理工系の微分積分学・解答集

2023.8～

なまちゃん

目次

第 1 章：極限と連続性

p3：問 1

証明. まず，$|x|$，$|y|$ の定義により，

$$-|x| \leqq x \leqq |x|, \quad -|y| \leqq y \leqq |y|$$

が成り立つ．この 2 式の辺々を足して，

$$-(|x|+|y|) \leqq x+y \leqq |x|+|y|$$

を得る．さらに，

$$|x|+|y| \geqq \max\{x+y, -(x+y)\} = |x+y|$$

となる．また，

$$|x| = |x-y+y| \leqq |x-y|+|y|$$
$$\therefore\ |x|-|y| \leqq |x-y|$$

となる．$x \geqq y$，$x \leqq y$ のときがあることを加味すると，

$$||x|-|y|| \leqq |x \pm y|$$

である．以上より，

$$||x|-|y|| \leqq |x \pm y| \leqq |x|+|y|$$

が成り立つことが示された． □

p3：問 2

証明. n に関する数学的帰納法で証明する.

(I) $n = 1$ のとき,

$$(1+x)^1 = 1 + x$$

により，与えられた等式は成り立つ.

(II) $n = k$ としたときに，与えられた等式が成り立つと仮定すると,

$$(1+x)^k \geqq 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2$$

が成り立つ．この式の両辺に $(1+x)$ をかけ,

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &\geqq \left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2\right)(1+x) \\ &= 1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3 \\ &\geqq 1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2\end{aligned}$$

であるから，$n = k+1$ のときにもこの等式は成り立つ.

(I)，(II) の考察により証明された． □

p5：問 3

証明. 必要性，十分性をそれぞれ示す.

(I) 必要性について示す．$m \coloneqq \max E$ とすると．任意の $x \in E$ について $x \leqq m$ である．よって m は E の上界のひとつである．また，$m \in E$ より，l を E の上界とすると，$m \leq l$ である．よって m は E の上界の最小数であり，上限の定義により $\sup E = m \in E$ となる.

(II) 十分性について示す．α は E の上界の最小元だから，E の任意の元 x について $x \leq \alpha$．一方 $\alpha \in E$ でもあるから $\max E = \alpha$ となり E は最大値をもつ.

以上 (I)，(II) により示された． □

p5：問 4-(1)

$A \coloneqq \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$，$a_n \coloneqq 1 + 1/n$ とする.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_{n+1} \leqq a_n$ であることにより，$\{a_n\}$ は単調減少列である．ゆえに

$$\sup A = a_1 = 2$$

である.

下限については

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

であることと，$\{a_n\}$ はその下限に収束することにより，

$$\inf A = 1$$

となる.

以上により，

$$\sup\{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2, \quad \inf\{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$$

である.

p5：問 4-(2)

数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列であることにより，$\{a_n\}$ の定義から，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$$

となることと併せると，$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \pi$ である.

他方，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \geqq a_1 = 3.1$ であることにより，

$$\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 3.1$$

である.

以上の考察により，

$$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \pi, \quad \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 3.1$$

である.

p7：問 6

証明. 与えられた条件により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geqq N_1 \Longrightarrow \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$$

が成り立つ，ここで $M \coloneqq \dfrac{1}{\varepsilon}$ とおくと，上の $N_1 \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geqq n_0 \Longrightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

となり，これより $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ が示された．

さて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を仮定すると，任意の $M > 0$ に対して，$N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geqq N_2 \Longrightarrow a_n > M$$

が成り立つ．

ここで $\varepsilon \coloneqq 1/M$ とすると，

$$n \geqq N_2 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

となり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$ となる．

以上の考察により証明された． □

p7：問 7

証明. 任意の $M > 0$ に対し，

$$a_n > M + 1 \quad (n > N)$$

なる N が存在する．$m > \max\left\{N, N(M+1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k\right\}$ となるような m をひとつとり固定する．$n > m$ に対して

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} a_k \\ &> \frac{N(M+1) - n}{n} + \frac{n - N}{n}(M+1) \\ &= M \end{aligned}$$

□

p9：問 8

証明. 与えられた式から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\begin{aligned} n \geqq N_1 &\Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \\ n \geqq N_2 &\Longrightarrow |b_n - \beta| < \varepsilon \end{aligned}$$

となる．

さて，$N_3 \coloneqq \max\{N_1, N_2\}$ とすると，

$$n \geqq N_3 \Longrightarrow |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

を得る．

後半についても，上の N_1，N_2，N_3 を用いて証明する．

さて，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は収束するので，有界であることがわかり，ある M が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\begin{aligned} |a_n| &\leqq M \\ |b_n| &\leqq M \end{aligned}$$

である．よって，$n \geqq N_3$ のとき，

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &\leqq |b_n||a_n - \alpha| + |\alpha||b_n - \beta| \\ &< (M + \alpha)\varepsilon \end{aligned}$$

となるため，

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$$

が成り立つ．

以上の考察により証明された． □

p9：問 9-(1)

証明. $\{a_n\}$ と $\{a_n + b_n\}$ が収束するので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\begin{aligned} n \geqq N_1 &\Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \\ n \geqq N_2 &\Longrightarrow |(a_n + b_n) - \gamma| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する．

さて，$N_3 \coloneqq \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$n \geqq N_3$ のとき，

$$\begin{aligned} |b_n - (\gamma - \alpha)| &\leqq |(a_n + b_n) - \gamma| + |\alpha - a_n| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

となり，数列 $\{b_n\}$ は $\gamma - \alpha$ に収束する． □

p9：問 9-(2)

証明. $a_nb_n \to \gamma$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$a_n \to \alpha$ から $\dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{\alpha}$ $(\because \text{Thm2})$

(i) $\gamma \neq 0$ のとき，仮定より

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| < \frac{\varepsilon}{2|\gamma|} \quad (n \geq N_1)$$

$$|a_nb_n - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2\left(1 + \frac{1}{|\alpha|}\right)} \quad (n \geq N_2)$$

