

杉浦・解析入門解答集

なまちゃん

2024 年 2 月 28 日

目次

目次

第 1 章：実数と連続

p2 : 問 1	2
p3 : 問 2	4
p16-17 : 1-(i)	6
p16-17 : 1-(ii)	6
p16-17 : 1-(iii)	7
p16-17 : 1-(iv)	7
p16-17 : 1-(v)	8
p16-17 : 2)	8
p16-17 : 3)	8
p16-17 : 5)	10
p16-17 : 6)	11
p16-17 : 7)	13
p31-33 : 1-(i)	14
p31-33 : 1-(ii)	14
p31-33 : 1-(iii)	15
p31-33 : 1-(iv)	15
p31-33 : 1-(v)	16
p31-33 : 1-(vi)	16
p31-33 : 2	18
p49-50 : 1	19
p49-50 : 2-(i)	19
p49-50 : 2-(ii)	19
p49-50 : 2-(iii)	20
p49-50 : 2-(v)	20
p49-50 : 2-(viii)	20
p49-50 : 2-(x)	21
p49-50 : 3	21
p49-50 : 5	22
p49-50 : 6	22

第 2 章：微分法

p90-91 : 1-(i)	27
p90-91 : 1-(ii)	27
p90-91 : 1-(iii)	27
p90-91 : 9-(i)	28
p90-91 : 10	29
p106-107 : 10	30

第 3 章：初等函数

p191-193 : 1	31
------------------------	----

第 4 章：積分法

p239 : 1-(i)	31
p239 : 1-(ii)	32
p239 : 1-(iii)	32
p239 : 1-(iv)	33
p239 : 1-(v)	33
p239 : 1-(vi)	34
p239 : 3-(i)	34
p239 : 3-(ii)	35
p239 : 3-(iii)	35
p239 : 3-(iv)	35
p239 : 3-(v)	35
p239 : 3-(vii)	36
p239 : 3-(vi)	36
p239 : 3-(viii)	36
p239 : 3-(ix)	37

p239-240 : 4-(i)	37
p239-240 : 4-(i)	38
p247 : 1-(i)	38
p247 : 1-(ii)	39
p247 : 1-(iii)	39
p247 : 1-(v)	39
p247 : 1-(viii)	40
p247 : 1-(xiii)	40
p247 : 1-(xi)	40
p247 : 1-(xii)	41
p290 : 3	42
p290 : 4	43

第 5 章：級数

p366 : 1-(i)	44
p366 : 1-(ii)	44
p366 : 1-(iii)	44

第1章：実数と連続

p2：問1

(1)

証明. $0, 0' \in K$ がともに加法単位元の性質を満たすとする.

このとき, 0 が加法単位元の性質をもつことから,

$$0' + 0 = 0'$$

同様に, $0'$ が加法単位元の性質をもつことから,

$$0 + 0' = 0$$

交換律より, $0 + 0' = 0' + 0$ なので,

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

これからただちに加法単位元の一意性が従う. \square

(2)

証明. $a, b \in K$ とし,

$$a + b = 0$$

とする. このとき,

$$-a = -a + 0 = -a + (a + b) = (-a + a) + b = 0 + b = b$$

となり, 加法逆元の一意性が従う. \square

(3)

証明. $a \in K$ のとき,

$$a + (-a) = 0$$

$$\therefore (-a) + a = 0$$

他方, $-(-a)$ は $(-a)$ の加法逆元であるから,

$$(-a) + (-(-a)) = 0$$

これと逆元の一意性により, $a = -(-a)$ が従う. \square

(5)

証明. $a \in K$ に対して,

$$a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$$

であるから, $-a$ が a の加法逆元であることと含めて主張が従う. \square

(6)

証明. (4) の結果を用いる. $a = -1$ とすると,

$$(-1)(-1) = -(-1) = 1$$

これが証明すべきことであった. \square

(7)

証明. $a, b \in K$ に対して,

$$a(-b) + ab = a((-b) + b)$$

$$= a0$$

$$= 0$$

$$\therefore a(-b) = -ab$$

$(-a)b = -ab$ も同様に示される. \square

p3 : 問 2

(i)

証明. $a \leq b$ において, (R15) より

$$0 \leq b - a$$

を得る.

逆に, $0 \leq b - a$ において, (R15) より

$$a \leq b$$

を得る.

以上の考察により証明された. \square

(ii)

証明. $a \leq b$ において, (R15) より

$$0 \leq b - a$$

となる. ここで, (R15) を適用して,

$$-b \leq -a$$

を得る.

逆に, $-b \leq -a$ について, (R15) より

$$0 \leq b - a$$

となる. この両辺に a を加えて,

$$a \leq b$$

を得る.

以上の考察により証明された. \square

(iii)

証明. $c \leq 0$ から

$$c + (-c) \leq -c$$

$$\therefore 0 \leq -c$$

である. ここで, $a \leq b$, $-c \leq 0$ であることより

$$a(-c) \leq b(-c)$$

である. これより $-ac \leq -bc$ であるから,

$$-ac + (ac + bc) \leq -bc + (ac + bc)$$

$$\therefore bc \leq ac$$

を得て, これが証明すべきことであった. \square

(iv)

証明. $a < 0$ であると仮定する. このとき,

$$\left(\frac{1}{a}\right)a < 0a$$

なので,

$$1 < 0$$

となるが, これは $1 > 0$ に矛盾.

