
杉浦『解析入門』解答集

数学書解答集作成班

目次

はじめに

概要

Special Thanks

第 1 章：実数と連続

p2 : 1

p2 : 1-(i)	5
p2 : 1-(ii)	5
p2 : 1-(iii)	5
p2 : 1-(iv)	6
p2 : 1-(v)	6
p2 : 1-(vi)	6
p2 : 1-(vii)	6
p2 : 1-(viii)	6
p2 : 1-(ix)	7
p2 : 1-(x)	7
p2 : 1-(xi)	7

p3 : 2

p3 : 2-(i)	8
p3 : 2-(ii)	8
p3 : 2-(iii)	9
p3 : 2-(iv)	9
p3 : 2-(v)	9

p16-17 : 1

p16-17 : 1-(i)	10
p16-17 : 1-(ii)	10
p16-17 : 1-(iii)	10
p16-17 : 1-(iv)	11
p16-17 : 1-(v)	11

p16-17 : 2

p16-17 : 3

p16-17 : 4

p16-17 : 5

p16-17 : 6

p16-17 : 7

p31-33 : 1

p31-33 : 1-(i)	17
p31-33 : 1-(ii)	17
p31-33 : 1-(iii)	18
p31-33 : 1-(iv)	18
p31-33 : 1-(v)	19
p31-33 : 1-(vi)	19

p31-33 : 2

p31-33 : 11

p42-43 : 3

p42-43 : 11

p49-50 : 1

p49-50 : 2

p49-50 : 2-(i)	25
p49-50 : 2-(ii)	25
p49-50 : 2-(iii)	26
p49-50 : 2-(iv)	26
p49-50 : 2-(v)	27
p49-50 : 2-(vi)	27
p49-50 : 2-(vii)	28
p49-50 : 2-(viii)	28
p49-50 : 2-(ix)	28
p49-50 : 2-(x)	28
p49-50 : 2-(xi)	29

p49-50 : 3

p49-50 : 4

p49-50 : 5

p49-50 : 6

p49-50 : 7

p49-50 : 7-(i)	31
p49-50 : 7-(ii)	32

p49-50 : 8

p63-64 : 1

p63-64 : 1-(i)	34
p63-64 : 1-(iii)	34
p63-64 : 1-(v)	35

p63-64 : 2

p63-64 : 2-(i)	35
p63-64 : 2-(ii)	35
p63-64 : 2-(iii)	36
p63-64 : 2-(iv)	36
p63-64 : 2-(v)	36

p63-64 : 3

p63-64 : 3-(i)	37
--------------------------	----

p63-64 : 4

p63-64 : 4-(i)	37
p63-64 : 4-(ii)	38

p63-64 : 5

p63-64 : 6

p63-64 : 7

p63-64 : 8

p63-64 : 9

p72-74 : 1

p72-74 : 1-(i)	42
p72-74 : 1-(ii)	42
p72-74 : 1-(iii)	43
p72-74 : 1-(iv)	43
p72-74 : 1-(v)	43

p72-74 : 3

p72-74 : 4

p72-74 : 5

p72-74 : 6

p72-74 : 7

p72-74 : 8

p72-74 : 9

p72-74 : 10	49	p90-91 : 3-(ix)	61	p191-193 : 2	82
p72-74 : 11	49	p90-91 : 9	62	p191-193 : 2-(i)	82
p72-74 : 12	50	p90-91 : 9-(i)	62	p191-193 : 2-(ii)	82
p79-80 : 1	50	p90-91 : 10	63	p191-193 : 2-(iii)	83
p79-80 : 2	51	p106-107 : 1	63	p191-193 : 6-(i)	84
p79-80 : 3	51	p106-107 : 2	64	p191-193 : 6-(ii)	85
p79-80 : 4	52	p106-107 : 3	68	p191-193 : 6-(iii)	85
p79-80 : 5	54	p106-107 : 8	68	第 4 章 : 積分法	86
p79-80 : 6	54	p106-107 : 8-(i)	68	p211-212 : 1	86
p79-80 : 7	54	p106-107 : 8-(ii)	69	p211-212 : 2	86
p79-80 : 8	55	p106-107 : 9	70	p211-212 : 3	87
p79-80 : 9	55	p106-107 : 10	71	p211-212 : 3-(i)	87
p79-80 : 10	55	p112-113 : 1	72	p211-212 : 3-(ii)	88
p79-80 : 11	55	p112-113 : 1-(i)	72	p239 : 1	89
p79-80 : 12	56	p112-113 : 1-(ii)	72	p239 : 1-(i)	89
p79-80 : 12-(iii)	56	p112-113 : 1-(iii)	72	p239 : 1-(ii)	89
p79-80 : 12-(iv)	56	p112-113 : 1-(iv)	73	p239 : 1-(iii)	90
p79-80 : 13	57	p112-113 : 1-(v)	73	p239 : 1-(iv)	90
第 2 章 : 微分法	58	p112-113 : 4	74	p239 : 1-(v)	91
p90-91 : 1	58	p112-113 : 5	75	p239 : 1-(vi)	91
p90-91 : 1-(i)	58	p112-113 : 6	76	p239 : 3	92
p90-91 : 1-(ii)	58	p126 : 2	77	p239 : 3-(i)	92
p90-91 : 1-(iii)	58	p148-149 : 1	78	p239 : 3-(ii)	92
p90-91 : 3	58	第 3 章 : 初等函数	80	p239 : 3-(iii)	92
p90-91 : 3-(i)	59	p166-167 : 1	80	p239 : 3-(iv)	93
p90-91 : 3-(ii)	59	p166-167 : 2	80	p239 : 3-(v)	93
p90-91 : 3-(iii)	59	p166-167 : 3	80	p239 : 3-(vi)	93
p90-91 : 3-(iv)	60	p166-167 : 4	81	p239 : 3-(vii)	93
p90-91 : 3-(v)	60	p191-193 : 1	81	p239 : 3-(viii)	94
p90-91 : 3-(vi)	60			p239 : 3-(ix)	94
p90-91 : 3-(vii)	61			p239 : 4	94
p90-91 : 3-(viii)	61			p239 : 4-(i)	94
				p239 : 4-(ii)	95
				p247 : 1	95
				p247 : 1-(i)	95
				p247 : 1-(ii)	96
				p247 : 1-(iii)	96
				p247 : 1-(iv)	97

p247 : 1-(v)	97	p290 : 4	101	p366 : 2	105
p247 : 1-(vi)	97	p325–326 : 1	102	p366 : 3	105
p247 : 1-(vii)	98	p325–326 : 1-(i)	102	p366 : 4	106
p247 : 1-(viii)	98	p325–326 : 1-(ii)	102	p371 : 1	106
p247 : 1-(ix)	98	第 5 章 : 級数	104	p371 : 1-(i)	106
p247 : 1-(x)	99	p366 : 1	104	p371 : 1-(ii)	107
p247 : 1-(xi)	99	p366 : 1-(i)	104	p371 : 1-(iii)	107
p247 : 1-(xii)	99	p366 : 1-(ii)	104	p371 : 1-(iv)	107
p247 : 1-(xiii)	100	p366 : 1-(iii)	104	p371 : 1-(v)	107
p247 : 1-(xiv)	100				
p290 : 3	100				

はじめに

概要

この文書は、なまちゃんが運営する「数学書解答集作成班」が制作した、杉浦光夫著『解析入門』（東京大学出版会）の解答集である。

未完ではあるものの、編集の際の利便性を考慮して、オープンソースでの公開となった。それゆえ、数学的な誤りや誤植、改善案の提案などがあればぜひ Issue に書き込んだり、Pull Request を送っていただきたいⁱ¹。

Special Thanks

掲載許可を得た方のみⁱ²を敬称略で掲載する。

- ねたんほ（解答の提供）
- まっちゃん（解答の提供）
- Daiki（解答の提供）
- qwer（解答の提供）
- やたろう（Git 管理）
- 不自然対数（ \LaTeX 関連）

その他、多くの方々。

ⁱ¹ 永遠の工事中

ⁱ² 掲載されていないという方は「ニックネーム」を記入のもと、なまちゃんへ連絡していただきたい。

第 1 章：実数と連続

p2 : 1

p2 : 1-(i)

証明

$0, 0' \in K$ がともに加法単位元の性質を満たすとする.

このとき, 0 が加法単位元の性質をもつことから,

$$0' + 0 = 0'$$

同様に, $0'$ が加法単位元の性質をもつことから,

$$0 + 0' = 0$$

交換律より, $0 + 0' = 0' + 0$ なので,

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

これからただちに加法単位元の一意性が従う.

□

p2 : 1-(ii)

証明

$a, b \in K$ とし,

$$a + b = 0$$

とする. このとき,

$$-a = -a + 0 = -a + (a + b) = (-a + a) + b = 0 + b = b$$

となり, 加法逆元の一意性が従う.

□

p2 : 1-(iii)

証明

$a \in K$ のとき,

$$a + (-a) = 0$$

$$\therefore (-a) + a = 0$$

他方, $-(-a)$ は $(-a)$ の加法逆元であるから,

$$(-a) + (-(-a)) = 0$$

これと逆元の一意性により, $a = -(-a)$ が従う.

□

p2 : 1-(iv)**証明**

$a \in K$ のとき,

$$\begin{aligned} 1a &= (0 + 1)a \\ &= 0a + 1a \end{aligned}$$

が成り立つ. 両辺に $-(1a)$ を加えれば,

$$1a + (-(1a)) = 0a + 1a + (-(1a)) = 0a + 0.$$

よって, $0 = 0a$ が従う.

□

p2 : 1-(v)**証明**

$a \in K$ に対して,

$$a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$$

であるから, $-a$ が a の加法逆元であることと含めて主張が従う.

□

p2 : 1-(vi)**証明**

(4) の結果を用いる. $a = -1$ とすると,

$$(-1)(-1) = -(-1) = 1$$

これが証明すべきことであった.

□

p2 : 1-(vii)**証明**

$a, b \in K$ に対して,

$$\begin{aligned} a(-b) + ab &= a((-b) + b) \\ &= a0 \\ &= 0 \\ \therefore a(-b) &= -ab \end{aligned}$$

$(-a)b = -ab$ も同様に示される.

□

p2 : 1-(viii)

証明

(7) の前半の式において, a を $-a$ に置き換えると,

$$(-a)(-b) = -(-a)b.$$

ここで, (7) の後半の式を用いると,

$$\begin{aligned} -(-a)b &= -(-ab) \\ &= ab. \end{aligned}$$

これが証明すべきことであった.

□

p2 : 1-(ix)**証明**

$a, b \in K$ をとり, $ab = 0$ を仮定すると,

$$\begin{aligned} ab + ab &= ab \\ \therefore a(b + b) &= ab. \end{aligned}$$

ここで, $a \neq 0$ を仮定すると. a^{-1} が存在するので, a^{-1} を上記の式の両辺に左から掛けると

$$\begin{aligned} a^{-1}a(b + b) &= a^{-1}ab \\ \therefore b + b &= b \\ \therefore b &= 0. \end{aligned}$$

よって $a \neq 0$ のとき $b = 0$ である.

また, $b \neq 0$ を仮定して同様に議論を進めると, $b \neq 0$ であるとき $a = 0$ であることがわかる.

以上の議論から, $ab = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$ であることが示された.

□

p2 : 1-(x)**証明**

$a \in K \setminus \{0\}$ に関して,

$$\begin{aligned} (-a)\{-(a)^{-1}\} &= aa^{-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって, $-(a)^{-1}$ は $-a$ の逆元である. このことから,

$$(-a)^{-1} = -(a)^{-1}.$$

これが証明すべきことであった.

□

p2 : 1-(xi)

証明

$a, b \in K \setminus \{0\}$ に関して,

$$\begin{aligned}(ab)(b^{-1}a^{-1}) &= a(bb^{-1})a^{-1} \\ &= a1a^{-1} \\ &= aa^{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

となり, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ である. これが証明すべきことであった.

□

p3 : 2**p3 : 2-(i)****証明**

$a \leq b$ において, (R15) より

$$0 \leq b - a$$

を得る.

逆に, $0 \leq b - a$ において, (R15) により

$$a \leq b$$

を得る.

以上の考察により証明された.

□

p3 : 2-(ii)**証明**

$a \leq b$ において, (R15) により

$$0 \leq b - a$$

となる. ここで, (R15) を適用して,

$$-b \leq -a$$

を得る.

逆に, $-b \leq -a$ について, (R15) より

$$0 \leq b - a$$

となる. この両辺に a を加えて,

$$a \leq b$$

を得る.

以上の考察により証明された.

□

p3 : 2-(iii)

証明

 $c \leq 0$ から

$$c + (-c) \leq -c$$

$$\therefore 0 \leq -c$$

である. ここで, $a \leq b$, $-c \geq 0$ であることより

$$a(-c) \leq b(-c)$$

である. これより $-ac \leq -bc$ であるから,

$$-ac + (ac + bc) \leq -bc + (ac + bc)$$

$$\therefore bc \leq ac$$

を得て, これが証明すべきことであった.

□

p3 : 2-(iv)

証明

$a < 0$ かつ $a^{-1} \leq 0$ であると仮定する. このとき,

$$\left(\frac{1}{a}\right)a < 0a \quad \therefore 1 < 0.$$

これは $1 > 0$ に矛盾.

よって, 仮定したことが誤りであり, $a > 0$ のとき $a^{-1} > 0$ である.

□

p3 : 2-(v)

証明

$$a \leq c$$

において, (R15) より.

$$a + b \leq b + c$$

を得る. 他方,

$$b \leq d$$

において, (R15) より

$$b + c \leq c + d$$

となる．ここで，推移律を適用すると，

$$a + b \leq c + d$$

が得られ，これが証明すべきことであった．

□

p16-17 : 1

p16-17 : 1-(i)

解答

$a = 0$ のときは明らかに 0 に収束するので， $a \neq 0$ とする． $2|a| \leq N$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとる．このとき，

$$0 < \left| \frac{a^n}{n!} \right| \leq \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^N}{N!} \cdot \frac{|a|}{N+1} \cdot \frac{|a|}{N+2} \cdots \frac{|a|}{n} \leq \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N}$$

であるから，

$$-\frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N} \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N}$$

となり，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

p16-17 : 1-(ii)

解答

$a = 1$ のときは明らかに 1 に収束するので，まず $a > 1$ のときを考える． $\delta_n > 0$ を用いて，

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$$

とおくことができる．両辺を n 乗すると

$$\begin{aligned} a &= 1 + n\delta_n + \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 + \cdots + \delta_n^n \\ &> 1 + n\delta_n \\ &> n\delta_n \end{aligned}$$

となり， $0 < \delta_n < \frac{a}{n}$ であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$$

となる． $a < 1$ のときは， $a^{\frac{1}{n}} = \left(\left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$ を使えば同じ結果が得られ，以上の議論により，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

p16-17 : 1-(iii)

解答

$\frac{n}{2}$ 以下の最大の自然数を m とおく．与えられた式は，

$$(0 <) \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1) \cdots n}{n^n}$$

と表されるので， $\frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdots n}{n^{n-m}} < 1$ であることと， $m \leq \frac{n}{2}$ から $\frac{m}{n} \leq \frac{1}{2}$ であることを用いると，

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1) \cdots n}{n^n} < \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{n^m} < \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

よって，

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

である． $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$ なので，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

p16-17 : 1-(iv)**解答**

のちに $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると，

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= 1 + n + \frac{1}{2}n(n-1) + \cdots + n + 1 \\ &> \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

となり，この不等式から，

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$$

を得る．ここで，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

p16-17 : 1-(v)**解答**

まず，

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

である．ここで，のちに $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると，

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \therefore 0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

ここで、はさみうちの原理を用いると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

p16-17 : 2

解答

$n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$f_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2m}$$

とおく. ここで、 $n!x \in \mathbb{Z}$ のとき、

$$\cos(n! \pi x) = \pm 1$$

$n!x \notin \mathbb{Z}$ のときは、

$$|\cos(n! \pi x)| < 1$$

であるから、

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (n!x \in \mathbb{Z}) \\ 0 & (n!x \notin \mathbb{Z}) \end{cases}$$

となる. さて、 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ であるならば、どんな $n \in \mathbb{N}$ に対しても、 $n!x$ が整数とならない. また、 $x \in \mathbb{Q}$ のとき、 $x = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$) とすれば、 n が q より十分大きいときに $n!x$ は整数となる. よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2m} \right) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

p16-17 : 3

Lemma 0.0.1

任意の $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ について、

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

が成り立つ.

証明. $n = 2$ のときは三角不等式そのものであるから、 $n \geq 3$ とし、 $n - 1$ 個の実数については補題の主張が成り立つものとする.

いま、

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n$$

であるから、これに三角不等式を適用して、

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}| + |a_n|$$

を得る. ここで、数学的帰納法の仮定より、

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}|$$

がいえるので、ここまでの議論で、

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

は n の場合にも成り立つことが示され、以上の議論より補題の主張が従う。 \square

証明

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_1 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

また、

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right|$$

と変形する。この右辺に補題を適用し、

$$\left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}.$$

これにより、

$$n \geq N_1 \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|}{n} + \left(\frac{n - N_1 + 1}{n} \right) \varepsilon.$$

ここで $N_2 := N_1 + 1$ とすると、 $n \geq N_2$ であるとき $\left(\frac{n - N_1 + 1}{n} \right) \varepsilon < \varepsilon$ となることに注意する。

さて、

$$n \geq N_3 \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|}{n} < \varepsilon$$

となるように $N_3 \in \mathbb{N}$ をとる。 $N := \max\{N_2, N_3\}$ とすると、

$$n \geq N \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|}{n} + \left(\frac{n - N_1 + 1}{n} \right) \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

であり、これより

$$n \geq N \implies \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < 2\varepsilon.$$

書き換えると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

\square

p16–17 : 4

Lemma 0.0.2

正数列 $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ について、 k_n が a に収束するならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k_1 k_2 \cdots k_n} = a.$$

証明. p16-17:3 より, $\log k_n$ が $\log a$ に収束するとき, $\log \sqrt[n]{k_1 k_2 \cdots k_n}$ が $\log a$ に収束することがわかり, そのことからただちに従う. \square

証明

$$k_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

とすると,

$$k_1 k_2 \cdots k_n = \frac{a_n}{a_0}.$$

両辺の n 乗根をとると,

$$\sqrt[n]{k_1 k_2 \cdots k_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_0} = 1$ であるから, 補題により

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k_1 k_2 \cdots k_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_0}} \\ &= \frac{a}{1} = a. \end{aligned}$$

ゆえにこのとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$

\square

p16-17:5

証明

イ) の条件により,

$$A \subset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$$

は明らかである. ここで,

$$H = \{0, 1, \dots, m-1\} \cup A$$

とおく. このとき, H の定義から $0 \in H$ である.

次に, $n \in H$ であることを仮定する. このとき,

- (i) $n < m-1$ であれば, $n+1 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ より, $n+1 \in H$ となる
- (ii) $n = m-1$ であれば, $n+1 = m \in A$ より, $n+1 \in H$ となる
- (iii) $n \geq m$ であれば, (ロ) より $n+1 \in A$ であり, $A \subset H$ により $n+1 \in H$ となる

よって, いずれの場合でも

$$n+1 \in H$$

したがって, H は継承的である. \mathbb{N} は最小の継承的な集合であるから, $\mathbb{N} \subset H$ である.

つまり, $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots, m-1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$ であることと, H の定義により,

$$\{0, 1, \dots, m-1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subset \{0, 1, \dots, m-1\} \cup A.$$

よって,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subset A$$

となる. これと $A \subset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$ であることを併せると,

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}.$$

これが証明すべきことであった.

□

p16–17 : 6

$m+n$ について

証明

$n \in \mathbb{N}$ についての命題 $p(n)$ を

$$p(n) : \forall m \in \mathbb{N} : m+n \in \mathbb{N}$$

とする.

- (i) $n=0$ のとき, $m+0=m$ であり, $m \in \mathbb{N}$ であるから, $p(0)$ は真である.
- (ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $p(k)$ が真であると仮定する. このとき, $m+k \in \mathbb{N}$ である. ここで,

$$m+(k+1) = (m+k) + 1$$

であり, $m+k \in \mathbb{N}$ に注意すると, \mathbb{N} が最小の継承的集合であることから,

$$m+(k+1) = (m+k) + 1 \in \mathbb{N}$$

である. よって, このとき $p(k+1)$ も真である.

以上 (i), (ii) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $p(n)$ が真である. これが証明すべきことであった.

□

mn について

証明

$n \in \mathbb{N}$ についての命題 $q(n)$ を

$$q(n) : \forall m \in \mathbb{N} : mn \in \mathbb{N}$$

とする.