となる N_1, N_2 が存在する．このとき，$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，

$$\begin{aligned}\left|b_n - \frac{\gamma}{\alpha}\right| &= \left|\frac{1}{a_n}(a_nb_n - \gamma) + \gamma\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{a_n}\right||a_nb_n - \gamma| + |\gamma|\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| \quad (n \geq N) \ \cdots \ (*)\end{aligned}$$

ここで，$\left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{\alpha}\right| < 1 \quad (n \geq N_3)$ となる N_3 が存在し，

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| \geq \left|\frac{1}{a_n}\right| - \left|\frac{1}{\alpha}\right|$$

から，

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < 1 + \frac{1}{|\alpha|}$$

よって，$N' := \max\{N_1, N_2, N_3\}$ とすれば，

$$\begin{aligned}\left|b_n - \frac{\gamma}{\alpha}\right| &\leq \frac{1}{|a_n|}|a_nb_n - \gamma| + |\gamma|\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| \\ &< \left(1 + \frac{1}{|\alpha|}\right)\frac{\varepsilon}{2\left(1 + \frac{1}{|\alpha|}\right)} + |\gamma| \cdot \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|\gamma|} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \quad (n \geq N')\end{aligned}$$

(ii) $\gamma = 0$ のとき

$$\begin{aligned}|b_n - 0| &= \left|\frac{1}{a_n}\right||a_nb_n| \\ &< \left(1 + \frac{1}{|\alpha|}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2\left(1 + \frac{1}{|\alpha|}\right)} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

より $b_n \to 0$

□

p9：問 10

証明. $a > b$ であると仮定する．このとき，$a - b > 0$ なので，$a - b = 2\varepsilon$ とおくと，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geqq N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n \geqq n_0 \Longrightarrow |b_n - b| < \varepsilon$$

が成立．このような $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$$

となるが，これは矛盾である．

よって先の仮定が誤りであり，ここまでで前半の主張が示された．

後半については，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ から，任意の $M > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geqq N \Longrightarrow a_n > M$$

が成り立つ．このとき，$a_n \leqq b_n$ なので，上の $N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geqq N \Longrightarrow b_n > M$$

となり，このとき $\lim_{n\to\infty} b_n$ となる．

$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ の場合も同様にして証明されるので，これで定理の主張が示された． □

p10：問 11

証明. 数列 $\{a_n\}$ を上に有界でない増加列とする．このとき，任意の実数 M に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ があって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geqq N \Longrightarrow M < a_N \leqq a_n$$

となる．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

となり，これが証明すべきことであった． □

p10：問 12

$a=0$ のときは明らかに 0 に収束するので，$a \neq 0$ とする．$2|a| \leqq N$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとる．このとき，

$$\begin{aligned} 0 &< \left|\frac{a^n}{n!}\right| \\ &\leqq \frac{|a|^n}{n!} \\ &= \frac{|a|^N}{N!} \cdot \frac{|a|}{N+1} \cdot \frac{|a|}{N+2} \cdots \frac{|a|}{n} \\ &\leqq \frac{|a|^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \end{aligned}$$

であるから，

$$-\frac{|a|^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \leqq \frac{a^n}{n!} \leqq \frac{|a|^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

となり，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

である

p14：問 13-(1)

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

とおく．$\{a_n\}$ の第 n 部分和を S_n とすると，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となるため，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

である．

p14：問 13-(2)

$a_n = \dfrac{n}{2^n}$ とし，数列 $\{a_n\}$ の第 n 部分和を S_n とすると，

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

となる．これにより，

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}$$

となるため，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} \\ \therefore\ S_n &= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n}{2^n} \end{aligned}$$

となるため，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n}{2^n}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

である．よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

となる．

p16：問 14-(1)

証明. 必要条件であること，十分条件であることをそれぞれ証明する．

(I) α は $\{a_n\}$ の集積値であるから，$\{a_n\}$ の部分列で $\lim_{k\to\infty} a_{n(k)} = \alpha$ となるような自然数列 $\{n(k)\}$ が存在し，これよりただちに後半の主張が従う．

(II) 後半の条件のもと，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となるような $n \in \mathbb{N}$ が無限個存在するので，$1 > 0$ に対し，$\left|a_{n(1)} - \alpha\right| < 1$ となるような $n(1) \in \mathbb{N}$ がある．このようにして，$\left|a_{n(2)} - \alpha\right| < 1/2$ となる $n(2) \in \mathbb{N}$ を $n(1) < n(2)$ となるようにとれる．この繰り返しで，自然数列 $\{n(k)\}$ を

$$\left|a_{n(k)} - \alpha\right| < 1/k$$

となるようにとることができ，$k \to \infty$ としたときに $1/k \to 0$ だから，これより α が $\{a_n\}$ の集積値であることが従う．

以上 (I)，(II) により証明された．□

p16：問 14-(3)

証明. 必要条件であること，十分条件であることをそれぞれ証明する．

(I) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とすると，$\{a_n\}$ の任意の部分列も α に収束する．よって，上極限，下極限の定義により，

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

である．

(II) $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geqq n\}$ と定義すると

$$\inf A_n \leqq a_n \leqq \sup A_n$$

となる．
いま仮定により，$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \lim_{n\to\infty} \inf A_n$ であり，この値を α とすると，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

となり，ただちに主張が従う．

以上 (I)，(II) により証明された．□

p18：問 21

証明. $A = [0, 1]$ とする.

$x \in A \setminus \mathbb{Q}$ であるとき，$f(x) = 1 - x \in A \setminus \mathbb{Q}$ である．また，$x \in \mathbb{Q}$ のとき，$f(x) = x \in \mathbb{Q}$ である.

次に，$x_1, x_2 \in A$ となる x_1，x_2 をとる．このとき

$$f(x_1) = f(x_2)$$

であると仮定する．このとき，上の考察により，$x_1 = x_2$ もしくは $1 - x_1 = 1 - x_2$ となり，いずれにせよ $x_1 = x_2$ となる.

