
理工系の微分積分学・解答集

2023.8～

なまちゃん

目次

目次

第 1 章：極限と連続性

p3：問 1	3
p3：問 2	4
p5：問 3	5
p5：問 4-(1)	5
p5：問 4-(2)	5
p7：問 6	6
p9：問 8	7
p9：問 9-(1)	7
p9：問 10	8
p10：問 11	8
p10：問 12	9
p14：問 13-(1)	10
p14：問 13-(2)	10
p16：問 14-(1)	11
p16：問 14-(3)	11
p18：問 21	12
p21：問 24-(1)	12
p21：問 24-(2)	13
p23：問 28-(1)	13
p32：3-(2)	13
p32：3-(3)	14
p32：3-(4)	14
p32：3-(5)	14
p32：5-(1)	15
p32：5-(2)	15
p33：12-(1)	16
p33：12-(2)	16
p33：12-(3)	16
p33：12-(4)	17
p33：12-(6)	17
p33：16-(1)	17
p34：22-(1)	17

第 2 章：微分とその応用

p38：問 1-(1)	19
p38：問 1-(2)	20
p38：問 1-(3)	20
p38：問 3	20

p38：問 5-(1)	21
p38：問 5-(2)	21
p38：問 5-(3)	21
p38：問 5-(4)	21
p39：問 6-(1)	22
p39：問 6-(2)	22
p39：問 6-(3)	22
p39：問 6-(4)	23
p39：問 6-(5)	23
p39：問 6-(6)	23
p39：問 6-(7)	24
p39：問 6-(8)	24
p40：問 7-(1)	24
p40：問 7-(2)	25
p41：問 8	25
p42：問 9	26
p42：問 10	26
p54：問 19-(1)	27
p54：問 19-(2)	27
p54：問 19-(5)	28
p54：問 19-(6)	28
p68：問 26-(1)	29
p68：問 26-(2)	29
p68：1-(1)	29
p68：1-(8)	30
p68：2-(1)	30
p68：2-(2)	31
p68：3-(1)	31
p69：4-(1)	32
p69：4-(2)	32
p69：4-(3)	32
p69：4-(4)	33
p69：4-(5)	33
p69：5-(1)	35
p69：5-(2)	36
p69：5-(3)	36
p69：5-(7)	37

第 3 章：不定積分と微分方

程式

p77：問 1-(1)	37
p77：問 1-(2)	37
p77：問 1-(3)	38
p77：問 1-(5)	38

p77：問 1-(6)	38
p77：問 1-(7)	38
p77：問 1-(8)	39
p77：問 1-(8)	39
p77：問 1-(9)	39
p77：問 2	40
p81：問 6-(1)	40
p83：問 7-(1)	41
p98：演習問題 1-(1)	41
p98：演習問題 1-(2)	41
p98：演習問題 1-(7)	42
p98：演習問題 1-(9)	42
p98：演習問題 2-(5)	42

第 4 章：定積分とその応用

p128：16-(1),(2)	42
-----------------	----

第 1 章：極限と連続性

p3：問 1

証明. まず, $|x|$, $|y|$ の定義により,

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|$$

が成り立つ. この 2 式の辺々を足して,

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

を得る. さらに,

$$|x| + |y| \geq \max\{x + y, -(x + y)\} = |x + y|$$

となる. また,

$$\begin{aligned} |x| &= |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \\ \therefore |x| - |y| &\leq |x - y| \end{aligned}$$

となる. $x \geq y$, $x \leq y$ のときがあることを加味すると,

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y|$$

である. 以上より,

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

が成り立つことが示された. \square

p3：問 2

証明. n に関する数学的帰納法で証明する.

(I) $n = 1$ のとき,

$$(1+x)^1 = 1+x$$

により, 与えられた等式は成り立つ.

(II) $n = k$ としたときに, 与えられた等式が成り立つと仮定すると,

$$(1+x)^k \geq 1+kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2$$

が成り立つ. この式の両辺に $(1+x)$ をかけ,

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &\geq \left(1+kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2\right)(1+x) \\ &= 1+(k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3 \\ &\geq 1+(k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2\end{aligned}$$

であるから, $n = k+1$ のときにもこの等式は成り立つ.

(I), (II) の考察により証明された. \square

p5: 問 3

証明. 必要性, 十分性をそれぞれ示す.

- (I) 必要性について示す. $m := \max E$ とすると. 任意の $x \in E$ について $x \leq m$ である. よって m は E の上界のひとつである. また, $m \in E$ より, l を E の上界とすると, $m \leq l$ である. よって m は E の上界の最小数であり, 上限の定義により $\sup E = m \in E$ となる.
- (II) 十分性について示す. α は E の上界の最小元だから, E の任意の元 x について $x \leq \alpha$. 一方 $\alpha \in E$ でもあるから $\max E = \alpha$ となり E は最大値をもつ.

以上 (I), (II) により示された. \square

p5: 問 4-(1)

$A := \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $a_n := 1 + 1/n$ とする.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_{n+1} \leq a_n$ であることにより, $\{a_n\}$ は単調減少列である. ゆえに

$$\sup A = a_1 = 2$$

である.

下限については

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

であることと, $\{a_n\}$ はその下限に収束することにより,

$$\inf A = 1$$

となる.

