N := \max\{N_2, N_3\}$  とすると,

$$n \geq N \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} + \left( \frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

であり, これより

$$n \geq N \implies \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < 2\varepsilon$$

となる. 書き換えると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

となり, これが証明すべきことであつた.  $\square$

## p31-33 : 1-(i)

$$\begin{aligned}\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} &= \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$a_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ,  $b_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$  とおくと,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  は明らかに収束するから, 定理 2.5(2) より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

である. また, アルキメデスの原理により, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $n_0 \in \mathbb{N}$  を  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$  となるようにとることができ, このとき, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$n \geq n_0 \implies 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \varepsilon$$

となり,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  である. これより,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\} \cdot \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{6}(1+0) \cdot (2+0) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

## p31-33 : 1-(ii)

## 《補題》

正数列  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  に対して,  $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  が収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

となるとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  である.

**証明.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  であるから,  $r$  ( $0 < r < 1$ ) に対して, ある  $N_1 \in \mathbb{N}$  が存在して, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$n \geq N_1 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

が成り立つ. このとき,

$$a_n = a_{N_1} \cdot \frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}} \cdot \frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+1}} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \frac{a_n}{a_{n-1}} < a_{N_1} r^{n-N_1} = \frac{a_{N_1}}{r^{N_1}} r^n$$

となる.  $0 < r < 1$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{N_1}}{r^{N_1}} r^n = 0$  であるから,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  である.  $\square$



$a_n = \frac{n^2}{a^n}$  とおく.  $0 < a \leq 1$  のときは明らかに  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  となる.

$a > 1$  のとき,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{a}$  となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{a} = \frac{1}{a} < 1$$

であるから, 補題により,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  となる. 以上の議論により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = \begin{cases} \infty & (0 < a \leq 1) \\ 0 & (a > 1) \end{cases}$$

となる.

### p31-33 : 1-(iii)

明らかに  $\sqrt[n]{n} > 1$  なので,  $\delta_n > 0$  を用いて,

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$$

とかける. 両辺を  $n$  乗して,  $n \rightarrow \infty$  の極限を考えることを考慮すると,

$$\begin{aligned} n &= (1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 + \cdots + (\delta_n)^n \\ &> \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 \end{aligned}$$

となり, この不等式から,

$$0 < \delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

を得る. ここで, はさみうちの原理により,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

である.

### p31-33 : 1-(iv)

$a_n = n^k e^{-n}$  とおく. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

ゆえに, 補題により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k e^{-n} = 0$$

である.

**p31-33 : 1-(v)**

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= e \cdot \frac{1}{e} = 1 \end{aligned}$$

である.

**p31-33 : 1-(vi)****《補題》**

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  を実数列とし,  $a_n > 0$  とする. もし  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  であれば  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$  である. また, もし  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  であるならば,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$  である,

**証明.** 前半の主張のみ示せば後半の主張も同様に示せるので, 前半のみ示す. 与えられた条件により, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $n_0 \in \mathbb{N}$  が存在して, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$n \geq n_0 \implies |a_n - 0| < \varepsilon$$

が成り立つ, ここで  $\frac{1}{\varepsilon} = M$  とおくと, 上の  $n_0 \in \mathbb{N}$  に対して,

$$n \geq n_0 \implies \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

となり, これより  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$  が示された.  $\square$

**《補題》**

$c > 1$  のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n} = 0$  である.

**証明.**  $c > 1$  より,  $\delta > 0$  を用いて  $c = 1 + \delta$  とおける. このとき, のちに  $n \rightarrow \infty$  の極限を考えることを考慮すると,

$$\begin{aligned} c^n &= (1 + \delta)^n \\ &= 1 + n\delta + \frac{1}{2}n(n-1)\delta^2 + \cdots + \delta^n \\ &> 1 + n\delta \end{aligned}$$

このことから,  $0 < \frac{1}{c^n} < \frac{1}{1 + n\delta}$  であるから, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n} = 0 \quad (c > 1)$$

である.  $\square$

$a_n = (c^n + c^{-n})^{-1}$  とおく.  $c = 1$  のときは明らかに  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$  である.  
 $c > 1$  のとき, 2つの補題により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n}) = \infty$$

であるから, 補題により  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n})^{-1} = 0$  である.