- (i) $n=0$ のとき, $m \cdot 0 = 0$ であり, $0 \in \mathbb{N}$ であるから, $q(0)$ は真である.
- (ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $q(k)$ が真であると仮定する. このとき, $mk \in \mathbb{N}$ である. ここで,

$$m(k+1) = mk + m$$

であり, $mk \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ に注意すると, 証明したことから

$$mk + m \in \mathbb{N}$$

である。よって、このとき $p(k+1)$ も真である。

以上 (i), (ii) より、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $p(n)$ が真である。これが証明すべきことであった。

□

$m - n$ について

証明

$n \in \mathbb{N}$ についての命題 $r(n)$ を

$$r(n) : \forall m \in \mathbb{N} : m < n \vee m - n \in \mathbb{N}$$

とする。

(I) $n = 0$ のとき、 $m - 0 = m$ であり、 $m \in \mathbb{N}$ であるから、 $r(0)$ は真である。

(II) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $r(k)$ が真であると仮定する。このとき、 $k < n \vee k - n \in \mathbb{N}$ である。

(i) $m \leq k$ のとき、 $m < k + 1$ であり、 $r(k + 1)$ も真である。

(ii) $m > k$ のとき、まず

$$m - (k + 1) = m - k - 1$$

であり、 $m - k \in \mathbb{N}$ 、 $1 \in \mathbb{N}$ に注意すると、証明したことから

$$m - k - 1 \in \mathbb{N}$$

である。

よって、このとき $r(k + 1)$ も真である。

以上 (i), (ii) より、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $r(n)$ が真である。これが証明すべきことであった。

□

p16–17 : 7

証明

$n < k < n + 1$ となる自然数 k が存在すると仮定する。この不等式から、辺々 n を引くと

$$0 < k - n < 1$$

を得る。 n と k は自然数としたから、問 6 により、 $k - n$ は自然数である。

よって、 $0 < a < 1$ となる自然数 a が存在しないことを示せばよい。

$$H = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$$

とおくと、

$$0 \in H$$

$$0 + 1 \in H$$

である。ゆえに $0 \in H$ となる。

また、 $k \geq 1$ となる $k \in \mathbb{N}$ に対しては、 $k + 1 \geq 1$ であり、

$$k + 1 \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$$

となるため、 $k + 1 \in H$ である。

ここまでの考察から,

$$(1) 0 \in H$$

$$(2) n \in H \implies n+1 \in H$$

であるから H は継承的である.

したがって, \mathbb{N} が最小の継承的集合であることから, $\mathbb{N} \subset H$ となる.

H の定義により, $a \notin H$ なので, $a \notin \mathbb{N}$ となり, $0 < a < 1$ となる自然数 a は存在しない. これが証明すべきことであった.

□

p31-33 : 1

p31-33 : 1-(i)

解答

$$\begin{aligned} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} &= \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$a_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $b_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ とおくと, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は明らかに収束するから, 定理 2.5(2) より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

である. これより,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\} \cdot \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{6}(1+0) \cdot (2+0) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

p31-33 : 1-(ii)

Lemma 0.0.3

正数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して, $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

となるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である.

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ であるから, この左辺を r_0 とおくと, $r_0 < 1$ である. このとき, r ($r_0 < r < 1$) に対して, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_1 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

が成り立つ。このとき、

$$a_n = a_{N_1} \cdot \frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}} \cdot \frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+1}} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \frac{a_n}{a_{n-1}} < a_{N_1} r^{n-N_1} = \frac{a_{N_1}}{r^{N_1}} r^n$$

となる。 $0 < r < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{N_1}}{r^{N_1}} r^n = 0$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である。 \square

解答

$a_n = \frac{n^2}{a^n}$ とおく。 $0 < a \leq 1$ のときは明らかに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となる。

$a > 1$ のとき、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{a}$ となり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{a} = \frac{1}{a} < 1$$

であるから、補題により、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となる。以上の議論により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = \begin{cases} \infty & (0 < a \leq 1), \\ 0 & (a > 1). \end{cases}$$

p31-33 : 1-(iii)

解答

明らかに $\sqrt[n]{n} > 1$ なので、 $\delta_n > 0$ を用いて、

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$$

とかける。両辺を n 乗して、 $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると、

$$\begin{aligned} n &= (1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 + \cdots + (\delta_n)^n \\ &> \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 \end{aligned}$$

となり、この不等式から、

$$0 < \delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるから、はさみうちの原理により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

p31-33 : 1-(iv)

解答

$a_n = n^k e^{-n}$ とおく。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}{e} = \frac{1}{e} < 1.$$

ゆえに、補題により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k e^{-n} = 0.$$

p31-33 : 1-(v)

解答

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= e \cdot \frac{1}{e} = 1 \end{aligned}$$

である.

p31-33 : 1-(vi)

Lemma 0.0.4

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を実数列とし, $a_n > 0$ とする. もし $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であれば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ である. また, もし $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ であるならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ である,

証明. 前半の主張のみ示せば後半の主張も同様に示せるので, 前半のみ示す.

$M > 0$ を任意にとる. $1/M = \varepsilon$ とする. 仮定により, $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_0 \implies |a_n - 0| < \varepsilon$$

が成り立つ. このとき, 上の $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_0 \implies \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

となる. M は任意なので, これより $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ が示された. □

Lemma 0.0.5

$c > 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n} = 0$ である.

証明. $c > 1$ より, $\delta > 0$ を用いて $c = 1 + \delta$ とおける. このとき, のちに $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると,

$$\begin{aligned} c^n &= (1 + \delta)^n \\ &= 1 + n\delta + \frac{1}{2}n(n-1)\delta^2 + \cdots + \delta^n \\ &> 1 + n\delta \end{aligned}$$

このことから, $0 < \frac{1}{c^n} < \frac{1}{1 + n\delta}$ であるから, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n} = 0 \quad (c > 1).$$

□

解答

$a_n = (c^n + c^{-n})^{-1}$ とおく. $c = 1$ のときは明らかに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/2$ である.
 $c > 1$ のとき, 2つの補題により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n}) = \infty$$

であるから, 補題により $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n})^{-1} = 0$ である.

$0 < c < 1$ のときは c の逆数を考えることにより同じ結論に帰着する. 以上の議論により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n})^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (c = 1), \\ 0 & (c \neq 1). \end{cases}$$

p31-33 : 2**証明**

二項定理を用いて $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項を展開すると,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} \cdot \frac{1}{n^r} + \cdots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

同様にして, a_{n+1} の展開式を得たとき, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ であることにより, $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して,

$$\frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) < \frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n+1}\right)$$

が成立する. これと, a_{n+1} の展開式のほうが, 正の項を一つ多く含むことから, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n < a_{n+1}$ が成立し, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は単調増加数列である. また,

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdots n} \right) \\ &< \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} \right) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{n-2}} \right) \\ &< \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

よって, a_n は単調増加かつ上に有界であるから収束する. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と定義すると, 前述した評価に

より $e \leq \frac{11}{4} < 3$ である.

また, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が単調増加数列であることから, 任意の $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ に対して,

$$a_n > a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2.$$

よって,

$$2 < e < 3.$$

p31–33 : 11

証明

背理法で示す.

ある $a \in \mathbb{Q}$ と $\varepsilon > 0$ に対して, $|b - a| < \varepsilon$ となるような $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在しない, つまり, ある $a \in \mathbb{Q}$ と $\varepsilon > 0$ に対して, 区間 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ が有理数のみから成るとする. このとき

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \mathbb{Q}$$

である.

さて, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して, $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ が不可算集合であることから, とくに $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ も不可算集合である. しかし, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \mathbb{Q}$ であるから, 可算集合の部分集合が不可算集合であることになり矛盾である.

ゆえに, 先の仮定が誤りであるから, 任意の $a \in \mathbb{Q}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $|b - a| < \varepsilon$ となるような $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在する.

□

別解 1

任意に $a \in \mathbb{Q}$ をとる. 無理数として $\sqrt{2}$ を選び, 数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$x_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定義する. このとき, $\sqrt{2}/n$ は常に無理数であるから, a が有理数でも x_n は有理数になり得ず, $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ となる.

一方,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{\sqrt{2}}{n} \right) = a$$

であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つ. ここで a は任意だったので, 任意の $a \in \mathbb{Q}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 区間 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ に属する無理数 x_n が常に存在する.

したがって, 任意の $a \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ に対して, $|a - b| < \varepsilon$ を満たす無理数 b が存在することが示された.

□

別解 2

「ある $\varepsilon > 0$ と $a \in \mathbb{Q}$ について, 开区間 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ には無理数が一切含まれない」と仮定する. このとき

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \mathbb{Q}$$

である. これを踏まえた上で

$$x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

を任意にとると, $x \in \mathbb{Q}$ である. このとき, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) = \{x + c - a \mid x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} \subset \mathbb{Q}$$

である. c は任意にとったので,

$$\bigcup_{c \in \mathbb{Q}} (c - \varepsilon, c + \varepsilon) = \mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$$

となり, これは矛盾である.

したがって, 背理法により, 任意の $a \in \mathbb{Q}$ と $\varepsilon > 0$ に対して, 开区間 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ には無理数が含まれることが示された. すなわち, 任意の $a \in \mathbb{Q}$ と $\varepsilon > 0$ に対して, $|a - b| < \varepsilon$ を満たす無理数 b が存在することが示された.

□

p42-43 : 3

証明

正規性と直交性をそれぞれ証明する.

正規性 (u_1, \dots, u_n) の各ベクトルのノルムが 1 であることを示す.

$$u_i = \frac{y_i}{|y_i|} \quad (i = 1, \dots, n)$$

であるから, 正規性は明らかである.

直交性 (u_1, \dots, u_n) の各ベクトルが互いに直交することを数学的帰納法で証明する.

(i) u_1 と u_2 について,

$$\begin{aligned} (u_2 | u_1) &= \left(\frac{x_2 - (x_2 | u_1) u_1}{|x_2 - (x_2 | u_1) u_1|} \middle| u_1 \right) \\ &= \frac{(x_2 | u_1) - (x_2 | u_1) \|u_1\|^2}{|x_2 - (x_2 | u_1) u_1|} \\ &= \frac{(x_2 | u_1) - (x_2 | u_1) \cdot 1}{|x_2 - (x_2 | u_1) u_1|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

したがって, u_1 と u_2 は直交する.

(ii) u_1, u_2, \dots, u_i が互いに直交するベクトルであると仮定する. すなわち,

$$(u_i | u_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

を仮定する. このとき, u_j と u_{i+1} ^{†1} について,

$$\begin{aligned}
 (u_j|u_{i+1}) &= \left(u_j \left| \frac{x_{i+1} - \sum_{k=1}^i (x_{i+1}|u_k)u_k}{\left| x_{i+1} - \sum_{k=1}^i (x_{i+1}|u_k)u_k \right|} \right| \right) \\
 &= \frac{(u_j|x_{i+1}) - \sum_{k=1}^i (x_{i+1}|u_k)(u_j|u_k)}{\left| x_{i+1} - \sum_{k=1}^i (x_{i+1}|u_k)u_k \right|} \\
 &= \frac{(u_j|x_{i+1}) - (x_{i+1}|u_j)|u_j|^2}{\left| x_{i+1} - \sum_{k=1}^i (x_{i+1}|u_k)u_k \right|} \\
 &= \frac{(u_j|x_{i+1}) - (x_{i+1}|u_j) \cdot 1}{\left| x_{i+1} - \sum_{k=1}^i (x_{i+1}|u_k)u_k \right|} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

(i) と (ii) より, 直交性が示される.

以上の考察により, (u_1, \dots, u_n) は \mathbb{R}^n の正規直交基底である.

□

^{†1} u_{i+1} は問題文で述べられている定義からわかる.

p42-43 : 11

証明

四元数体 H を以下のように定義する.

$$H = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

また,

$$p = (a_1, a_2, a_3, a_4), \quad q = (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

とする. このとき, $p, q \in H$ である.

(R1)

任意の $q = (a_i)$, $p = (b_i) \in H$ に対して,

$$q + p = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3, b_4 + a_4) = p + q$$

(R2)

任意の $q = (a_i)$, $p = (b_i)$, $r = (c_i) \in H$ に対して, 実数の加法の結合律から,

$$(q + p) + r = q + (p + r)$$

(R3)

加法の単位元を $0 = (0, 0, 0, 0)$ とすると, 任意の $q = (a_i) \in H$ に対して,

$$q + 0 = (a_1 + 0, a_2 + 0, a_3 + 0, a_4 + 0) = q$$

(R4)

任意の $q = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in H$ に対して、加法の逆元を $-q = (-a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$ と定義すると、

$$q + (-q) = (a_1 - a_1, a_2 - a_2, a_3 - a_3, a_4 - a_4) = (0, 0, 0, 0) = 0$$

(R6)

任意の $q, p, r \in H$ に対して、

$$(q \cdot p) \cdot r = q \cdot (p \cdot r)$$

これは四元数の乗法の定義から成り立つ。

(R7)

任意の $q, p, r \in H$ に対して、

$$q \cdot (p + r) = q \cdot p + q \cdot r$$

$$(p + q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$$

が成立する。これは乗法の定義と実数の分配律から成り立つ。

(R8)

乗法の単位元を $1 = (1, 0, 0, 0)$ とすると、任意の $q = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in H$ に対して、

$$q \cdot 1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

なぜなら、

$$c_1 = a_1 \cdot 1 - a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0 - a_4 \cdot 0 = a_1,$$

$$c_2 = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 - a_4 \cdot 0 = a_2,$$

$$c_3 = a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 0 = a_3,$$

$$c_4 = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0 + a_4 \cdot 1 = a_4.$$

(R9)

任意の $q = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in H$ で $q \neq 0$ (つまり、 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 > 0$) の場合、ノルムを

$$N(q) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 > 0$$

と定義する。共役四元数を

$$q^* = (a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$$

と定義すると、

$$q \cdot q^* = q^* \cdot q = (N(q), 0, 0, 0)$$

よって、乗法の逆元を

$$q^{-1} = \frac{q^*}{N(q)} = \left(\frac{a_1}{N(q)}, -\frac{a_2}{N(q)}, -\frac{a_3}{N(q)}, -\frac{a_4}{N(q)} \right)$$

と定義すると、

$$q \cdot q^{-1} = \left(\frac{N(q)}{N(q)}, 0, 0, 0 \right) = (1, 0, 0, 0) = 1$$

(R10) 加法の単位元は $0 = (0, 0, 0, 0)$ であり, 乗法の単位元は $1 = (1, 0, 0, 0)$ である. ゆえに

$$0 \neq 1.$$

以上の考察により, 四元数全体の集合 H は (R5) を除く乗法の交換律を除くすべての体の公理をみたす.

□

p49-50 : 1

証明

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ であるから, $0 < r < 1$ であるとき, $r < k < 1$ となるような k をひとつ取ると, ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_1 \implies a_n < k^n$$

となる. ここで, 定理 5.5(比較判定法) により, $\sum a_n$ は収束する.

$r > 1$ のとき, $1 > 0$ に対して, ある $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_2 \implies a_n > 1$$

が成り立ち, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ となる. よって定理 5.1 系の対偶により $\sum a_n$ は発散する.

□

p49-50 : 2

p49-50 : 2-(i)

解答

$$\frac{2n^2}{n^3 + 1} = \frac{2/3}{n + 1} + \frac{4n/3 - 2/3}{n^2 - n + 1}$$

により

$$\begin{aligned} \sum \frac{2n^2}{n^3 + 1} &= \sum \frac{2/3}{n + 1} + \sum \frac{4n/3 - 2/3}{n^2 - n + 1} \\ &> \sum \frac{2/3}{n + 1} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となる. よってこの級数は発散する

p49-50 : 2-(ii)

解答

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \left(< 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 3 \right)$$

であるから, この級数は収束する. また

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

が $\alpha > 1$ のときに収束することを用いることもできる.

p49-50 : 2-(iii)

解答

$a = 1$ のときは明らかに収束する.

$a > 1$ の場合を考える. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \log a$$

が成り立つ. ここで $0 < \varepsilon < \log a$ であるような ε をとる. 極限の定義より,

$$n \geq N \implies \log a - \varepsilon < n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

となるような自然数 N が取れる. よって, $n \geq N$ において

$$\frac{\log a - \varepsilon}{n} < a^{\frac{1}{n}} - 1$$

となる. $\sum_n \frac{\log a - \varepsilon}{n}$ は発散するから, 比較判定法により $\sum (a^{\frac{1}{n}} - 1)$ も発散する.

次に $a < 1$ の場合を考える. $\log a < 0$ に注意して, $0 < \varepsilon < -\log a$ となるような ε をとる. このとき, 十分大きな n に対して

$$n(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \log a + \varepsilon$$

すなわち

$$\frac{-\log a - \varepsilon}{n} < -(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

が成り立つ. $\sum \frac{-\log a - \varepsilon}{n} = \infty$ であるから, 比較判定法により $\sum -(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \infty$ である. よって $\sum (a^{\frac{1}{n}} - 1) = -\infty$ である.

p49-50 : 2-(iv)

Lemma 0.0.6

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$ のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

である.

証明. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 仮定より

$$n \geq N_1 \implies |S_{2n} - S| < \varepsilon,$$

$$n \geq N_2 \implies |S_{2n+1} - S| < \varepsilon$$

となるような自然数 N_1, N_2 が取れる. $N = \max\{N_1, N_2\}$ と定義する. $n \geq 2N + 1$ となる n を任意にとる.

n が偶数ならば $n = 2k$ となるような自然数 k が取れる. このとき $k \geq N$ であるから,

$$|S_n - S| = |S_{2k} - S| < \varepsilon$$

となる. 同様に, n が奇数なら $n = 2k + 1$ となる自然数 k がとれる. $k \geq N$ であるから,

$$|S_n - S| = |S_{2k+1} - S| < \varepsilon$$

が成り立つ。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ である。 □

解答

$S_n = \sum_{k=2}^n a_k$ とすると,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k+1} + \sum_{k=1}^n a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) \\ &= -\log 2 + \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

同様に,

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = -\log 2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

したがって S_{2n} , S_{2n+1} は同じ値に収束する。これは S_n が収束することを意味するため、この級数は収束する。

p49–50 : 2-(v)

解答

定理 5.7 (ダランベールの収束判定) を用いる。 $a_n = n/2^n$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

となることにより、この級数は収束する

p49–50 : 2-(vi)

解答

部分和の数列を S_n として S_{2n} が発散することを示す。二項ずつ括弧に入れることで、

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(2k-1)!} - \frac{1}{2k} \right)$$

と変形できる. ここで

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{(2k-1)!} = 0$$

であるから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $k \geq N$ となるすべての k に対し

$$\frac{1}{(2k-1)!} \leq \frac{1}{4k}$$

となる. さて,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^n \frac{1}{4k} = \infty$$

であるから, $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{4k}$ は発散する. これをふまえると, 定理 5.5 より,

$$\sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{(2k-1)!} \right) = \infty$$

であるからこの級数は発散する.

p49-50 : 2-(vii)

解答

$\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{2 - \log x}{2x^{3/2}}$ であり, 右辺は十分大きな x に対して 0 以下となる. さらに, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$ であるから, 定理 V. 4.1 よりこの交代級数は収束する.

p49-50 : 2-(viii)

解答

$$\frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} > \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$$

であることから

$$\sum \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} > \sum \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

となる. よってこの級数は発散する.

p49-50 : 2-(ix)

解答

定理 5.7 (Ratio Test) より収束する.

p49-50 : 2-(x)

解答

定理 5.7 (ダランベールの収束判定) より $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1)^2}}{(n+2)^{(n+1)^2}} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} = \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} \frac{(n+1)^{n^2}}{(n+2)^{n^2}} \frac{(n+1)^{2n+1}}{(n+2)^{2n+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{2n+1}\end{aligned}$$

ここで

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n(n+2)} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{-2n}$$

とすることにより, 右辺は $e \times 1 = e$ に収束する.

さらに,

$$\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{2n+1} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)} \right\}^{-2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-3}$$

とすることで, 右辺は $\frac{1}{e^2} \times 1 = \frac{1}{e}$ に収束する. よって

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \times \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e} < 1$$

となる. ゆえにこの級数は収束する.

(x) の別解

解答

1) で証明した命題を用いると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

であるから収束する.

p49-50 : 2-(xi)

解答

十分大きな n に対し $\log n \geq 2$ であるから, $\frac{1}{n^2}$ との比較により収束する.

p49-50 : 3

証明

$\sum a_n$ が絶対収束するので, $\sum |a_n|$ も収束する. よって, 定理 5.1 系より, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ となる. このとき, $1 > 0$ に対して, ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_1 \implies ||a_n| - 0| < 1$$

が成り立つ。また、 $|a_n| < 1$ のとき、

$$0 \leq |a_n|^2 \leq |a_n|^2 \leq |a_n|$$

が成り立つ。ここで、 $\sum |a_n|$ が収束し、各項は正なので、定理 5.5(比較判定法) により、 $\sum |a_n|^2$ も収束する。ゆえに $\sum a_n^2$ は絶対収束する。

□

p49–50 : 4

解答

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

とすると、 $\sum a_n$ は、項の絶対値が単調減少で 0 に収束する交代級数であるため、収束するが、

$$\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n}$$

は調和級数であり、発散する。

p49–50 : 5

証明

与えられた条件により、 $0 < r < c, r \neq \infty$ をみたす $r \in \mathbb{R}$ に対して、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N \implies \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < r$$

が成り立つ。これにより、

$$\begin{aligned} 0 < -r + c < \frac{a_n}{b_n} < r + c \\ \therefore (-r + c)b_n < a_n < (r + c)b_n \end{aligned}$$

となる。これと比較原理により、 $\sum a_n$ と $\sum b_n$ は同時に収束、発散することが証明された。

□

p49–50 : 6

解答

まず、

$$1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1}$$

の両辺を 0 から 1 まで x で積分すると、

$$\begin{aligned} \overbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}}^{s_n} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + R_n \end{aligned}$$

である。ただしここで $R_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx$ とおいた。この式から、

$$\begin{aligned} \left| s_n - \frac{\pi}{4} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx \right| \\ &< \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

である。

p49-50 : 7

p49-50 : 7-(i)

解答

(i)

$|x| \leq 1$ のとき、

$$1 + 2nx^{2n} \leq 1 + 2n, \quad \therefore \frac{1}{1+2n} \leq \frac{1}{1+2nx^{2n}}.$$

また、

$$\sum \frac{1}{1+2n} = \infty$$

であるから、定理 5.5 2) により

$$\sum \frac{1}{1+2nx^{2n}} = \infty$$

となり、この級数は発散する。

(ii)

$|x| > 1$ のとき、

$$\frac{1}{1+2nx^{2n}} \leq \frac{1}{1+2 \cdot 1 \cdot x^{2n}} < \frac{1}{2x^{2n}} < \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}$$

であり、なおかつ $\sum (1/x)^{2n}$ は収束する。ゆえに定理 5.5 1) により、

$$\sum \frac{1}{1+2nx^{2n}}$$

は収束する。

以上の考察により、求める x の範囲は

$$|x| > 1.$$

p49–50 : 7-(ii)

Lemma 0.0.7

n を自然数とすると,

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

である.