以上により,

$$\sup\{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2, \quad \inf\{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$$

である.

p5: 問 4-(2)

数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列であることにより, $\{a_n\}$ の定義から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi$$

となることと併せると, $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \pi$ である.

他方, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n \geq a_1 = 3.1$ であることにより,

$$\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 3.1$$

である.

以上の考察により,

$$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \pi, \quad \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 3.1$$

である.

p7: 問 6

証明. 与えられた条件により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_1 \implies \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon$$

が成り立つ, ここで $M := \frac{1}{\varepsilon}$ とおくと, 上の $N_1 \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_1 \implies a_n > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

となり, これより $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ が示された.

さて, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ を仮定すると, 任意の $M > 0$ に対して, $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_2 \implies a_n > M$$

が成り立つ.

ここで $\varepsilon := 1/M$ とすると,

$$n \geq N_2 \implies 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

となり $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n = 0$ となる.

以上の考察により証明された. \square

p9: 問 8

証明. 与えられた式から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$n \geq N_2 \implies |b_n - \beta| < \varepsilon$$

となる.

さて, $N_3 := \max\{N_1, N_2\}$ とすると,

$$n \geq N_3 \implies |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

を得る.

後半についても, 上の N_1, N_2, N_3 を用いて証明する.

さて, $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は収束するので, 有界であることがわかり, ある M が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$|a_n| \leq M$$

$$|b_n| \leq M$$

である. よって, $n \geq N_3$ のとき,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha \beta| &\leq |b_n| |a_n - \alpha| + |\alpha| |b_n - \beta| \\ &< (M + \alpha) \varepsilon \end{aligned}$$

となるため,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$$

が成り立つ.

以上の考察により証明された. \square

p9: 問 9-(1)

証明. $\{a_n\}$ と $\{a_n + b_n\}$ が収束するので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$n \geq N_2 \implies |(a_n + b_n) - \gamma| < \varepsilon$$

が成立する.

さて, $N_3 := \max\{N_1, N_2\}$ とすると, $n \geq N_3$ のとき,

$$\begin{aligned} |b_n - (\gamma - \alpha)| &\leq |(a_n + b_n) - \gamma| + |\alpha - a_n| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

となり, 数列 $\{b_n\}$ は $\gamma - \alpha$ に収束する. \square

p9：問 10

証明. $a > b$ であると仮定する. このとき, $a - b > 0$ なので, $a - b = 2\varepsilon$ とおくと, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n \geq n_0 \implies |b_n - b| < \varepsilon$$

が成立. このような $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$$

となるが, これは矛盾である.

よって先の仮定が誤りであり, ここまでで前半の主張が示された.

後半については, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ から, 任意の $M > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N \implies a_n > M$$

が成り立つ. このとき, $a_n \leq b_n$ なので, 上の $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N \implies b_n > M$$

となり, このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ となる.

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ の場合も同様にして証明されるので, これで定理の主張が示された. \square

p10：問 11

証明. 数列 $\{a_n\}$ を上に有界でない増加列とする. このとき, 任意の実数 M に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ があって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N \implies M < a_N \leq a_n$$

となる. ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

となり, これが証明すべきことであった. \square

p10：問 12

$a = 0$ のときは明らかに 0 に収束するので、 $a \neq 0$ とする。 $2|a| \leq N$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとる。 このとき、

$$\begin{aligned} 0 &< \left| \frac{a^n}{n!} \right| \\ &\leq \frac{|a|^n}{n!} \\ &= \frac{|a|^N}{N!} \cdot \frac{|a|}{N+1} \cdot \frac{|a|}{N+2} \cdots \frac{|a|}{n} \\ &\leq \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N} \end{aligned}$$

であるから、

$$-\frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N} \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N}$$

となり、はさみうちの原理により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

である

p14: 問 13-(1)

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

とおく. $\{a_n\}$ の第 n 部分和を S_n とすると,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となるため,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

である.

p14: 問 13-(2)

$a_n = \frac{n}{2^n}$ とし, 数列 $\{a_n\}$ の第 n 部分和を S_n とすると,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

となる. これにより,

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}$$

となるため,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} \\ \therefore S_n &= 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - \frac{n}{2^n} \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - \frac{n}{2^n} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

である. よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

となる.

p16: 問 14-(1)

証明. 必要条件であること, 十分条件であることをそれぞれ証明する.

- (I) α は $\{a_n\}$ の集積値であるから, $\{a_n\}$ の部分列で $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n(k)} = \alpha$ となるような自然数列 $\{n(k)\}$ が存在し, これよりただちに後半の主張が従う.
- (II) 後半の条件のもと, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となるような $n \in \mathbb{N}$ が無限個存在するので, $1 > 0$ に対し, $|a_{n(1)} - \alpha| < 1$ となるような $n(1) \in \mathbb{N}$ がある. このようにして, $|a_{n(2)} - \alpha| < 1/2$ となる $n(2) \in \mathbb{N}$ を $n(1) < n(2)$ となるようにとれる. この繰り返して, 自然数列 $\{n(k)\}$ を

$$|a_{n(k)} - \alpha| < 1/k$$

となるようにとることができ, $k \rightarrow \infty$ としたときに $1/k \rightarrow 0$ だから, これより α が $\{a_n\}$ の集積値であることが従う.

