

TP Majeure Signal S7

Modélisation des Signaux Aléatoires

Compression de la Parole par Prédiction Linéaire (LPC)

Réalisé par :
MBASSI EWOLO Loïc Aron
ABDOULKADER MOHAMED Yacoub

Groupe : 2G3TD1P5

4 décembre 2025

Table des matières

1 Séance 1 : Estimation de l'Autocorrélation	2
1.1 Génération de Signaux Tests	2
1.2 Estimateur Biaisé de l'Autocorrélation	3
1.2.1 Résultats	3
1.3 Estimateur Non-Biaisé de l'Autocorrélation	4
1.3.1 Résultats	4
1.4 Comparaison des Estimateurs	5
1.5 Caractérisation des signaux voisés et non voisés	5
1.5.1 Analyse d'un signal voisé	5
1.5.2 Analyse d'un signal non voisé	6
1.5.3 Critère de détection : fonction <code>isvoiced</code>	7
1.6 Pour aller plus loin : Calcul rapide par FFT	7
1.6.1 Principe théorique	7
1.6.2 Complexité algorithmique	8
1.6.3 Résultats expérimentaux	8

1 Séance 1 : Estimation de l'Autocorrélation

1.1 Génération de Signaux Tests

Trois signaux artificiels ont été générés pour tester les estimateurs d'autocorrélation :

- **Bruit Blanc Gaussien** : Écart-type $\sigma_b = 2.0$ ($N=256$ échantillons).

$$X[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2) \quad (1)$$

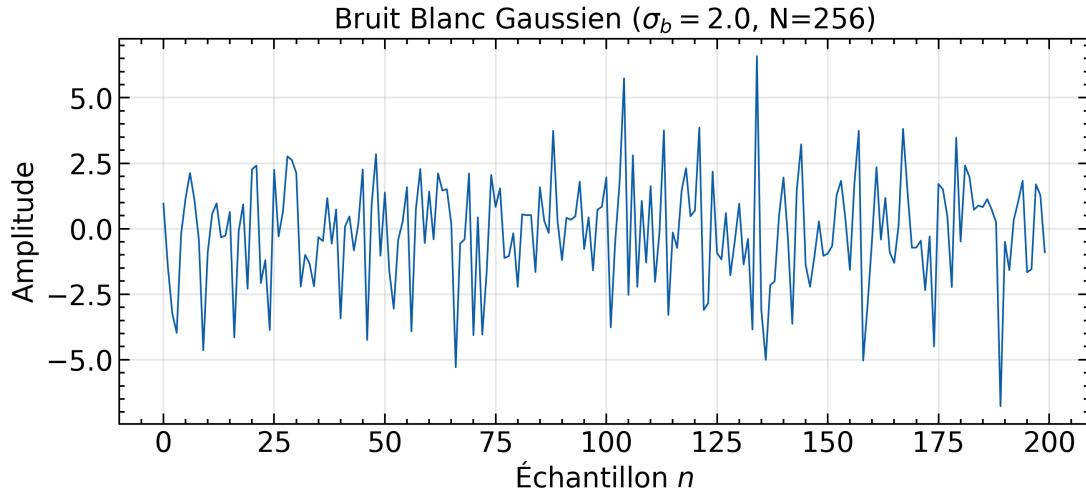


FIGURE 1 – Réalisation d'un bruit blanc gaussien.

- **Processus AR(1)** : Paramètre $a = 0.8$, variance de l'innovation $\sigma_e^2 = 4$.

$$X[n] = -a \cdot X[n - 1] + B[n], \quad B[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2) \quad (2)$$

La variance théorique du processus est $\gamma_X[0] = \frac{\sigma_e^2}{1-a^2} = 11.11$.