証明.

$$(2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1 < 4k^2$$

だから, $k = 1, 2, \dots, n$ について不等式をかけて

$$\begin{aligned} \frac{((2n+1)!!)^2}{2n+1} &< ((2n)!!)^2 \\ \therefore \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} &< \sqrt{2n+1} = \frac{2n+1}{\sqrt{2n+1}}. \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

□

Lemma 0.0.8: (ラーベの判定法)

正項級数 $\sum a_n$ について,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r$$

が存在するとき, $\sum a_n$ は $r > 1$ ならば収束し, $r < 1$ ならば発散する.

証明. $r > 1$ のとき, $1 < r_0 < r$ をみたす $r_0 \in \mathbb{R}$ をとる. 仮定より, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_1$ ならば $n(a_n/a_{n+1} - 1) > r_0$ となる.

このことから, $n \geq N_1$ ならば,

$$na_n - (n+1)a_{n+1} > (r_0 - 1)a_{n+1}$$

であるから,

$$(r_0 - 1) \sum_{n=N_1}^m a_{n+1} < \sum_{n=N_1}^m (na_n - (n+1)a_{n+1}) < N_1 a_{N_1} - (m+1)a_{m+1} < N_1 a_{N_1}.$$

このことから, 両辺の $m \rightarrow \infty$ とした極限をとり,

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} a_n < \frac{N_1 a_{N_1}}{r_0 - 1}$$

を得る. ゆえに $\sum a_n$ は収束する.

$r < 1$ のとき, 仮定により, ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_2$ ならば $n(a_n/a_{n+1} - 1) < 1$ となる.

このことから, $n \geq N_2$ ならば,

$$na_n < (n+1)a_{n+1}$$

であるから, $N_2a_{N_2} < (N_2+1)a_{N_2+1} < \cdots < na_n$ より

$$a_n > \frac{N_2a_{N_2}}{n} \quad (n \geq N_2)$$

を得る. よって比較判定法から $\sum a_n$ は発散する. □

解答

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (1-x^2)^n$$

とおく^{†1}.

ここで,

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

なので,

$$|a_{n+1}/a_n| = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4 \binom{2n}{n}} |1-x^2| = \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{4 \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}} |1-x^2| = \frac{(2n+1)(n+1)}{2(n+1)^2} |1-x^2|.$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{2(n+1)^2} |1-x^2| = |1-x^2|.$$

したがって, ダランベールの判定法により, $|1-x^2| < 1$ すなわち $-\sqrt{2} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{2}$ のとき, この級数は収束する.

$1-x^2 = -1$ すなわち $x = \pm\sqrt{2}$ のとき, 補題 1 を用いると,

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であり, $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ は単調減少であるから, この級数は収束する.

$1-x^2 = 1$ すなわち $x = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) \\ &= \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

であるから, ラーベの判定法により, この級数は発散する.

以上のことから, 求める x の範囲は

$$-\sqrt{2} \leq x < 0, \quad 0 < x \leq \sqrt{2}.$$

^{†1} 二重階乗の記法を用いた.

証明

この級数^{†1}の第 n 部分和を s_n , 分母が n 桁である項の末尾までの和を t_n とする. このとき $s_n < t_n$ である.

分母が k 桁である項の和を考える. このような項は, $8 \cdot 9^{k-1}$ 個ある.

また, このような項の分母の最小値は 10^{k-1} であるから,

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=1}^n \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8 \sum_{k=1}^n \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \\ &= 8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n}{1 - \frac{9}{10}} \\ &= 80 \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right) \end{aligned}$$

となり, t_n は単調増加かつ上に有界である

よって,

$$0 < s_n < t_n = 80 \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq 80$$

となり, これが証明すべきことであった.

□

^{†1} この級数をケンプナー級数という.

p63–64 : 1**p63–64 : 1-(i)****解答**

$f(a)$ を考えるため, $a \neq 0$ としてよい. $\delta \leq \frac{|a|}{2}$ とすると, $|x - a| < \delta$ より

$$|x| > |a| - \delta \geq \frac{|a|}{2}$$

である. これに留意すると,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - x|}{|ax|} < \frac{2\delta}{|a|^2}$$

であるから, $\delta = \min\{|a|/2, |a|^2\varepsilon/2\}$ でよい.

p63–64 : 1-(iii)**解答**

$t := \min\{x, a\}$ とする. このとき, 指数法則により,

$$|e^x - e^a| = e^t(e^{|x-a|} - 1)$$

が成立する. また, $t \leq a$ であるから,

$$e^t \leq e^a$$

$$\therefore e^t(e^{|x-a|} - 1) \leq e^a(e^{|x-a|} - 1)$$

ゆえに,

$$\varepsilon = e^a(e^\delta - 1)$$

となればよい. すなわち,

$$\delta = \log(1 + e^{-a}\varepsilon)$$

である.

p63-64 : 1-(v)

解答

任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ とすると, $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ において

$$|x^2 - y^2| \leq |x|^2 + |y|^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

が成り立つ.

p63-64 : 2

p63-64 : 2-(i)

解答

$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1, \left|\sin \frac{1}{y}\right| \leq 1$ であるから,

$$\left|(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}\right| \leq |(x+y)| \leq |x| + |y| \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow 0)$$

である. よって,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$$

となる.

p63-64 : 2-(ii)

解答

$x^2, y^2 \leq x^2 + y^2$ であるから,

$$1 \leq (1 + x^2 y^2)^{1/(x^2 + y^2)} \leq (1 + (x^2 + y^2)^2)^{1/(x^2 + y^2)}$$

が成り立つ. ここで $(x_n, y_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となるような点列を任意にとると, $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) である. すると $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{1/x} = 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+(x_n^2+y_n^2)^{1/(x_n^2+y_n^2)}) = 1$ も成り立つ. したがって,

$$(1+(x^2+y^2)^2)^{1/(x^2+y^2)} \rightarrow 1 \quad ((x,y) \rightarrow 0)$$

となるから, 求めるべき極限値は 1 である.

p63-64 : 2-(iii)

解答

まず, $\log x^x = x \log x$ である. また,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{1/x}$$

となる. ここで, $\lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} 1/x = \infty$ であるから, ロピタルの定理が適用でき,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{1/x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^x &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\log x^x} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

となり, これが答である.

p63-64 : 2-(iv)

解答

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(r^2)}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - (-2 \sin^2(r^2/2) + 1)}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin^2(r^2/2)}{(r^2/2)^2} \cdot (r^2/2) \\ &= 1^2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

を得て, これが答えである.

p63-64 : 2-(v)

解答

$$\begin{aligned}
x(1-y^n) - y(1-x^n) - x^n + y^n &= x - y + xy^n + x^n y - x^n + y^n \\
&= x(1-x^{n-1}) - y(1-y^{n-1}) + xy(x^{n-1} - y^{n-1}) \\
&= x(1-x)(1+\cdots+x^{n-2}) + y(x^n - xy^{n-1} + y^{n-1} - 1) \\
&= x(1-x)(1+\cdots+x^{n-2}) + y(1-x)(y^{n-1} - (1+\cdots+x^{n-1})) \\
&= (1-x)(y^n - y(1+\cdots+x^{n-1}) + x + \cdots + x^{n-1}) \\
&= (1-x)(1-y)((x-y) + (x^2 - y^2) + \cdots + (x^{n-1} - y^{n-1})) \\
&= (1-x)(1-y)(x-y)(1 + (x+y) + (x^2 + xy + y^2) + \cdots \\
&\quad + (x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + y^{n-2}))
\end{aligned}$$

だから、所期の極限は最後の因子の項の個数に等しい。よって答えは

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

となる。

p63-64 : 3

p63-64 : 3-(i)

解答

以下、 \mathbb{Q} の閉包は \mathbb{R} であることを示す。

$a \in \mathbb{R}$ に対して、

$$U(a, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

すなわち、

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

となればよい。アルキメデスの原理により、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\frac{1}{n} < 2\varepsilon$$

となる $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在する。また、 n を分母とする有理数は数直線上に幅 $\frac{1}{n}$ で並んでいるから、

$$\frac{m}{n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

となる $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在する。

したがって $a \in \mathbb{R}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ となるため、

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

である。

p63-64 : 4

p63-64 : 4-(i)

証明

$d(x) = 0$ は $\inf_{y \in A} |x - y| = 0$ とかける.

$$\begin{aligned} \inf_{y \in A} |x - y| = 0 &\iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists y \in A) (|x - y| < \varepsilon) \\ &\iff x \in \overline{A} \end{aligned}$$

これにより示された.

□

p63-64 : 4-(ii)

解答

$d(x)$ の定義より, 任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$d(x) \leq |x - y| \leq |x - a| + |a - y|$$

が成り立つ. 右辺で y について下限を取ると,

$$d(x) - d(a) \leq |x - a|.$$

同様に $d(a) - d(x) \leq |x - a|$ も言えるので $|d(x) - d(a)| \leq |x - a|$ である. これで示せた.

p63-64 : 5

証明

(I) f が U 上連続のとき, \mathbb{R}^n の開集合 W をひとつとる.

(i)

$W \cap f(U) = \emptyset$ のとき, $f(W) \neq \emptyset$ より, \mathbb{R}^n 上の開集合となる.

(ii)

$W \cap f(U) \neq \emptyset$ のとき, $f^{-1}(W)$ の元 x をひとつとる.

$f(x) = y$ とすると, U は開集合なので, ある $\delta_0 > 0$ に対して $U(x, \delta_0) \subset U$ となる. f の連続性より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ ($\delta_0 > \delta > 0$) が存在して, $f(U(x, \delta)) \subset U'(y, \varepsilon)$ となる.

また, W は開集合なので, ε を十分小さくとると

$$U'(y, \varepsilon) \subset W, \quad f(U(x, \delta)) \subset U(x, \varepsilon) \subset W$$

となる. ここで, $f^{-1}(f(U(x, \delta))) \supset U(x, \delta)$ より,

$$U(x, \delta) \subset f^{-1}(f(U(x, \delta))) \subset f^{-1}(W)$$

となり, $f^{-1}(W)$ は \mathbb{R}^n の開集合である.

(II)

\mathbb{R}^n の開集合 W に対して, $f^{-1}(W)$ が \mathbb{R}^n の開集合となるとき, U の元 x を1つとり, $f(x) = y$ とする.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $U(y, \varepsilon)$ は \mathbb{R}^n の開集合なので, $f^{-1}(U'(y, \varepsilon))$ も \mathbb{R}^n の開集合となる.

$x \in f^{-1}(U'(y, \varepsilon))$ より, ある $\delta > 0$ が存在して, $U(x, \delta) \subset f^{-1}(U'(y, \varepsilon)) \subset U$ となり, $f(U(x, \delta)) \subset f(f^{-1}(U'(y, \varepsilon))) \subset U'(y, \varepsilon)$ であるから, f は x で連続となる. $x \in U$ で任意に取れるので, U 上連続である.

p63–64 : 6

証明

(I)

 f が U 上連続であるとき, \mathbb{R}^n の開集合 W をひとつとる.

(i)

 $W \cap f(U) = \emptyset$ のとき, $f^{-1}(W) = \emptyset$ より, \mathbb{R}^n 上の開集合となり, 成立する.

(ii)

 $W \cap f(U) \neq \emptyset$ のとき, $f^{-1}(W)$ の元 x をひとつとり, $y = f(x)$ とする. W は開集合なので, $U'(y, \varepsilon) \subset W$ となる $\varepsilon > 0$ がとれる. f の連続性から, $\delta_0 > 0$ が存在して,

$$f(U(x, \delta_0) \cap U) \subset U'(y, \varepsilon) \subset W.$$

$$f^{-1}(f(U(x, \delta_0) \cap U)) \supset U(x, \delta_0) \cap U \text{ より,}$$

$$U(x, \delta_0) \cap U \subset f^{-1}(W).$$

$$V = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} U(x, \delta_0) \cap U \text{ とすると, } V \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の開集合であり,}$$

$$V \cap U = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} (U(x, \delta_0) \cap U) \subset f^{-1}(W).$$

定義より $V \cap U \supset f^{-1}(W)$ であるから,

$$V \cap U = f^{-1}(W)$$

となる.

(II)

 \mathbb{R}^n の開集合 W に対して, $f^{-1}(W) = V \cap U$ となる開集合 V が存在するとき, U の元 x を任意にひとつとり, $y = f(x)$ とする.任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $U'(y, \varepsilon)$ は \mathbb{R}^n の開集合なので, 条件より, 開集合 V が存在して,

$$f^{-1}(U'(y, \varepsilon)) = V \cap U$$

となる. V は開集合であるから, $\delta > 0$ が存在して,

$$U(x, \delta) \subset V,$$

$$f(U(x, \delta) \cap U) \subset U'(y, \varepsilon).$$

 x は U 上で任意にとれるので, f は U 上連続である.

p63–64 : 7

証明

 f が単調増加のときを示せば十分である.

任意の $x_0 \in (a, b)$ に対して, f は単調増加であるから,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f_+(x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f_-(x_0)\end{aligned}$$

がそれぞれ存在する.

$$\begin{aligned}f(x) \text{ が } x_0 \text{ において不連続} \\ \iff f_+(x_0) \neq f_-(x_0) \\ \iff f_+(x_0) - f_-(x_0) > 0\end{aligned}$$

である.

$$A_n = \left\{ x \in (a, b) \mid f_+(x) - f_-(x) > \frac{f(b) - f(a)}{n} \right\}$$

として, $\#(A_n) \geq n$ を仮定する. A_n から適当に a_1, a_2, \dots, a_n を取り出すと ($a < a_1 < a_2 < \dots < a_n < b$), f の単調性により,

$$f_+(a_i) \leq f_-(a_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

なので,

$$\begin{aligned}f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^n \frac{f(b) - f(a)}{n} \\ &< f_+(a_1) - f_-(a_1) + f_+(a_2) - f_-(a_2) + \dots + f_+(a_n) - f_-(a_n) \\ &\leq f_+(a_n) - f_-(a_1) \\ &\leq f(b) - f(a)\end{aligned}$$

となり, 矛盾する. よって, $\#(A_n) < n$ である.

f の不連続点全体の集合を A とすれば,

$$A \subset \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cup \{a, b\}$$

右辺は高々加算なので, A も高々可算である.

□

p63-64 : 8

解答

$[0, 1]$ に対し,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1/n & (1/(n+1) < x \leq 1/n) \end{cases}, \quad \left(\because [0, 1] = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/(n+1), 1/n] \right)$$

とすれば, 広義単調増加で $x = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) で不連続である.

p63-64 : 9

存在性の証明

$\overline{[a, b] \cap \mathbb{Q}} = [a, b]$ であるから, $I = [a, b] \cap \mathbb{Q}$ として, $[a, b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ の元 x に対して, Th6.1(1) より, x に収束する I の数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する.

その $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して,

$$F(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

とするⁱ¹.

次に, これが well-defined であることを示すⁱ². $\varepsilon > 0$ に対して, f は一様連続であるから, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$|x - y| < \delta \wedge x, y \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

となる.

また, $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) であるので, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$\begin{aligned} n, m > N &\Rightarrow |x_n - x_m| < \delta \wedge x_n, x_m \in I \\ &\Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \end{aligned}$$

となり, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ はコーシー列となるので収束する.

x に収束する 2 つの数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して, x_n, y_n を交互にとった数列を $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ とすれば, $z_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) となり, $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する. $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ は上の部分列であるので, 同じ収束値に収束し, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の取り方に依らない.

□

ⁱ¹ $x \in I$ のときも同様に, x に収束する I 上の数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をとって $F(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ とする. これは Th6.2 により well-defined で $F(x) = f(x)$ である.

ⁱ² $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ が存在し, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の取り方に依らないこと.

連続性の証明 1

F の $[a, b]$ における一様連続性を示す. (一様連続なら特に連続) $\varepsilon > 0$ を任意に固定する. f の一様連続性を使って, 任意の $x, y \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ に対し

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$$

となるように, $\delta > 0$ を取る. $|x - y| < \delta/3$, $x, y \in [a, b]$ とし, $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$ であることを示す. x, y にそれぞれ収束する $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ の数列 x_n, y_n を取る. n を十分大きく取って

$$\begin{aligned} |x_n - x| &< \delta/3, & |y_n - y| &< \delta/3, \\ |F(x) - f(x_n)| &< \varepsilon/3, & |F(y) - f(y_n)| &< \varepsilon/3 \end{aligned}$$

となるようにする. このとき

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - x| + |x - y| + |y - y_n| < \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta$$

が成り立つ. すると δ の取り方より,

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon/3$$

となる. したがって,

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - F(y)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

□

連続性の証明 2

$\varepsilon > 0$ を任意に取り, δ は上の証明と同じように取る. $|x - y| < \delta$, $x, y \in [a, b]$ とする. $(x, y) \cap \mathbb{Q}$ の数列 x_n, y_n で x, y に収束するものを取る. 明らかに $|x_n - y_n| < \delta$. δ の取り方より $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. $n \rightarrow \infty$ として $|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon$ を得る.

□

一意性の証明

条件をみたす 2 つの関数 $F_1(x)$ と $F_2(x)$ に対して, ある x で $F_1(x) \neq F_2(x)$ とすると, $\varepsilon = |F_1(x) - F_2(x)|/2$ に対して, $F_1(x)$ と $F_2(x)$ の連続性により, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$|x - y| < \delta \wedge y \in [a, b] \Rightarrow |F_1(y) - F_1(x)| < \varepsilon \wedge |F_2(y) - F_2(x)| < \varepsilon.$$

特に $U(x, \delta) \cap [a, b] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ より, その元 y に対して, $F_1(y) = F_2(y) (= f(y))$ となるが,

$$\begin{aligned} |F_1(x) - F_2(x)| &\leq |F_1(x) - F_1(y)| + |F_2(y) - F_2(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = |F_1(x) - F_2(x)| \end{aligned}$$

となり矛盾する. よって示された.

□

p72-74 : 1**p72-74 : 1-(i)****解答**

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 1$ とする. f は連続であり, $\mathbb{R} - \{0\}$ は \mathbb{R} の開集合であるので, §6 : 問 3 より, その逆像である A^c も開集合である. よって, A は閉集合である.

また, $(x, y, z) \in A$ に対して,

$$\begin{aligned} 1 &= 3x^2 + 2y^2 + 5z^2 \\ &\geq 3x^2 \end{aligned}$$

であるから,

$$|x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

同様に, $|y| \leq 1/\sqrt{2}$, $|z| \leq 1/\sqrt{5}$ となり, A は有界である.

以上より, A はコンパクトである.

p72-74 : 1-(ii)**解答**

$x \in \mathbb{R}$ に対して, $(x, -x, 1) \in A$ であり,

$$\|{}^t(x, -x, 1)\| = \sqrt{2x^2 + 1} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow +\infty).$$

このことから, B は有界でない.

よって, B はコンパクトでない.

p72-74 : 1-(iii)

解答

 $(x, y, z) \in C$ に対して,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

とすれば, $U(x, \varepsilon) \subset C$ となり, C は開集合である.よって, C はコンパクトでない.

p72-74 : 1-(iv)

解答

 $t > \sqrt{3}$ に対して, $t^3 - 3t > 0$ で, $(t, \sqrt{t^3 - 3t}/2) \in D$ である.

$$\begin{aligned} \left\| (t, \sqrt{t^3 - 3t}/2) \right\| &= \frac{1}{2} \sqrt{t^3 + 4t^2 - 3t} \\ &\rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

より, D は有界でなく, コンパクトでない.

p72-74 : 1-(v)

解答

 $(0, 0) (\notin E)$ が触点であることを示す.任意の $\varepsilon > 0$ に対して, アルキメデスの原理より,

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

となる $n \in \mathbb{N}$ が存在するので, 原点の任意の ε -近傍において E と交わりを持つ.

よって, 閉集合でなくコンパクトでない.

p72-74 : 3

証明

対偶を示す. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ とする. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n^c = \mathbb{R}^m$ であり, F_n^c は開集合であるから, $(F_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ は K の開被覆である. K はコンパクトであるから, $(F_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ の有限個の開集合 $F_{n_1}^c, \dots, F_{n_k}^c$ によって

$$K \subset F_{n_1}^c \cup \dots \cup F_{n_k}^c$$

とできる. したがって,

$$K \cap F_{n_1} \cap \dots \cap F_{n_k} = \emptyset$$

である. K は F_{n_1}, \dots, F_{n_k} をすべて含んでいるから,

$$F_{n_1} \cap \dots \cap F_{n_k} = \emptyset$$

である.