$0 < c < 1$  のときは  $c$  の逆数を考えることにより同じ結論に帰着する. 以上の議論により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n})^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (c = 1) \\ 0 & (c \neq 1) \end{cases}$$

である.

## p31-33 : 2

**証明.** 二項定理を用いて  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  の一般項を展開すると,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} \cdot \frac{1}{n^r} + \cdots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

同様にして,  $a_{n+1}$  の展開式を得たとき,  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$  であることにより,  $r \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して,

$$\frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) < \frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n+1}\right)$$

が成立する. これと,  $a_{n+1}$  の展開式のほうが, 正の項を一つ多く含むことから, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$a_n < a_{n+1}$$

が成立し,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  は単調増加数列である. また,

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &< 2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1 - 2^{-n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= 3 - 2^{-n} \\ &< 3 \end{aligned}$$

であるから,  $a_n < 3$  となる.

また,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  が単調増加数列であることから, 任意の  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  に対して,

$$a_n > a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

であるから,

$$2 < e < 3$$

を得る. また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq e$$

である. 他方,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{r!}$$

であるから, ここで  $r \rightarrow \infty$  として,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq e$$

となり,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$  を得る.  $\square$

**p49-50 : 1**

**証明.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$  であるから,  $0 < r < 1$  のとき,  $r < k < 1$  に対して, ある  $n_1 \in \mathbb{N}$  が存在して, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$n \geq n_1 \implies a_n < k^n$$

となる. ここで, 定理 5.5(比較判定法) と  $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$  より,  $\sum a_n$  は収束する.

$r > 1$  のとき,  $1 > 0$  に対して, ある  $n_2 \in \mathbb{N}$  が存在して, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$n \geq n_2 \implies a_n > 1$$

が成り立ち,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  となる. よって定理 5.1 系の対偶により  $\sum a_n$  は発散する.  $\square$

**p49-50 : 2-(i)**

$$\frac{2n^2}{n^3 + 1} = \frac{2/3}{n+1} + \frac{4n/3 - 2/3}{n^2 - n + 1}$$

により

$$\begin{aligned} \sum \frac{2n^2}{n^3 + 1} &= \sum \frac{2/3}{n+1} + \sum \frac{4n/3 - 2/3}{n^2 - n + 1} \\ &> \sum \frac{2/3}{n+1} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となる. よってこの級数は発散する

**p49-50 : 2-(ii)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2} < \sum \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \left( < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 3 \right)$$

であるから, この級数は収束する. また

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

が  $\alpha > 1$  のときに収束することを用いることもできる.

**p49-50 : 2-(iii)**

$a = 1$  のとき, この級数は明らかに収束する.  $a \neq 1$  のとき,  $a^x$  の  $x = 0$  のまわりでの Taylor 展開

$$a^x = 1 + (\log a)x + \frac{(\log a)^2}{2!}x^2 + O(x^3)$$

を用いて

$$\begin{aligned} \sum (a^{1/n} - 1) &= \sum \left\{ \frac{\log a}{n} + \frac{(\log a)^2}{2!n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right\} \\ &> \sum \frac{\log a}{n} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となる. よってこの級数は  $a = 1$  のときは収束し,  $a \neq 1$  のときは発散する.

**p49-50 : 2-(v)**

定理 5.7 (ダランベールの収束判定) を用いる.  $a_n = n/2^n$  とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

となることにより, この級数は収束する

**p49-50 : 2-(viii)**

$$\frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} > \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$$

であることから

$$\sum \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} > \sum \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

となる. よってこの級数は発散する.

## p49-50 : 2-(x)

定理 5.7 (ダランベールの収束判定) より  $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$  とすると

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1)^2}}{(n+2)^{(n+1)^2}} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} = \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} \frac{(n+1)^{n^2}}{(n+2)^{n^2}} \frac{(n+1)^{2n+1}}{(n+2)^{2n+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{2n+1}\end{aligned}$$

ここで

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n(n+2)} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{-2n}$$

とすることにより, 右辺は  $e \times 1 = e$  に収束する.

さらに,

$$\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{2n+1} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)} \right\}^{-2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-3}$$

とすることで, 右辺は  $\frac{1}{e^2} \times 1 = \frac{1}{e}$  に収束する. よって

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \times \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e} < 1$$

となる. ゆえにこの級数は収束する.