以上 (I), (II) により証明された. \square

p16: 問 14-(3)

証明. 必要条件であること, 十分条件であることをそれぞれ証明する.

- (I) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とすると, $\{a_n\}$ の任意の部分列も α に収束する. よって, 上極限, 下極限の定義により,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

である.

- (II) $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$ と定義すると

$$\inf A_n \leq a_n \leq \sup A_n$$

となる.

いま仮定により, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n$ であり, この値を α とすると, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

となり, ただちに主張が従う.

以上 (I), (II) により証明された. \square

p18: 問 21

証明. $A = [0, 1]$ とする.

$x \in A \setminus \mathbb{Q}$ であるとき, $f(x) = 1 - x \in A \setminus \mathbb{Q}$ である. また, $x \in \mathbb{Q}$ のとき, $f(x) = x \in \mathbb{Q}$ である.

次に, $x_1, x_2 \in A$ となる x_1, x_2 をとる. このとき

$$f(x_1) = f(x_2)$$

であると仮定する. このとき, 上の考察により, $x_1 = x_2$ もしくは $1 - x_1 = 1 - x_2$ となり, いずれにせよ $x_1 = x_2$ となる.

よって, ここまでで f は一対一の写像であることが示された.

さて, $\sqrt{2}/2 \in A$, $7/10 \in A$ であることは明らか. さらに,

$$\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100} < \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

であるから, $7/10 < \sqrt{2}/2$ である.

ここで,

$$f\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{7}{10}, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

であり. さらに

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{7}{10}$$

なので, f は単調ではないことが示された.

以上の考察により, f は一対一ではあるが単調ではない. \square

p21: 問 24-(1)

計算すると,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{\sin ax} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{bx} \cdot \frac{ax}{\sin ax} \cdot \frac{b}{a} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{b}{a} \\ &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

である.

p21：問 24-(2)

 $t = x - \pi/6$ とおくと,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(2x - \pi/3)}{x - \pi/6} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot 2 \\ &= 1 \cdot 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

である.

p23：問 28-(1)

計算すると,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる.

p32：3-(2)

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

である.

p32 : 3-(3)

$$n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = \sqrt{n^2 + n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

であるから、これを a_n とすると、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる.

p32 : 3-(4)

$$3^n + n(-2)^n = 3^n \left(1 + \frac{n}{\left(-\frac{3}{2}\right)^n} \right)$$

なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left(1 + \frac{n}{\left(-\frac{3}{2}\right)^n} \right) = \infty$$

により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + n(-2)^n) = \infty$$

である.

p32 : 3-(5)

$$n \sin \frac{\pi}{n} = \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \cdot \pi$$

であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \cdot \pi = 1 \cdot \pi = \pi$$

なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \pi$$

である.

p32 : 5-(1)

 $a > 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{a^n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 + \frac{1}{a^n}} \\ &= a\end{aligned}$$

となる.

また, $0 < a < 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{a^n + 1} &= \frac{0}{0 + 1} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる.

また, $a = 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{a^n + 1} &= \frac{1}{1 + 1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である.

p32 : 5-(2)

 $0 < a < 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n} - a^0}{a^{2n} + a^0} \\ &= \frac{0 - 1}{0 + 1} \\ &= -1\end{aligned}$$

である.

 $a = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1}{1 + 1} \\ &= 0\end{aligned}$$

である.

最後に, $a > 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^0 - a^{-2n}}{a^0 + a^{-2n}} \\ &= \frac{1 - 0}{1 + 0} \\ &= 1\end{aligned}$$

である.

p33 : 12-(1)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{3x}{e^{3x} - 1} \cdot \frac{2}{3} \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

となる.

p33 : 12-(2)

$$f(x) = (1 + x + x^2)^{\frac{1}{x}}$$

とおくと,

$$\log f(x) = \frac{\log(1 + x + x^2)}{x}$$

となり, $\lim_{x \rightarrow 0} \log(1 + x + x^2) = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ であるから, ロピタルの定理を適用すると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x + x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{1 + x + x^2} = 1$$

である. よって

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^1 = e$$

となる.

p33 : 12-(3)

$$\log\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right) = \frac{\log x}{1-x}$$

であり, $\lim_{x \rightarrow 1} \log x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) = 0$ であるから, ロピタルの定理が適用でき,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1-x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{x}\right) \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} &= e^{-1} \\
 &= \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

である.

p33 : 12-(4)

まず, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ であるから, ロピタルの定理が適用でき,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる.

p33 : 12-(6)

まず,

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

である. これと $|x| \geq 0$ であることから,

$$-\sqrt{|x|} \leq \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x} \leq \sqrt{|x|}$$

を得る. ここで, $\lim_{x \rightarrow 0} (-\sqrt{|x|}) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0$ であることから, はさみうちの原理により,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x} = 0$$

である.

p33 : 16-(1)

計算すると,

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

である.

p34 : 22-(1)

《補題》

$\{a_n\}$ を実数列とする. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

であるならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

である。ただし a は実数の定数とする。

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_1 \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