□

p72-74 : 4

Lemma 0.0.9

ノルムに関して, $||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$ が成り立つ.

証明. 絶対値の定義 ($|a| := \max\{a, -a\}$) に立ち返ると,

$$||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||, \quad -||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

なる二つの不等式を示せばよい. これは,

$$||\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}||$$

より示される.

□

Lemma 0.0.10

$||\cdot||_1 : \mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^n |x_j| \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ に対して, } ||\mathbf{x}||_1 \leq M|\mathbf{x}|$$

が成り立つ.

証明. $M := n$ とおく. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ とする. 各 $j (1 \leq j \leq n)$ において,

$$|x_j| \leq |\mathbf{x}|$$

が成り立つ. そこで, j について足し合わせると,

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{x}| + \dots + |\mathbf{x}| = n|\mathbf{x}| = M|\mathbf{x}|$$

が成り立つ.

□

証明

まず,

$$\exists P \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ に対して, } ||\mathbf{x}|| \leq P|\mathbf{x}| \quad \dots (*)$$

となることを示す. \mathbb{R}^n の正規直交基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ とする. $T := \max\{||\mathbf{e}_j|| \mid 1 \leq j \leq n\}$ とおき, M を補題のものとして, $P := TM$ とおく. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

とすると, $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j$ とかける. これと, ノルムの i), ii) の条件から,

$$||\mathbf{x}|| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \right\| \leq \sum |x_j| ||\mathbf{e}_j|| \leq T \sum |x_j| \leq TM ||\mathbf{x}|| = P|\mathbf{x}|$$

が成り立つ. 以上より (*) は成り立つ. これより, 函数 $\|\cdot\|$ が連続函数になる事を示す. $\alpha \in \mathbb{R}^n$ とする. $\varepsilon > 0$ とする. $\delta < \frac{\varepsilon}{P}$ を満たすようにとる. このとき, $x \in \mathbb{R}^n$ かつ $|x - \alpha| < \delta$ とする.

$$||x| - |\alpha|| \leq \|x - \alpha\| \leq P|x - \alpha| < \varepsilon$$

よって, 連続である. $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ なるコンパクト集合上で, $\|\cdot\|$ を考える. ノルムが連続であったことから, コンパクト集合上で最小値をとる. これを m とする. この m を用いると,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して, } m|x| \leq \|x\|$$

が成り立つ事を示す. $x \in \mathbb{R}^n$ とする. このとき, $x/|x| \in \mathbb{S}^{n-1}$ であることに注意すると, ($\because |x/|x|| = |x|/|x| = 1$) m が最小値であることから,

$$m \leq \left\| \frac{x}{|x|} \right\|$$

を満たす.

$$\left\| \frac{x}{|x|} \right\| = \frac{1}{|x|} \|x\|$$

に注意すると,

$$m|x| \leq \|x\|$$

となる. 以上より, 示すべき題意は満たされた.

□

Column I

これは, なかなか背景を語るには, 奥深い問題です. まず, 注意しておくことは, この性質は有限次元の線型空間だからできる話だということです. 無限次元であれば, もう少し条件がないと無理です. (そもそも一般にはユークリッド距離が入りません.) 有限次元であれば, ノルムが定める位相というのが一意に定まると言う事を言っています. それだけ有限次元の線型空間は「硬い」という風に定義づけることができるでしょう.

次に証明の中で用いたテクニックです. \mathbb{S}^{n-1} を用いたところ. これは, 無限次元になっても用いられる手法です. 線型性がある操作や空間の中では, 綺麗な (空間全体に一律に広げていけそうなの?) 図形の上でだけ考えておいて, あとは線型に伸ばすということで全体の性質をみるということがあります. ここではそれを行なっています. 函数解析学などでは, 無限次元上に定まる理論上重要な写像 (いわゆる有界線型作用素) に対してノルムを定めますが, それらのノルムは, 無限次元の球面だけで見れば良いという性質があったりします.

最後に証明の中で出てきた $\|\cdot\|_1$ というノルムですが, これはマンハッタン距離と呼ばれる距離です. 解析などでは計算が楽に済むので利用されます. (他にも応用はいくつかあると思いますが, 僕は知りません笑)

p72-74 : 5

証明

連続函数の定数倍, 連続函数の和が再び連続函数になることから, $C(K)$ は線型空間になる. また, K が compact であるから, $f(K)$ は compact である. また, $|\cdot|$ も連続函数であるから, $|f(K)|$ も compact

である。従って最大値を持つから、 $\|f\|$ なる値が存在していることがわかる。ノルムの条件を満たすことを示す。

(1) $\|f\| \geq 0$ であること

各 $x \in K$ に対して、 $|f(x)| \geq 0$ である。従って、 $\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in K\} \geq 0$

(2) $\|f\| = 0 \iff f = 0$ であること ($f = 0$ は写像として定数関数 0 に等しいという意味です。)

$f = 0$ であれば、各 $x \in K$ に対して $|f(x)| = 0$ であるから、 $\|f\| = 0$ は明らか。逆を示す。

$\|f\| = 0$ とする。各 $x \in K$ に対して、 $|f(x)| = 0$ である。つまり $f(x) = 0$ 。よって $f = 0$

(3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ であること

$$\begin{aligned}\|f + g\| &= \max\{|f(x) + g(x)| \mid x \in K\} \\ &\leq \max\{|f(x)| + |g(x)| \mid x \in K\} \\ &\leq \max\{|f(x)| \mid x \in K\} + \max\{|g(x)| \mid x \in K\} = \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$

よって、確かにノルムである。

□

Column II

皆さんには、冗長な指摘かもしれませんが、これ、

- $C(K)$ が線型空間であること
- $\max\{|f(x)| \mid x \in K\}$ が存在していること

を確認しなければそもそもノルムを定義したことになるからです。後輩とのゼミなどでこの辺りうっかりミスが多かったのでコメントしておきました。

p72-74 : 6

証明

収束先となる函数 f を構成し、i) 収束先であること ii) 連続であることを示す。

各 $x \in K$ において、実数列 $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。実際、

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \max\{|f_n(x) - f_m(x)| \mid x \in K\} = \|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

よりわかる。実数の完備性から列 $(f_n(x))$ は収束する。そこで、

$$f: K \ni x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

と定める。この f が i), ii) を満たすことを示す。

i) を満たすこと。すなわち、

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して, } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n > N \text{ に対して, } \|f_n - f\| < \varepsilon$$

を示す。ただし、 $\|\cdot\|$ の定義から、 $\|f_n - f\| < \varepsilon$ は、

$$\forall t \in K \text{ に対して, } |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

を示せばよいことに注意する. (f_n) が一様ノルムに関して Cauchy の収束条件を満たすことに $\varepsilon/2 > 0$ を適用すると, ある自然数 N_1 が存在して,

$$\forall n, m > N_1 \text{ に対して, } \|f_n - f_m\| < \varepsilon/2$$

を満たす. $N := N_1$ とおく. $n > N, t \in K$ とする. 列 $(f_n(t))$ は $f(t)$ に収束するから, ある自然数 N_2 が存在して,

$$\forall m > N_2 \text{ に対して, } |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon/2$$

を満たす. そこで, $m > \max\{N_1, N_2\}$ をとれば,

$$|f_n(t) - f(t)| \leq |f_n(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - f(t)| \leq \|f_n - f_m\| + |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon$$

となる. よって収束先である.

ii) を満たすこと. すなわち, 各 $\alpha \in K$ において

$$\varepsilon > 0 \text{ に対して, } \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in K \text{ s.t. } d(\alpha, x) < \delta \text{ に対して, } |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

を満たすことを示す. $\alpha \in K$ とする. $\varepsilon > 0$ とする. 列 $(f_n(\alpha))$ が $f(\alpha)$ に収束することから, ある自然数 N_1 が存在して,

$$\forall n > N_1 \text{ に対して, } |f_n(\alpha) - f(\alpha)| < \varepsilon/3$$

が成り立つ. また, (f_n) が Cauchy の収束条件を満たすことから, ある自然数 N_2 が存在して,

$$\forall n, m > N_2 \text{ に対して, } \|f_n - f_m\| < \varepsilon/3$$

が成り立つ. $N := \max\{N_1, N_2\}$ とおく. f_N は K 上で連続であるから, α での連続性より, ある正数 δ' が存在して,

$$\forall x \in K \text{ s.t. } d(\alpha, x) < \delta' \text{ に対して, } |f_N(x) - f_N(\alpha)| < \varepsilon/3$$

が成り立つ. $\delta := \delta'$ とおく. $x \in K$ かつ $d(\alpha, x) < \delta$ とする.

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(\alpha)| + |f_N(\alpha) - f(\alpha)| \leq \|f - f_N\| + \varepsilon/3 + \|f - f_N\| < \varepsilon$$

より f は連続である. つまり $f \in C(K)$ である.

□

Column III

これ, Compact 上の連続関数であることはほとんど本質的なことに影響しません. 定義域が Compact である条件を外す代わりに, 有界連続関数に対して適用すれば同様の議論が成り立ちます. (ただし, その場合, 最大値ではなく上限でノルムを定義することになります.) もしくは, 定義域上で Compact - support (ある Compact 集合上で値をもち, それ以外では恒等的に 0) など他にも少し条件を変えて修正することでいくつかの応用が存在します. また, 詳しく調べてないのでわかりませんが, 定義域が距離空間であることもあまり影響しなかったと思います.

函数解析における函数空間の一例です. このような $C(K)$ に相当する空間として, 微分可能函数空間などもあげられます. ここは, 深入りすると, それだけで大学一年間分の解析の授業ができるぐらいですので, ここで止めておきます.

参考文献

(1) 宮寺功 関数解析 (ちくま学芸出版)

(2) 洲之内治男 関数解析入門 (近代ライブラリ社)

p72-74 : 7

証明

部分列 $(f_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ を任意にひとつとる.

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n(k)}(x) \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

であり, f に各点収束する.

$(f_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ は一様収束するとすれば f に収束するが, f は連続でなく「連続関数列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が f に各点収束すれば, f は連続」の対偶を考えることにより矛盾する^{†1}. よって一様収束しない.

□

^{†1} IV. Thm 13.2, Thm 13.3 より.

p72-74 : 8

Lemma 0.0.11

コンパクト集合 S 上の連続写像 g について, その像 $g(S)$ はコンパクトである.

補題の証明. $g(S)$ の開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を任意にとる.

任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, g は連続であるから, §6 : 問 5 より,

$$g^{-1}(U_\lambda) = U'_\lambda \cap S$$

となる開集合 U'_λ がとれる. 特に $(U'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は S の開被覆となる.

S はコンパクトなので, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して

$$S \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$$

となり, S もコンパクトである.

□

証明

f は単射なので, $f^{-1}: f(K) \rightarrow K$ がとれる. \mathbb{R}^n の開集合 W をひとつとる.

$W \cup K^c$ は開集合であるから

$$(W \cup K^c)^c = W^c \cap K \subset K$$

は開集合で特にコンパクトである.

補題より, $f(W^c \cap K)$ もコンパクトであり, W の f^{-1} による逆像 W' は

$$W' = (f(W^c \cap K))^c \cap f(K)$$

であり $(f(W^c \cap K))^c$ は開集合であるから §6 : 問 6 より f^{-1} は $f(K)$ 上で連続である.

□

p72-74 : 9

証明

$g(x)$ が下半連続であるとき, $-g(x)$ は上半連続であるので, $f(x)$ が上半連続であることを示せば十分である.

$\varepsilon > 0$ をひとつとる. $x \in K$ に対して,

$$|y - x| < \delta_{(x)} \wedge y \in K \Rightarrow f(y) < f(x) + \varepsilon$$

となる $\delta_{(x)}$ がとれる.

$(U(x, \delta_{(x)}))_{x \in K}$ は K の開被覆であるので, K のコンパクト性より,

$$x_1, x_2, \dots, x_m \in K, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_m$$

となるようにうまくとると,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m U(x_i, \delta_i), \quad f(K) \subset \bigcup_{i=1}^m f(U(x_i, \delta_i))$$

となる.

$f(x_i)$ の Max をとれば, $f(x_i) + \varepsilon$ は $f(K)$ の上界となるので, $f(K)$ は上に有界であり, 特に $M = \sup f(K)$ が存在する.

$n \geq 1$ に対して, $M - 1/n < f(x_n) \leq M$ となる $x_n \in K$ がとれて, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$ となる.

K は点列コンパクトなので, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束する部分列 $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ をとってその極限値を $x \in K$ とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n(k)}) = m$, f は上半連続であるから $\varepsilon > 0$ に対して, 十分大きい k で,

$$|M - f(x_{n(k)})| < \varepsilon, \quad f(x_{n(k)}) < f(x) + \varepsilon$$

となり, $M - 2\varepsilon < f(x) \leq M$ となる. ε は任意にとれるので, $f(x) = M$ となり, この x で Max に達する.

□

p72-74 : 10**証明**

定義域上の任意の点 x に対して, ある $\lambda_x \in \Lambda$ が存在して,

$$f(x) \leq f_{\lambda_x}(x) < f(x) + \varepsilon$$

となる.

定義域上の点 a を任意に一つ取ると, f_{λ_a} は上半連続なので, 適当な $\delta > 0$ に対して

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow f_{\lambda_a}(x) < f_{\lambda_a}(a) \\ &\Rightarrow f_{\lambda_a}(x) < f(a) + \varepsilon \\ &\Rightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon \end{aligned}$$

となり, $f(x)$ は $x = a$ で上半連続である.

□

p72-74 : 11

証明

K, L がコンパクトであり、 f の像は有界であるので、 $f(x, y)$ を L を添字集合とする開集合 $f_y(x)$ とみなすと、

$$f(x) = \inf_{y \in L} f_y(x) = \min_{y \in L} f(x, y)$$

が定義できる。

各 f_y は上半連続であり、問 9 より特に \max を持つ。よって、

$$\max_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} \min_{y \in L} f(x, y)$$

が存在する。同様に、 $\min_{y \in L} \max_{x \in K} f(x, y)$ も存在する。

また、任意の $(x, y) \in K \times L$ に対して、

$$\min_{y \in L} f(x, y) \leq f(x, y) \leq \max_{x \in K} f(x, y)$$

が成立するので、特に最左辺の \max を与える x と最右辺の \min を与える y に対して

$$\max_{x \in K} \min_{y \in L} f(x, y) \leq f(x, y) \leq \min_{y \in L} \max_{x \in K} f(x, y).$$

□

p72–74 : 12

証明

$(a, b) \in K \times L$ が f の鞍点であるとき、(i), (ii) より、

$$f(a, b) = \max_{x \in K} f(x, b) = \min_{y \in L} f(a, y)$$

が成立する。

また特に、

$$\max_{x \in K} \min_{y \in L} f(x, y) \geq \min_{y \in L} f(a, y) = f(a, b) = \max_{x \in K} f(x, b) \geq \min_{y \in L} \max_{x \in K} f(x, y)$$

であるので、問 11 と併せて

$$\max_{x \in K} \min_{y \in L} f(x, y) = \min_{y \in L} \max_{x \in K} f(x, y)$$

を得る。

逆に上をみたととき、 $\min_{y \in L} f(x, y)$ の K 上での \max を与える点を a 、 $\max_{x \in K} f(x, y)$ の L 上での \min を与える点を b とすると、 (a, b) は (i), (ii) をみたし鞍点となる。

□

p79–80 : 1

証明

C 上の点 P をひとつとり、 C の中心とのある方向のなす角を考えることで、 $[0, 2\pi]$ から C への全射な連続写像 φ を得る。 $[0, \pi]$ 上で定義された関数

$$g(x) = f \circ \varphi(x) - f \circ \varphi(x + \pi)$$

に対して, $g(0) = g(\pi) = 0$ ならば, $\varphi(0)$ と $\varphi(\pi)$ を通る直線は一致する. 一方, $g(0) \neq 0$ の場合は

$$g(0)g(\pi) < 0$$

となり, $[0, \pi]$ 上で $g(x)$ は連続なので, 中間値の定理より

$$0 < c < \pi$$

なるある c で

$$g(c) = 0$$

となる. よって, $\varphi(c)$ と $\varphi(c + \pi)$ を通る直線が一致する.

□

p79–80 : 2

証明

各 λ に対して, $U_\lambda = A \cap U'_\lambda$ となる $U'_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ をとる.

(i)

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap U'_\lambda) \\ &= A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U'_\lambda \right). \end{aligned}$$

ここで, 定理 8.3 より

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U'_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$$

であるから

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}(A).$$

(ii)

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 &= (U'_1 \cap A) \cap (U'_2 \cap A) \\ &= (U'_1 \cap U'_2) \cap A. \end{aligned}$$

ここで, 定理 8.3 より

$$U'_1 \cap U'_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$$

であるから

$$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}(A).$$

(iii) $\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$A = A \cap \mathbb{R}^n, \quad \emptyset = A \cap \emptyset \in \mathcal{O}(A).$$

□

p79–80 : 3

証明

$F_\alpha = F'_\alpha \cap A$ となる $F'_\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ をとる.

$$(i) \quad \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (F'_\alpha \cap A) = A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A} F'_\alpha \right).$$

ここで, 定理 8.3 より

$$\bigcup_{\alpha \in A} F'_\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$$

であるから

$$\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{F}(A).$$

$$(ii) \quad F_1 \cap F_2 = (F'_1 \cap A) \cap (F'_2 \cap A) = (F'_1 \cap F'_2) \cap A.$$

ここで, 定理 8.3 より

$$F'_1 \cap F'_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$$

であるから

$$F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}(A).$$

(iii) $\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$A = A \cap \mathbb{R}^n, \quad \emptyset = A \cap \emptyset \in \mathcal{F}(A).$$

(iv) $B \in \mathcal{F}(A)$ とする. $B = A \cap F$ となる $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$F^c \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$$

であり,

$$C_A(B) = A \cap F^c \in \mathcal{O}(A).$$

$C_A(B) \in \mathcal{O}(A)$ のとき, $C_A(B) = A \cap U$ となる $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$U^c \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$$

であるから,

$$B = A \cap U^c \in \mathcal{F}(A).$$

以上より,

$$B \in \mathcal{F}(A) \iff C_A(B) \in \mathcal{O}(A).$$

□

証明

(a) \iff (b), (b) \iff (c) を示す.

■(a) \iff (b) について

(a) \implies (b) 区間の定義により明らか.

(b) \implies (a) $I \neq \emptyset$ より, $M = \sup A$, $m = \inf A$ が $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に存在する.

このとき, m, M の任意の近傍 U_m, U_M において, I の元 a, b が存在するので (M, m) が ∞ ($-\infty$) のときは近傍 U を

$$U = \{x \mid x > R\} \quad (\text{あるいは} \quad U = \{x \mid x < R\})$$

とする), 仮定より, $[a, b] \subset I$ となる.

近傍は任意にとれるから, $(m, M) \subset I$ となり, \sup, \inf の定義から

$$I \supset [m, M] = A$$

であるから, I は区間となる.

よって, (a) \iff (b) が示された.

■(b) \iff (c) について

(b) \implies (c) I が連結でない, つまり

$$I = A \dot{+} B, \quad A, B \neq \emptyset, \quad A, B \in \mathcal{O}(I)$$

となっているとする. A, B の元 a_1, b_1 が $a_1 < b_1$ であるとき, 以下のように $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ がとれる:

- $d_n = (a_n + b_n)/2$ として, $d_n \in [a_n, b_n] \subset I$.
- $I = A \dot{+} B$ より, $d_n \in A$ または $d_n \in B$ が一方だけ必ず成立する.
- $d_n \in A$ のときは, $a_{n+1} = d_n, b_{n+1} = b_n$.
- $d_n \in B$ のときは, $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = d_n$.

いずれの場合も $a_{n+1} < b_{n+1}$ であるから, とくに

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{|a_n - b_n|}{2}$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$$

である. さらに

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

となるので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$$

を得る.

$\alpha \in I$ であるから, $\alpha \in A$ または $\alpha \in B$ であるが, いずれの場合においても $A, B \in \mathcal{O}(I)$ となることに矛盾する.

(c) \implies (b) 対偶を示す. $a, b \in I$, $a < b$ となる a, b に対して,

$$a < x < b \quad \text{かつ} \quad x \notin I$$

となる x がとれるとする.

このとき

$$A = I \cap (x, \infty), \quad B = I \cap (-\infty, x)$$

とおけば,

$$I = A \dot{+} B, \quad A, B \neq \emptyset, \quad A, B \in \mathcal{O}(I)$$

となり, I は連結でない.

よって, (b) \iff (c) が示された.

以上により

$$(a) \iff (b) \iff (c)$$

が示された.

□

p79–80 : 5

証明

$f(A)$ が連結でないと仮定し, $f(A) = B \dot{+} C$, $B, C \neq \emptyset$ かつ $B, C \in \mathcal{O}(f(A))$ とする. $B = f(A) \cap B'$, $C = f(A) \cap C'$, $B', C' \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ となる B', C' をとると, p63–64:6 より, $f^{-1}(B) = f^{-1}(B') \in \mathcal{O}(A)$, $f^{-1}(C) = f^{-1}(C') \in \mathcal{O}(A)$ である. また, $f^{-1}(B) \dot{+} f^{-1}(C) = A$, $f^{-1}(B), f^{-1}(C) \neq \emptyset$ より, A が連結であることに矛盾する.