## p49-50 : 3

**証明.**  $\sum a_n$  が絶対収束するので,  $\sum |a_n|$  も収束する. よって, 定理 5.1 系より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  となる. このとき,  $1 > 0$  に対して, ある  $n_1 \in \mathbb{N}$  が存在して, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$n \geq n_1 \implies ||a_n| - 0| < 1$$

が成り立つ. また,  $|a_n| < 1$  のとき,

$$0 \leq |a_n|^2 \leq |a_n|^2 \leq |a_n|$$

が成り立つ. ここで,  $\sum |a_n|$  が収束し, 各項は正なので, 定理 5.5(比較判定法) により,  $\sum |a_n|^2$  も収束する. ゆえに  $\sum a_n^2$  は絶対収束する.  $\square$

## p49-50 : 5

**証明.** 与えられた条件により,  $0 < r < c, r \neq \infty$  をみたま  $r \in \mathbb{R}$  に対して, ある  $N \in \mathbb{N}$  が存在して, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$n \geq N \implies \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < r$$

が成り立つ. これにより,

$$\begin{aligned} 0 < -r + c < \frac{a_n}{b_n} < r + c \\ \therefore (-r + c)b_n < a_n < (r + c)b_n \end{aligned}$$

となる. これと比較原理により,  $\sum a_n$  と  $\sum b_n$  は同時に収束, 発散することが証明された.  $\square$

## p49-50 : 6

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$  により,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  は収束する. ここで,

$$1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1}$$

の両辺を 0 から 1 まで  $x$  で積分すると,

$$\begin{aligned} \overbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}}^{s_n} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + R_n \end{aligned}$$

である. ただしここで  $R_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx$  とおいた. この式から,

$$\begin{aligned} \left| s_n - \frac{\pi}{4} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx \right| \\ &< \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である. よって,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

である.



**p63-64 : 1-(i)**

$f(a)$  を考えるため,  $a \neq 0$  としてよい.  $\delta \leq \frac{|a|}{2}$  とすると,  $|x - a| < \delta$  より

$$|x| > |a| - \delta \geq \frac{|a|}{2}$$

である. これに留意すると,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - x|}{|ax|} < \frac{2\delta}{|a|^2}$$

であるから,  $\delta = \min\{|a|/2, |a|^2\varepsilon/2\}$  でよい.

**p63-64 : 1-(iii)**

$t := \min\{x, a\}$  とする. このとき, 指数法則により,

$$|e^x - e^a| = e^t(e^{|x-a|} - 1)$$

が成立する. また,  $t \leq a$  であるから,

$$\begin{aligned} e^t &\leq e^a \\ \therefore e^t(e^{|x-a|} - 1) &\leq e^a(e^{|x-a|} - 1) \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\varepsilon = e^a(e^\delta - 1)$$

となればよい. すなわち,

$$\delta = \log(1 + e^{-a}\varepsilon)$$

である.

**p63-64 : 2-(i)**

$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1, \left| \sin \frac{1}{y} \right| \leq 1$  であるから,

$$\left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |(x+y)| \leq |x| + |y| \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow 0)$$

である. よって,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$$

となる.

**p63-64 : 2-(iii)**

まず,  $\log x^x = x \log x$  である. また,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{1/x}$$

となる. ここで,  $\lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} 1/x = \infty$  であるから, ロピタルの定理が適用でき,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{1/x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^x &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\log x^x} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

となり, これが答である.

**p63-64 : 2-(iv)**

$x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  とおくと,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(r^2)}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - (-2 \sin^2(r^2/2) + 1)}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin^2(r^2/2)}{(r^2/2)^2} \cdot (r^2/2) \\ &= 1^2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

を得て, これが答えである.

**p63-64 : 3-(i)**

以下,  $\mathbb{Q}$  の閉包は  $\mathbb{R}$  であることを示す.

$a \in \mathbb{R}$  に対して,

$$U(a, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

すなわち,

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

となればよい. アルキメデスの原理により, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\frac{1}{n} < 2\varepsilon$$

となる  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  が存在する. また,  $n$  を分母とする有理数は数直線上に幅  $\frac{1}{n}$  で並んでいるから,

$$\frac{m}{n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

となる  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  が存在する.