となる。

また、

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right|$$

と変形する。この右辺に補題を適用し、

$$\left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}$$

を得る。これにより、

$$n \geq N_1 \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} + \left(\frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon$$

となる。ここで $N_2 := N_1 + 1$ とすると、 $n \geq N_2$ であるとき $\left(\frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon < \varepsilon$ となることに注意する。さて、

$$n \geq N_3 \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} < \varepsilon$$

となるように $N_3 \in \mathbb{N}$ をとる。 $N := \max\{N_2, N_3\}$ とすると、

$$n \geq N \implies \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{n_1-1} - a|}{n} + \left(\frac{n - n_1 + 1}{n} \right) \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

であり、これより

$$n \geq N \implies \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < 2\varepsilon$$

となる。書き換えると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

となり、これが証明すべきことであった。 \square

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ であるから、 $\log x$ の連続性により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \log \alpha$$

である。ここで、

$$\log \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n}{n}$$

であるから、補題により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \log \alpha$$

となる。ここで、 e^x の連続性により、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} &= e^{\log \alpha} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

となり、これが証明すべきことであった。 \square

第2章：微分とその応用

p38：問 1-(1)

$f(x) = x|x|$ の導関数は、 $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x\end{aligned}$$

であり、 $x < 0$ のときは、

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h)^2 - (-x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x-h) = -2x\end{aligned}$$

となる。また、 $x = 0$ の点では、

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$$

であるから、 $f'(0) = 0$ である。

以上をまとめると、

$$f'(x) = 2|x|$$

となる。

p38：問 1-(2)

$f(x) = \cos x$ とすると,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

であるから,

$$(\cos x)' = -\sin x$$

である.

p38：問 1-(3)

$f(x) = \sqrt{x}$ とすると,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

である.

p38：問 3

証明. $1/g(x)$ の導関数について調べれば, 積の場合の考察により $f(x)/g(x)$ の導関数が得られるので, $1/g(x)$ について考える.

計算すると,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{g(x) - g(x+h)}{h}\end{aligned}$$

であるから, 定理 1・系により $1/g(x)$ は微分可能で,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)} \right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \\ &= -\frac{g'(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

となり, これからただちに主張が従う. \square

p38：問 5-(1)

計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) &= \frac{(1)' \cdot (1+x^2) - 1 \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

となる.

p38：問 5-(2)

計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \tan x &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

である.

p38：問 5-(3)

計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (e^x \sin x) &= (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x \\ &= e^x (\sin x + \cos x)\end{aligned}$$

となる.

p38：問 5-(4)

計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \log_a |x| &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\log |x|}{\log a} \right) \\ &= \frac{1}{x \log a}\end{aligned}$$

となる.

p39：問 6-(1)

$$z = y^2, \quad y = \sin x$$

とおくと,

$$\begin{aligned} (\sin^2 x)' &= \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d(y^2)}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= 2y \cdot \cos x \\ &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

である.

p39：問 6-(2)

$$z = \sin y, \quad y = x^2$$

とおくと,

$$\begin{aligned} (\sin(x^2))' &= \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d(\sin y)}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \cos y \cdot 2x \\ &= 2x \cos(x^2) \end{aligned}$$

である.

p39：問 6-(3)

$$z = \sqrt{y}, \quad y = 1 + x^2$$

とおくと,

$$\begin{aligned} (\sqrt{1+x^2})' &= \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d(\sqrt{y})}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

である.

p39：問 6-(4)

$$z = \sqrt{y}, \quad y = 1 + \sin x$$

とおくと,

$$\begin{aligned} (\sqrt{1 + \sin x})' &= \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d(\sqrt{y})}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \cos x \\ &= \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}} \end{aligned}$$

である.

p39：問 6-(5)

$$f(x) = a^x$$

とおくと, $a > 0$ により, この両辺の自然対数をとることができ,

$$\log f(x) = \log a^x = x \log a$$

となる. この両辺を x で微分し,

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \log a \\ \therefore f'(x) &= a^x \log a \end{aligned}$$

であるから,

$$(a^x)' = a^x \log a$$

である.

p39：問 6-(6)

微分すると,

$$\begin{aligned} (\log |\tan x|)' &= \frac{(\tan x)'}{\tan x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} \end{aligned}$$

である.

p39：問 6-(7)

微分すると,

$$\begin{aligned} \left(\log \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| \right)' &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + A}}}{x + \sqrt{x^2 + A}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} \end{aligned}$$

である.

p39：問 6-(8)

$x > 0$ であることから, 両辺の自然対数を取ることができ,

$$\log(x^x) = x \log x$$

である. この両辺を微分すると,

$$\frac{(x^x)'}{x^x} = \log x + 1$$

であるから,

$$(x^x)' = x^x (\log x + 1)$$

である.

p40：問 7-(1)

証明. $y = \sin x$ とすると, y は $-\pi/2 < x < \pi/2$ で狭義増加で, $y' = \cos x \neq 0$ である.

よって, 逆関数 $x = \sin^{-1} y$ は $-1 < y < 1$ で微分可能で,

$$\frac{d(\sin^{-1} y)}{dy} = \frac{1}{\cos x}$$

である.