よって, 仮定したことが誤りであり, $a > 0$ のとき $a^{-1} > 0$ である. \square

(v)

証明.

$$a \leq c$$

において, (R15) より,

$$a + b \leq b + c$$

を得る. 他方,

$$b \leq d$$

において, (R15) より

$$b + c \leq c + d$$

となる. ここで, 推移律を適用すると,

$$a + b \leq c + d$$

が得られ, これが証明すべきことであった. \square

p16-17 : 1-(i)

$a = 0$ のときは明らかに 0 に収束するので, $a \neq 0$ とする. $2|a| \leq N$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとる. このとき,

$$\begin{aligned} 0 &< \left| \frac{a^n}{n!} \right| \\ &\leq \frac{|a|^n}{n!} \\ &= \frac{|a|^N}{N!} \cdot \frac{|a|}{N+1} \cdot \frac{|a|}{N+2} \cdots \frac{|a|}{n} \\ &\leq \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N} \end{aligned}$$

であるから,

$$-\frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N} \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N}$$

となり, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

である

p16-17 : 1-(ii)

$a = 1$ のときは明らかに 1 に収束するので, まず $a > 1$ のときを考える. $\delta_n > 0$ を用いて,

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$$

とおくことができる. 両辺を n 乗すると

$$\begin{aligned} a &= 1 + n\delta_n + \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 + \cdots + \delta_n^n \\ &> 1 + n\delta_n \\ &> n\delta_n \end{aligned}$$

となり, $0 < \delta_n < \frac{a}{n}$ であるから, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$$

となる. $a < 1$ のときは, $a^{\frac{1}{n}} = \left(\left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$ を使えば同じ結果が得られ, 以上の議論により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

となる.

p16-17 : 1-(iii)

$\frac{n}{2}$ 以下の最大の自然数を m とおく. 与えられた式は,

$$(0 <) \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1) \cdots n}{n^n}$$

と表されるので, $\frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdots n}{n^{n-m}} < 1$ であることと, $m \leq \frac{n}{2}$ から $\frac{m}{n} \leq \frac{1}{2}$ であることを用いると,

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1) \cdots n}{n^n} < \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{n^m} < \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

よって,

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

である. $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$ なので, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

である.

p16-17 : 1-(iv)

のちに $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると,

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= 1 + n + \frac{1}{2}n(n-1) + \cdots + n + 1 \\ &> \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

となり, この不等式から,

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$$

を得る. ここで, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

である.

p16-17 : 1-(v)

まず,

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

である. ここで, のちに $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

であり,

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

を得る. ここで, はさみうちの原理を用いると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

である.

p16-17 : 2)

$n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$f_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2m}$$

とおく. ここで, $n!x \in \mathbb{Z}$ のとき,

$$\cos(n! \pi x) = \pm 1$$

$n!x \notin \mathbb{Z}$ のときは,

$$|\cos(n! \pi x)| < 1$$

であるから,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (n!x \in \mathbb{Z}) \\ 0 & (n!x \notin \mathbb{Z}) \end{cases}$$

となる. さて, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ であるならば, どんな $n \in \mathbb{N}$ に対しても, $n!x$ が整数とならない. また, $x \in \mathbb{Q}$ のとき, $x = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$) とすれば, n が q より十分大きいときに $n!x$ は整数となる. よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2m} \right) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

p16-17 : 3)**《補題》**

任意の $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ について,

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

が成り立つ.

証明. $n = 2$ のときは三角不等式そのものであるから、 $n \geq 3$ とし、 $n - 1$ 個の実数については補題の主張が成り立つものとする。

いま、

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n$$

であるから、これに三角不等式を適用して、

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}| + |a_n|$$

を得る。ここで、数学的帰納法の仮定より、

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}|$$

がいえるので、ここまでの議論で、

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

は n の場合にも成り立つことが示され、以上の議論より補題の主張が従う。□

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_1 \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

となる。

また、

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right|$$

と変形する。この右辺に補題を適用し、

$$\left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}$$

を得る。これにより、

$$n \geq N_1 \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} + \left(\frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon$$

となる。ここで $N_2 := N_1 + 1$ とすると、 $n \geq N_2$ であるとき $\left(\frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon < \varepsilon$ となることに注意する。さて、

$$n \geq N_3 \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} < \varepsilon$$

となるように $N_3 \in \mathbb{N}$ をとる。 $N := \max\{N_2, N_3\}$ とすると、

$$n \geq N \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} + \left(\frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

であり、これより

$$n \geq N \implies \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < 2\varepsilon$$

となる。書き換えると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

となり、これが証明すべきことであつた。□

p16-17 : 5)

証明. イ) の条件により,

$$A \subset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$$

は明らかである. ここで,

$$H = \{0, 1, \dots, m-1\} \cup A$$

と置く. このとき, H の定義から $0 \in H$ である.

次に, $n \in H$ であることを仮定する. このとき,

- (i) $n < m-1$ であれば, $n+1 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ より, $n+1 \in H$ となる
- (ii) $n = m-1$ であれば, $n+1 = m \in A$ より, $n+1 \in H$ となる
- (iii) $n \geq m$ であれば, (ロ) より $n+1 \in A$ であり, $A \subset H$ により $n+1 \in H$ となる

よって, いずれの場合でも

$$n+1 \in H$$

したがって, H は継承的である. \mathbb{N} は最小の継承的な集合であるから, $\mathbb{N} \subset H$ である.

つまり, $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots, m-1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$ であることと, H の定義により,

$$\{0, 1, \dots, m-1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subset \{0, 1, \dots, m-1\} \cup A$$

となる. よって,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subset A$$

となる. これと $A \subset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$ であることを併せると,

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$$

となり, これが証明すべきことであった. \square

p16-17 : 6)《 $m + n$ について》

証明. $n \in \mathbb{N}$ についての命題 $p(n)$ を

$$p(n) : \forall m \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}$$

とする.