□

p79–80 : 6

証明

$I = [a, b]$ に対して, p79–80:4, p79–80:5 より, $f(I)$ も区間である. p79–80:4(b) より, $[f(a), f(b)]$ または $[f(b), f(a)]$ は $f(I)$ の部分集合であるから, その中間の値 γ に対して, $f(c) = \gamma$ となる $c \in I$ が存在する.

□

p79–80 : 7

証明

B が連続でないと仮定し, $B = C \dot{+} D$, $C, D \neq \emptyset$, $C, D \in \mathcal{O}(B)$ とする. $C = C' \cap B$, $D = D' \cap B$ となる $C', D' \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ をとると, $C'' = C' \cap A$, $D'' = D' \cap A$ とすることで $C'', D'' \in \mathcal{O}(A)$ となり, $A = C'' \dot{+} D''$ となる. $c \in C'$ に対してその近傍 U において $U \subset C'$ とでき, 触点の定義により $A \cap U \neq \emptyset$ で $C'' \neq \emptyset$ となる. 同様に $D'' \neq \emptyset$ より, A が連続であることに矛盾する.

□

p79–80 : 8

解答

$$D_n = \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \mid 0 \leq y \leq 1, \right\}, \quad E = \{(x, 0) \mid 0 < x \leq 1\}$$

とする. $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cup D_n)$ となるが, E, D_n は連結で $\{(1/n, 0)\} = E \cap D_n$ であるから, p79–80 : 11 より, $E \cup D_n, C$ も連結となる. $C \subset A \subset \overline{C} = A \cup \{(0, 0)\}$ より, p79–80 : 7 から A も連結となる. $(0, 0) \notin A$ であるから, $(0, 1) \in B$ と $(1, 0) \in C$ を弧によって結ぶことはできない.

p79–80 : 9

証明

(a) \iff (b) については p63–64 : 6 の言い換え. (a) \iff (c) については p79–80 : 3 による.

□

p79–80 : 10

証明

$A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ が連結でないと仮定し, $A = (B \cap A) \dot{\cup} (C \cap A)$, $B \cap A, C \cap A \neq \emptyset$, $B, C \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ とする. とする. $B \cap A, C \cap A \neq \emptyset$ より, $B \cap A_{\lambda_1}, C \cap A_{\lambda_2} \neq \emptyset$ となる $\lambda_1, \lambda_2 \in L$ をとる. ここで, $C \cap A_{\lambda_1} \neq \emptyset$ とすれば, A_{λ_1} が連結であることに矛盾し, $C \cap A_{\lambda_1} = \emptyset$ となる. 同様に $B \cap A_{\lambda_2} = \emptyset$ となる.

$$A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \subset A \subset B \cup C$$

であるから,

$$\begin{aligned} A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} &= (B \cup C) \cap (A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2}) \\ &= (B \cap A_{\lambda_2} \cap A_{\lambda_1}) \cup (C \cap A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2}) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

であり, 矛盾する. よって, $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ は連結である.

□

p79–80 : 11

証明

p79–80 : 10 より C は連結集合であり, 定義どおり特に最大なものである.

$C \subset A$ より,

$$C \subset (\overline{C} \cap A) \subset \overline{C}$$

である,

p79-80 : 7 より, $\overline{C} \cap A$ も連結で, c は最大であるから, $\overline{C} \cap A \subset C$ となる. よって, $C = \overline{C} \cap A \in \mathcal{F}$ である.

□

Column IV

集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 2^A 上の同値関係を

$$x \sim y \iff \text{「} A \text{ の連結な部分集合 } M \text{ が存在して } x, y \in M \text{ となる」.}$$

とする (推移律をみたすことは p79-80 : 10 による). このとき, $x \in A$ に対する同値類 $C_{(x)}$ は, C と一致する.

詳しくは松坂和夫著『集合・位相入門』などを参照のこと.

p79-80 : 12

(i), (ii) は (iii) より略す.

p79-80 : 12-(iii)

解答

$$A = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2 = 1 \} \text{ とする.}$$

■ $p = 1$ のとき: 条件を変形して

$$\begin{aligned} A &= \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 = 1 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \} \\ &= \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \sqrt{1 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \} \\ &\quad \cup \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = -\sqrt{1 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \} \end{aligned}$$

がわかる. そこで $A^\pm = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \pm \sqrt{1 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \}$ とする.

$R^{n-1} \ni (x_2, \dots, x_n) \mapsto (\pm \sqrt{1 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, x_2, \dots, x_n) \in A^\pm$ で定義される写像は連続な全射であり, R^{n-1} は連結だから 5) より A^\pm も連結である. また, $(x_1, \dots, x_n) \in A^+$ なら $x_1 \geq 1$ であり, A^- の元の第一成分は負だから $(x_1, \dots, x_n) \notin A^-$ となる. よって $A^+ \cap A^- = \emptyset$ である.

以上より A はちょうど 2 つの連結成分を持つ.

■ $p \neq 1$ のとき: 同じように x_1 について解いて $A = A^+ \cup A^-$ とする. ただし今度は

$$A^\pm = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{aligned} &x_1 = \pm \sqrt{1 - x_2^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2}, \\ &1 - x_2^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2 \geq 0 \end{aligned} \right\}$$

と定義する. $\varphi^\pm: B := \{ (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : 1 - x_2^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2 \geq 0 \} \rightarrow A^\pm$ を

$$(x_2, \dots, x_n) \mapsto (\pm \sqrt{1 - x_2^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2}, x_2, \dots, x_n)$$

によって定める. ここで B は原点に関して星型だから連結である. φ^\pm は連続な全射だから A^\pm も連結である. $(0, 1, 0, 0, \dots, 0) \in A^+ \cap A^-$ だから 10) より A も連結, つまり連結成分の個数は 1 個である.

以上より, $p = 1$ のとき 2 個, $p \neq 1$ のとき 1 個である.

p79-80 : 12-(iv)

解答

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2(x - a) = x^2(x + a)\}$$

とする.

$$\begin{aligned} x \in A &\iff y = \pm |x| \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} \wedge \frac{x+a}{x-a} > 0 \\ &\iff y = \pm |x| \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} \wedge |x| \leq a. \end{aligned}$$

$$f(x) = |x| \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$$

とする.

■ $x \leq -a$ のとき:

$$y = f(x) = -x \sqrt{1 + \frac{2a}{x-a}}$$

となり, $f(-a) = 0$ であるから, f の連続性より,

$$y^2(x-a) = x^2(x+a) \wedge x \leq -a$$

は連結集合である.

■ $x \leq -a$ のとき:

$$f(x) = x \sqrt{1 + \frac{2a}{x-a}} > 0$$

であるから, f の連続性より

$$\begin{aligned} y^2(x-a) &= x^2(x+a) \wedge x \geq -a \wedge y > 0, \\ y^2(x-a) &= x^2(x+a) \wedge x \geq -a \wedge y < 0 \end{aligned}$$

はそれぞれ連結集合で, これは同じ連結成分になりえないことから, 2 個の連結成分を持つ.

以上の考察により, 連結成分の個数は 3 個である.

p79-80 : 13**証明**

$t \in [0, 1]$ に対して, $at + b(1-t) \in A$ であるから, $f(at + b(1-t))$ は $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ の連続関数である. 中間値の定理より, $f(a)$ と $f(b)$ の中間なる値 γ に対して

$$f(as + b(1-s)) = \gamma$$

となる $s \in [0, 1]$ が存在する. $t = as + b(1-s)$ とすればよい.

□

第 2 章：微分法

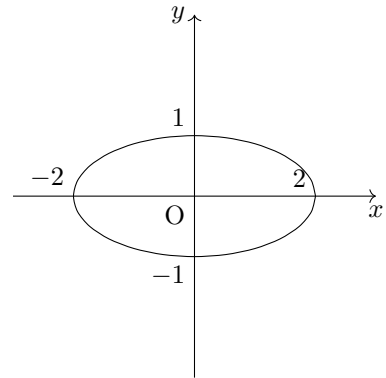
p90–91 : 1

p90–91 : 1-(i)

楕円

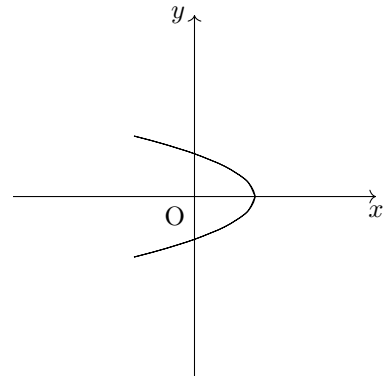
$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \right\}$$

を描写すればよく，図のようになる．

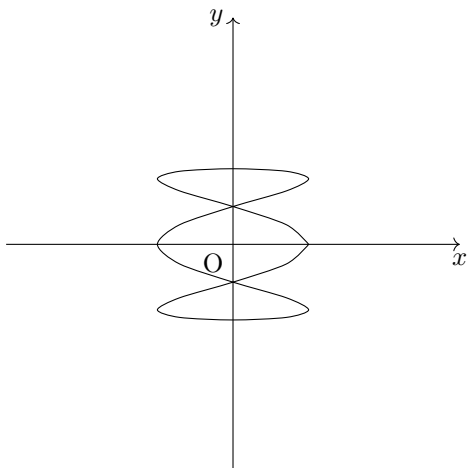


p90–91 : 1-(ii)

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π	...	$\frac{3\pi}{2}$...	2π	...
$\frac{dx}{dt}$	0	-	0	+	0	-	0	+	0	
$x(t)$	1	\searrow	-1	\nearrow	1	\searrow	-1	\nearrow	1	
$\frac{dy}{dt}$	+	+	0	-	-	-	0	+	+	
$y(t)$	0	\nearrow	1	\searrow	0	\searrow	-1	\nearrow	0	



p90–91 : 1-(iii)



p90–91 : 3

以下では,

$$\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \quad \mathbf{b} = (a_{21}, a_{22}, a_{23}), \quad \mathbf{c} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

とする. 必要に応じて,

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

とも表記する.

p90–91 : 3-(i)

証明

$$\begin{aligned} \det(a, b, c) &= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33} \\ &= (a \times b | c). \end{aligned}$$

以上より, $\det(a, b, c) = (a \times b | c)$ が成り立つ.

□

別解

$\det(a, b, c)$ を第 3 行について余因子展開すると,

$$\begin{aligned} \det(a, b, c) &= a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33} \\ &= (a \times b | c). \end{aligned}$$

以上より, $\det(a, b, c) = (a \times b | c)$ が成り立つ.

□

p90–91 : 3-(ii)

証明

$$\begin{aligned} (a | a \times b) &= a_{11}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{12}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + a_{13}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} (b | a \times b) &= a_{21}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{22}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + a_{23}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ゆえに, $(a | a \times b) = (b | a \times b) = 0$ が成り立つ.

□

p90–91 : 3-(iii)

証明

$$\begin{aligned}\det(a, b, a \times b) &= (a \times b | a \times b) \quad (\text{p90-91 : 3-(i) より}) \\ &= |a \times b|^2\end{aligned}$$

□

p90-91 : 3-(iv)

証明

$$\begin{aligned}a \times b + b \times a &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) + (b_2a_3 - b_3a_2, b_3a_1 - b_1a_3, b_1a_2 - b_2a_1) \\ &= (0, 0, 0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

ゆえに

$$a \times b = -b \times a.$$

□

p90-91 : 3-(v)

証明

$$\begin{aligned}(a + b) \times c &= ((a_2 + b_2)c_3 - (a_3 + b_3)c_2, (a_3 + b_3)c_1 - (a_1 + b_1)c_3, (a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1) \\ &= (a_2c_3 - a_3c_2, a_3c_1 - a_1c_3, a_1c_2 - a_2c_1) + (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a \times c + b \times c.\end{aligned}$$

□

p90-91 : 3-(vi)

証明

$$\begin{aligned}a \times (b \times c) &= a \times (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= (a | c)b - (a | b)c.\end{aligned}$$

以上より, $a \times (b \times c) = (a | c)b - (a | b)c$ が示された。

□

p90–91 : 3-(vii)

証明

$$\begin{aligned}
(a \times b | c \times d) &= (a | b \times (c \times d)) && (\text{p90–91 : 3-(ii) より}) \\
&= (a | (b | d)c - (b | c)d) && (\text{p90–91 : 3-(vi) より}) \\
&= (b | d)(a | c) - (b | c)(a | d) \\
&= (a | c)(b | d) - (a | d)(b | c) \\
&= \begin{vmatrix} (a | c) & (a | d) \\ (b | c) & (b | d) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

以上より, この等式は示された.

□

p90–91 : 3-(viii)

証明

$$(a \times b | c \times d) = (a | c)(b | d) - (a | d)(b | c)$$

において, $c = a, d = b$ すると,

$$\begin{aligned}
(a \times b | a \times b) &= (a | a)(b | b) - (a | b)(b | a) \\
|a \times b|^2 &= |a|^2|b|^2 - (a | b)^2.
\end{aligned}$$

ここで, a と b のなす角を θ とすると, 内積の定義は $(a | b) = |a||b|\cos\theta$ である. これを代入すると,

$$\begin{aligned}
|a \times b|^2 &= |a|^2|b|^2 - (|a||b|\cos\theta)^2 \\
&= |a|^2|b|^2 - |a|^2|b|^2\cos^2\theta \\
&= |a|^2|b|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= |a|^2|b|^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

θ が a と b のなす角であることに注意し, 両辺の正の平方根をとると,

$$|a \times b| = |a||b|\sin\theta$$

が得られる. これが証明すべきことであった.

□

p90–91 : 3-(ix)

証明

スカラー値関数の積の微分法則 $(d/dt)(fg) = (df/dt)g + f(dg/dt)$ を各成分に適用し,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(a \times b) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (d/dt)(a_2b_3) - (d/dt)(a_3b_2) \\ (d/dt)(a_3b_1) - (d/dt)(a_1b_3) \\ (d/dt)(a_1b_2) - (d/dt)(a_2b_1) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} ((da_2/dt)b_3 + a_2(db_3/dt)) - ((da_3/dt)b_2 + a_3(db_2/dt)) \\ ((da_3/dt)b_1 + a_3(db_1/dt)) - ((da_1/dt)b_3 + a_1(db_3/dt)) \\ ((da_1/dt)b_2 + a_1(db_2/dt)) - ((da_2/dt)b_1 + a_2(db_1/dt)) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} ((da_2/dt)b_3 - (da_3/dt)b_2) + (a_2(db_3/dt) - a_3(db_2/dt)) \\ ((da_3/dt)b_1 - (da_1/dt)b_3) + (a_3(db_1/dt) - a_1(db_3/dt)) \\ ((da_1/dt)b_2 - (da_2/dt)b_1) + (a_1(db_2/dt) - a_2(db_1/dt)) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (da_2/dt)b_3 - (da_3/dt)b_2 \\ (da_3/dt)b_1 - (da_1/dt)b_3 \\ (da_1/dt)b_2 - (da_2/dt)b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2(db_3/dt) - a_3(db_2/dt) \\ a_3(db_1/dt) - a_1(db_3/dt) \\ a_1(db_2/dt) - a_2(db_1/dt) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt}.
 \end{aligned}$$

これが証明すべきことであった.

□

p90-91 : 9

p90-91 : 9-(i)

解答

$$(\log x)^{(1)} = 1/x, \quad (\log x)^{(2)} = -1/x^2, \quad (\log x)^{(3)} = 2/x^3, \quad (\log x)^{(4)} = -6/x^4$$

であるから,

$$(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

と推測できる. この推測が正しいことを数学的帰納法により証明する.

(1) $n = 1$ のとき, $(\log x)^{(1)} = 1/x$ であり,

$$\frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1} = 1/x$$

であるから, この場合に推測は正しい.

(2) $n = k$ のときに, この推測が正しいと仮定すると,

$$(\log x)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned}
 (\log x)^{(k+1)} &= \left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \right)' \\
 &= \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}
 \end{aligned}$$

であるから, $n = k + 1$ のときも推測は正しい.

(1),(2) より,

$$(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

である.

解答

$$\left(\frac{1}{x^2+3x+2}\right)^{(n)} = (-1)^n n! \{(x+1)^{-n-1} - (x+2)^{-n-1}\}$$

p90-91 : 10

証明

$u(x) = (x^2 - 1)^n$ とおく, このとき,

$$U'(x) = 2xn(x^2 - 1)^{n-1}$$

だから,

$$(x^2 - 1)u'(x) = 2nx \cdot u(x)$$

この両辺を $(n+1)$ 回微分して,

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xu^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)n}{2} \cdot u^{(n)}(x) &= 2nxu^{(n+1)}(x) + 2(n+1)nu^{(n)}(x) \\ \therefore (x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2nu^{(n+1)}(x) - (n+1)nu^{(n)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

ここで, $u^{(n)}(x) = 2^n n! P_n(x)$ なので,

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)\{2^n n! P_n''(x)\} + 2x\{2^n n! P_n'(x)\} - n(n+1)\{2^n n! P_n(x)\} &= 0 \\ \therefore (x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

□

p106-107 : 1

Lemma 0.0.12

$$Q_k(x) = (n!2^n)^{-1} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n \quad (0 \leq k \leq n)$$

とおく. $0 \leq k < n$ のとき, $Q_k(x)$ は $(x^2 - 1)^{n-k}$ で割り切られ.

$$Q_k(1) = Q_k(-1) = 0$$

である.

証明. k に関する帰納法により示す. $k = 0$ のときは

$$Q_0(x) = (n!2^n)^{-1} (x^2 - 1)^n$$

であり, $Q_0(x)$ は $(x^2 - 1)^n$ で割り切れ, $Q_0(1) = Q_0(-1) = 0$ である.

$k > 0$ として, $k-1$ の場合の主張の成立を仮定すると, $Q_{k-1}(x)$ は x についての式 $g(x)$ を用いて,

$$Q_{k-1} = g(x)(x^2 - 1)^{n-k+1}$$

と表せ,

$$\begin{aligned} Q_k(x) &= Q'_{k-1}(x) \\ &= g'(x)(x^2 - 1)^{n-k+1} + g(x)(x^2 - 1)^{n-k} \cdot 2x \\ &= (g'(x)(x^2 - 1) + g(x) \cdot 2x)(x^2 - 1)^{n-k} \end{aligned}$$

したがって, $Q_k(x)$ は $(x^2 - 1)^{n-k}$ で割り切れ, $n-k > 0$ より,

$$Q_k(1) = Q_k(-1) = 0$$

となり, これが証明すべきことであった. □

証明

$Q_k(x)$ が $(-1, 1)$ 上に k 個の相異なる根を持つことを, k に関する数学的帰納法で示す.

(i) $k = 0$ の場合

$$Q_0(x) = (n!2^n)^{-1}(x^2 - 1)^n$$

なので, $(-1, 1)$ に根を持たない.

(ii) $k > 0$ として, $k-1$ の場合の主張の成立を仮定すると, $Q_{k-1}(x)$ は $(-1, 1)$ に $k-1$ 個の相異なる根を持つから, それらを

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \quad (-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < 1)$$

とおく. ここで, $Q_{k-1}(x)$ は閉区間 $[-1, 1]$ で微分可能なので, 各区間 $[-1, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, 1]$ においても微分可能であり, 補題により,

$$Q_{k-1}(-1) = Q_{k-1}(x_1) = \dots = Q_{k-1}(x_{k-1}) = Q_{k-1}(1) = 0$$

である. したがって各小区間においてロルの定理が適用できて, $Q'_{k-1}(x) = Q_k(x)$ は $(-1, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, 1)$ において根をもつ.

以上 (i), (ii) の議論により, $Q_k(x)$ は $(-1, 1)$ において相異なる k 個の根をもつ. 特に $k = n$ のとき, $Q_n(x) = P_n(x)$ で $P_n(x)$ は $(-1, 1)$ において相異なる n 個の根をもつ. □

p106–107 : 2

Lemma 0.0.13

$H_n(x)$ は n 次多項式で, n 個の相異なる実根を持つとする.

このとき, $H_n(x)$ の隣り合う 2 根を $a < b$ とすると,

$$H'_n(a)H'_n(b) < 0.$$

証明. $H_n(x)$ は n 次多項式だから, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ として以下のようにかける:

$$H_n(x) = c \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

これを x について微分すると,

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= c \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dx}(x - x_j) \times \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} (x - x_k) \right] \\ &= c \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} (x - x_k). \end{aligned}$$

とくに $x = x_j$ とすると

$$H'_n(x_j) = c \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} (x_j - x_k).$$

したがって, $k < j$ のとき, $x_k < x_j$ であり, $k > j$ のとき, $x_k > x_j$ であるから, $\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} (x_j - x_k)$ の符号は

$(-1)^{n-j}$ である. よって, 隣り合う 2 根 $a < b$ について,

$$H'_n(a)H'_n(b) < 0.$$

□

補題をふまえた上で, いくつかの命題に分けて証明していく.

Proposition 0.0.14

テキストの (i), (ii) が成り立つ.