ここで, $-\pi/2 < x < \pi/2$ であるから, $\cos x > 0$ であることがわかる. ゆえに,

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin^{-1} y)}{dy} &= \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$

となり, これが証明すべきことであった. \square

p40：問 7-(2)

証明. $y = \tan x$ とすると, y は $-\pi/2 < x < \pi/2$ で狭義増加で, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ である.

よって, 逆関数 $x = \tan^{-1} y$ は $-\infty < y < \infty$ で微分可能で,

$$\frac{d(\tan^{-1} y)}{dy} = \cos^2 x$$

である. ゆえに,

$$\begin{aligned} \frac{d(\tan^{-1} y)}{dy} &= \cos^2 x \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 x} \\ &= \frac{1}{1 + y^2} \end{aligned}$$

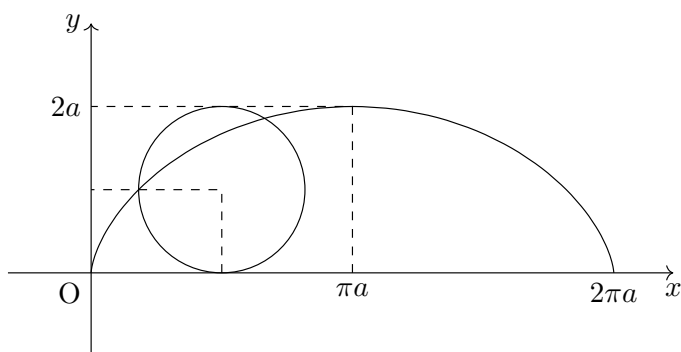
となり, これが証明すべきことであった. \square

p41：問 8

計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \\ &= \frac{a \sin \theta}{a(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

である.



p42：問 9

証明. n に関する数学的帰納法で証明する.

(I) $n = 1$ のとき, $y = \cos(x + \pi/2) = -\sin x$ であり, $y' = -\sin x$ であることから成り立つ.

(II) $n = k$ のときにこの主張が正しいと仮定すると,

$$y^{(n)} = \cos(x + k\pi/2)$$

である.

この式の両辺を x で微分すると.

$$y^{(n+1)} = -\sin(x + k\pi/2) = \cos(x + (k+1)\pi/2)$$

となり, $n = k+1$ のときにもこの等式は成立する.

以上 (I), (II) の考察により証明された. \square

p42：問 10

$$y^{(1)} = \frac{1}{1+x}$$

$$y^{(2)} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y^{(3)} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y^{(4)} = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

などとなることから,

$$y^{(n)} = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$$

と推測できる. この推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する.

(I) $n = 1$ のとき, 上の考察によりこの推測は正しい.

(II) $n = k$ のとき, 上の推測が正しいと仮定すると,

$$y^{(k)} = \frac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{(1+x)^k}$$

となり,

$$y^{(k+1)} = \frac{k!(-1)^k}{(1+x)^{k+1}}$$

となり, $n = k+1$ のときにもこの等式は成立する.

以上 (I), (II) の考察により示された.

よって,

$$y^{(n)} = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$$

である.

p54：問 19-(1)

まず,

$$x \log x = \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

であり, $\lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} 1/x = \infty$ により, ロピタルの定理が適用できるので,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

となる.

p54：問 19-(2)

まず,

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

であり, $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 0$ であるから, ロピタルの定理が適用でき,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる.

p54 : 問 19-(5)

自然対数をとって計算すると,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} \log(x^{\sin x}) &= \lim_{x \rightarrow +0} \sin x \log x \\ &= \frac{\log x}{1/\sin x}\end{aligned}$$

と変形でき, $\lim_{x \rightarrow +0} \log x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} 1/\sin x = \infty$ であるから, ロピタルの定理を用いて,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{1/\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} -\frac{\tan x \sin x}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

であるから,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x} = e^0 = 1$$

となる.

p54 : 問 19-(6)

自然対数をとって計算すると,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x}\end{aligned}$$

であり,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\log(1+x) - \log(1-x)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

であるから, ロピタルの定理を用いることにより,

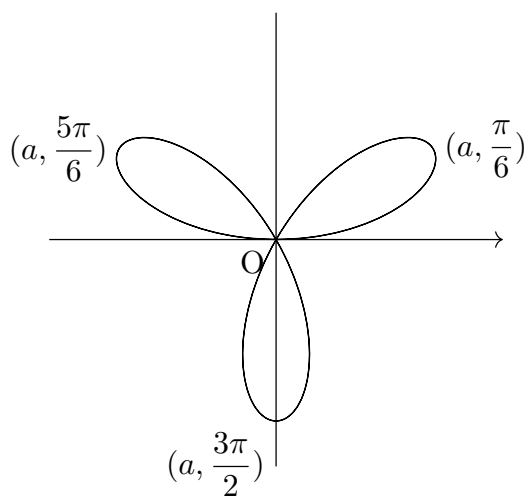
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) \\ &= \frac{1}{1+0} + \frac{1}{1-0} \\ &= 2\end{aligned}$$