- (i) $n = 0$ のとき, $m + 0 = m$ であり, $m \in \mathbb{N}$ であるから, $p(0)$ は真である.
- (ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $p(k)$ が真であると仮定する. このとき, $m + k \in \mathbb{N}$ である. ここで,

$$m + (k + 1) = (m + k) + 1$$

であり, $m + k \in \mathbb{N}$ に注意すると, \mathbb{N} が最小の継承的集合であることから,

$$m + (k + 1) = (m + k) + 1 \in \mathbb{N}$$

である. よって, このとき $p(k + 1)$ も真である.

以上 (i), (ii) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $p(n)$ が真である. これが証明すべきことであった. \square

《 mn について》

証明. $n \in \mathbb{N}$ についての命題 $q(n)$ を

$$q(n) : \forall m \in \mathbb{N} : mn \in \mathbb{N}$$

とする.

- (i) $n = 0$ のとき, $m \cdot 0 = 0$ であり, $0 \in \mathbb{N}$ であるから, $q(0)$ は真である.
- (ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $q(k)$ が真であると仮定する. このとき, $mk \in \mathbb{N}$ である. ここで,

$$m(k + 1) = mk + k$$

であり, $mk \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ に注意すると, 証明したことから

$$mk + k \in \mathbb{N}$$

である. よって, このとき $q(k + 1)$ も真である.

以上 (i), (ii) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $q(n)$ が真である. これが証明すべきことであった. \square

《 $m - n$ について》

証明. $n \in \mathbb{N}$ についての命題 $r(n)$ を

$$r(n) : \forall m \in \mathbb{N} : m < n \vee m - n \in \mathbb{N}$$

とする.

- (i) $n = 0$ のとき, $m - 0 = m$ であり, $m \in \mathbb{N}$ であるから, $r(0)$ は真である.
- (ii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $r(k)$ が真であると仮定する. このとき, $k < n \vee k - n \in \mathbb{N}$ である.
 - (I) $m \leq k$ のとき, $m < k + 1$ であり, $r(k + 1)$ も真である.
 - (II) $m > k$ のとき, まず

$$m - (k + 1) = m - k - 1$$

であり, $m - k \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}$ に注意すると, 証明したことから

$$m - k - 1 \in \mathbb{N}$$

である.

よって, このとき $r(k + 1)$ も真である.

以上 (i), (ii) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $r(n)$ が真である. これが証明すべきことであった. \square

p16-17 : 7)

証明. $n < k < n + 1$ となる自然数 k が存在すると仮定する. この不等式から, 辺々 n を引くと

$$0 < k - n < 1$$

を得る. n と k は自然数としたから, 問 6 により, $k - n$ は自然数である.

よって, $0 < a < 1$ となる自然数 a が存在しないことを示せばよい.

$$H = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$$

とおくと,

$$0 \in H$$

$$0 + 1 \in H$$

である. ゆえに $0 \in H$ となる.

また, $k \geq 1$ となる $k \in \mathbb{N}$ に対しては, $k + 1 \geq 1$ であり,

$$k + 1 \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$$

となるため, $k + 1 \in H$ である.

ここまでの考察から,

$$(1) \ 0 \in H$$

$$(2) \ n \in H \implies n + 1 \in H$$

であるから H は継承的である.

したがって, \mathbb{N} が最小の継承的集合であることから, $\mathbb{N} \subset H$ となる.

H の定義により, $a \notin H$ なので, $a \notin \mathbb{N}$ となり, $0 < a < 1$ となる自然数 a は存在しない. これが証明すべきことであった. \square

p31-33 : 1-(i)

$$\begin{aligned}\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} &= \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$a_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $b_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ とおくと, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は明らかに収束するから, 定理 2.5(2) より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

である. また, アルキメデスの原理により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $n_0 \in \mathbb{N}$ を $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ となるようにとることができる. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_0 \implies 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \varepsilon$$

となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ である. これより,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\} \cdot \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{6}(1+0) \cdot (2+0) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

p31-33 : 1-(ii)**《補題》**

正数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して, $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

となるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である.

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ であるから, r ($0 < r < 1$) に対して, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_1 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

が成り立つ. このとき,

$$a_n = a_{N_1} \cdot \frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}} \cdot \frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+1}} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \frac{a_n}{a_{n-1}} < a_{N_1} r^{n-N_1} = \frac{a_{N_1}}{r^{N_1}} r^n$$

となる. $0 < r < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{N_1}}{r^{N_1}} r^n = 0$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である. \square

$a_n = \frac{n^2}{a^n}$ とおく. $0 < a \leq 1$ のときは明らかに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となる.

$a > 1$ のとき, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{a}$ となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{a} = \frac{1}{a} < 1$$

であるから, 補題により, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となる. 以上の議論により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = \begin{cases} \infty & (0 < a \leq 1) \\ 0 & (a > 1) \end{cases}$$

となる.

p31-33 : 1-(iii)

明らかに $\sqrt[n]{n} > 1$ なので, $\delta_n > 0$ を用いて,

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$$

とかける. 両辺を n 乗して, $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると,

$$\begin{aligned} n &= (1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 + \cdots + (\delta_n)^n \\ &> \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 \end{aligned}$$

となり, この不等式から,

$$0 < \delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

を得る. ここで, はさみうちの原理により, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

である.

p31-33 : 1-(iv)

$a_n = n^k e^{-n}$ とおく. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

ゆえに, 補題により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k e^{-n} = 0$$

である.

p31-33 : 1-(v)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= e \cdot \frac{1}{e} = 1 \end{aligned}$$

である.

p31-33 : 1-(vi)**《補題》**

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を実数列とし, $a_n > 0$ とする. もし $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であれば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ である. また, もし $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ であるならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ である,

証明. 前半の主張のみ示せば後半の主張も同様に示せるので, 前半のみ示す. 与えられた条件により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_0 \implies |a_n - 0| < \varepsilon$$

が成り立つ, ここで $\frac{1}{\varepsilon} = M$ とおくと, 上の $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_0 \implies \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

となり, これより $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ が示された. \square

《補題》

$c > 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n} = 0$ である.