よって，ここまでで f は一対一の写像であることが示された.

さて，$\sqrt{2}/2 \in A$，$7/10 \in A$ であることは明らか．さらに，

$$\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100} < \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

であるから，$7/10 < \sqrt{2}/2$ である.

ここで，

$$f\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{7}{10}, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

であり．さらに

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{7}{10}$$

なので，f は単調ではないことが示された.

以上の考察により，f は一対一ではあるが単調ではない． □

p21：問 24-(1)

計算すると，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin bx}{\sin ax} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin bx}{bx} \cdot \frac{ax}{\sin ax} \cdot \frac{b}{a} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \frac{b}{a} \\
&= \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

である.

p21：問 24-(2)

$t = x - \pi/6$ とおくと，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/6}\frac{\sin(2x-\pi/3)}{x-\pi/6} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot 2 \\ &= 1\cdot 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

である．

p23：問 28-(1)

計算すると，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる．

p32：3-(2)

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

である．

p32：3-(3)

$$n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)=\sqrt{n^2+n}-n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

であるから，これを a_n とすると，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる．

p32：3-(4)

$$3^n+n(-2)^n=3^n\left(1+\frac{n}{\left(-\frac{3}{2}\right)^n}\right)$$

なので，

$$\lim_{n\to\infty} 3^n\left(1+\frac{n}{\left(-\frac{3}{2}\right)^n}\right)=\infty$$

により，

$$\lim_{n\to\infty}\left(3^n+n(-2)^n\right)=\infty$$

である．

p32：3-(5)

$$n\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}\cdot\pi$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}\cdot\pi \quad =1\cdot\pi=\pi$$

なので，

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$$

である．

p32：5-(1)

$a > 1$ のとき，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1+\dfrac{1}{a^n}} \\ &= a\end{aligned}$$

となる．

また，$0 < a < 1$ のとき，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n+1} &= \frac{0}{0+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる．

また，$a = 1$ のとき，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n+1} &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である．

p32：5-(2)

$0 < a < 1$ のとき，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}-a^0}{a^{2n}+a^0} \\ &= \frac{0-1}{0+1} \\ &= -1\end{aligned}$$

である．

$a = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-1}{1+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

である．

最後に，$a > 1$ のとき，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a^0-a^{-2n}}{a^0+a^{-2n}} \\ &= \frac{1-0}{1+0} \\ &= 1\end{aligned}$$

である．

p33：12-(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{3x}{e^{3x}-1}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}$$

となる．

p33：12-(2)

$$f(x)=(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$$

とおくと，

$$\log f(x)=\frac{\log\bigl(1+x+x^2\bigr)}{x}$$

となり，$\lim_{x\to 0}\log\bigl(1+x+x^2\bigr)=0$．$\lim_{x\to 0}x=0$ であるから，ロピタルの定理を適用すると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\bigl(1+x+x^2\bigr)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{1+x+x^2}=1$$

である．よって

$$\lim_{x\to 0}f(x)=e^1=e$$

となる．

p33：12-(3)

$$\log\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)=\frac{\log x}{1-x}$$

であり，$\lim_{x\to 1}\log x=0$，$\lim_{x\to 1}(1-x)=0$ であるから，ロピタルの定理が適用でき，

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)$$
$$=-1$$

であるから，

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$$
$$=\frac{1}{e}$$

である．

p33：12-(4)

まず，$\lim_{x \to 0}(1-\cos x) = 0$，$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ であるから，ロピタルの定理が適用でき，

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

となる．

p33：12-(6)

まず，

$$-1 \leqq \sin \frac{1}{x} \leqq 1$$

である．これと $|x| \geqq 0$ であることから，

$$-\sqrt{|x|} \leqq \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x} \leqq \sqrt{|x|}$$

を得る．ここで，$\lim_{x \to 0}(-\sqrt{|x|}) = 0$，$\lim_{x \to 0} \sqrt{|x|} = 0$ であることから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x} = 0$$

である．

p33：16-(1)

計算すると，

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

である．

p33：18

定義：

$E, F \subset \mathbb{R}$ のとき，kE，$E+F$ を以下のように定義する．

$$kE = \{kx \mid x \in E\} \ (k > 0),$$
$$E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}.$$

《(1) について》

証明. 二段階に分けて証明する．

(I) まず，$x \in E$ とすると，$x \leqq \sup E$ であるから，$k > 0$ のもとでは $kx \leqq k \sup E$ となり，$k \sup E$ は kE の上界のひとつである．ゆえに

$$\sup kE \leqq k \sup E$$

となる．

(II) 次に，$a < k \sup E$ とすると，$k > 0$ のもとで $a/k < x$ となる $x \in E$ が存在する．ゆえに

$$a < kx \in kE$$

となり， $k \sup E$ より小さい実数は kE の上界でない．

(I)，(II) により

$$\sup\{kx \mid x \in E\} = k \sup E.$$

□

《(2) について》

証明. 二段階に分けて証明する．

(I) まず，$x \in E$ と $y \in F$ から $x \leqq \sup E$，$y \leqq \sup F$ であるがゆえに，$x + y \leqq \sup E + \sup F$ となり，$\sup E + \sup F$ は $E + F$ の上界のひとつである．ゆえに

$$\sup(E + F) \leqq \sup E + \sup F.$$

(II) 次に，$s < \sup E + \sup F$ を任意にとる．
このとき，$s - \sup E < \sup F$ であるから $s - \sup E$ は F の上界でなく，$s - \sup E < y$ なる $y \in F$ が存在する．ゆえに $s - y < \sup E$ である．このとき $s - y$ は E の上界でないので $s - y < x$ をみたす $x \in E$ が存在する．この議論から，

$$s < x + y$$

となり，s は $E + F$ の上界でない．つまり，$\sup E + \sup F$ より小さい数は $E + F$ の上界でない．

(I)，(II) の議論により，

$$\sup\{x + y \mid x \in E, y \in F\} = \sup E + \sup F.$$

□

p34：22-(1)