であるから,

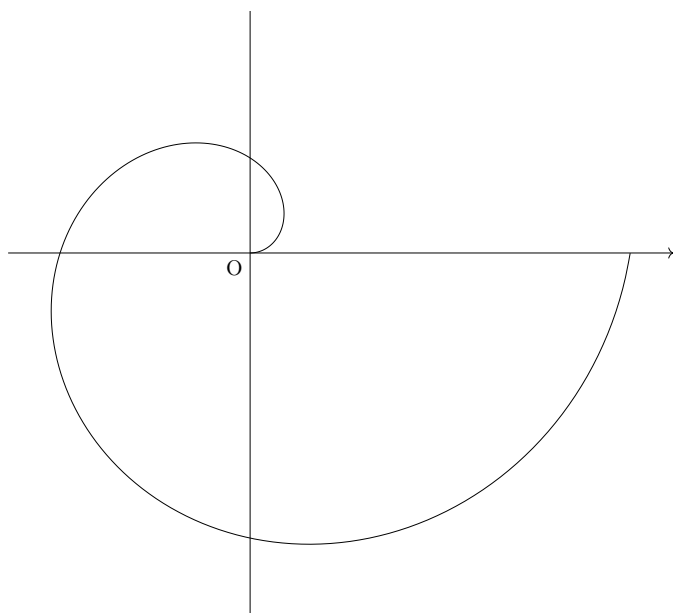
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

である.

p68 : 問 26-(1)



p68 : 問 26-(2)



p68 : 1-(1)

計算すると,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\log |1+x| - \log |1-x|) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) \\
 &= \frac{1}{(1+x)(1-x)}
 \end{aligned}$$

となる.

p68 : 1-(8)

計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\log \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)'}{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \\ &= \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\sin x}\end{aligned}$$

となる.

p68 : 2-(1)

計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \\ &= \frac{a \cosh t}{a \sinh t} \\ &= \frac{\cosh t}{\sinh t} \\ &= \frac{1}{\tanh t}\end{aligned}$$

である.

また,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\tanh t} \right) \cdot \frac{1}{a \sinh t} \\ &= -\frac{1}{\sinh^2 t} \cdot \frac{1}{a \sinh t} \\ &= -\frac{1}{a \sinh^3 t}\end{aligned}$$

となる.

p68 : 2-(2)

計算すると,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \\
 &= \frac{3a \sin^2 t \cos t}{3a \cos^2 t (-\sin t)} \\
 &= \frac{\sin t}{-\cos t} \\
 &= -\tan t
 \end{aligned}$$

である.

また,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \\
 &= \frac{d}{dt} (-\tan t) \cdot \frac{1}{3a \cos^2 t (-\sin t)} \\
 &= -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{3a \cos^2 t (-\sin t)} \\
 &= -\frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}
 \end{aligned}$$

である.

p68 : 3-(1)

まず,

$$\cos x + \cos 2x = \frac{\cos 3x + \cos x}{2}$$

なので,

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} \left(3^n \cos \left(3x + \frac{n\pi}{2} \right) + \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \right)$$

である.

p69 : 4-(1)

$$f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x)$$

とおくと,

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} > 0$$

となるため, $f'(-1) = 0$ と併せると, $x > -1$ のとき $f'(x) > 0$ である.

よって, $x > -1$ のとき, $f(x)$ は単調に増加し,

$$f(-1) = 0 - 1 + \alpha > 0$$

であることをふまえると, $x > -1$ のとき $f(x) > 0$ である.

よって, $x > -1$ のとき,

$$(1+x)^\alpha - (1+\alpha x) > 0$$

$$(1+x)^\alpha > (1+\alpha x)$$

である.

p69 : 4-(2)

$$f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x)$$

とおくと,

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} < 0$$

となるため, $f'(-1) = 0$ と併せると, $x > -1$ のとき $f'(x) < 0$ である.

よって, $x > -1$ のとき, $f(x)$ は単調に減少し,

$$f(-1) = 0 - 1 + \alpha < 0$$

であることをふまえると, $x > -1$ のとき $f(x) < 0$ である.

よって, $x > -1$ のとき,

$$(1+x)^\alpha - (1+\alpha x) < 0$$

$$(1+x)^\alpha < (1+\alpha x)$$

である.

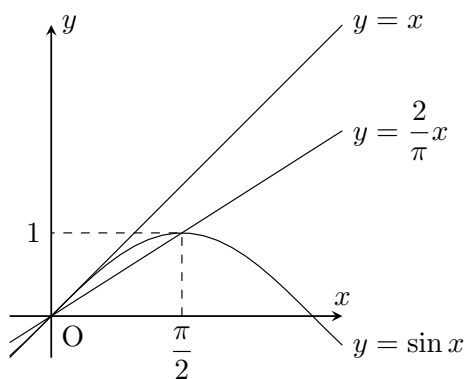
p69 : 4-(3)

グラフは下図のようになる.

図より, $0 < x < \pi/2$ のとき

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$$

である.



p69 : 4-(4)

$$f(x) = x - \sin x$$

とおくと, $f'(x) = -\cos x + 1 > 0$ となるため, f は $x > 0$ で単調に増加する.

$f(0) = 0$ であることを考慮すると, $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ であるから,

$$x > \sin x$$

となる.

また,

$$g(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6!}\right)$$

とおくと,

$$g'(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$g''(x) = -\sin x + x > 0$$

となるため, $g'(x)$ は $x > 0$ で単調に増加する.

