

Tutorial - 2

Ans 1) void fun(int n) {
 int j=1, i=0;
 while(i < n) {
 i = i+j;
 j++;
 }
}

$$\begin{array}{ll} j=1 & i=0+1 \\ j=2 & i=0+1+2 \\ j=3 & i=0+1+2+3 \end{array}$$

Loop ends when $i \geq n$
 $0+1+2+3+\dots+n \geq n$

$$\frac{k(k+1)}{2} > n$$

$$k^2 > n$$

$$k > \sqrt{n}$$

$$O(\sqrt{n})$$

Ans 2) Recurrence relation for fibonacci.

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$

$$T(0) = T(1) = 1$$

uf
 (Lower bound)

$$T(n-1) \approx T(n-2)$$

$$T(n) = 2T(n-2)$$

$$= 2[2T(n-4)] = 4T(n-4)$$

$$= 4(2T(n-6))$$

$$= 8T(n-6)$$

$$= 8[2T(n-8)]$$

$$= 16T(n-8)$$

⋮

$$T(n) = 2^k T(n-2k)$$

$$n-2k=0$$

$$n=2k$$

$$k = n/2$$

$$T(n) = 2^{n/2} T(0)$$

$$T(n) = \Omega(2^{n/2}) = 2^{n/2}$$

$$\begin{aligned}
 - \text{cf } T(n-2) &\approx T(n-1) \\
 T(n) &= 2T(n-1) \\
 &= 2(2T(n-2)) = 4T(n-2) \\
 &= 4(2T(n-3)) = 8T(n-3) \\
 &= 2^k T(n-k)
 \end{aligned}$$

$$n-k=0$$

$$\boxed{k=n}$$

$$T(n) = 2^k \times T(0) = 2^n$$

$$= T(n) = O(2^n) \text{ (Upperbound)}$$

Ans 3) $O(n \log n) \Rightarrow$

```

for(int i=0; i<n; i++) {
    for(int j=1; j<n; j=j*2) {
        // Some O(1)
    }
}

```

$O(n^3) =$

```

for(int i=0; i<n; i++) {
    for(int j=0; j<n; j++) {
        for(int k=0; k<n; k++) {
            // Some O(1)
        }
    }
}

```

$O(\log(\log n)) \Rightarrow$

```

for(int i=1; i<=n; i=i*2) {
    for(int j=1; j<=n; j=j*2) {
        // Some O(1)
    }
}

```


Ans 4) $T(n) = T(n/4) + T(n/2) + cn^2$

lets assume $T(n/2) \geq T(n/4)$

So, $T(n) = 2T(n/2) + cn^2$

applying master's theorem $(T(n) = aT(n/b) + f(n))$

$a=2, b=2, f(n)=n^2$

$c = \log_b a = \log_2 2 = 1$

$n^c = n$

Compare n^c and $f(n) = n^2$

$f(n) > n^c$ So, $T(n) = \Theta(n^2)$

Ans 5) int fun(int n) {
 for (int i=1; i<=n; i++) {
 for (int j=1; j<=n; j+=i) {
 // Some O(1)