したがって  $a \in \mathbb{R}$  と任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$  となるため,

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

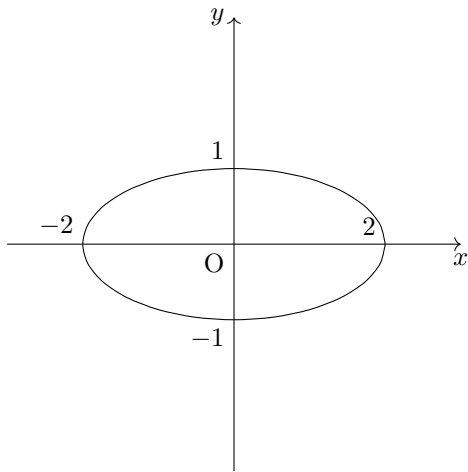
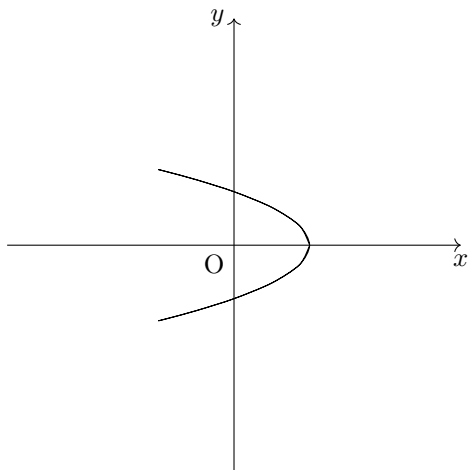
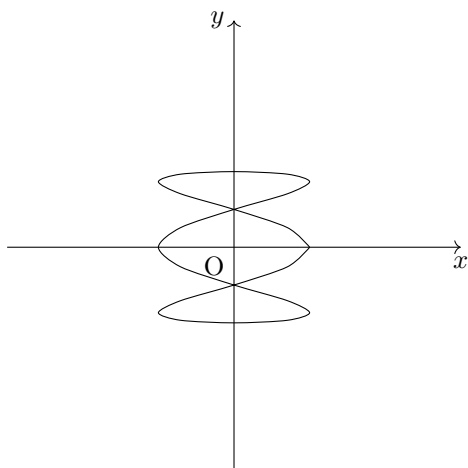
である.

**p63-64 : 4-(i)**

**証明.**  $d(x) = 0$  は  $\inf_{y \in A} |x - y| = 0$  ともかける.

$$\begin{aligned} \inf_{y \in A} |x - y| = 0 &\iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists y \in A) (|x - y| < \varepsilon) \\ &\iff x \in \overline{A} \end{aligned}$$

これにより示された.  $\square$

**第 2 章：微分法****p90-91 : 1-(i)****p90-91 : 1-(ii)****p90-91 : 1-(iii)**

**p90-91 : 9-(i)**

$$(\log x)^{(1)} = 1/x, \quad (\log x)^{(2)} = -1/x^2, \quad (\log x)^{(3)} = 2/x^3, \quad (\log x)^{(4)} = -6/x^4$$

であるから,

$$(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

と推測できる. この推測が正しいことを数学的帰納法により証明する.

(1)  $n = 1$  のとき,  $(\log x)^{(1)} = 1/x$  であり,

$$\frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1} = 1/x$$

であるから, この場合に推測は正しい.

(2)  $n = k$  のときに, この推測が正しいと仮定すると,

$$(\log x)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} (\log x)^{(k+1)} &= \left( \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \right)' \\ &= \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \end{aligned}$$

であるから,  $n = k + 1$  のときも推測は正しい.