《補題》

$\{a_n\}$ を実数列とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

であるならば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

である．ただし a は実数の定数とする．

証明． $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n \geqq N_1 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

となる．

また，

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right|$$

と変形する．この右辺に補題を適用し，

$$\left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| \leqq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}$$

を得る．これにより，

$$n \geqq N_1 \Longrightarrow \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1 - 1} - a|}{n} + \left(\frac{n - n_1 + 1}{n}\right)\varepsilon$$

となる．ここで $N_2 \coloneqq N_1 + 1$ とすると，$n \geqq N_2$ であるとき $\left(\dfrac{n - n_1 + 1}{n}\right)\varepsilon < \varepsilon$ となることに注意する．

さて，

$$n \geqq N_3 \Longrightarrow \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1 - 1} - a|}{n} < \varepsilon$$

となるように $N_3 \in \mathbb{N}$ をとる．$N \coloneqq \max\{N_2, N_3\}$ とすると，

$$n \geqq N \Longrightarrow \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1 - 1} - a|}{n} + \left(\frac{n - n_1 + 1}{n}\right)\varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

であり，これより

$$n \geqq N \Longrightarrow \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| < 2\varepsilon$$

となる．書き換えると．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

となり，これが証明すべきことであった．　□

証明. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるから，$\log x$ の連続性により，

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log \alpha$$

である．ここで，

$$\log \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n}{n}$$

であるから，補題により，

$$\lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \log \alpha$$

となる．ここで，e^x の連続性により，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} &= e^{\log \alpha} \\ &= \alpha\end{aligned}$$

となり，これが証明すべきことであった． □

第 2 章：微分とその応用

p38：問 1-(1)

$f(x) = x|x|$ の導関数は，$x > 0$ のとき，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\end{aligned}$$

であり，$x < 0$ のときは，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)^2 - (-x^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(-2x-h) = -2x\end{aligned}$$

となる．また，$x = 0$ の点では，

$$\lim_{h\to +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0, \quad \lim_{h\to -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$$

であるから，$f'(0) = 0$ である．

以上をまとめると，

$$f'(x) = 2|x|$$

となる．

p38：問 1-(2)

$f(x)=\cos x$ とすると，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}-\frac{\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\\ &= -\sin x\end{aligned}$$

であるから，

$$(\cos x)'=-\sin x$$

である．

p38：問 1-(3)

$f(x)=\sqrt{x}$ とすると，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

である．

p38：問 3

証明. $1/g(x)$ の導関数について調べれば，積の場合の考察により $f(x)/g(x)$ の導関数が得られるので，$1/g(x)$ について考える．

計算すると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right)\\ =&\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\end{aligned}$$

であるから，定理 1・系により $1/g(x)$ は微分可能で，

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\\ &= -\frac{g'(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

となり，これからただちに主張が従う． □

p38：問 5-(1)

計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) &= \frac{(1)'\cdot(1+x^2)-1\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

となる．

p38：問 5-(2)

計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

である．

p38：問 5-(3)

計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^x\sin x) &= (e^x)'\sin x+e^x(\sin x)' \\ &= e^x\sin x+e^x\cos x \\ &= e^x(\sin x+\cos x)\end{aligned}$$

となる．

p38：問 5-(4)

計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log_a|x| &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\log|x|}{\log a}\right) \\ &= \frac{1}{x\log a}\end{aligned}$$

となる．

p39：問 6-(1)

$$z = y^2, \quad y = \sin x$$

とおくと，

$$\begin{aligned}(\sin^2 x)' &= \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d(y^2)}{dy}\frac{dy}{dx} \\ &= 2y \cdot \cos x \\ &= 2\sin x \cos x\end{aligned}$$

である．

p39：問 6-(2)

$$z = \sin y, \quad y = x^2$$

とおくと，

$$\begin{aligned}(\sin(x^2))' &= \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d(\sin y)}{dy}\frac{dy}{dx} \\ &= \cos y \cdot 2x \\ &= 2x\cos(x^2)\end{aligned}$$

である．

p39：問 6-(3)

$$z = \sqrt{y}, \quad y = 1 + x^2$$

とおくと，

$$\begin{aligned}(\sqrt{1+x^2})' &= \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d(\sqrt{y})}{dy}\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

である．

p39：問 6-(4)

$$z=\sqrt{y}, \quad y=1+\sin x$$

とおくと，

$$\begin{aligned}(\sqrt{1+\sin x})' &= \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d(\sqrt{y})}{dy}\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\cos x \\ &= \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}\end{aligned}$$

である．

p39：問 6-(5)

$$f(x)=a^x$$

とおくと，$a>0$ により，この両辺の自然対数をとることができ，

$$\log f(x)=\log a^x = x\log a$$

となる．この両辺を x で微分し，

$$\begin{aligned}&\frac{f'(x)}{f(x)}=\log a \\ &\therefore\ f'(x)=a^x\log a\end{aligned}$$

であるから，

$$(a^x)'=a^x\log a$$

である．

p39：問 6-(6)

微分すると，

$$\begin{aligned}(\log|\tan x|)' &= \frac{(\tan x)'}{\tan x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{\sin x\cos x}\end{aligned}$$

である．

p39：問 6-(7)

微分すると，

$$\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)' = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+A}}}{x+\sqrt{x^2+A}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$$

である．

p39：問 6-(8)

$x>0$ であることから，両辺の自然対数を取ることができ，

$$\log(x^x) = x\log x$$

である．この両辺を微分すると，

$$\frac{(x^x)'}{x^x} = \log x + 1$$

であるから，

$$(x^x)' = x^x(\log x + 1)$$

である．

p40：問 7-(1)