}
 }
 }
 i=1 — j=1
 j=2
 j=3
 j=4
 j=5
 j=6
 j=7
 j=8
 j=9
 j=10
 j=11
 j=12
 j=13
 j=14
 j=15
 j=16
 j=17
 j=18
 j=19
 j=20
 j=21
 j=22
 j=23
 j=24
 j=25
 j=26
 j=27
 j=28
 j=29
 j=30
 j=31
 j=32
 j=33
 j=34
 j=35
 j=36
 j=37
 j=38
 j=39
 j=40
 j=41
 j=42
 j=43
 j=44
 j=45
 j=46
 j=47
 j=48
 j=49
 j=50
 j=51
 j=52
 j=53
 j=54
 j=55
 j=56
 j=57
 j=58
 j=59
 j=60
 j=61
 j=62
 j=63
 j=64
 j=65
 j=66
 j=67
 j=68
 j=69
 j=70
 j=71
 j=72
 j=73
 j=74
 j=75
 j=76
 j=77
 j=78
 j=79
 j=80
 j=81
 j=82
 j=83
 j=84
 j=85
 j=86
 j=87
 j=88
 j=89
 j=90
 j=91
 j=92
 j=93
 j=94
 j=95
 j=96
 j=97
 j=98
 j=99
 j=100
 j=101
 j=102
 j=103
 j=104
 j=105
 j=106
 j=107
 j=108
 j=109
 j=110
 j=111
 j=112
 j=113
 j=114
 j=115
 j=116
 j=117
 j=118
 j=119
 j=120
 j=121
 j=122
 j=123
 j=124
 j=125
 j=126
 j=127
 j=128
 j=129
 j=130
 j=131
 j=132
 j=133
 j=134
 j=135
 j=136
 j=137
 j=138
 j=139
 j=140
 j=141
 j=142
 j=143
 j=144
 j=145
 j=146
 j=147
 j=148
 j=149
 j=150
 j=151
 j=152
 j=153
 j=154
 j=155
 j=156
 j=157
 j=158
 j=159
 j=160
 j=161
 j=162
 j=163
 j=164
 j=165
 j=166
 j=167
 j=168
 j=169
 j=170
 j=171
 j=172
 j=173
 j=174
 j=175
 j=176
 j=177
 j=178
 j=179
 j=180
 j=181
 j=182
 j=183
 j=184
 j=185
 j=186
 j=187
 j=188
 j=189
 j=190
 j=191
 j=192
 j=193
 j=194
 j=195
 j=196
 j=197
 j=198
 j=199
 j=200
 j=201
 j=202
 j=203
 j=204
 j=205
 j=206
 j=207
 j=208
 j=209
 j=210
 j=211
 j=212
 j=213
 j=214
 j=215
 j=216
 j=217
 j=218
 j=219
 j=220
 j=221
 j=222
 j=223
 j=224
 j=225
 j=226
 j=227
 j=228
 j=229
 j=230
 j=231
 j=232
 j=233
 j=234
 j=235
 j=236
 j=237
 j=238
 j=239
 j=240
 j=241
 j=242
 j=243
 j=244
 j=245
 j=246
 j=247
 j=248
 j=249
 j=250
 j=251
 j=252
 j=253
 j=254
 j=255
 j=256
 j=257
 j=258
 j=259
 j=260
 j=261
 j=262
 j=263
 j=264
 j=265
 j=266
 j=267
 j=268
 j=269
 j=270
 j=271
 j=272
 j=273
 j=274
 j=275
 j=276
 j=277
 j=278
 j=279
 j=280
 j=281
 j=282
 j=283
 j=284
 j=285
 j=286
 j=287
 j=288
 j=289
 j=290
 j=291
 j=292
 j=293
 j=294
 j=295
 j=296
 j=297
 j=298
 j=299
 j=300
 j=301
 j=302
 j=303
 j=304
 j=305
 j=306
 j=307
 j=308
 j=309
 j=310
 j=311
 j=312
 j=313
 j=314
 j=315
 j=316
 j=317
 j=318
 j=319
 j=320
 j=321
 j=322
 j=323
 j=324
 j=325
 j=326
 j=327
 j=328
 j=329
 j=330
 j=331
 j=332
 j=333
 j=334
 j=335
 j=336
 j=337
 j=338
 j=339
 j=340
 j=341
 j=342
 j=343
 j=344
 j=345
 j=346
 j=347
 j=348
 j=349
 j=350
 j=351
 j=352
 j=353
 j=354
 j=355
 j=356
 j=357
 j=358
 j=359
 j=360
 j=361
 j=362
 j=363
 j=364
 j=365
 j=366
 j=367
 j=368
 j=369
 j=370
 j=371
 j=372
 j=373
 j=374
 j=375
 j=376
 j=377
 j=378
 j=379
 j=380
 j=381
 j=382
 j=383
 j=384
 j=385
 j=386
 j=387
 j=388
 j=389
 j=390
 j=391
 j=392
 j=393
 j=394
 j=395
 j=396
 j=397
 j=398
 j=399
 j=400
 j=401
 j=402
 j=403
 j=404
 j=405
 j=406
 j=407
 j=408
 j=409
 j=410
 j=411
 j=412
 j=413
 j=414
 j=415
 j=416
 j=417
 j=418
 j=419
 j=420
 j=421
 j=422
 j=423
 j=424
 j=425
 j=426
 j=427
 j=428
 j=429
 j=430
 j=431
 j=432
 j=433
 j=434
 j=435
 j=436
 j=437
 j=438
 j=439
 j=440
 j=441
 j=442
 j=443
 j=444
 j=445
 j=446
 j=447
 j=448
 j=449
 j=450
 j=451
 j=452
 j=453
 j=454
 j=455
 j=456
 j=457
 j=458
 j=459
 j=460
 j=461
 j=462
 j=463
 j=464
 j=465
 j=466
 j=467
 j=468
 j=469
 j=470
 j=471
 j=472
 j=473
 j=474
 j=475
 j=476
 j=477
 j=478
 j=479
 j=480
 j=481
 j=482
 j=483
 j=484
 j=485
 j=486
 j=487
 j=488
 j=489
 j=490
 j=491
 j=492
 j=493
 j=494
 j=495
 j=496
 j=497
 j=498