ここで, $g'(0) = 0$ であることから, $x > 0$ のとき $g'(x) > 0$ となり, $g(x)$ は $x > 0$ で単調に増加する.

これと $g(0) = 0$ であることを考慮すると, $x > 0$ のとき $g(x) > 0$ であり,

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6!}$$

となる.

グラフは下図のようになる.

p69 : 4-(5)

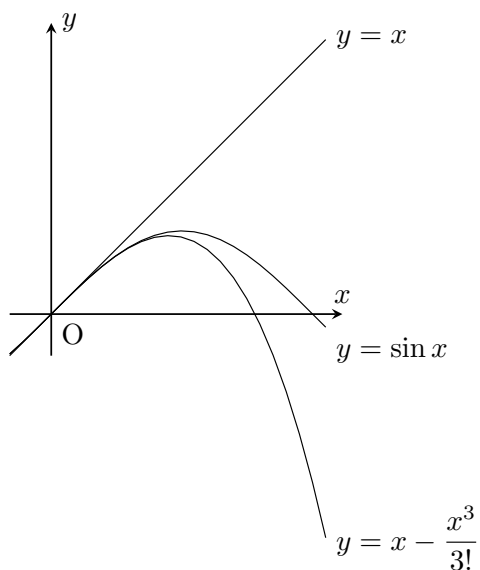
まず,

$$f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right)$$

とおく. 微分すると,

$$f'(x) = -\sin x + x$$

$$f''(x) = -\cos x + 1 > 0$$



となるため、 f' は $x > 0$ で単調増加である.

さらに $f'(0) = 0$ であることをふまえると、 $x > 0$ のとき $f'(x) > 0$ であるから、 f は $x > 0$ で単調増加であり、 $f(0) = 0$ だから、

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}$$

である.

次に、

$$g(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \cos x$$

とおくと、

$$g'(x) = -x + \frac{x^3}{3!} + \sin x$$

$$g''(x) = -1 + \frac{x^2}{2!} + \cos x$$

$$g'''(x) = x - \sin x$$

$$g''''(x) = 1 - \cos x > 0$$

であることから、同様の議論により、

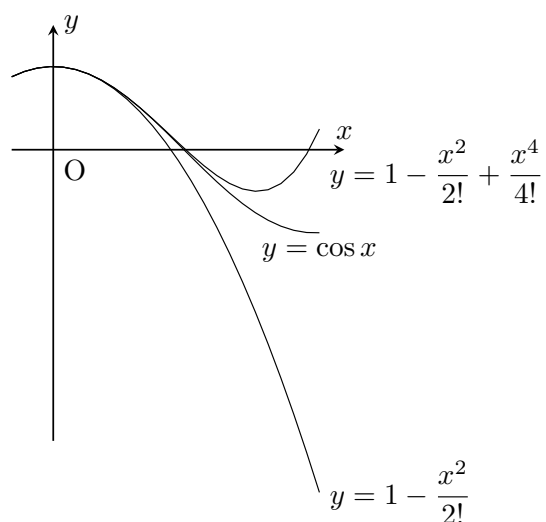
$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} > \cos x$$

となる.

以上の議論により、

$$1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

である.



p69 : 5-(1)

まず, $\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x - x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ となるため, ロピタルの定理が適用でき,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x (\tan^2 x + 1)}{6x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \tan^2 x (\tan^2 x + 1) + 2(\tan^2 x + 1)}{6} \\
 &= \frac{2}{6} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

となる.

p69 : 5-(2)

まず,

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$$

と変形でき, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x - x^2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin^2 x = 0$ であるから, ロピタルの定理が適用でき

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{2x \sin^2 x + x^2 \sin 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 2}{2 \sin^2 x + 4x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 2x}{2 \sin 2x + 12x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x} \\ &= \frac{-4}{0 + 12 + 0} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる.

p69 : 5-(3)

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{\sin x}) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ であるから, ロピタルの定理が適用でき

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos^2 x + e^{\sin x} \sin x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos^3 x + \frac{3}{2} e^{\sin x} \sin 2x + e^{\sin x} \cos x}{6} \\ &= \frac{1 - 1^3 + 0 + 1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である.

p69 : 5-(7)

自然対数をとって考えると,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$$

であり, $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ であるから, ロピタルの定理が適用でき,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である.

第 3 章 : 不定積分と微分方程式

p77 : 問 1-(1)

計算すると,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x \cdot (-e^{-x}) dx \\ &= -x^2 e^{-x} - \left(2x e^{-x} - \int 2 \cdot e^{-x} dx \right) \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + \text{Constant}. \end{aligned}$$

となる.

p77 : 問 1-(2)

計算すると,

$$\begin{aligned} \int x^3 \log x dx &= \frac{x^4}{4} \log x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^4 \log x}{4} - \frac{x^4}{16} + \text{Constant}. \end{aligned}$$

となる.

p77：問 1-(3)

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx &= \int ((x+1)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{2}{3}((x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) + \text{Constant}.\end{aligned}$$

となる.

p77：問 1-(5)

まず,

$$\begin{aligned}\tan^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \\ &= \tan x - x + \text{Constant}.\end{aligned}$$

となる.

p77：問 1-(6)

計算すると,

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x} dx &= \int (\log x)(\log x)' dx \\ &= \frac{1}{2}(\log x)^2 + \text{Constant}.\end{aligned}$$