証明. $c > 1$ より, $\delta > 0$ を用いて $c = 1 + \delta$ とおける. このとき, のちに $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることを考慮すると,

$$\begin{aligned} c^n &= (1 + \delta)^n \\ &= 1 + n\delta + \frac{1}{2}n(n-1)\delta^2 + \cdots + \delta^n \\ &> 1 + n\delta \end{aligned}$$

このことから, $0 < \frac{1}{c^n} < \frac{1}{1 + n\delta}$ であるから, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n} = 0 \quad (c > 1)$$

である. \square

$a_n = (c^n + c^{-n})^{-1}$ とおく. $c = 1$ のときは明らかに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ である.
 $c > 1$ のとき, 2つの補題により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n}) = \infty$$

であるから, 補題により $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n})^{-1} = 0$ である.

$0 < c < 1$ のときは c の逆数を考えることにより同じ結論に帰着する. 以上の議論により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c^n + c^{-n})^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (c = 1) \\ 0 & (c \neq 1) \end{cases}$$

である.

p31-33 : 2

証明. 二項定理を用いて $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項を展開すると,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} \cdot \frac{1}{n^r} + \cdots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

同様にして, a_{n+1} の展開式を得たとき, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ であることにより, $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して,

$$\frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) < \frac{1}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{r-1}{n+1}\right)$$

が成立する. これと, a_{n+1} の展開式のほうが, 正の項を一つ多く含むことから, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$a_n < a_{n+1}$$

が成立し, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は単調増加数列である. また,

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &< 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2^{-n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= 3 - 2^{-n} \\ &< 3 \end{aligned}$$

であるから, $a_n < 3$ となる.

また, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が単調増加数列であることから, 任意の $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ に対して,

$$a_n > a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

であるから,

$$2 < e < 3$$

を得る. また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq e$$

である. 他方,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{r!}$$

であるから, ここで $r \rightarrow \infty$ として,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq e$$

となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ を得る. \square

p49-50 : 1

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ であるから, $0 < r < 1$ のとき, $r < k < 1$ に対して, ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_1 \implies a_n < k^n$$

となる. ここで, 定理 5.5(比較判定法) と $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ より, $\sum a_n$ は収束する.

$r > 1$ のとき, $1 > 0$ に対して, ある $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_2 \implies a_n > 1$$

が成り立ち, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ となる. よって定理 5.1 系の対偶により $\sum a_n$ は発散する. \square

p49-50 : 2-(i)

$$\frac{2n^2}{n^3 + 1} = \frac{2/3}{n+1} + \frac{4n/3 - 2/3}{n^2 - n + 1}$$

により

$$\begin{aligned} \sum \frac{2n^2}{n^3 + 1} &= \sum \frac{2/3}{n+1} + \sum \frac{4n/3 - 2/3}{n^2 - n + 1} \\ &> \sum \frac{2/3}{n+1} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となる. よってこの級数は発散する

p49-50 : 2-(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2} < \sum \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \left(< 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 3 \right)$$

であるから, この級数は収束する. また

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

が $\alpha > 1$ のときに収束することを用いることもできる.

p49-50 : 2-(iii)

$a = 1$ のとき、この級数は明らかに収束する。 $a \neq 1$ のとき、 a^x の $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開

$$a^x = 1 + (\log a)x + \frac{(\log a)^2}{2!}x^2 + O(x^3)$$

を用いて

$$\begin{aligned} \sum (a^{1/n} - 1) &= \sum \left\{ \frac{\log a}{n} + \frac{(\log a)^2}{2!n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right\} \\ &> \sum \frac{\log a}{n} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

となる。よってこの級数は $a = 1$ のときは収束し、 $a \neq 1$ のときは発散する。

p49-50 : 2-(v)

定理 5.7 (ダランベールの収束判定) を用いる。 $a_n = n/2^n$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

となることにより、この級数は収束する

p49-50 : 2-(viii)

$$\frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} > \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$$

であることから

$$\sum \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}} > \sum \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

となる。よってこの級数は発散する。

p49-50 : 2-(x)

定理 5.7 (ダランベールの収束判定) より $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1)^2}}{(n+2)^{(n+1)^2}} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} = \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} \frac{(n+1)^{n^2}}{(n+2)^{n^2}} \frac{(n+1)^{2n+1}}{(n+2)^{2n+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{2n+1}\end{aligned}$$

ここで

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n(n+2)} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{-2n}$$

とすることにより, 右辺は $e \times 1 = e$ に収束する.