証明

(i) について,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \right] \\ &= 2xe^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) + e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) \end{aligned}$$

であるから, この式に $(-1)^n$ をかけて整理すると,

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{d}{dx} \left[e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \right] &= 2x(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) - (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) \\ \therefore H'_n(x) &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \end{aligned}$$

整理すると

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x).$$

(ii) について, $(e^{-x^2})^{(n+1)} = \{(-2x)e^{-x^2}\}^{(n)}$ であるから,

$$\begin{aligned}
 (e^{-x^2})^{(n+1)} &= (-2xe^{-x^2})^{(n)} \\
 &= -2(xe^{-x^2})^{(n)} \\
 &= -2 \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{(r)} (e^{-x^2})^{(n-r)} \\
 &= -2 \left(\binom{n}{0} x^{(0)} (e^{-x^2})^{(n-0)} + \binom{n}{1} x^{(1)} (e^{-x^2})^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{n} x^{(n)} (e^{-x^2})^{(0)} \right) \\
 &= -2 \left(x(e^{-x^2})^{(n)} + nx^{(1)}(e^{-x^2})^{(n-1)} \right) \\
 &= -2 \left(x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) + n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right).
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) &= 2(-1)^n e^{x^2} x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) - 2n(-1)^{n-1} e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \\
 \therefore H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).
 \end{aligned}$$

これと (i) の結果を比較すると,

$$H''(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

□

Proposition 0.0.15

$H_n(x)$ は n 次多項式である.

証明

n についての数学的帰納法により示す.

(I) $n = 0, 1$ のとき,

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = 2x,$$

であるから, $n = 0, 1$ のとき成立する.

(II) $k \in \mathbb{N}$ を任意に取り, $H_k(x)$ が k 次多項式であると仮定する. $H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - H'_k(x)$ であるから, 帰納法の仮定により, $2xH_k(x)$ が $k+1$ 次多項式であることと, $H'_k(x)$ が $k-1$ 次多項式であることが従い, $H_{k+1}(x)$ も $k+1$ 次多項式である.

よって数学的帰納法により, $H_n(x)$ は任意の n について n 次多項式である.

□

Proposition 0.0.16

$H_n(x)$ は, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して n 個の相異なる実根をもつ.

証明

数学的帰納法および Rolle の定理を用いて示す.

(I)

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 2x^2 - 1.$$

$H_0(x)$ は定数多項式で実根を持たない (ただし「 $n = 0$ 個」の根と解釈), $H_1(x) = 2x$ は $x = 0$ に 1 つの実根をもつ. $H_2(x)$ は相異なる 2 つの実根をもつ. したがって, $n = 0, 1, 2$ のときに成立する.

(II) $k \geq 2$ について, $H_k(x)$ は k 個の相異なる実根をもつと仮定する. $H_k(x)$ の実根を

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$$

と表す.

Hermite 多項式の基本的性質として, 以下の関係式が成り立つ:

$$H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - H'_k(x).$$

まず, Rolle の定理により, 開区間 (α_i, α_{i+1}) に対して少なくとも 1 つの β_i が存在し,

$$\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}, \quad H'_k(\beta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

が成り立つ. $H'_k(x)$ は $k-1$ 次多項式であるから, そのような点は β_i のみである. よって $i = 0, 1, \dots, k-1$ に対し, (β_i, β_{i+1}) においては $H'_k(x) \neq 0$ であり, かつ $H'_k(x)$ の符号は一定である (ただし, $\beta_0 = -\infty, \beta_k = \infty$ とする).

特に, (β_{k-1}, β_k) で $H_k(x)$ は単調増加または単調減少であり, $\lim_{x \rightarrow \infty} H_k(x) = \infty$ だから消去法で単調増加である. つまり $H'_k(\alpha_k) > 0$ である.

(i) の結果により $H_{n+1}(\alpha_i) = -H'_k(\alpha_i)$ であるから, 補題により, $H_{n+1}(\alpha_i)$ の符号は交互に変わり, かつ $H_{k+1}(\alpha_k) < 0$ である.

以上の議論から, k が偶数のときは α_1 での値が正となり, 以降交互に符号が変化して最後 α_k では負になる. 一方, k が奇数のときは α_1 での値が負となり, 以降交互に符号が変化して最後 α_k ではやはり負になる.

ここで中間値の定理を適用すると,

$$(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), \dots, (\alpha_{k-1}, \alpha_k)$$

の各区間で $H_{k+1}(x)$ は符号を変えるため, 少なくとも 1 つずつ実根をもつ. よってここまでで合計 $(k-1)$ 個の相異なる根が存在する.

最後に, $H_{k+1}(x)$ の最高次項は $2^{k+1}x^{k+1}$ であり,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H_{k+1}(x) = \begin{cases} +\infty & (k \text{ が偶数}) \\ +\infty & (k \text{ が奇数}) \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} H_{k+1}(x) = \begin{cases} -\infty & (k \text{ が偶数}) \\ +\infty & (k \text{ が奇数}) \end{cases}.$$

したがって, α_1 より左側と α_k より右側にもう 1 つずつ根が必ず存在する.

以上をまとめると,

$$(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \text{ に } (k-1) \text{ 個, } (-\infty, \alpha_1) \text{ または } (\alpha_k, \infty) \text{ に } 2 \text{ 個}$$

の相異なる実根が存在するので, 合計で $k+1$ 個の実根が存在する.

以上により, $H_k(x)$ が k 個の実根をもつとき, $H_{k+1}(x)$ は $k+1$ 個の相異なる実根をもつことが示された.

よって数学的帰納法により, すべての $n \in \mathbb{N}$ (あるいは $n \geq 0$) に対し $H_n(x)$ は n 個の相異なる実根をもつことが証明された.

□

Proposition 0.0.17

$H_n(x)$ の隣り合う二根の間に $H_{n-1}(x)$ の根が一つある.

証明

$H_n(x)$ の隣り合う 2 根を a, b とすると補題より,

$$H'_n(a)H'_n(b) < 0$$

である.

$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ より,

$$H_{n-1}(a)H_{n-1}(b) < 0$$

このことから, a と b の間に $H_{n-1}(x)$ の根が存在することがわかった.

□

以上のことから, 全ての事柄が証明された.

□

p106–107 : 3

証明

まず, $f(a) = 0, g(a) = 0$ と定義しておく. $0 < \delta < b - a$ を満たす δ をとると, f と g は $[a, a + \delta]$ で連続であり, $(a, a + \delta)$ で微分可能である. いま $g(x) \neq 0$ ($x \in (a, a + \delta)$) であるから, コーシーの平均値の定理により,

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす $c \in (a, x)$ が存在する. いま $f(a) = 0, g(a) = 0$ と定義したので,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

である. $x \rightarrow a + 0$ のとき, $c \rightarrow a + 0$ であるから, 仮定により,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l$$

である. $x \rightarrow a - 0$ のときは同様にすればよく, $x \rightarrow a$ の場合はこれら二つの考察により結果が従う.

$x \rightarrow +\infty$ のときは $t = 1/x$ として $f(t)$ と $g(t)$ の極限を考えれば同じ結論に帰着する.

以上の議論により証明された.

□

p106–107 : 8

p106–107 : 8-(i)

解答

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$$

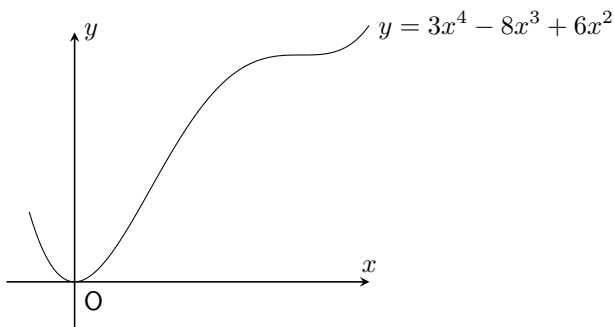
とおくと,

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x-1)^2,$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x-1)(x-1)$$

であるから, 増減表は以下のようになる.

x	...	0	...	1/3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$f(x)$		↘		↗		↘	↗



p106-107 : 8-(ii)

解答

$x > 0$ のもとで,

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

とおく. ここで,

$$f(x) = \exp(\log x^{1/x}) = \exp(\log x / x)$$

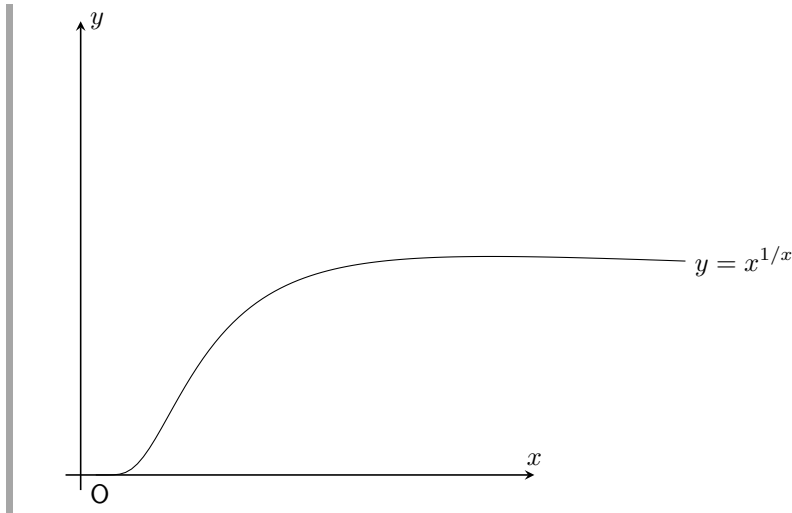
と変形できるので,

$$f'(x) = \exp(\log x / x) \left(\frac{1 - \log x}{x^2} \right),$$

$$f''(x) = \exp(\log x / x) \left(\frac{(\log x - 1)^2 - 3x + 2x \log x}{x^4} \right)$$

であり, 増減表は以下のようになる. ただし α, β は $(\log x - 1)^2 - 3x + 2x \log x = 0$ の 2 解である.

x	0	...	α	...	e	...	β	...
$f'(x)$		+		+	0	-		-
$f''(x)$		+	0	-		-	0	+
$f(x)$		↗		↘		↗		↘



p106–107 : 9

Lemma 0.0.18

$\sin x$ は 0 を中心として $I = [0, \pi/2]$ でテイラー展開できる.

証明.

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$$

であるから, $|\sin(x + n\pi/2)| \leq 1$ であることと定理 2.11 : 2) より主張が従う. \square

証明

$m \geq 1$ のとき,

$$S_{2m} = S_{2m-2} + a_{2m-1} + a_{2m} = S_{2m-2} + \frac{(-1)^{2m-1}}{(2(2m-1)+1)!} x^{2(2m-1)+1} + \frac{(-1)^{2m}}{(2(2m)+1)!} x^{2(2m)+1}.$$

$0 < x \leq \pi/2$ のとき,

$$\frac{1}{(2(2m-1)+1)!} x^{2(2m-1)+1} > \frac{1}{(2(2m)+1)!} x^{2(2m)+1}$$

であり, なおかつ $(-1)^{2m-1} = -1$, $(-1)^{2m} = 1$ であることをふまえると

$$\frac{(-1)^{2m-1}}{(2(2m-1)+1)!} x^{2(2m-1)+1} + \frac{(-1)^{2m}}{(2(2m)+1)!} x^{2(2m)+1} < 0.$$

よって

$$S_{2m} - S_{2m-2} = \frac{(-1)^{2m-1}}{(2(2m-1)+1)!} x^{2(2m-1)+1} + \frac{(-1)^{2m}}{(2(2m)+1)!} x^{2(2m)+1} < 0 \quad S_{2m} < S_{2m-2}.$$

よって, $(S_{2m})_{m \in \mathbb{N}}$ は $0 < x \leq \pi/2$ で狭義単調減少である.

S_{2m-1} についても同様に考え,

$$S_{2m+1} = S_{2m-1} + a_{2m-1} + a_{2m} = S_{2m-1} + \frac{(-1)^{2m-1}}{(2(2m-1)+1)!} x^{2(2m-1)+1} + \frac{(-1)^{2m}}{(2(2m)+1)!} x^{2(2m)+1}.$$

などから, $S_{2m+1} - S_{2m-1} > 0$ が成り立ち, $m \leq 1$ のとき $S_{2m+1} > S_{2m-1}$ である. よって, $(S_{2m+1})_{m \in \mathbb{N}}$ は $0 < x \leq \pi/2$ で狭義単調増加である. そして, 補題により $\sin x$ は $0 < x \leq \pi/2$ でテイラー展開できるので, そのことをふまえると

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \sin x$$

であるから,

$$S_0 > S_2 > S_4 > \cdots > S_{2m} > \sin x > S_{2m+1} > S_{2m-1} > \cdots > S_3 > S_1$$

となり^{†1},

$$S_{2m} > \sin x > S_{2m+1} \quad (0 < x \leq \frac{\pi}{2})$$

が示された.

□

^{†1} $S_n = \sin x$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在すると, $\sin x = S_n > S_{n+1} \geq \sin x$ となり矛盾する.

p106–107 : 10

証明

3つのことを証明する.

a) と b) が同値であること

$a < x \leq y$ または $y \leq x < a$ に対して, $0 \leq t < 1$ を用いて,

$$x = ta + (1-t)y$$

とおく. $a < x \leq y$ とする. このとき,

$$t = \frac{x-y}{a-y} \tag{1}$$

と表せることはよい.

また, f は I で凸であり, これは

$$f(x) = tf(x) + (1-t)f(x) < tf(a) + (1-t)f(y) \tag{2}$$

と同値である. $x < y$ のとき (2) に (1) の t の値を代入すれば,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{3}$$

を得る. $x = y$ のときは明らか.

a) と c) が同値であること

c) を仮定する. (3) の左辺について, 平均値の定理により,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

をみたす ξ ($a < \xi < x$) が存在する. 同様に, (3) の右辺について, 平均値の定理により,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\eta)$$

をみたす η ($x < \eta < y$) が存在する. 仮定より, $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ だから, (3) が成り立ち, a) が従う.

a), すなわち (3) を仮定する. 左辺について, $x \rightarrow +a$ とすれば, これは $f'(a)$ に収束し, 右辺は, これは $(f(y) - f(a))/(y - a)$ に収束する (これを α とおく.). $f'(a) \leq \alpha$ となることはよい. また, $x \rightarrow -y$ とすれば, 左辺は α に, 右辺は $f'(y)$ に収束する. $\alpha \leq f'(y)$ となることもよい. よって, a) と c) は同値である.

a) と d) が同値であること

d) を仮定する. これは $f'(x)$ は I 上で単調増加であることと同値である.

以上の議論により, 示された.

□

p112–113 : 1

p112–113 : 1-(i)

解答

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x + y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x + y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(x + y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin(x + y)$$

p112–113 : 1-(ii)

解答

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \cos(x^2 y^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 \cos(x^2 y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 \cos(x^2 y^3) - 4x^2 y^6 \sin(x^2 y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 y \cos(x^2 y^3) - 9x^4 y^4 \sin(x^2 y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 \cos(x^2 y^3) - 6x^3 y^5 \sin(x^2 y^3)$$

p112–113 : 1-(iii)

解答

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y (\log x)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y \log x)$$

p112–113 : 1-(iv)

解答

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

p112–113 : 1-(v)

解答

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

p112-113 : 4

解答

原点 $(0, 0)$ における $f(x, y)$ の一階偏導関数を計算すると、次のようになる：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \neq 0}} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \neq 0}} \frac{0 - 0}{k} = 0.$$

これをふまえると、 $f(x, y)$ の二階偏導関数は次のように計算できる：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{(0, 0)} \\
&= \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k}.
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(h, k) - f(0, k)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2} - 0}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} k \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \\
&= k \frac{-k^2}{k^2} = -k.
\end{aligned}$$

したがって、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \neq 0}} \frac{-k - 0}{k} = -1.$$

同様に,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(0,0)} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}.\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) &= \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \neq 0}} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k} \\ &= \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \neq 0}} \frac{\frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2} - 0}{k} \\ &= \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \neq 0}} h \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \\ &= h \frac{h^2}{h^2} = h.\end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{h - 0}{h} = 1.$$

以上のことをまとめると、原点における $f(x,y)$ の二階偏導関数は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

である^{†1}.

^{†1} 偏微分の順序によって値が異なることに注意する.

p112–113 : 5

解答

$(x,y) \neq 0$ において $r := \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ とおくと,

$$f(x,y) = xy \sin \left(\frac{1}{r} \right).$$

これより、一階の偏導関数は次のように求まる:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\sin \frac{1}{r} \right) &= \cos \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \cos \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{x}{r^3} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y \sin \left(\frac{1}{r} \right) + xy \cdot \cos \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \left(-\frac{x}{r^3} \right) \\ &= y \sin \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{x^2 y}{r^3} \cos \left(\frac{1}{r} \right).\end{aligned}$$

同様に,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \sin \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{xy^2}{r^3} \cos \left(\frac{1}{r} \right).$$

0 における偏導関数は、定義から以下のようになる：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{h \cdot 0 \cdot \sin(1/|h|) - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \neq 0}} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \neq 0}} \frac{0 \cdot k \cdot \sin(1/|k|) - 0}{k} = 0.$$

したがって、偏導関数はまとめて

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

最後に、 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ の $(0,0)$ での連続性を調べる。 $t > 0$ として、 $(x,y) = (t \cos \theta, t \sin \theta)$ とおく。このとき、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t \cos \theta, t \sin \theta) = t \sin \theta \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos^2 \theta \sin \theta \cos\left(\frac{1}{t}\right).$$

ここで $t_n := \frac{1}{2\pi n}$ ($n \in \mathbb{N}$) とすれば、 $\cos(1/t_n) = \cos(2\pi n) = 1$ かつ $\sin(1/t_n) = 0$ であるから、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t_n \cos \theta, t_n \sin \theta) \longrightarrow -\cos^2 \theta \sin \theta \quad (n \rightarrow \infty).$$

右辺が θ に依存して変化する一方、 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ なので、 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ は $(0,0)$ において連続ではない。
同様に

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t \cos \theta, t \sin \theta) = t \cos \theta \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos \theta \sin^2 \theta \cos\left(\frac{1}{t}\right),$$

を $t = t_n$ に沿って見ると、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t_n \cos \theta, t_n \sin \theta) \longrightarrow -\cos \theta \sin^2 \theta,$$

となり、これも角度に依存して変化する、一般に 0 へ収束しないため、 $\frac{\partial f}{\partial y}$ も $(0,0)$ で連続ではない。

以上の考察により、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

なおかつ、 $\frac{\partial f}{\partial x}$ および $\frac{\partial f}{\partial y}$ はいずれも $(0,0)$ で連続ではない。

p112–113 : 6

証明

$r(x) = |x - a|$, $u(x) = r^{-1}$ とおく。ただし $x \in \mathbb{R}^3 - \{a\}$ とする。

一階偏導関数を計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}(r^{-1}) \\ &= -r^{-2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\ &= -r^{-2} \cdot \frac{x_i - a_i}{r} \\ &= -\frac{x_i - a_i}{r^3}.\end{aligned}$$

次に, 二階偏導関数は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{x_i - a_i}{r^3} \right) \\ &= - \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - a_i)}_{=1} \cdot r^{-3} + (x_i - a_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(r^{-3}) \right).\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(r^{-3}) &= -3r^{-4} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\ &= -3r^{-4} \cdot \frac{x_i - a_i}{r} \\ &= -3 \frac{x_i - a_i}{r^5}\end{aligned}$$

だから

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -r^{-3} + 3 \frac{(x_i - a_i)^2}{r^5}.$$

よって

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(-r^{-3} + 3 \frac{(x_i - a_i)^2}{r^5} \right) \\ &= -3r^{-3} + 3 \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - a_i)^2}{r^5}.\end{aligned}$$

ところが $\sum_{i=1}^3 (x_i - a_i)^2 = r^2$ なので

$$\Delta u = -3r^{-3} + 3 \frac{r^2}{r^5} = -3r^{-3} + 3r^{-3} = 0.$$

したがって $u(x)$ はラプラス方程式を満たす.

□

必要条件であること f が $x = 0$ で微分可能であると仮定する. この条件は次のように書ける:

$$f(x) - f(0) = c \cdot x + \varepsilon(x)$$

ここで, $c = (c_1, \dots, c_n)$ は f の $x = 0$ における勾配ベクトルであり, $\varepsilon(x)$ は $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x)/|x| = 0$ をみたす関数である. このとき, 各 i について次のように $g_i(x)$ を定義する:

$$g_i(x) = \begin{cases} c_i + (\varepsilon(x)x_i)/|x|^2 & (x \neq 0) \\ c_i & (x = 0) \end{cases}$$

この $g_i(x)$ が $x = 0$ で連続であることを示すために, $x \rightarrow 0$ の極限を考える. $x \neq 0$ のとき,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_i(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(c_i + \frac{\varepsilon(x)x_i}{|x|^2} \right) = c_i + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x)x_i}{|x|^2}.$$

ここで, $\varepsilon(x)/|x| \rightarrow 0$ なので,

$$\left| \frac{\varepsilon(x)x_i}{|x|^2} \right| = \left| \frac{\varepsilon(x)}{|x|} \cdot \frac{x_i}{|x|} \right| \leq \left| \frac{\varepsilon(x)}{|x|} \right| \cdot 1 = \left| \frac{\varepsilon(x)}{|x|} \right| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

したがって, $\lim_{x \rightarrow 0} g_i(x) = c_i$ なので, $g_i(x)$ は $x = 0$ で連続である. よって

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x).$$

十分条件であること ある連続な関数 $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, 次のように表されたとする:

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$

このとき, $g_i(x)$ が $x = 0$ で連続であるため, 各 i について $g_i(0)$ が存在し, 次が成り立つ:

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(0) + \sum_{i=1}^n x_i (g_i(x) - g_i(0)).$$

ここで, $\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n x_i (g_i(x) - g_i(0))$ とおくと,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n x_i (g_i(x) - g_i(0))}{|x|}.$$

三角不等式を用いると,

$$\left| \frac{\varepsilon(x)}{|x|} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i (g_i(x) - g_i(0))}{|x|} \right|.$$

$g_i(x)$ が $x = 0$ で連続であるため, $g_i(x) \rightarrow g_i(0)$ となる. したがって, 各 i について

$$\left| \frac{g_i(x) - g_i(0)}{|x|} \right| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

ゆえに, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x)/|x| = 0$ となり, f は $x = 0$ で微分可能である.