(1),(2) より,

$$(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

である.

$$\left( \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \right)^{(n)} = (-1)^n n! \{ (x+1)^{-n-1} - (x+2)^{-n-1} \}$$

**p90-91 : 10**

**証明.**  $u(x) = (x^2 - 1)^n$  とおく, このとき,

$$U'(x) = 2xn(x^2 - 1)^{n-1}$$

だから,

$$(x^2 - 1)u'(x) = 2nx \cdot u(x)$$

この両辺を  $(n+1)$  回微分して,

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xu^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)n}{2} \cdot u^{(n)}(x) &= 2n xu^{(n+1)}(x) + 2(n+1)nu^{(n)}(x) \\ \therefore (x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2nu^{(n+1)}(x) - (n+1)nu^{(n)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

ここで,  $u^{(n)}(x) = 2^n n! P_n(x)$  なので,

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)\{2^n n! P_n''(x)\} + 2x\{2^n n! P_n'(x)\} - n(n+1)\{2^n n! P_n(x)\} &= 0 \\ \therefore (x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

□

## p106-107 : 10

証明. 3つのことを証明する.

**a) と b) が同値であること**

$a < x \leq y$  または  $y \leq x < a$  に対して,  $0 \leq t < 1$  を用いて,

$$x = ta + (1-t)y$$

とおく.  $a < x \leq y$  とする. このとき,

$$t = \frac{x-y}{a-y} \tag{1}$$

と表せることはよい.

また,  $f$  は  $I$  で凸であり, これは

$$f(x) = tf(a) + (1-t)f(y) < tf(a) + (1-t)f(y) \tag{2}$$

と同値である.  $x < y$  のとき (2) に (1) の  $t$  の値を代入すれば,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{3}$$

を得る.  $x = y$  のときは明らか.

**a) と c) が同値であること**

c) を仮定する. (3) の左辺について, 平均値の定理により,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

をみたす  $\xi$  ( $a < \xi < x$ ) が存在する. 同様に, (3) の右辺について, 平均値の定理により,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\eta)$$

をみたす  $\eta$  ( $x < \eta < y$ ) が存在する. 仮定により,  $f'(\xi) \leq f'(\eta)$  だから, (3) が成り立ち, a) が従う.

a), すなわち (3) を仮定する. 左辺について,  $x \rightarrow +a$  とすれば, これは  $f'(a)$  に収束し, 右辺は, これは  $(f(y) - f(a))/(y - a)$  に収束する (これを  $\alpha$  とおく.).  $f'(a) \leq \alpha$  となることはよい. また,  $x \rightarrow -y$  とすれば, 左辺は  $\alpha$  に, 右辺は  $f'(y)$  に収束する.  $\alpha \leq f'(y)$  となることもよい.

よって, a) と c) は同値である.

**a) と d) が同値であること**

d) を仮定する. これは  $f'(x)$  は  $I$  上で単調増加であることと同値である.

以上の議論により, 示された.  $\square$

### 第3章：初等函数

p191-193 : 1

**証明.**  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$  とし,  $e = \frac{m}{n}$  と表される, すなわち  $e$  が有理数だと仮定する. このとき, 与えられた式を変形して,

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{m}{n} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

とする. これにより,

$$\frac{e^\theta}{n+1} = m \cdot n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$$

であり,  $m \cdot n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}$  であるから,  $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$  である. よって,  $0 < \theta < 1$ ,  $2 < e < 3$  とあわせて,

$$1 \leq \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}$$

であり,  $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$  であるから  $n = 1$  となる. ゆえに  $e = m$  となり,  $e$  は整数である. しかし  $2 < e < 3$  であるから, これは矛盾である. よって先の仮定が誤りであり,  $e$  は無理数である.  $\square$

### 第4章：積分法

p239 : 1-(i)

$\tan \frac{x}{2} = t$  とおくと,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx &= \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \left[ \log(t^2 + 1) \right]_0^1 \\ &= \log 2 - 0 = \log 2 \end{aligned}$$



**p239 : 1-(ii)**

$x - a = a \sin \theta$  ( $-\pi \leq \theta < \pi$ ) とする置換を用いる.

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \sqrt{2ax - x^2} dx &= \int_0^a \sqrt{-(x-a)^2 + a^2} dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a |\cos \theta| \cdot a \cos \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} a^2 \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= \frac{\pi a^2}{4}
 \end{aligned}$$

**p239 : 1-(iii)**

$$|\sin 2\theta| = \begin{cases} \sin 2\theta & (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \\ -\sin 2\theta & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi |\sin 2\theta| d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\sin 2\theta) d\theta \\
 &= \left[ -\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[ \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\
 &= -\frac{(-1-1)}{2} + \frac{1+1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

**p239 : 1-(iv)**

$$\int_0^\pi e^{inx} dx = \begin{cases} 2\pi & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.  $n = 0$  のときは

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{inx} dx &= \int_0^{2\pi} dx \\ &= [x]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

となり,  $n \neq 0$  のときは

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{inx} dx &= \left[ \frac{e^{inx}}{in} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{in} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

となる.