さらに,

$$\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{2n+1} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)} \right\}^{-2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-3}$$

とすることで, 右辺は $\frac{1}{e^2} \times 1 = \frac{1}{e}$ に収束する. よって

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \times \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e} < 1$$

となる. ゆえにこの級数は収束する.

p49-50 : 3

証明. $\sum a_n$ が絶対収束するので, $\sum |a_n|$ も収束する. よって, 定理 5.1 系より, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ となる. このとき, $1 > 0$ に対して, ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq n_1 \implies ||a_n| - 0| < 1$$

が成り立つ. また, $|a_n| < 1$ のとき,

$$0 \leq |a_n|^2 \leq |a_n|^2 \leq |a_n|$$

が成り立つ. ここで, $\sum |a_n|$ が収束し, 各項は正なので, 定理 5.5(比較判定法) により, $\sum |a_n|^2$ も収束する. ゆえに $\sum a_n^2$ は絶対収束する. \square

p49-50 : 5

証明. 与えられた条件により, $0 < r < c, r \neq \infty$ をみたま $r \in \mathbb{R}$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N \implies \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < r$$

が成り立つ. これにより,

$$\begin{aligned} 0 < -r + c < \frac{a_n}{b_n} < r + c \\ \therefore (-r + c)b_n < a_n < (r + c)b_n \end{aligned}$$

となる. これと比較原理により, $\sum a_n$ と $\sum b_n$ は同時に収束, 発散することが証明された. \square

p49-50 : 6

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ により, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ は収束する. ここで,

$$1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1}$$

の両辺を 0 から 1 まで x で積分すると,

$$\begin{aligned} \overbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}}^{s_n} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + R_n \end{aligned}$$

である. ただしここで $R_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx$ とおいた. この式から,

$$\begin{aligned} \left| s_n - \frac{\pi}{4} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{x^2+1} dx \right| \\ &< \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

である. よって,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

である.

p49-50 : 8

証明. この級数^{†1}の第 n 部分和を s_n , 分母が n 桁である項の末尾までの和を t_n とする. このとき $s_n < t_n$ である.

分母が k 桁である項の和を考える. このような項は, $8 \cdot 9^{k-1}$ 個ある.

また, このような項の分母の最小値は 10^{k-1} であるから,

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=1}^n \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8 \sum_{k=1}^n \left(\frac{9}{10} \right)^{k-1} \\ &= 8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n}{1 - \frac{9}{10}} \\ &= 80 \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right) \end{aligned}$$

となり, t_n は単調増加かつ上に有界である

よって,

$$0 < s_n < t_n = 80 \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right)$$

であるから, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq 80$$

となり, これが証明すべきことであつた. \square

^{†1} この級数をケンプナー級数という.

p63-64 : 1-(i)

$f(a)$ を考えるため, $a \neq 0$ としてよい. $\delta \leq \frac{|a|}{2}$ とすると, $|x - a| < \delta$ より

$$|x| > |a| - \delta \geq \frac{|a|}{2}$$

である. これに留意すると,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - x|}{|ax|} < \frac{2\delta}{|a|^2}$$

であるから, $\delta = \min\{|a|/2, |a|^2\varepsilon/2\}$ でよい.

p63-64 : 1-(iii)

$t := \min\{x, a\}$ とする. このとき, 指数法則により,

$$|e^x - e^a| = e^t(e^{|x-a|} - 1)$$

が成立する. また, $t \leq a$ であるから,

$$\begin{aligned} e^t &\leq e^a \\ \therefore e^t(e^{|x-a|} - 1) &\leq e^a(e^{|x-a|} - 1) \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\varepsilon = e^a(e^\delta - 1)$$

となればよい. すなわち,

$$\delta = \log(1 + e^{-a}\varepsilon)$$

である.

p63-64 : 2-(i)

$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1, \left| \sin \frac{1}{y} \right| \leq 1$ であるから,

$$\left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |(x+y)| \leq |x| + |y| \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow 0)$$

である. よって,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$$

となる.

p63-64 : 2-(iii)

まず, $\log x^x = x \log x$ である. また,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{1/x}$$

となる. ここで, $\lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} 1/x = \infty$ であるから, ロピタルの定理が適用でき,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{1/x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^x &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\log x^x} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

となり, これが答である.

p63-64 : 2-(iv)

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(r^2)}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - (-2 \sin^2(r^2/2) + 1)}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin^2(r^2/2)}{(r^2/2)^2} \cdot (r^2/2) \\ &= 1^2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

を得て, これが答えである.

p63-64 : 3-(i)

以下、 \mathbb{Q} の閉包は \mathbb{R} であることを示す。

$a \in \mathbb{R}$ に対して、

$$U(a, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

すなわち、

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

となればよい。アルキメデスの原理により、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\frac{1}{n} < 2\varepsilon$$

となる $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在する。また、 n を分母とする有理数は数直線上に幅 $\frac{1}{n}$ で並んでいるから、

$$\frac{m}{n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

となる $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在する。

したがって $a \in \mathbb{R}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ となるため、

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

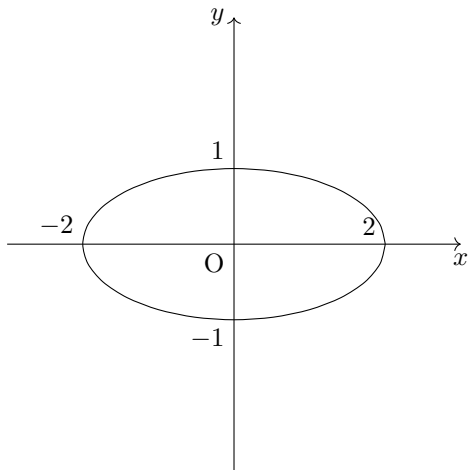
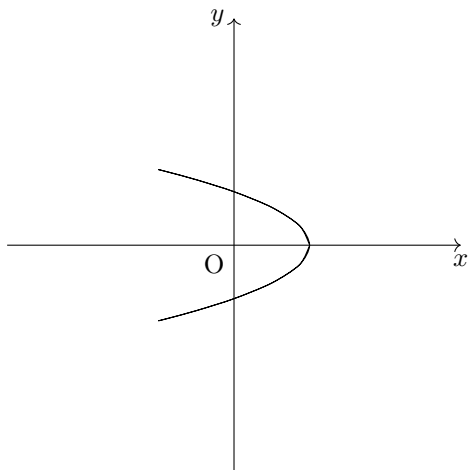
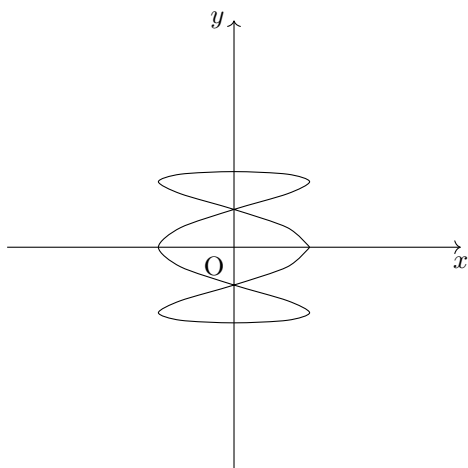
である。