□

解答

x を (r, θ) の関数

$$x = x(r, \theta): \mathbb{R}^2 \ni (r, \theta) \mapsto r \cos \theta \in \mathbb{R}$$

とみる. このとき (7.4) から $z \in \mathbb{R}^2$ であり,

$$\begin{aligned} dx_{(r, \theta)}(z) &= \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta)z_1 + \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta)z_2 \\ &= \cos \theta z_1 - r \sin \theta z_2. \end{aligned}$$

一方, r, θ を射影

$$r: \mathbb{R}^2 \ni (r, \theta) \mapsto r \in \mathbb{R},$$

$$\theta: \mathbb{R}^2 \ni (r, \theta) \mapsto \theta \in \mathbb{R}$$

とみると,

$$dr_{(r, \theta)}(z) = z_1,$$

$$d\theta_{(r, \theta)}(z) = z_2,$$

であるから,

$$\begin{aligned} dx_{(r, \theta)}(z) &= \cos \theta dr_{(r, \theta)}(z) - r \sin \theta d\theta_{(r, \theta)}(z) \\ &= (\cos \theta dr_{(r, \theta)} - r \sin \theta d\theta_{(r, \theta)})(z). \end{aligned}$$

よって, 写像として

$$dx_{(r, \theta)} = \cos \theta dr_{(r, \theta)} - r \sin \theta d\theta_{(r, \theta)}.$$

略記すると

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta.$$

同様にして,

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta.$$

以上から,

$$\begin{aligned} &x dx + y dy \\ &= r \cos \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + r \sin \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r dr, \\ &\quad -y dx + x dy \\ &= -r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r^2 d\theta. \end{aligned}$$

以上より, $x dx + y dy = r dr$, $-y dx + x dy = r^2 d\theta$ が成り立つ.

第 3 章：初等函数

p166–167 : 1

ラプラシアン（ラプラス作用素） Δ は $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ で定義されていたことを思い出そう（p135）.

証明

以下定理 1.1 と同様に $z = x + iy$ とし, $f(z) = u + iv$ と書く. このとき定義より,

$$\Delta u = u_{x,x} + u_{y,y}, \quad \Delta v = v_{x,x} + v_{y,y}$$

となるⁱ¹. コーシー・リーマンの関係式（定理 1.1）より,

$$u_{x,x} = v_{y,x}, \quad u_{y,y} = -v_{x,y}$$

が成り立つ. ここで仮定より u, v は C^2 級であるから, 定理 II.3.3 により, $v_{y,x} = v_{x,y}$ である. よって

$$u_{x,x} + u_{y,y} = v_{y,x} - v_{x,y} = 0$$

が成り立つ. 同様に

$$v_{x,x} + v_{y,y} = -u_{y,x} + u_{x,y} = 0$$

も成立する. □

ⁱ¹ $f_{x_i, x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ であったことに注意せよ.

問題文において言及されているように, u, v の C^2 級との仮定は実際には不要である. 定理 IX.3.1 系 2 を参照せよ.

p166–167 : 2

証明

以下定理 1.1 と同様に $f(x + iy) = u + iv$ と書く. このとき p166–167 : 1 より $\Delta u = \Delta v = 0$ が (C^2 級の仮定なしに) 成立することを用いてⁱ¹,

$$\begin{aligned} \Delta |f|^2 &= \Delta |u + iv|^2 \\ &= \Delta (u^2 + v^2) \\ &= u \Delta u + 2(u_x^2 + u_y^2) + v \Delta v + 2(v_x^2 + v_y^2) \\ &= 4(u_x^2 + v_y^2) \quad (\because \text{コーシー・リーマンの関係式 (定理 1.1)}). \end{aligned}$$

これと $|f'(x)|^2 = |u_x + iv_y|^2 = u_x^2 + v_y^2$ (定理 1.1) を合わせて, 題意が示される. □

ⁱ¹ $\Delta u, \Delta v$ 延いては $\Delta |f|^2$ が定義できることが保証されるのは, これに拠るものである. 問題文において (不親切にも) 言及されていないので注意.

p166–167 : 3

証明

以下 $z = x + iy$ と書く. まず $|z|$ について示す. 実部を u , 虚部を v と置けば $u = |x + iy|$, $v = 0$. ここで, u は $(x, y) = (0, 0)$ で微分可能ではないから, $|z|$ も 0 において複素微分可能でない. 以下 $(x, y) \neq (0, 0)$ であったとする. $x \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\neq 0 \\ &= v_y(x, y). \end{aligned}$$

$y \neq 0$ の時も同様に $u_y \neq -v_x$. 従ってコーシー・リーマンの関係式 (定理 1.1) が満たされないから, $|z|$ は \mathbb{C} 上至る所複素微分可能でない.

次に \bar{z} について示す. 同様に実部を u , 虚部を v と置けば $u = x$, $v = -y$. ここで

$$u_x = 1, \quad v_y = -1.$$

よって $u_x(x, y) \neq v_y(x, y)$ よりコーシー・リーマンの関係式 (定理 1.1) が満たされず, \bar{z} は \mathbb{C} 上至る所複素微分可能でない. □

別解として $|z|^2$ の微分可能性に帰着させることもできる. 実際 $z_0 \in \mathbb{C}$ において $|z|$ あるいは \bar{z} の少なくとも一方が複素微分可能であったならば, 命題 1.2 より $|z|^2 = z\bar{z}$ も z_0 で複素微分可能となるが, $z \neq 0$ のときこれは成立しない. ただし $z = 0$ の場合のみ別で証明する必要があるⁱ³.

p166–167 : 4

証明

U 上正則な函数 f が実数値のみを取る時, f が定数であることを示せば十分. 以下定理 1.1 と同様に $f(x + iy) = u + iv$ と書く. このとき U 上至る所 $v = 0$ であるから $v_x = v_y = 0$. これとコーシー・リーマンの関係式 (定理 1.1) から $u_x = u_y = 0$. 再び定理 1.1 より $f'(z) = u_x + iv_x = 0$. 命題 1.4 と合わせて f が定数であることが導かれる. □

p191–193 : 1

証明

$m, n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ とし, $e = \frac{m}{n}$ と表される, すなわち e が有理数だと仮定する. このとき, 与えられた式を変形して,

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{m}{n} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

ⁱ³ $|z|$ の方については平方根を回避できるメリットはあるが, おそらく普通に示した方が楽であろう.

とする。これにより.

$$\frac{e^\theta}{n+1} = m \cdot n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$$

であり, $m \cdot n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}$ であるから, $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$ である. よって, $0 < \theta < 1$, $2 < e < 3$ とあわせて,

$$1 \leq \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}$$

であり, $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$ であるから $n = 1$ となる. ゆえに $e = m$ となり, e は整数である. しかし $2 < e < 3$ であるから, これは矛盾である. よって先の仮定が誤りであり, e は無理数である.

□

p191–193 : 2

p191–193 : 2-(i)

証明

$k = 0$ のとき $f(0) = f(\pi) = 0$ より明らかに成立. $1 \leq k \leq 2\pi$ とする. $t = x(p - qx)$ と置くと,

$$t' = p - 2qx, \quad t'' = -2q, \quad t^{(3)} = 0$$

より $t^{(n)}$ は $x = 0, \pi$ で整数. ここで $T_k = \frac{1}{n!} \frac{d^k t^n}{dt^k}$ と置けば, $T'_k = t' \cdot T_{k+1}$ である. 従って $f^{(k)}(x)$ は

$$f'(x) = t' \cdot T_1,$$

$$f''(x) = t'' \cdot T_1 + (t')^2 \cdot T_2,$$

$$f^{(3)}(x) = 3t't'' \cdot T_2 + (t')^3 \cdot T_3$$

のように t', t'' と T_k の積の和で表わされる. よって T_k が $x = 0, \pi$ において整数であることを示せば十分. $1 \leq k \leq n$ のとき

$$T_k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n!} t^{n-k}$$

である. 特に $k < n$ のとき t を因数に持つから, $t = 0$ より 0 となり整数. また $k = n$ のときも $T_k = \frac{n!}{n!} = 1$ となり整数である. 更に $k > n$ のとき, T_k は多項式として 0 となるから整数. よって題意は示された.

□

p191–193 : 2-(ii)

証明

定理 IV.5.7 の部分積分法を用いれば,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx \\
 &= - \left[f(x) \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x \, dx && \text{(部分積分)} \\
 &= (f(0) + f(\pi)) + \left[f'(x) \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x \, dx && \text{(部分積分)} \\
 &= (f(0) + f(\pi)) - \int_0^\pi f''(x) \sin x \, dx.
 \end{aligned}$$

これと同様の操作を $\int_0^\pi f^{(2n+2)}(x) \sin x \, dx = 0$ の項が出てくるまで繰り返すことにより,

$$I = \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k (f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(\pi)).$$

よって (i) と合わせて I は整数.

□

p191–193 : 2-(iii)

証明

$0 < x < \pi = \frac{p}{q}$ のとき $0 < p - qx < p$. この範囲で $0 < \sin x \leq 1$ であることと合わせて,

$$0 < \frac{x^n (p - qx)^n}{n!} \sin x \leq \frac{x^n p^n}{n!}.$$

従って, 積分することにより

$$0 < I \leq \int_0^\pi \frac{x^n p^n}{n!} \, dx = \frac{(p\pi)^{n+1}}{p(n+1)!}$$

を得る. (最右辺) $\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるから, 特に十分大きな n に対して

$$0 < I < \frac{(p\pi)^{n+1}}{p(n+1)!} < 1$$

が導かれる.

これは (ii) の結果と矛盾するから, 最初の仮定が誤っていたことが分かる. よって π は無理数であることが示され, 証明は完結した.

□

$M \times N$ 行列の列 $\{A_i\}$ が A に収束するとは $\|A_i - A\| \rightarrow 0$ で定義されるのであった. ここで $\|B\|$ は

$$\|B\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, |x| \leq 1} |Bx|$$

で定義されていたことを思い出そう (杉浦 II, p106–107 : 命題 4.2 を参照せよ). 以下が行列のノルムの重要な性質である :

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|aA\| = |a| \|A\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

行列の級数 $\sum_{i=0}^\infty A_i$ が絶対収束するとは $\sum_{i=0}^\infty \|A_i\|$ が有限の値に収束することを意味する. 絶対収束する級数は収束する. まず題意の級数が絶対収束することから示そう.

証明

$\|A^n\| \leq \|A\|^n$ より, $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\|$ の各項は $\frac{\|A\|^n}{n!}$ で上から抑えられる. また, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$ は $\exp \|A\|$ に収束する. 従って $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ は絶対収束する.

□

p191–193 : 6-(i)

$\exp(z+w) = \exp z \exp w$ と全く同様に示される. まず定理 1.5.8 の行列に対する対応物を示そう.

Lemma 0.0.19

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n, \sum_{n=0}^{\infty} B_n$ がそれぞれ $L \times M$ 行列, $M \times N$ 行列の級数で A, B に絶対収束するものとする. このとき

$$C_n = \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}$$

と置けば $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ は絶対収束し, その和を C と置けば $C = AB$ が成立する.

証明. 証明も定理 1.5.8 と全く同様である.

まず

$$\sum_{n=0}^m \|C_n\| \leq \sum_{n=0}^m \sum_{p+q=n} \|A_p\| \|B_q\| \leq \left(\sum_{p=0}^m \|A_p\| \right) \left(\sum_{q=0}^m \|B_q\| \right)$$

であり, 右辺は $m \rightarrow \infty$ で有限の値に収束するから, $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ も絶対収束する. その和を C と置こう. ここで非負実数列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ を

$$\alpha_n = \sum_{p=n}^{\infty} \|A_p\|, \quad \beta_n = \sum_{q=n}^{\infty} \|B_q\|$$

によって定義すれば,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=0}^{2m} C_n - \sum_{p=0}^m A_p \sum_{q=0}^m B_q \right\| \\ & \leq \sum_{q=m+1}^{2m} \sum_{p=0}^{2m-q} \|A_p\| \|B_q\| + \sum_{p=m+1}^{2m} \sum_{q=0}^{2m-p} \|A_p\| \|B_q\| \\ & \leq \left(\sum_{p=0}^m \|A_p\| \right) \left(\sum_{q=m+1}^{\infty} \|B_q\| \right) + \left(\sum_{p=m+1}^{\infty} \|A_p\| \right) \left(\sum_{q=0}^m \|B_q\| \right) \\ & \leq \alpha_0 \beta_{m+1} + \alpha_{m+1} \beta_0. \end{aligned}$$

ここで最右辺は $m \rightarrow \infty$ で 0 に収束するから, $\|C - AB\| = 0$, つまり $C = AB$ が成り立つ.

□

証明

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \quad \exp B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \text{ である.}$$

$$C_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

と置けば, $AB = BA$ と二項定理より $C_n = \frac{(A+B)^n}{n!}$. ここで補題を適用すれば,

$$\exp A \exp B = \sum_{n=0}^{\infty} C_n = \exp(A+B).$$

□

p191–193 : 6-(ii)

証明

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と置けば $AB \neq BA$. この時単位行列を I と書けば

$$\begin{aligned} \exp A \exp B &= (I + A)(I + B) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \\ &= \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

従って $\exp(A+B) \neq \exp A \exp B$. 二次行列以外の場合も同様に反例が構成される.

□

p191–193 : 6-(iii)

証明

$$\begin{aligned} P(\exp A)P^{-1} &= P \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) P^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P \frac{A^n}{n!} P^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(PAP^{-1})^n}{n!} \\ &= \exp(PAP^{-1}). \end{aligned}$$

□

第4章：積分法

p211-212 : 1

証明

f は区間 I 内の m 個の点 $x = a_1, a_2, \dots, a_m$ でのみ $f(x) \neq 0$ であるとする。この条件のもとで、

$$M = \max_{1 \leq k \leq m} |f(a_k)|$$

と定義する。また任意の分割 Δ に対して、

$$s(f; \Delta; \xi) = \sum_{k \in K(\Delta)} f(\xi_k) v(I_k)$$

である。ここで、 $f(\xi_k) \neq 0$ である項は高々 m 個であり、その個数を m_0 とする。このような項のみを考慮すると、リーマン和は次のように表せる：

$$s(f; \Delta; \xi) = \sum_{i=1}^{m_0} f(\xi_{k_i}) v(I_{k_i})$$

ここで、 $i = 1, 2, \dots, m_0$ は $f(\xi_k) \neq 0$ である区間 I_{k_i} を走るものとする。

次に、先に定義した M を用いると、

$$|s(f; \Delta; \xi)| = \left| \sum_{i=1}^{m_0} f(\xi_{k_i}) v(I_{k_i}) \right| \leq M \sum_{i=1}^{m_0} v(I_{k_i})$$

を得る。さて、 $d(\Delta)$ を分割 Δ の直径とすると、各区間の体積に関して $v(I_{k_i}) \leq d(\Delta)^n$ だから、

$$|s(f; \Delta; \xi)| \leq M \sum_{i=1}^{m_0} d(\Delta)^n = m_0 M d(\Delta)^n$$

となる。ここで、リーマン和に寄与する項は m_0 個であることを用いた。

ここで、 $d(\Delta) \rightarrow 0$ とすると、 $d(\Delta)^n \rightarrow 0$ であるため、

$$|s(f; \Delta; \xi)| \rightarrow 0$$

となる。したがって、 f は区間 I 上でリーマン積分可能であり、

$$\int_I f(x) dx = 0.$$

□

p211-212 : 2

証明

まず、 f は I 上で可積分であることから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、分割 Δ が存在して

$$|s(f; \Delta; \xi) - J| < \varepsilon.$$

が成立する。ここで $J = \int_I f$ とおいた。ここでとくに、 $1 > 0$ に対して、ある Δ が存在し、

$$|s(f; \Delta; \xi) - J| < 1$$

が成立する.

次に, 分割 Δ のある区間 I_k に対して代表点 ξ_k を固定し, $k \neq m \in K(\Delta)$ を満たす他の代表点を考え, さらに

$$B = \sum_{k \neq m, m \in K(\Delta)} f(\xi_m) v(I_m)$$

と定義する. このとき

$$S(f; \Delta; \xi) = f(\xi_k) v(I_k) + B.$$

ここで, 先ほどの不等式 $|s(f; \Delta; \xi) - J| < 1$ を適用すると,

$$|f(\xi_k) v(I_k) + B - J| < 1$$

が得られ, これを整理すると

$$-1 < f(\xi_k) v(I_k) + B - J < 1.$$

つまり,

$$J - 1 - B < f(\xi_k) v(I_k) < J + 1 - B.$$

ここで, $v(I_k)$ が 0 ではないことを考慮して両辺を $v(I_k)$ で割ると,

$$\frac{J - 1 - B}{v(I_k)} < f(\xi_k) < \frac{J + 1 - B}{v(I_k)}.$$

したがって, $f(\xi_k)$ は区間 I_k 上で有界であることがわかる.

任意の区間 I_k に対して同様の議論が適用できるため, 関数 f は区間 I 全体で有界であることが結論づけられる.

以上により, f が I 上で有界であることが証明された.

□

p211-212 : 3

p211-212 : 3-(i)

解答

f は I で単調に増加するので,

$$\zeta_k = x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k = \eta_k$$

とすると, リーマン和に関して

$$s(f; \Delta; \zeta_k) \leq s(f; \Delta; \xi_k) \leq s(f; \Delta; \eta_k).$$

また, $\xi'_k = (x_k + x_{k-1})/2$ とおくと,

$$\begin{aligned}
s(f; \Delta, \xi'_k) &= \sum_{k=1}^n f(\xi'_k) v(I_k) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

であり, これを J とおくと,

$$\begin{aligned}
0 &\leq |s(f; \Delta; \xi_k) - J| \\
&\leq s(f; \Delta; \eta_k) - s(f; \Delta; \zeta_k) \\
&= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) v(I_k) \\
&= d(\Delta) \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\
&= (a - 0) d(\Delta) = ad(\Delta).
\end{aligned}$$

ゆえに $d(\Delta) \rightarrow 0$ としたときに $ad(\Delta) \rightarrow 0$ となり,

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} s(f; \Delta; \xi_k) = J.$$

よって f は I でリーマン積分可能となり, $\int_I f = \frac{a^2}{2}$ である.

p211-212 : 3-(ii)

解答

f は I で単調に増加するので,

$$\zeta_k = x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k = \eta_k$$

とすると, リーマン和に関して

$$s(f; \Delta; \zeta_k) \leq s(f; \Delta; \xi_k) \leq s(f; \Delta; \eta_k).$$

また, $\xi'_k = \sqrt{(x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2)/3}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
s(f; \Delta, \xi'_k) &= \sum_{k=1}^n f(\xi'_k) v(I_k) \\
&= \sum_{k=1}^n (\xi'_k)^2 (x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2}{3} \right) (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2) (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{a^3}{3}.
\end{aligned}$$

これを J とおくと,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq |s(f; \Delta; \xi_k) - J| \\
 &\leq s(f; \Delta; \eta_k) - s(f; \Delta; \zeta_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n x_k^2(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n x_{k-1}^2(x_k - x_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_{k-1}^2)(x_k - x_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2(x_k + x_{k-1}) \\
 &\leq d(\Delta) \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k-1}).
 \end{aligned}$$

各区間 (x_{k-1}, x_k) において, $x_k + x_{k+1}$ の最大値は $2a$ であるから,

$$\begin{aligned}
 d(\Delta) \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k-1}) &\leq d(\Delta) \sum_{k=1}^n 2a(x_k - x_{k-1}) \\
 &= 2ad(\Delta) \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\
 &= 2ad(\Delta)(a - 0) = 2a^2d(\Delta).
 \end{aligned}$$

ゆえに $d(\Delta) \rightarrow 0$ としたときに $2a^2d(\Delta) \rightarrow 0$ となり,

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} s(f; \Delta; \xi_k) = J.$$

よって f は I でリーマン積分可能となり, $\int_I f = \frac{a^3}{3}$ である.

p239 : 1

p239 : 1-(i)

解答

$\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx &= \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt \\
 &= \left[\log(t^2 + 1) \right]_0^1 \\
 &= \log 2 - 0 = \log 2
 \end{aligned}$$

p239 : 1-(ii)

解答

$x - a = a \sin \theta$ ($-\pi \leq \theta < \pi$) とする置換を用いる.