 j=499
 j=500
 j=501
 j=502
 j=503
 j=504
 j=505
 j=506
 j=507
 j=508
 j=509
 j=510
 j=511
 j=512
 j=513
 j=514
 j=515
 j=516
 j=517
 j=518
 j=519
 j=520
 j=521
 j=522
 j=523
 j=524
 j=525
 j=526
 j=527
 j=528
 j=529
 j=530
 j=531
 j=532
 j=533
 j=534
 j=535
 j=536
 j=537
 j=538
 j=539
 j=540
 j=541
 j=542
 j=543
 j=544
 j=545
 j=546
 j=547
 j=548
 j=549
 j=550
 j=551
 j=552
 j=553
 j=554
 j=555
 j=556
 j=557
 j=558
 j=559
 j=560
 j=561
 j=562
 j=563
 j=564
 j=565
 j=566
 j=567
 j=568
 j=569
 j=570
 j=571
 j=572
 j=573
 j=574
 j=575
 j=576
 j=577
 j=578
 j=579
 j=580
 j=581
 j=582
 j=583
 j=584
 j=585
 j=586
 j=587
 j=588
 j=589
 j=590
 j=591
 j=592
 j=593
 j=594
 j=595
 j=596
 j=597
 j=598
 j=599
 j=600
 j=601
 j=602
 j=603
 j=604
 j=605
 j=606
 j=607
 j=608
 j=609
 j=610
 j=611
 j=612
 j=613
 j=614
 j=615
 j=616
 j=617
 j=618
 j=619
 j=620
 j=621
 j=622
 j=623
 j=624
 j=625
 j=626
 j=627
 j=628
 j=629
 j=630
 j=631
 j=632
 j=633
 j=634
 j=635
 j=636
 j=637
 j=638
 j=639
 j=640
 j=641
 j=642
 j=643
 j=644
 j=645
 j=646
 j=647
 j=648
 j=649
 j=650
 j=651
 j=652
 j=653
 j=654
 j=655
 j=656
 j=657
 j=658
 j=659
 j=660
 j=661
 j=662
 j=663
 j=664
 j=665
 j=666
 j=667
 j=668
 j=669
 j=670
 j=671
 j=672
 j=673
 j=674
 j=675
 j=676
 j=677
 j=678
 j=679
 j=680
 j=681
 j=682
 j=683
 j=684
 j=685
 j=686
 j=687
 j=688
 j=689
 j=690
 j=691
 j=692
 j=693
 j=694
 j=695
 j=696
 j=697
 j=698
 j=699
 j=700
 j=701
 j=702
 j=703
 j=704
 j=705
 j=706
 j=707
 j=708
 j=709
 j=710
 j=711
 j=712
 j=713
 j=714
 j=715
 j=716
 j=717
 j=718
 j=719
 j=720
 j=721
 j=722
 j=723
 j=724
 j=725
 j=726
 j=727
 j=728
 j=729
 j=730
 j=731
 j=732
 j=733
 j=734
 j=735
 j=736
 j=737
 j=738
 j=739
 j=740
 j=741
 j=742
 j=743
 j=744
 j=745
 j=746
 j=747
 j=748
 j=749
 j=750
 j=751
 j=752
 j=753
 j=754
 j=755
 j=756
 j=757
 j=758
 j=759
 j=760
 j=761
 j=762
 j=763
 j=764
 j=765
 j=766
 j=767
 j=768
 j=769
 j=770
 j=771
 j=772
 j=773
 j=774
 j=775
 j=776
 j=777
 j=778
 j=779
 j=780
 j=781
 j=782
 j=783
 j=784
 j=785
 j=786
 j=787
 j=788
 j=789
 j=790
 j=791
 j=792
 j=793
 j=794
 j=795
 j=796
 j=797
 j=798
 j=799
 j=800
 j=801
 j=802
 j=803
 j=804
 j=805
 j=806
 j=807
 j=808
 j=809
 j=810
 j=811
 j=812
 j=813
 j=814
 j=815
 j=816
 j=817
 j=818
 j=819
 j=820
 j=821
 j=822
 j=823
 j=824
 j=825
 j=826
 j=827
 j=828
 j=829
 j=830
 j=831
 j=832
 j=833
 j=834
 j=835
 j=836
 j=837
 j=838
 j=839
 j=840
 j=841
 j=842
 j=843
 j=844
 j=845
 j=846
 j=847
 j=848
 j=849
 j=850
 j=851
 j=852
 j=853
 j=854
 j=855
 j=856
 j=857
 j=858
 j=859
 j=860
 j=861
 j=862
 j=863
 j=864
 j=865
 j=866
 j=867
 j=868
 j=869
 j=870
 j=871
 j=872
 j=873
 j=874
 j=875
 j=876
 j=877
 j=878
 j=879
 j=880
 j=881
 j=882
 j=883
 j=884
 j=885
 j=886
 j=887
 j=888
 j=889
 j=890
 j=891
 j=892
 j=893
 j=894
 j=895
 j=896
 j=897
 j=898
 j=899
 j=900
 j=901
 j=902
 j=903
 j=904
 j=905
 j=906
 j=907
 j=908
 j=909
 j=910
 j=911
 j=912
 j=913
 j=914
 j=915
 j=916
 j=917
 j=918
 j=919
 j=920
 j=921
 j=922
 j=923
 j=924
 j=925
 j=926
 j=927
 j=928
 j=929
 j=930
 j=931
 j=932
 j=933
 j=934
 j=935
 j=936
 j=937
 j=938
 j=939
 j=940
 j=941
 j=942
 j=943
 j=944
 j=945
 j=946
 j=947
 j=948
 j=949
 j=950
 j=951
 j=952
 j=953
 j=954
 j=955
 j=956
 j=957
 j=958
 j=959
 j=960
 j=961
 j=962
 j=963
 j=964
 j=965
 j=966
 j=967
 j=968
 j=969
 j=970
 j=971
 j=972
 j=973
 j=974
 j=975
 j=976
 j=977
 j=978
 j=979
 j=980
 j=981
 j=982
 j=983