p63-64 : 4-(i)

証明. $d(x) = 0$ は $\inf_{y \in A} |x - y| = 0$ ともかける。

$$\begin{aligned} \inf_{y \in A} |x - y| = 0 &\iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists y \in A) (|x - y| < \varepsilon) \\ &\iff x \in \overline{A} \end{aligned}$$

これにより示された。 \square

第 2 章：微分法**p90-91 : 1-(i)****p90-91 : 1-(ii)****p90-91 : 1-(iii)**

p90-91 : 9-(i)

$$(\log x)^{(1)} = 1/x, \quad (\log x)^{(2)} = -1/x^2, \quad (\log x)^{(3)} = 2/x^3, \quad (\log x)^{(4)} = -6/x^4$$

であるから,

$$(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

と推測できる. この推測が正しいことを数学的帰納法により証明する.

(1) $n = 1$ のとき, $(\log x)^{(1)} = 1/x$ であり,

$$\frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1} = 1/x$$

であるから, この場合に推測は正しい.

(2) $n = k$ のときに, この推測が正しいと仮定すると,

$$(\log x)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} (\log x)^{(k+1)} &= \left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \right)' \\ &= \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \end{aligned}$$

であるから, $n = k + 1$ のときも推測は正しい.

(1),(2) より,

$$(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

である.

$$\left(\frac{1}{x^2 + 3x + 2} \right)^{(n)} = (-1)^n n! \{ (x+1)^{-n-1} - (x+2)^{-n-1} \}$$

p90-91 : 10

証明. $u(x) = (x^2 - 1)^n$ とおく, このとき,

$$U'(x) = 2xn(x^2 - 1)^{n-1}$$

だから,

$$(x^2 - 1)u'(x) = 2nx \cdot u(x)$$

この両辺を $(n+1)$ 回微分して,

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xu^{(n+1)}(x) + \frac{(n+1)n}{2} \cdot u^{(n)}(x) &= 2n xu^{(n+1)}(x) + 2(n+1)nu^{(n)}(x) \\ \therefore (x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2nu^{(n+1)}(x) - (n+1)nu^{(n)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

ここで, $u^{(n)}(x) = 2^n n! P_n(x)$ なので,

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)\{2^n n! P_n''(x)\} + 2x\{2^n n! P_n'(x)\} - n(n+1)\{2^n n! P_n(x)\} &= 0 \\ \therefore (x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

□

p106-107 : 10

証明. 3つのことを証明する.

a) と b) が同値であること

$a < x \leq y$ または $y \leq x < a$ に対して, $0 \leq t < 1$ を用いて,

$$x = ta + (1-t)y$$

とおく. $a < x \leq y$ とする. このとき,

$$t = \frac{x-y}{a-y} \tag{1}$$

と表せることはよい.

また, f は I で凸であり, これは

$$f(x) = tf(a) + (1-t)f(y) < tf(a) + (1-t)f(y) \tag{2}$$

と同値である. $x < y$ のとき (2) に (1) の t の値を代入すれば,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{3}$$

を得る. $x = y$ のときは明らか.

a) と c) が同値であること

c) を仮定する. (3) の左辺について, 平均値の定理により,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

をみたす ξ ($a < \xi < x$) が存在する. 同様に, (3) の右辺について, 平均値の定理により,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\eta)$$

をみたす η ($x < \eta < y$) が存在する. 仮定により, $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ だから, (3) が成り立ち, a) が従う.

a), すなわち (3) を仮定する. 左辺について, $x \rightarrow +a$ とすれば, これは $f'(a)$ に収束し, 右辺は, これは $(f(y) - f(a))/(y - a)$ に収束する (これを α とおく.). $f'(a) \leq \alpha$ となることはよい. また, $x \rightarrow -y$ とすれば, 左辺は α に, 右辺は $f'(y)$ に収束する. $\alpha \leq f'(y)$ となることもよい.

よって, a) と c) は同値である.

a) と d) が同値であること

d) を仮定する. これは $f'(x)$ は I 上で単調増加であることと同値である.

以上の議論により, 示された. \square

第3章：初等函数

p191-193 : 1

証明. $m, n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ とし, $e = \frac{m}{n}$ と表される, すなわち e が有理数だと仮定する. このとき, 与えられた式を変形して,

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{m}{n} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

とする. これにより,

$$\frac{e^\theta}{n+1} = m \cdot n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$$

であり, $m \cdot n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}$ であるから, $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$ である. よって, $0 < \theta < 1$, $2 < e < 3$ とあわせて,

$$1 \leq \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}$$

であり, $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$ であるから $n = 1$ となる. ゆえに $e = m$ となり, e は整数である. しかし $2 < e < 3$ であるから, これは矛盾である. よって先の仮定が誤りであり, e は無理数である. \square

第4章：積分法

p239 : 1-(i)

$\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx &= \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \left[\log(t^2 + 1) \right]_0^1 \\ &= \log 2 - 0 = \log 2 \end{aligned}$$

p239 : 1-(ii)

$x - a = a \sin \theta$ ($-\pi \leq \theta < \pi$) とする置換を用いる.