証明. $y=\sin x$ とすると，y は $-\pi/2<x<\pi/2$ で狭義増加で，$y'=\cos x\neq 0$ である．

よって，逆関数 $x=\sin^{-1}y$ は $-1<y<1$ で微分可能で，

$$\frac{d(\sin^{-1}y)}{dy} = \frac{1}{\cos x}$$

である．

ここで，$-\pi/2<x<\pi/2$ であるから，$\cos x>0$ であることがわかる．ゆえに，

$$\frac{d(\sin^{-1}y)}{dy} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

となり，これが証明すべきことであった． □

p40：問 7-(2)

証明. $y = \tan x$ とすると，y は $-\pi/2 < x < \pi/2$ で狭義増加で，$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ である．

よって，逆関数 $x = \tan^{-1} y$ は $-\infty < y < \infty$ で微分可能で，

$$\frac{d(\tan^{-1} y)}{dy} = \cos^2 x$$

である．ゆえに，

$$\begin{aligned}\frac{d(\tan^{-1} y)}{dy} &= \cos^2 x \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 x} \\ &= \frac{1}{1 + y^2}\end{aligned}$$

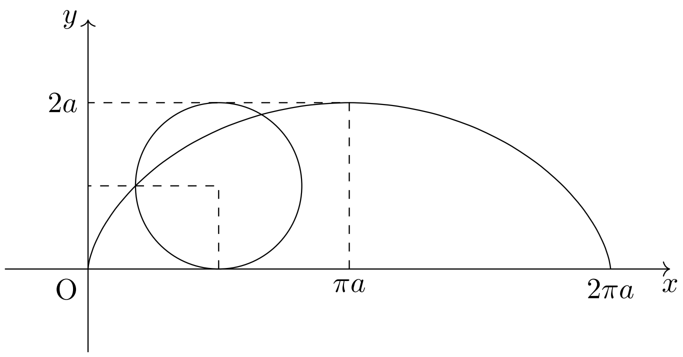
となり，これが証明すべきことであった． □

p41：問 8

計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \\ &= \frac{a \sin\theta}{a(1 - \cos\theta)} \\ &= \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}\end{aligned}$$

である．



p42：問 9

証明. n に関する数学的帰納法で証明する．

(I) $n=1$ のとき，$y=\cos(x+\pi/2)=-\sin x$ であり，$y'=-\sin x$ であることから成り立つ．

(II) $n=k$ のときにこの主張が正しいと仮定すると，

$$y^{(n)}=\cos(x+k\pi/2)$$

である．
この式の両辺を x で微分すると．

$$y^{(n+1)}=-\sin(x+k\pi/2)=\cos(x+(k+1)\pi/2)$$

となり，$n=k+1$ のときにもこの等式は成立する．

以上 (I)，(II) の考察により証明された．　□

p42：問 10

$$y^{(1)}=\frac{1}{1+x}$$
$$y^{(2)}=-\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$y^{(3)}=\frac{2}{(1+x)^3}$$
$$y^{(4)}=-\frac{6}{(1+x)^4}$$

などとなることから，

$$y^{(n)}=\frac{(n-1)\,!\,(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$$

と推測できる．この推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する．

(I) $n=1$ のとき，上の考察によりこの推測は正しい．

(II) $n=k$ のとき，上の推測が正しいと仮定すると，

$$y^{(k)}=\frac{(k-1)\,!\,(-1)^{k-1}}{(1+x)^k}$$

となり，

$$y^{(k+1)}=\frac{k\,!\,(-1)^k}{(1+x)^{k+1}}$$

となり，$n=k+1$ のときにもこの等式は成立する．

以上 (I)，(II) の考察により示された．
　よって，

$$y^{(n)}=\frac{(n-1)\,!\,(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$$

である．

p54：問 19-(1)

まず，

$$x\log x = \frac{\log x}{\dfrac{1}{x}}$$

であり，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0} 1/x = \infty$ により，ロピタルの定理が適用できるので，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x}} &= \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to+0}(-x) = 0\end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{x\to+0} x\log x = 0$$

となる．

p54：問 19-(2)

まず，

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

であり，$\displaystyle\lim_{x\to0}(x-\sin x) = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to0} x\sin x = 0$ であるから，ロピタルの定理が適用でき，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x}\\ &= 0\end{aligned}$$

となる．

p54：問 19-(5)

自然対数をとって計算すると，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\log\bigl(x^{\sin x}\bigr) &= \lim_{x\to+0}\sin x\log x \\ &= \frac{\log x}{1/\sin x}\end{aligned}$$

と変形でき，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}1/\sin x=\infty$ であるから，ロピタルの定理を用いて，

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{1/\sin x}=\lim_{x\to+0}-\frac{\tan x\sin x}{x}=1\cdot 0=0$$

であるから，

$$\lim_{x\to+0}x^{\sin x}=e^0=1$$

となる．

p54：問 19-(6)

自然対数をとって計算すると，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x} \\ &= \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x}\end{aligned}$$

であり，

$$\lim_{x\to0}(\log(1+x)-\log(1-x))=0,\quad \lim_{x\to0}x=0$$

であるから，ロピタルの定理を用いることにより，

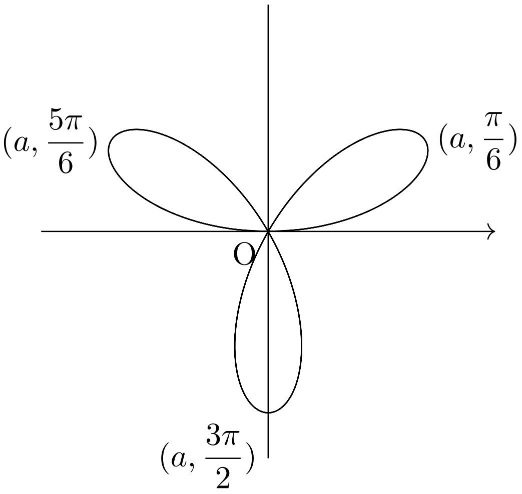
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x} &= \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{1+0}+\frac{1}{1-0} \\ &= 2\end{aligned}$$