**p239 : 1-(v)**

$m = n$  のとき,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx &= \int_0^{2\pi} \cos mx \sin mx dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin 2mx + \sin 0}{2} \right) dx \\ &= \left[ -\frac{\cos 2mx}{2m} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

となる.  $m \neq n$  のとき,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin(m+n)x + \sin(n-m)x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

である, ここまでの議論と,  $m$  と  $n$  の対称性により,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

となる.

**p239 : 1-(vi)**

$m \neq n$  のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\cos(m+n)x + \cos(n-m)x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

となる.  $m = n \neq 0$  のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos 2mx}{2} \right) dx \\ &= \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin 2mx}{4m} \right]_0^{2\pi} = \pi\end{aligned}$$

となる.  $m = n = 0$  のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} dx \\ &= [x]_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

となる, 以上をまとめて,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2\pi & (m = n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

**p239 : 3-(i)**

部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}\int x^\alpha \log x \, dx &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

**p239 : 3-(ii)**

部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}
 \int x^n e^x dx &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \\
 &= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + (n-1) \int x^{n-2} e^x dx \\
 &= \cdots = x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \cdots + (-1)^n n! \int e^x dx \\
 &= e^x (x^n - n x^{n-1} + \cdots + (-1)^n n!) + C
 \end{aligned}$$

となる.

**p239 : 3-(iii)**

部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}
 \int (\log x)^n dx &= \int (\log x)^n (x)' dx \\
 &= x (\log x)^n - n \int \frac{(\log x)^{n-1}}{x} \cdot x dx \\
 &= x (\log x)^n - n x (\log x)^{n-1} + (n-1) \int \frac{(\log x)^{n-2}}{x} \cdot x dx \\
 &= \cdots = x (\log x)^n - n x (\log x)^{n-1} + \cdots + x (-1)^n n! + C
 \end{aligned}$$

となり, これが答えである.

**p239 : 3-(iv)**

部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}
 \int \arcsin x dx &= \int (x)' \arcsin x dx \\
 &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
 \end{aligned}$$

であり, これが答えである.

**p239 : 3-(v)**

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ なのので,}$$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\
 &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C
 \end{aligned}$$

である.

**p239 : 3-(vii)**

$x+1=t$  とおくと,  $dt=dx$  であり,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3} dx &= \int \frac{(t-1)^2+2}{t^3} dt \\ &= \int \left( \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{3}{t^3} \right) dt \\ &= \log|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2(x+1)^2} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

**p239 : 3-(vi)**

$(\log x)' = \frac{1}{x}$  であることを用いて,

$$\begin{aligned}\int \frac{(\log x)^2}{x} dx &= \int (\log x)^2 (\log x)' dx \\ &= \frac{(\log x)^3}{3} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

**p239 : 3-(viii)**

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  なので,

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) dx = \int (\sin^3 x - \sin^5 x) dx \\ &= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \sin x dx \\ &= \int \{(1-t^2) - (1-t^2)^2\}(-1) dt \quad (\cos x = t) \\ &= \int (t^4 - t^2) dt \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

である.

**p239 : 3-(ix)**

$\sqrt[6]{x} = t$  とおくと,  $x = t^6$  であるから,  $\frac{dx}{dt} = 6t^5$  である. これらを用いると,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1}{t^3 - t^2} \cdot 6t^5 dt \\ &= \int \frac{6t^3}{t-1} dt \\ &= \int \frac{(t-1)(6t^2 + 6t + 1) + 6}{t-1} dt \\ &= \int \left( 6t^2 + 6t + 6 + \frac{6}{t-1} \right) dt \\ &= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\log|\sqrt[6]{x} - 1| + C \end{aligned}$$

である

**p239-240 : 4-(i)**

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[ \log(1+x) \right]_0^1 = \log 2 \end{aligned}$$

である.