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \sqrt{2ax - x^2} dx &= \int_0^a \sqrt{-(x-a)^2 + a^2} dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a |\cos \theta| \cdot a \cos \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} a^2 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\
 &= \frac{\pi a^2}{4}
 \end{aligned}$$

p239 : 1-(iii)

$$|\sin 2\theta| = \begin{cases} \sin 2\theta & (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \\ -\sin 2\theta & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi |\sin 2\theta| d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\sin 2\theta) d\theta \\
 &= \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\
 &= -\frac{(-1-1)}{2} + \frac{1+1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

p239 : 1-(iv)

$$\int_0^\pi e^{inx} dx = \begin{cases} 2\pi & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

である. $n = 0$ のときは

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{inx} dx &= \int_0^{2\pi} dx \\ &= \left[x \right]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

となり, $n \neq 0$ のときは

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{inx} dx &= \left[\frac{e^{inx}}{in} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{in} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

となる.

p239 : 1-(v)

$m = n$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx &= \int_0^{2\pi} \cos mx \sin mx dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2mx + \sin 0}{2} \right) dx \\ &= \left[-\frac{\cos 2mx}{2m} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

となる. $m \neq n$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(m+n)x + \sin(n-m)x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

である, ここまでの議論と, m と n の対称性により,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

となる.

p239 : 1-(vi)

$m \neq n$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(m+n)x + \cos(n-m)x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

となる. $m = n \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2mx}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2mx}{4m} \right]_0^{2\pi} = \pi\end{aligned}$$

となる. $m = n = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} dx \\ &= [x]_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

となる, 以上をまとめて,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2\pi & (m = n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

p239 : 3-(i)

部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}\int x^\alpha \log x \, dx &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1} \log x}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

p239 : 3-(ii)

部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}
 \int x^n e^x dx &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \\
 &= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + (n-1) \int x^{n-2} e^x dx \\
 &= \cdots = x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \cdots + (-1)^n n! \int e^x dx \\
 &= e^x (x^n - n x^{n-1} + \cdots + (-1)^n n!) + C
 \end{aligned}$$

となる.

p239 : 3-(iii)

部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}
 \int (\log x)^n dx &= \int (\log x)^n (x)' dx \\
 &= x (\log x)^n - n \int \frac{(\log x)^{n-1}}{x} \cdot x dx \\
 &= x (\log x)^n - n x (\log x)^{n-1} + (n-1) \int \frac{(\log x)^{n-2}}{x} \cdot x dx \\
 &= \cdots = x (\log x)^n - n x (\log x)^{n-1} + \cdots + x (-1)^n n! + C
 \end{aligned}$$

となり、これが答えである.

p239 : 3-(iv)

部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}
 \int \arcsin x dx &= \int (x)' \arcsin x dx \\
 &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
 \end{aligned}$$

であり、これが答えである.

p239 : 3-(v)

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\
 &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C
 \end{aligned}$$

である.

p239 : 3-(vii)

$x+1=t$ とおくと, $dt=dx$ であり,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3} dx &= \int \frac{(t-1)^2+2}{t^3} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{3}{t^3} \right) dt \\ &= \log|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{2(x+1)^2} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

p239 : 3-(vi)

$(\log x)' = \frac{1}{x}$ であることを用いて,

$$\begin{aligned}\int \frac{(\log x)^2}{x} dx &= \int (\log x)^2 (\log x)' dx \\ &= \frac{(\log x)^3}{3} + C\end{aligned}$$

となり, これが答えである.

p239 : 3-(viii)

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) dx = \int (\sin^3 x - \sin^5 x) dx \\ &= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \sin x dx \\ &= \int \{(1-t^2) - (1-t^2)^2\}(-1) dt \quad (\cos x = t) \\ &= \int (t^4 - t^2) dt \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

である.

p239 : 3-(ix)

$\sqrt[6]{x} = t$ とおくと, $x = t^6$ であるから, $\frac{dx}{dt} = 6t^5$ である. これらを用いると,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1}{t^3 - t^2} \cdot 6t^5 dt \\ &= \int \frac{6t^3}{t-1} dt \\ &= \int \frac{(t-1)(6t^2 + 6t + 1) + 6}{t-1} dt \\ &= \int \left(6t^2 + 6t + 6 + \frac{6}{t-1} \right) dt \\ &= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\log|\sqrt[6]{x} - 1| + C \end{aligned}$$

である

p239-240 : 4-(i)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[\log(1+x) \right]_0^1 = \log 2 \end{aligned}$$

である.

p239-240 : 4-(ii)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k/n}}\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k/n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} \cdot 2t dt \\ &= \left[2t \right]_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1)\end{aligned}$$

p247 : 1-(i)

計算すると,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3-x} dx &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{-(x-1) + (x+1)}{(x-1)x(x+1)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ -\frac{1}{(x+1)x} + \frac{1}{x(x-1)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{-(x+1) + x}{(x+1)x} + \frac{x - (x-1)}{x(x-1)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= -\log |x| + \frac{1}{2} \log |x^2 - 1| + C\end{aligned}$$

であり, これが答えである.

p247 : 1-(ii)

$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ であるから,

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \int \left(1 + \frac{6x^2 - 11x + 6}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right) dx$$