$$\text{So, total complexity} = O(n^2 + n^2 + n^2 + \dots) \\ = O(n^2)$$

Ans 6) for (int i=2; i <= n; i = ~~Pow~~ Pow(i, k))

{
 // Some O(1)
}

Complexity of ~~Pow~~ Pow(i, k) — $O(\log n)$
 ~~$O(\log k)$~~

$$i = 2$$

$$i = 2^k$$

$$i = 2^{k^2}$$

$$i = 2^{k^3}$$

$$i = 2^{k^4}$$

$$\vdots$$

$$i = 2^{k^m}$$

loop ends when $i > n$

$$2^{k^m} > n$$

$$\log(2^{k^m}) > \log n$$

$$k^m \log 2 > \log n$$

$$k^m > \log n$$

$$\log(k^m) > \log(\log n)$$

$$M \log k > \log(\log n)$$

$$M \geq \frac{\log(\log n)}{\log(k)}$$

$$T(c) = O(\log(\log n))$$

Ans 8) a) $100 < \log n < \sqrt{n} < n < \log(\log n) < n \log n$
 $< \log n! < n! < n^2 < \log^{2n} < 2^n < 2^{2n} < 4^n$

b) $4 < \sqrt{\log n} < \log n < 2 \log n < \log_2 N < N < 2N < 4N$
 $< \log(\log N) < N \log N < \log N! < N! < N^2 < 2 \times 2^N$

c) $9/6 < \log_3 N < \log_2 N < n \log_6 N < n \log_2 N < \log n!$
 $< N! < 5N < 8N^2 < 7N^3 < 8^{2n}$