であるから，

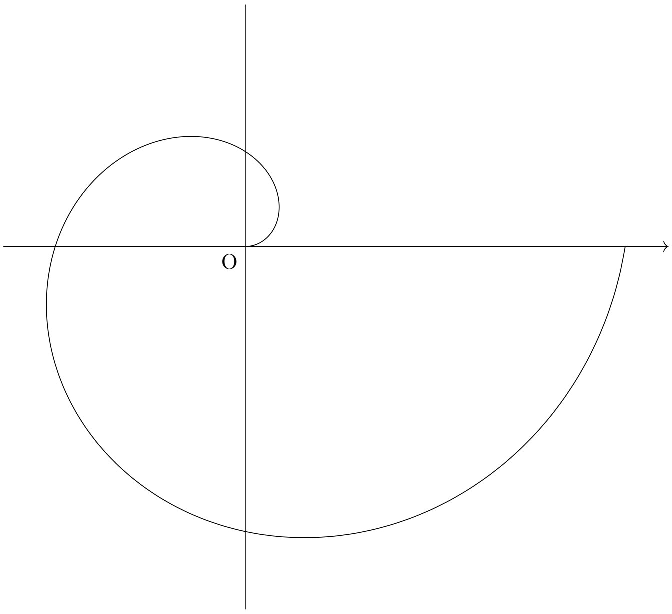
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2$$

である．

p68：問 26-(1)



p68：問 26-(2)



p68：1-(1)

計算すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\log|1+x| - \log|1-x|) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{(1+x)(1-x)}
\end{aligned}
$$

となる.

p68：1-(8)

計算すると，

$$\frac{d}{dx}\left(\log\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)'}{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$
$$= \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\sin x}$$

となる．

p68：2-(1)

計算すると，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$
$$= \frac{a\cosh t}{a\sinh t}$$
$$= \frac{\cosh t}{\sinh t}$$
$$= \frac{1}{\tanh t}$$

である．

また，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\tanh t}\right)\cdot\frac{1}{a\sinh t}$$
$$= -\frac{1}{\sinh^2 t}\cdot\frac{1}{a\sinh t}$$
$$= -\frac{1}{a\sinh^3 t}$$

となる．

p68：2-(2)

計算すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \\
&= \frac{3a\sin^2 t\cos t)}{3a\cos^2 t(-\sin t)} \\
&= \frac{\sin t}{-\cos t} \\
&= -\tan t
\end{aligned}
$$

である.

また,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} \\
&= \frac{d}{dt}(-\tan t)\cdot\frac{1}{3a\cos^2 t(-\sin t)} \\
&= -\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{3a\cos^2 t(-\sin t)} \\
&= -\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}
\end{aligned}
$$

である.

p68：3-(1)

まず,

$$
\cos x + \cos 2x = \frac{\cos 3x + \cos x}{2}
$$

なので,

$$
y^{(n)} = \frac{1}{2}\left(3^n\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right)
$$

である.

p69：4-(1)

$$f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x)$$

とおくと，

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} > 0$$

となるため，$f'(-1) = 0$ と併せると，$x > -1$ のとき $f'(x) > 0$ である．
よって，$x > -1$ のとき，$f(x)$ は単調に増加し，

$$f(-1) = 0 - 1 + \alpha > 0$$

であることをふまえると，$x > -1$ のとき $f(x) > 0$ である．
よって，$x > -1$ のとき，

$$(1+x)^\alpha - (1+\alpha x) > 0$$
$$(1+x)^\alpha > (1+\alpha x)$$

である．

p69：4-(2)

$$f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x)$$

とおくと，

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} < 0$$

となるため，$f'(-1) = 0$ と併せると，$x > -1$ のとき $f'(x) < 0$ である．
よって，$x > -1$ のとき，$f(x)$ は単調に減少し，

$$f(-1) = 0 - 1 + \alpha < 0$$

であることをふまえると，$x > -1$ のとき $f(x) < 0$ である．
よって，$x > -1$ のとき，

$$(1+x)^\alpha - (1+\alpha x) < 0$$
$$(1+x)^\alpha < (1+\alpha x)$$

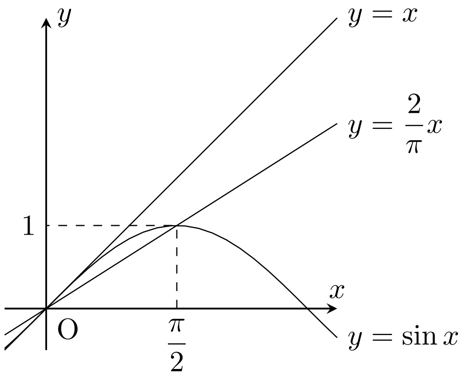
である．

p69：4-(3)

グラフは下図のようになる．
図より，$0 < x < \pi/2$ のとき

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$$

である．



p69：4-(4)

$$f(x)=x-\sin x$$

とおくと，$f'(x)=-\cos x+1>0$ となるため，f は $x>0$ で単調に増加する．
$f(0)=0$ であることを考慮すると，$x>0$ のとき $f(x)>0$ であるから，

$$x>\sin x$$

となる．
また，

$$g(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6!}\right)$$

とおくと，

$$g'(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$
$$g''(x)=-\sin x+x>0$$

となるため，$g'(x)$ は $x>0$ で単調に増加する．
ここで，$g'(0)=0$ であることから，$x>0$ のとき $g'(x)>0$ となり，$g(x)$ は $x>0$ で単調に増加する．
これと $g(0)=0$ であることを考慮すると，$x>0$ のとき $g(x)>0$ であり，