である. ここで, A, B, C を定数として,

$$\frac{6x^2 - 11x + 6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

とおく. これより,

$$\begin{aligned} 6x^2 - 11x + 6 &= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) \\ \therefore A &= \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{8}, \quad C = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx &= \int \left\{ 1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{8(x-2)} + \frac{27}{2(x-3)} \right\} dx \\ &= x + \frac{1}{2} \log \left| \frac{(x-1)(x-3)^{27}}{(x-2)^{16}} \right| + C \end{aligned}$$

である.

p247 : 1-(iii)

A, B, C, D を定数として,

$$\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

とおくと, 簡単な計算により, $A = -1, B = 2, C = 1, D = 2$ とわかるので,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx \\ &= \log \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} + C \end{aligned}$$

を得る.

p247 : 1-(v)

$\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ であるから,

$$\int \frac{1}{a + b \cos x} dx = \int \frac{1}{(a-b)t^2 + a+b} dt$$

となる. よって,

$$\int \frac{1}{a + b \cos x} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \tan \frac{x}{2} + C & (a = b \neq 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{a \tan \frac{x}{2}} + C & (a = -b \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

p247 : 1-(viii)

$\tan x = t$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ であるから, 求める不定積分は,

$$\begin{aligned} \int \frac{1/\cos^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} dx &= \int \frac{1}{a^2 + b^2 t^2} dt \\ &= \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b}{a} \tan x \right) + C \end{aligned}$$

である.

p247 : 1-(xiii)

$x + \frac{1}{x} = t$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$ であり, 求める不定積分は,

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x^2}{1+x^2\sqrt{1+x^4}} dx &= \int \frac{1-x^2}{x^2(x+1/x)\sqrt{x^2+1/x^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-2}} dt \end{aligned}$$

となる. ここで, $s = \frac{1}{t}$ とすると, $\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{s^2}$ であり,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t\sqrt{t^2-2}} dt &= \int \frac{1}{\sqrt{1-2s^2}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}s) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1} \right) + C \end{aligned}$$

となる.

p247 : 1-(xi))

$x = \frac{1}{t}$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ である. また, $x^2 + 1 = \frac{1}{t^2} + 1$ となる. よって,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{t}{\sqrt{1/t^2+1}} \cdot (-1/t^2) dt \\ &= - \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \log \left| t + \sqrt{t^2+1} \right| + C \\ &= \log \left| \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C \end{aligned}$$

である.

p247 : 1-(xii)**|**

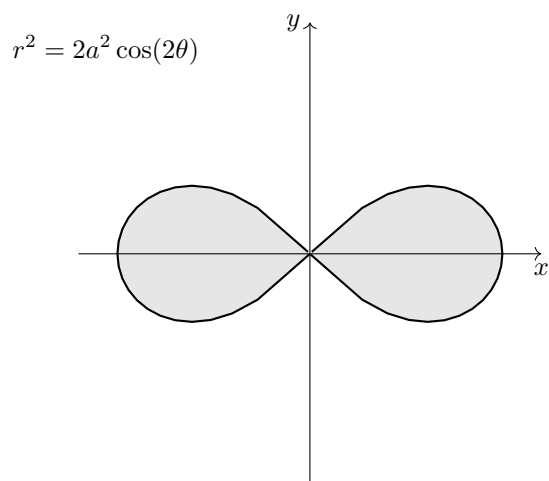
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}} \\ &= \arcsin\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) + C\end{aligned}$$

p290 : 3

求める面積を S とすると、第 1 象限の面積を 4 倍すればよいので、

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a^2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2 \left[a^2 \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 (a^2 \sin(\pi/2) - a^2 \sin(0)) \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

となる.

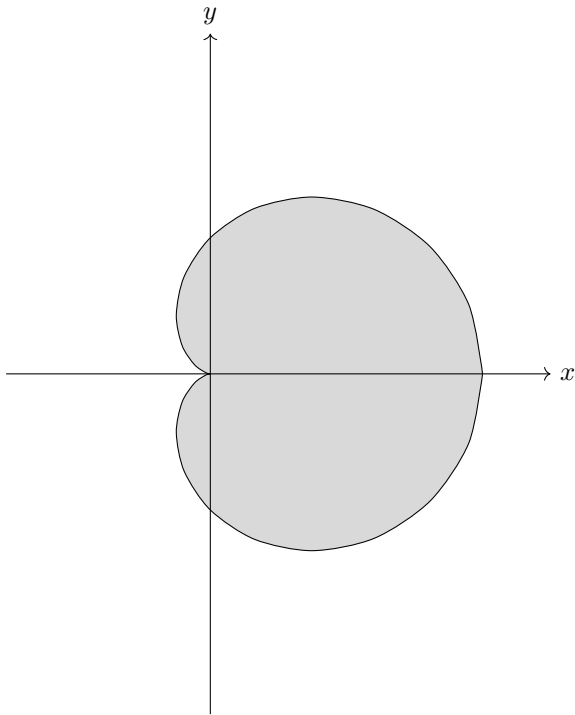


p290 : 4

求める面積を S ，求める求める体積を V とおくと，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \left(1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= a^2 \left[\frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{3\pi a^2}{2} \end{aligned}$$

となる.



第5章：級数

p366 : 1-(i)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m-1} = -1$$

であり, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は $\{-1, 1\}$ である.

ゆえに,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

である.

p366 : 1-(ii)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m-1} = -\infty$$

であり, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は $\{-\infty, \infty\}$ である^{†1}.

ゆえに,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

である.

^{†1} 補完数直線を考えているため, これでよい.

p366 : 1-(iii)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の集積値全体の集合は $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ である. ゆえに,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である.

参考文献

- [1] 杉浦光夫『解析入門 I』, 東京大学出版会, 1980