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \sqrt{2ax - x^2} dx &= \int_0^a \sqrt{-(x-a)^2 + a^2} dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a |\cos \theta| \cdot a \cos \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} a^2 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= \frac{\pi a^2}{4}
 \end{aligned}$$

p239 : 1-(iii)

解答

$$|\sin 2\theta| = \begin{cases} \sin 2\theta & (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \\ -\sin 2\theta & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi |\sin 2\theta| d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\sin 2\theta) d\theta \\
 &= \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\
 &= -\frac{(-1-1)}{2} + \frac{1+1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

p239 : 1-(iv)

解答

$$\int_0^\pi e^{inx} dx = \begin{cases} 2\pi & (n=0 \text{ のとき}) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

である. $n=0$ のときは

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} e^{inx} dx &= \int_0^{2\pi} dx \\
 &= \left[x \right]_0^{2\pi} = 2\pi
 \end{aligned}$$

となり, $n \neq 0$ のときは

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{inx} dx &= \left[\frac{e^{inx}}{in} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{in}(1-1) = 0\end{aligned}$$

となる.

p239 : 1-(v)

解答

$m = n$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx &= \int_0^{2\pi} \cos mx \sin mx dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2mx + \sin 0}{2} \right) dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2mx}{2m} \right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

となる. $m \neq n$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(m+n)x + \sin(n-m)x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

である, ここまでの議論と, m と n の対称性により,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

となる.

p239 : 1-(vi)

解答

$m \neq n$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(m+n)x + \cos(n-m)x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

となる. $m = n \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2 mx dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2mx}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2mx}{4m} \right]_0^{2\pi} = \pi\end{aligned}$$

となる. $m = n = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} dx \\ &= [x]_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

となる, 以上をまとめて,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2\pi & (m = n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

p239 : 3

p239 : 3-(i)

解答

部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}\int x^\alpha \log x \, dx &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha \, dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

p239 : 3-(ii)

解答

部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}\int x^n e^x \, dx &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx \\ &= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + (n-1) \int x^{n-2} e^x \, dx \\ &= \cdots = x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \cdots + (-1)^n n! \int e^x \, dx \\ &= e^x (x^n - n x^{n-1} + \cdots + (-1)^n n!) + C\end{aligned}$$

となる.

p239 : 3-(iii)

解答

部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}\int (\log x)^n dx &= \int (\log x)^n (x)' dx \\ &= x(\log x)^n - n \int \frac{(\log x)^{n-1}}{x} \cdot x dx \\ &= x(\log x)^n - nx(\log x)^{n-1} + (n-1) \int \frac{(\log x)^{n-2}}{x} \cdot x dx \\ &= \cdots = x(\log x)^n - nx(\log x)^{n-1} + \cdots + x(-1)^n n! + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

p239 : 3-(iv)

解答

部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= \int (x)' \arcsin x dx \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

であり, これが答えである.

p239 : 3-(v)

解答

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C\end{aligned}$$

である.

p239 : 3-(vi)

解答

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \text{ であることを用いて,}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{(\log x)^2}{x} dx &= \int (\log x)^2 (\log x)' dx \\ &= \frac{(\log x)^3}{3} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

p239 : 3-(vii)

解答

$x+1=t$ とおくと, $dt=dx$ であり,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3} dx &= \int \frac{(t-1)^2+2}{t^3} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{3}{t^3} \right) dt \\ &= \log|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2(x+1)^2} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

p239 : 3-(viii)**解答**

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) dx = \int (\sin^3 x - \sin^5 x) dx \\ &= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \sin x dx \\ &= \int \{(1-t^2) - (1-t^2)^2\}(-1) dt \quad (\cos x = t) \\ &= \int (t^4 - t^2) dt \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

である.

p239 : 3-(ix)**解答**

$\sqrt[6]{x} = t$ とおくと, $x = t^6$ であるから, $\frac{dx}{dt} = 6t^5$ である. これらを用いると,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1}{t^3 - t^2} \cdot 6t^5 dt \\ &= \int \frac{6t^3}{t-1} dt \\ &= \int \frac{(t-1)(6t^2+6t+1)+6}{t-1} dt \\ &= \int \left(6t^2+6t+6+\frac{6}{t-1} \right) dt \\ &= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\log|\sqrt[6]{x}-1| + C\end{aligned}$$

である

p239 : 4**p239 : 4-(i)**

解答

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[\log(1+x) \right]_0^1 = \log 2\end{aligned}$$

である.

p239 : 4-(ii)

解答

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k/n}}\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k/n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} \cdot 2t dt \\ &= \left[2t \right]_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1)\end{aligned}$$

p247 : 1

p247 : 1-(i)

解答

計算すると,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^3 - x} dx &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{-(x-1) + (x+1)}{(x-1)x(x+1)} \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \left\{ -\frac{1}{(x+1)x} + \frac{1}{x(x-1)} \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{-(x+1) + x}{(x+1)x} + \frac{x - (x-1)}{x(x-1)} \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx \\
 &= -\log|x| + \frac{1}{2} \log|x^2 - 1| + C
 \end{aligned}$$

であり, これが答えである.

p247 : 1-(ii)

解答

$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ であるから,

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \int \left(1 + \frac{6x^2 - 11x + 6}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right) dx$$

である. ここで, A, B, C を定数として,

$$\frac{6x^2 - 11x + 6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

とおく. これより,

$$\begin{aligned}
 6x^2 - 11x + 6 &= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) \\
 \therefore A &= \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{8}, \quad C = \frac{27}{2}
 \end{aligned}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx &= \int \left\{ 1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{8(x-2)} + \frac{27}{2(x-3)} \right\} dx \\
 &= x + \frac{1}{2} \log \left| \frac{(x-1)(x-3)^{27}}{(x-2)^{16}} \right| + C
 \end{aligned}$$

である.

p247 : 1-(iii)

解答

A, B, C, D を定数として,

$$\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

とおくと, 簡単な計算により, $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 2$ とわかるので,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx \\ &= \log \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} + C\end{aligned}$$

を得る.

p247 : 1-(iv)

解答

命題 6.2 3) と例 3 の結果を用いると,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} &= \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x \right) \\ &= \frac{3x^3 + 5x}{8(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{8} \arctan x.\end{aligned}$$

p247 : 1-(v)

解答

$\tan \frac{x}{2} = t$ と置くと,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a + b \cos x} &= 2 \int \frac{dt}{(a-b)t^2 + a+b} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{a-b} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{a+b}{a-b}} & \text{if } a \neq b, \\ 2 \int \frac{dt}{2a} & \text{if } a = b. \end{cases}\end{aligned}$$

ここで, $a \neq b$ の場合はさらに $a = -b$, $\frac{a+b}{a-b} > 0$, $\frac{a+b}{a-b} < 0$ の三通りに分ける. p234 の原始関数表より,

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \begin{cases} \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) & \text{if } a^2 > b^2, \\ \frac{1}{a-b} \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}}{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}} \right| & \text{if } a^2 < b^2, \\ \left(-a \tan \frac{x}{2} \right)^{-1} & \text{if } a = -b, \\ \frac{1}{a} \tan \frac{x}{2} & \text{if } a = b. \end{cases}$$

p247 : 1-(vi)

解答

$\frac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)'$ と見て部分積分する.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} &= \int \frac{(\tan x)'}{\sin^3 x} dx \\ &= \frac{\tan x}{\sin^3 x} - \int \tan x \left(\frac{1}{\sin^3 x} \right)' dx \\ &= \frac{1}{\sin^2 x \cos x} + 3 \int \frac{dx}{\sin^3 x} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x \cos x} - \frac{3 \cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{3}{2} \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|. \end{aligned}$$

p247 : 1-(vii)

解答

分母分子に $1 - (\sin x + \cos x)$ を掛ける.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{\sin x - \sin^2 x - \sin x \cos x}{1 - (\sin x + \cos x)^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int (\sec x - \tan x - 1) dx \\ &= -\frac{1}{2} (\log |\sec x + \tan x| + \log |\cos x| - x) \\ &= \frac{1}{2} (x - \log |1 + \sin x|). \end{aligned}$$

p247 : 1-(viii)

解答

$\tan x = t$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ であるから, 求める不定積分は,

$$\begin{aligned} \int \frac{1/\cos^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} dx &= \int \frac{1}{a^2 + b^2 t^2} dt \\ &= \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b}{a} \tan x \right) + C \end{aligned}$$

である.

p247 : 1-(ix)

解答

$\log x = t$ と変換して部分積分すると,

$$\begin{aligned} \int \sin \log x \, dx &= \int e^t \sin t \, dt \\ &= e^t \sin t - \int e^t \cos t \, dt \\ &= e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin t \, dt. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\int \sin \log x \, dx &= \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) \\ &= \frac{1}{2}(\sin \log x - \cos \log x).\end{aligned}$$

p247 : 1-(x)

解答

$x = \sin t$ と置く.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx &= \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} \, dx \\ &= \int \frac{\cos^2 t}{1+\sin t} \, dt \\ &= \int \frac{\cos^2 t(1-\sin t)}{(1+\sin t)(1-\sin t)} \, dt \\ &= \int (1-\sin t) \, dt \\ &= t + \cos t \\ &= \arcsin x + \cos \arcsin x \\ &= \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

p247 : 1-(xi)

解答

$x = \frac{1}{t}$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ である. また, $x^2 + 1 = \frac{1}{t^2} + 1$ となる. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \, dx &= \int \frac{t}{\sqrt{1/t^2+1}} \cdot (-1/t^2) \, dt \\ &= -\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \, dt \\ &= \log \left| t + \sqrt{t^2+1} \right| + C \\ &= \log \left| \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C\end{aligned}$$

である.

p247 : 1-(xii)

解答

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \, dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}} \, dx \\ &= \arcsin \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) + C\end{aligned}$$

p247 : 1-(xiii)

解答

$x + \frac{1}{x} = t$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$ であり, 求める不定積分は,

$$\begin{aligned}\int \frac{1-x^2}{1+x^2\sqrt{1+x^4}} dx &= \int \frac{1-x^2}{x^2(x+1/x)\sqrt{x^2+1/x^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-2}} dt\end{aligned}$$

となる. ここで, $s = \frac{1}{t}$ とすると, $\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{s^2}$ であり,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t\sqrt{t^2-2}} dt &= \int \frac{1}{\sqrt{1-2s^2}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}s) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right) + C\end{aligned}$$

となる.

p247 : 1-(xiv)

解答

$1 = (x)'$ と見て部分積分する.

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2+1).\end{aligned}$$

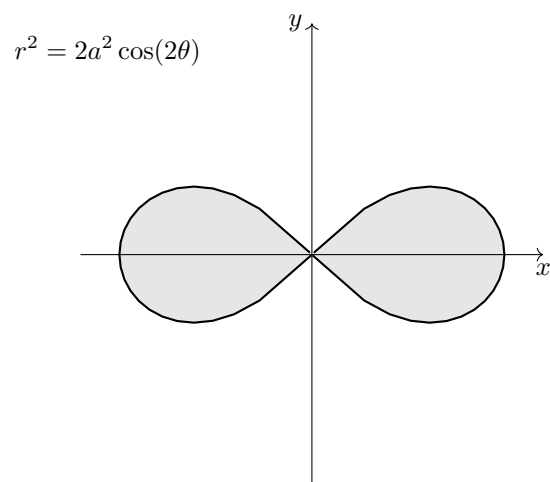
p290 : 3

解答

求める面積を S とすると, 第 1 象限の面積を 4 倍すればよいので,

$$\begin{aligned}S &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} (2a^2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2 \left[a^2 \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} \\ &= 2 (a^2 \sin(\pi/2) - a^2 \sin(0)) \\ &= 2a^2\end{aligned}$$

となる.



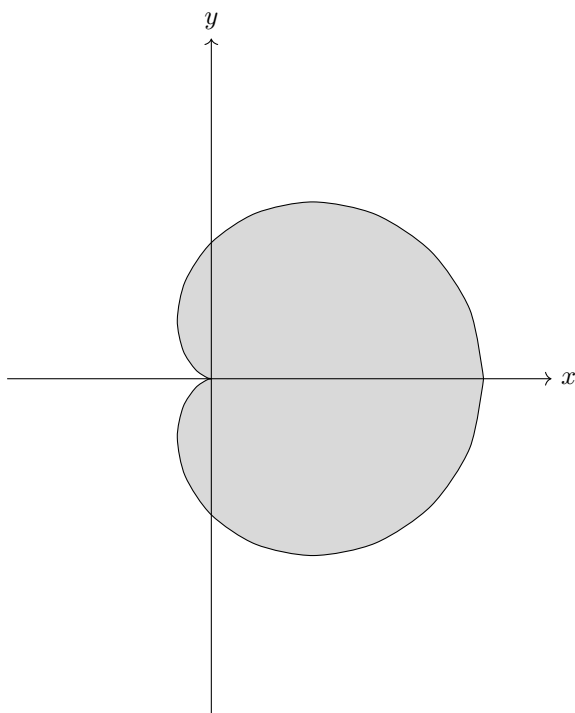
p290 : 4

解答

求める面積を S ，求める求める体積を V とおくと，

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \left(1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= a^2 \left[\frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{3\pi a^2}{2}
 \end{aligned}$$

となる．



p325–326 : 1

p325–326 : 1-(i)

解答

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(t+x^2)^{n+1}} \quad (t > 0, n \in \mathbb{N})$$

$$(1+x^2)^{n+1} = O(x^{2n+2}) \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

$$\frac{1}{(t+x^2)^{n+1}} = O(x^{-2n-2}) \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

ここで,

$$-2n-2 < -1$$

であるから, 定理 11.3 により, 広義積分可能である.

$$x = \sqrt{t} \tan \theta$$

とすると,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2} \theta}{t^{n+1}} \frac{\sqrt{t}}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{t^{n+1/2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{t^{n+1/2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^{2n} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{t^{n+1/2}} \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)} \quad (\because \text{定理 12.4}) \\ &= \frac{(2n-1)!!/2^n \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{t^{n+1/2} \cdot (n!)} \quad (\because \text{定理 12.4}) \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{-\frac{2n+1}{2}} \pi. \end{aligned}$$

p325–326 : 1-(ii)

解答

$$F(t) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(t+\cos x)^2} \quad (t > 1)$$

$$f(x, t) = -\frac{1}{t+\cos x} \quad (0 \leq x \leq \pi, t > 1)$$

とすると,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \frac{1}{(t+\cos x)^2}.$$

いま, $f(x, t)$, $\partial f(x, t)/\partial t$ は $[0, \pi] \times (1, \infty)$ で連続であるから, 定理 14.1 より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi f(x, t) dx &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx \\ &= F(t)\end{aligned}$$

となる.

また,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x, t) dx &= \int_0^\pi -\frac{dx}{t + \cos x} \\ &= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t + \frac{1-s^2}{1+s^2}} \right) \frac{2ds}{1+s^2} \\ &= -2 \int_0^\infty \frac{ds}{(t-1)s^2 + t+1} \\ &= -2 \left[\frac{1}{\sqrt{t+1}} \arctan \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} s \right]_{s=0}^{s=\infty} \\ &= \frac{-\pi}{\sqrt{t^2-1}}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}F(t) &= \frac{d}{dt} \frac{-\pi}{\sqrt{t^2-1}} \\ &= \pi \left(-\frac{1}{2} \right) (t^2-1)^{-3/2} \cdot 2t \\ &= -\frac{\pi t}{(t^2-1)^{3/2}}.\end{aligned}$$

第5章：級数

p366 : 1

Lemma 0.0.20

$a_{2n} \rightarrow \alpha, a_{2n+1} \rightarrow \beta \quad (\alpha, \beta \in [-\infty, \infty])$ ならば、集積値全体の集合は $\{\alpha, \beta\}$ である。

証明. a_n の収束部分列 $a_{n(k)}$ を任意にとる. $\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ は偶数、奇数の少なくとも一方を無限個含む. 偶数がそうであったとして、 $n(k)$ から奇数を取り除いて小さい順に並べた列の l 番目の項を $a_{n(k(l))}$ とする. $a_{n(k(l))}$ は a_{2n} の部分列であるから、仮定より $a_{n(k(l))} \rightarrow \alpha \quad (l \rightarrow \infty)$ である. $a_{n(k)}$ は収束するから、 $a_{n(k)} \rightarrow \alpha \quad (k \rightarrow \infty)$ である. 奇数が無限個含まれる場合も同様に考えて、 $a_{n(k)} \rightarrow \beta \quad (k \rightarrow \infty)$ である. $a_{n(k)}$ の取り方は任意だったから、集積値は α と β のみである. \square

p366 : 1-(i)

解答

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m-1} = -1$$

であり、 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は補題により $\{-1, 1\}$ である. ゆえに、

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1.$$

p366 : 1-(ii)

解答

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m-1} = -\infty$$

であり、 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は補題により $\{-\infty, \infty\}$ である^{†1}. ゆえに、

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

^{†1} 補完数直線を考えているため、これでよい.

p366 : 1-(iii)

解答

$a_n = a_{n+6}$ であることを考慮すると、 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は $\{0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ である. ゆえに、

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

証明の前に、 $\pm\infty$ について演算を定義しておく.

$$a + \infty = \infty + a = \infty \quad \text{if } a \in (-\infty, \infty],$$

$$a - \infty = a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty \quad \text{if } a \in [-\infty, \infty),$$

$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & \text{if } a \in (0, \infty], \\ \mp\infty & \text{if } a \in [-\infty, 0). \end{cases}$$

$0 \cdot \infty$ や $\infty - \infty$ などは定義しない. このとき, 補完数直線において次の命題が成り立つ.

Lemma 0.0.21

実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ を満たしており, $a + b$, ab が定義されるとき, それぞれ $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$, $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$ が成り立つ.

問題 2), 3) において, 演算が定義されないような場合は除外したものを証明する.

p366 : 2

証明

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

を示す. その他の不等式についても同様である. $n \in \mathbb{N}$ を任意に取って固定する. 上限の定義より, $m \geq n$ に対して,

$$\begin{aligned} a_m &\leq \sup_{k \geq n} a_k, \\ b_m &\leq \sup_{k \geq n} b_k \end{aligned}$$

であるから,

$$a_m + b_m \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k$$

が成り立つ. 左辺で m についての上限を取ると,

$$\sup_{k \geq n} (a_k + b_k) \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k$$

となる. (右辺は $\{a_m + b_m; m \geq n\}$ の上界であり, \sup は最小上界であるからこの操作は正当.) $n \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

となって右側の不等式が示される. また, $m \geq n$ に対し,

$$a_m + \inf_{k \geq n} b_k \leq a_m + b_m \leq \sup_{k \geq n} (a_k + b_k)$$

であるから, 左辺の上限を取って,

$$\sup_{k \geq n} a_k + \inf_{k \geq n} b_k \leq \sup_{k \geq n} (a_k + b_k)$$

となる. $n \rightarrow \infty$ とすれば左側の不等式も示される.

□

p366 : 3

証明

\limsup についてのみ示す. \liminf についても同様である. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ の場合, $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < \infty$ であるから $\sup_{k \geq n} b_k < \infty$ となり $\left(\sup_{k \geq n} a_k \right) \left(\sup_{k \geq n} b_k \right)$ が定義されることに注意する. $a_n, b_n \geq 0$ であるから, $m \geq n$ に対して,

$$a_m b_m \leq \left(\sup_{k \geq n} a_k \right) \left(\sup_{k \geq n} b_k \right)$$

が成り立つ. 左辺で m について上限を取ってから $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

となる. また, 第1章の命題 1.4, 1.6 より,

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq n} (ca_k) &= c \sup_{k \geq n} a_k \quad (c > 0), \\ \sup_{k \geq n} (ca_k) &= - \inf_{k \geq n} (-ca_k) = c \inf_{k \geq n} a_k \quad (c < 0), \end{aligned}$$

が成り立つ. $n \rightarrow \infty$ とすれば残りの等式が得られる.

□

p366 : 4

証明

p16 の問題 4) の一般化である. 右側の不等式のみ示す. $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ とする. $\alpha = \infty$ ならば明らかであるから $\alpha \neq \infty$ の場合を考える. $\varepsilon > 0$ を任意にとると, 定理 1.4 より,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon \quad (n \geq N)$$

となるような N が取れる. この不等式を繰り返し用いて,

$$\begin{aligned} a_n &< (\alpha + \varepsilon) a_{n-1} \\ &< (\alpha + \varepsilon)^2 a_{n-2} \\ &< \dots \\ &< (\alpha + \varepsilon)^{n-N} a_N \end{aligned}$$

がわかる. 両側の式を $1/n$ 乗してから \limsup を取ると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha + \varepsilon)^{1-N/n} \sqrt[n]{a_N} = \alpha + \varepsilon$$

となる. $\varepsilon \rightarrow +0$ とすると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha$$

である. これが証明すべきことであった.

□

p371 : 1

p371 : 1-(i)

解答

$n = 0$ のとき, $\sqrt{1+n^2} - n = 1 - 0 = 1$ であり, この項は有限なので級数の収束・発散に影響しない.
 $n \geq 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+n^2} - n &= \frac{(\sqrt{1+n^2} + n)(\sqrt{1+n^2} - n)}{\sqrt{1+n^2} + n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+n^2} + n} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2} + n} \\ &\geq \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)n}\end{aligned}$$

である. ここで,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)n} = \infty$$

であるから, 比較判定法により, $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$ は発散する.

p371 : 1-(ii)**解答**

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\log e} \\ &= 1.\end{aligned}$$

であり, なおかつ $1 \neq 0$ であるから, p45. 定理 5.1 系の対偶により, この級数は発散する.

p371 : 1-(iii)**解答**

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $\sqrt[n]{n} \leq n$ であるから,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n}$$

となる.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するから, 比較判定法により, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ も発散する.

p371 : 1-(iv)

p49-50 : 2-(x) と重複している.

p371 : 1-(v)

解答

$a_n = (n!)^2 / (2n)!$ とすると,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty)$$

であり, なおかつ $1/4 < 1$ であるから, p47. 定理 5.7 によりこの級数は収束する.

参考文献

- [1] 杉浦光夫『解析入門Ⅰ』，東京大学出版会，1980