となる.

p77：問 1-(7)

計算すると,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(1+x^2)'}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= \sqrt{1+x^2} + \text{Constant}.\end{aligned}$$

となる.

p77：問 1-(8)

まず,

$$\cos^3 x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x - \sin^2 x \cos x$$

と変形できるので,

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, dx &= \int (\cos x - \sin^2 x (\sin x)') \, dx \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + \text{Constant}.\end{aligned}$$

となる.

p77：問 1-(8)

計算すると,

$$\begin{aligned}\int x e^{x^2} \, dx &= \int \frac{(x^2)' e^{x^2}}{2} \, dx \\ &= \frac{e^{x^2}}{2} + \text{Constant}.\end{aligned}$$

となる.

p77：問 1-(9)

計算すると,

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, dx &= \int \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} \, dx \\ &= \log(e^x + e^{-x}) + \text{Constant}.\end{aligned}$$

となる.

p77: 問 2

$I + J$ を考えると

$$\begin{aligned} I + J &= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int dx \\ &= x \end{aligned}$$

である.

また, $J - I$ を考えると,

$$\begin{aligned} J - I &= \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \log |\sin x + \cos x| \end{aligned}$$

であるから,

$$I = \frac{1}{2}(x - \log |\sin x + \cos x|), \quad J = \frac{1}{2}(x + \log |\sin x + \cos x|)$$

である.

p81: 問 6-(1)

$\tan(x/2) = t$ とおくと,

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

なので,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{2}{1 + t^2} \cdot \frac{1 + t^2}{1 - t^2} dt \\ &= \int \frac{2dt}{1 - t^2} \\ &= \int \left(\frac{1}{1 - t} - \frac{1}{1 + t} \right) dt \\ &= \log \left| \frac{1 - t}{1 + t} \right| + \text{Constant.} \\ &= \log \left| \frac{1 - \tan(x/2)}{1 + \tan(x/2)} \right| + \text{Constant.} \end{aligned}$$

となる.

$\sin x = t$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \cos x$ であり,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1}{1 - t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right| + \text{Constant.} \end{aligned}$$

となる.

p83：問 7-(1)

まず、 $\sqrt{x^2+1}=t$ とおくと、 $x^2+1=t^2$ により、 $t dt = x dx$ である。
これを用いると、

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{1}{(t^2-1)} dt \\ &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \text{Constant}. \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + \text{Constant}.\end{aligned}$$

となる。

p98：演習問題 1-(1)

$$\begin{aligned}\int \log(1+x) dx &= (1+x) \log(1+x) - \int (1+x) \cdot (\log(1+x))' dx \\ &= (1+x) \log(1+x) - \int dx \\ &= (1+x) \log(1+x) - x + \text{Constant}.\end{aligned}$$

p98：演習問題 1-(2)

$\alpha \neq -1, -2$ のとき、

$$\begin{aligned}\int x(x+1)^\alpha dx &= \frac{x}{\alpha+1} (x+1)^{\alpha+1} - \int \frac{(x+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} (x+1)^{\alpha+1} dx \\ &= \frac{x}{\alpha+1} (x+1)^{\alpha+1} - \frac{(x+1)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \text{Constant}.\end{aligned}$$

$\alpha = -1$ のとき、

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x+1} dx &= \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= x - \log|x+1| + \text{Constant}.\end{aligned}$$

$\alpha = -2$ のとき、

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{t-1}{t^2} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + \text{Constant}.\end{aligned}$$

p98：演習問題 1-(7)

$t = e^x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = e^x$ であり,

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ &= \log \left| t + \sqrt{t^2-1} \right| + \text{Constant.} \\ &= \log \left| e^x + \sqrt{e^{2x}-1} \right| + \text{Constant.}\end{aligned}$$

となる.

p98：演習問題 1-(9)

$$\begin{aligned}\int (\log x)^3 dx &= x(\log x)^3 - \int x \cdot 3(\log x)^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^3 - 3 \int (\log x)^2 dx \\ &= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 3 \int x \cdot 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x \log x - 6x + \text{Constant.}\end{aligned}$$

となる.

p98：演習問題 2-(5)

$\sqrt{x} = t$ とおくと, $x = t^2$ であるから $\frac{dx}{dt} = 2t$ である. よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{2t}{t(t^2+1)} dt &= \int \frac{2}{t^2+1} dt \\ &= 2 \tan^{-1} t + \text{Constant.} \\ &= 2 \tan^{-1} \sqrt{x} + \text{Constant.}\end{aligned}$$

となる.

第 4 章：定積分とその応用

p128：16-(1),(2)

$\int_0^\pi x f(\sin x) dx$ の積分で $x = \pi - t$ とすると,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x f(\sin x) dx &= \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t) (-dt) \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin x) dx - \int_0^\pi x f(\sin x) dx\end{aligned}$$

となるから, これより左の等式が示される.

右については,

$$\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

を示せばよいので,

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) dx$$

の後者の積分において, $t = \pi - x$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin t) (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \end{aligned}$$

となり, これより右の等式が従う.

以上の考察により,

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

である.

参考文献

- [1] 理工系の微分積分学：吹田信之・新保経彦