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6!}$$

となる．
グラフは下図のようになる．

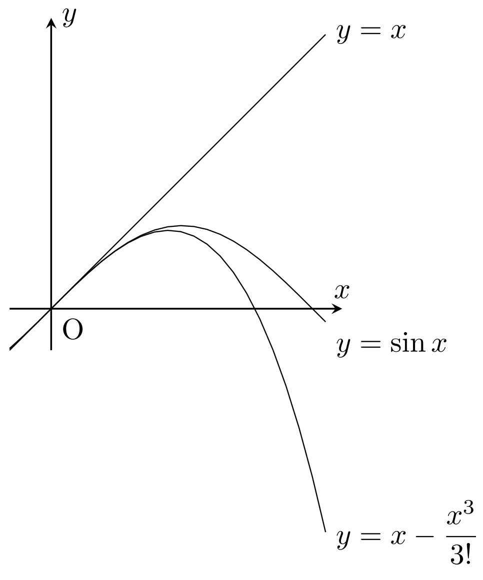
p69：4-(5)

まず，

$$f(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)$$

とおく．微分すると，

$$f'(x)=-\sin x+x$$
$$f''(x)=-\cos x+1>0$$



となるため，f' は $x>0$ で単調増加である．

さらに $f'(0)=0$ であることをふまえると，$x>0$ のとき $f'(x)>0$ であるから，f は $x>0$ で単調増加であり，$f(0)=0$ だから，

$$\cos x > 1-\frac{x^2}{2!}$$

である．

次に，

$$g(x)=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)-\cos x$$

とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x)&=-x+\frac{x^3}{3!}+\sin x\\ g''(x)&=-1+\frac{x^2}{2!}+\cos x\\ g'''(x)&=x-\sin x\\ g''''(x)&=1-\cos x>0 \end{aligned}$$

であることから，同様の議論により，

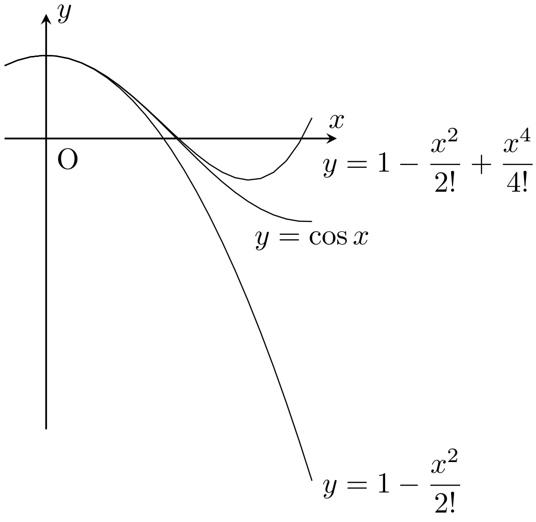
$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}>\cos x$$

となる．

以上の議論により，

$$1-\frac{x^2}{2!}<\cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

である．



p69：5-(1)

まず，$\lim_{x\to0}(\tan x - x) = 0$，$\lim_{x\to0} x^3 = 0$ となるため，ロピタルの定理が適用でき，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{\tan x - x}{x^3}\\
=&\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}\\
=&\lim_{x\to0}\frac{2\tan x(\tan^2 x + 1)}{6x}\\
=&\lim_{x\to0}\frac{6\tan^2 x(\tan^2 x + 1) + 2(\tan^2 x + 1)}{6}\\
=&\frac{2}{6}\\
=&\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

となる．

p69：5-(2)

まず,

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$$

と変形でき，$\lim_{x\to 0}(\sin^2 x - x^2) = 0$，$\lim_{x\to 0} x^2 \sin^2 x = 0$ であるから，ロピタルの定理が適用でき

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} \\
=&\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{2x \sin^2 x + x^2 \sin 2x} \\
=&\lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2}{2\sin^2 x + 4x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x} \\
=&\lim_{x\to 0} \frac{-4\sin 2x}{2\sin 2x + 12x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x} \\
=&\frac{-4}{0+12+0} \\
=&-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

となる.

p69：5-(3)

$\lim_{x\to 0}(e^x - e^{\sin x}) = 0$，$\lim_{x\to 0} x^3 = 0$ であるから，ロピタルの定理が適用でき

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} \\
=&\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}\cos x}{3x^2} \\
=&\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}\cos^2 x + e^{\sin x}\sin x}{6x} \\
=&\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}\cos^3 x + \frac{3}{2}e^{\sin x}\sin 2x + e^{\sin x}\cos x}{6} \\
=&\frac{1 - 1^3 + 0 + 1}{6} \\
=&\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

である.

p69：5-(7)

自然対数をとって考えると，

$$\lim_{x\to\infty} \log x^{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x}$$

であり，$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$，$\lim_{x\to\infty} x = \infty$ であるから，ロピタルの定理が適用でき，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} \\ &= 0\end{aligned}$$

となるため，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^{1/x} &= e^0 \\ &= 1\end{aligned}$$

である．

第 3 章：不定積分と微分方程式

p77：問 1-(1)

計算すると，

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x}\,dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x\cdot(-e^{-x})\,dx \\ &= -x^2e^{-x} - \left(2xe^{-x} - \int 2\cdot e^{-x}\,dx\right) \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + \text{Constant}.\end{aligned}$$

となる．

p77：問 1-(2)

計算すると，

$$\begin{aligned}\int x^3 \log x\,dx &= \frac{x^4}{4}\log x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^4\log x}{4} - \frac{x^4}{16} + \text{Constant}.\end{aligned}$$

となる．

p77：問 1-(3)

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx &= \int ((x+1)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})\,dx \\ &= \frac{2}{3}((x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) + \mathrm{Constant}.\end{aligned}$$

となる．

p77：問 1-(5)

まず，

$$\begin{aligned}\tan^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x\,dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \\ &= \tan x - x + \mathrm{Constant}.\end{aligned}$$

となる．

p77：問 1-(6)

計算すると，

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x}\,dx &= \int (\log x)(\log x)'\,dx \\ &= \frac{1}{2}(\log x)^2 + \mathrm{Constant}.\end{aligned}$$

となる．

p77：問 1-(7)

計算すると，

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(1+x^2)'}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx \\ &= \sqrt{1+x^2} + \mathrm{Constant}.\end{aligned}$$