**p239-240 : 4-(ii)**

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k/n}}\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k/n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} \cdot 2t dt \\ &= \left[ 2t \right]_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1)\end{aligned}$$

**p247 : 1-(i)**

計算すると,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3-x} dx &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{-(x-1) + (x+1)}{(x-1)x(x+1)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ -\frac{1}{(x+1)x} + \frac{1}{x(x-1)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{-(x+1) + x}{(x+1)x} + \frac{x - (x-1)}{x(x-1)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left( -\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= -\log |x| + \frac{1}{2} \log |x^2 - 1| + C\end{aligned}$$

であり, これが答えである.

**p247 : 1-(ii)**

$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  であるから,

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \int \left( 1 + \frac{6x^2 - 11x + 6}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right) dx$$

である. ここで,  $A, B, C$  を定数として,

$$\frac{6x^2 - 11x + 6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

とおく. これより,

$$6x^2 - 11x + 6 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{8}, \quad C = \frac{27}{2}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx &= \int \left\{ 1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{8(x-2)} + \frac{27}{2(x-3)} \right\} dx \\ &= x + \frac{1}{2} \log \left| \frac{(x-1)(x-3)^{27}}{(x-2)^{16}} \right| + C \end{aligned}$$

である.

**p247 : 1-(iii)**

$A, B, C, D$  を定数として,

$$\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

とおくと, 簡単な計算により,  $A = -1, B = 2, C = 1, D = 2$  とわかるので,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx &= \int \left( -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx \\ &= \log \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} + C \end{aligned}$$

を得る.

**p247 : 1-(v)**

$\tan \frac{x}{2} = t$  とおくと,  $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  であるから,

$$\int \frac{1}{a + b \cos x} dx = \int \frac{1}{(a-b)t^2 + a+b} dt$$

となる. よって,

$$\int \frac{1}{a + b \cos x} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \tan \frac{x}{2} + C & (a = b \neq 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{a \tan \frac{x}{2}} + C & (a = -b \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



**p247 : 1-(viii)**

$\tan x = t$  とおくと,  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$  であるから, 求める不定積分は,

$$\begin{aligned} \int \frac{1/\cos^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} dx &= \int \frac{1}{a^2 + b^2 t^2} dt \\ &= \frac{1}{ab} \arctan \left( \frac{b}{a} \tan x \right) + C \end{aligned}$$

である.

**p247 : 1-(xiii)**

$x + \frac{1}{x} = t$  とおくと,  $\frac{dt}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$  であり, 求める不定積分は,

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x^2}{1+x^2\sqrt{1+x^4}} dx &= \int \frac{1-x^2}{x^2(x+1/x)\sqrt{x^2+1/x^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-2}} dt \end{aligned}$$

となる. ここで,  $s = \frac{1}{t}$  とすると,  $\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{s^2}$  であり,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-2}} dt &= \int \frac{1}{\sqrt{1-2s^2}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}s) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left( \frac{\sqrt{2}x}{x^2+1} \right) + C \end{aligned}$$

となる.

**p247 : 1-(xi))**

$x = \frac{1}{t}$  とおくと,  $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$  である. また,  $x^2 + 1 = \frac{1}{t^2} + 1$  となる. よって,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{t}{\sqrt{1/t^2+1}} \cdot (-1/t^2) dt \\ &= - \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \log \left| t + \sqrt{t^2+1} \right| + C \\ &= \log \left| \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C \end{aligned}$$

である.

## p247 : 1-(xii)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}} \\ &= \arcsin \left( \frac{2x-a-b}{b-a} \right) + C \end{aligned}$$

## 第 5 章 : 級数

## p366 : 1-(i)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m-1} = -1$$

であり,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  の集積値全体の集合は  $\{-1, 1\}$  である.

ゆえに,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

である.

## p366 : 1-(ii)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m-1} = -\infty$$

であり,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  の集積値全体の集合は  $\{-\infty, \infty\}$  である<sup>†1</sup>.

ゆえに,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

である.

---

<sup>†1</sup> 補完数直線を考えているため, これでよい.

## p366 : 1-(iii)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  の集積値全体の集合は  $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$  である. ゆえに,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である.

## 参考文献

- [1] 杉浦光夫『解析入門 I』, 東京大学出版会, 1980