となる．

p77：問 1-(8)

まず，

$$\cos^3 x = \cos x(1-\sin^2 x) = \cos x - \sin^2 x\cos x$$

と変形できるので，

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int (\cos x - \sin^2 x(\sin x)')\,dx \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + \text{Constant.}\end{aligned}$$

となる．

p77：問 1-(8)

計算すると，

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\,dx &= \int \frac{(x^2)'e^{x^2}}{2}\,dx \\ &= \frac{e^{x^2}}{2} + \text{Constant.}\end{aligned}$$

となる．

p77：問 1-(9)

計算すると，

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx &= \int \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}}\,dx \\ &= \log\bigl(e^x + e^{-x}\bigr) + \text{Constant.}\end{aligned}$$

となる．

p77：問 2

$I+J$ を考えると

$$\begin{aligned} I+J &= \int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx \\ &= \int dx \\ &= x \end{aligned}$$

である．

また，$J-I$ を考えると，

$$\begin{aligned} J-I &= \int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx \\ &= \int \frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}\,dx \\ &= \log|\sin x+\cos x| \end{aligned}$$

であるから，

$$I=\frac{1}{2}(x-\log|\sin x+\cos x|), \quad J=\frac{1}{2}(x+\log|\sin x+\cos x|)$$

である．

p81：問 6-(1)

$\tan(x/2)=t$ とおくと，

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

なので，

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\,dt \\ &= \int \frac{2dt}{1-t^2} \\ &= \int \left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)dt \\ &= \log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \text{Constant}. \\ &= \log\left|\frac{1-\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}\right| + \text{Constant}. \end{aligned}$$

となる．

$\sin x=t$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=\cos x$ であり，

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{1-t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + \text{Constant}. \end{aligned}$$

となる．

p83：問 7-(1)

まず，$\sqrt{x^2+1}=t$ とおくと，$x^2+1=t^2$ により，$tdt=xdx$ である．
これを用いると，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int \frac{1}{(t^2-1)}\,dt \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \mathrm{Constant.} \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| + \mathrm{Constant.}
\end{aligned}
$$

となる．

p98：演習問題 1-(1)

$$
\begin{aligned}
\int \log(1+x)\,dx &= (1+x)\log(1+x) - \int (1+x)\cdot(\log(1+x))'\,dx \\
&= (1+x)\log(1+x) - \int dx \\
&= (1+x)\log(1+x) - x + \mathrm{Constant.}
\end{aligned}
$$

p98：演習問題 1-(2)

$\alpha \neq -1, -2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\int x(x+1)^{\alpha}\,dx &= \frac{x}{\alpha+1}(x+1)^{\alpha+1} - \int \frac{(x+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}(x+1)^{\alpha+1}\,dx \\
&= \frac{x}{\alpha+1}(x+1)^{\alpha+1} - \frac{(x+1)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \mathrm{Constant.}
\end{aligned}
$$

$\alpha=-1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{x+1}\,dx &= \int \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= x - \log|x+1| + \mathrm{Constant.}
\end{aligned}
$$

$\alpha=-2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{t-1}{t^2}\,dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt \\
&= \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + \mathrm{Constant.}
\end{aligned}
$$

p98：演習問題 1-(7)

$t = e^x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = e^x$ であり，

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt \\ &= \log\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + \text{Constant.} \\ &= \log\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right| + \text{Constant.}\end{aligned}$$

となる．

p98：演習問題 1-(9)

$$\begin{aligned}\int (\log x)^3\,dx &= x(\log x)^3 - \int x\cdot 3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\log x)^3 - 3\int (\log x)^2\,dx \\ &= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 3\int x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x\log x - 6x + \text{Constant.}\end{aligned}$$

となる．

p98：演習問題 2-(5)

$\sqrt{x} = t$ とおくと，$x = t^2$ であるから $\dfrac{dx}{dt} = 2t$ である．よって，

$$\begin{aligned}\int \frac{2t}{t(t^2+1)}\,dt &= \int \frac{2}{t^2+1}\,dt \\ &= 2\tan^{-1} t + \text{Constant.} \\ &= 2\tan^{-1}\sqrt{x} + \text{Constant.}\end{aligned}$$

となる．

第 4 章：定積分とその応用

p103：問 1

証明. 上方和について証明する．

$\varDelta$ に分点 x^*(ただし $x_{k-1} \leqq x^* \leqq x_k$) を付け加えた分割を $\varDelta'$ とする．このとき，$S[\varDelta']$ は，$S[\varDelta]$ の

$$M_k(x_k - x_{k-1})$$

の項を

$$M'_k(x^* - x_{k-1}) + M''_k(x_k - x^*)$$

でおきかえたものとなる．ただしここで

$$M'_k = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leqq x \leqq x^*\}, \quad M''_k = \sup\{f(x) \mid x^* \leqq x \leqq x_k\}$$

とおいた．この定義から

$$M'_k \leqq M_k, \quad M''_k \leqq M_k$$

であるから，

$$\begin{aligned} M'_k(x^* - x_{k-1}) + M''_k(x_k - x^*) &\leqq M_k(x^* - x_{k-1}) + M_k(x_k - x^*) \\ &= M_k(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

であるから，$S[\varDelta] \leqq S[\varDelta']$ である．また，分割が複数個のときは同じ操作を繰り返せばよい．

これで上方和について証明でき，下方和についても同様の議論を繰り返して示せる． □

p128：16-(1),(2)

$\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx$ の積分で $x = \pi - t$ とすると，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx &= \int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin t)\,(-dt) \\ &= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx\end{aligned}$$

となるから，これより左の等式が示される．

右については，

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

を示せばよいので，

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

の後者の積分において，$t = \pi - x$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin t)\,(-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx\end{aligned}$$

となり，これより右の等式が従う．

以上の考察により，

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

である．

参考文献

[1] 理工系の微分積分学：吹田信之・新保経彦