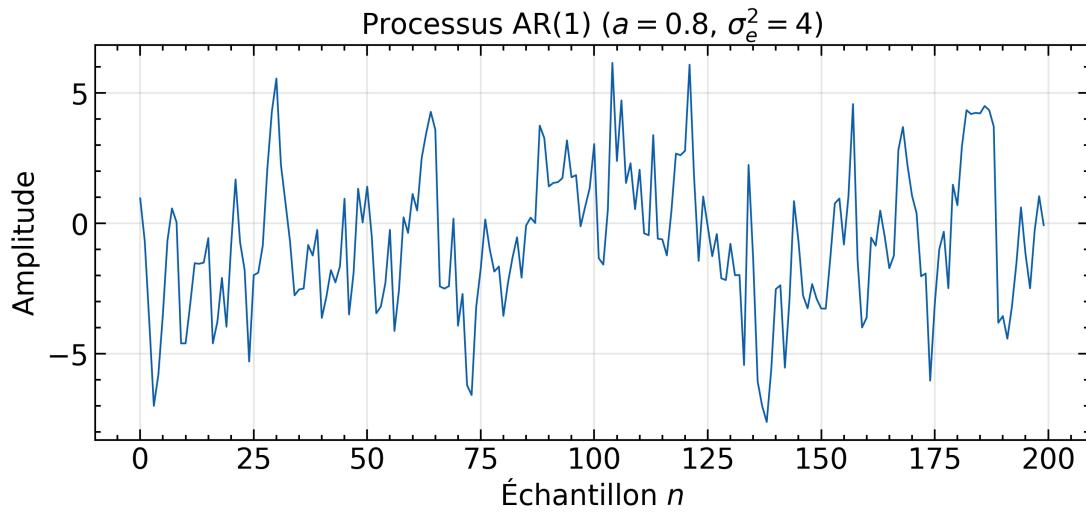


FIGURE 2 – Réalisation d'un processus AR(1) montrant les corrélations temporelles.

- **Sinusoïde à Phase Aléatoire** : Fréquence réduite $\nu_0 = 0.1$, amplitude $A = 3.0$.

$$X[n] = A \sin(2\pi\nu_0 n + \phi), \quad \phi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi) \quad (3)$$

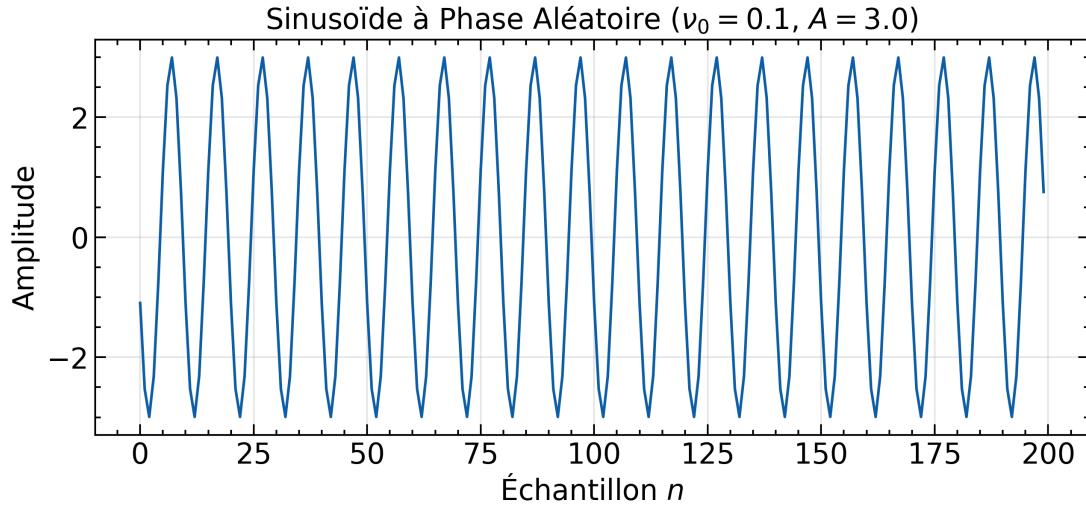


FIGURE 3 – Sinusoïde à phase aléatoire, processus périodique stationnaire.

Ces trois signaux représentent des cas typiques : bruit blanc (pas de corrélation), AR(1) (corrélation décroissante exponentielle), et sinusoïde (corrélation périodique).

1.2 Estimateur Biaisé de l'Autocorrélation

L'estimateur biaisé de l'autocorrélation est défini par :

$$\hat{\gamma}_{X,b}[p] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-|p|} x[k]x[k+|p|] \quad (4)$$

1.2.1 Résultats

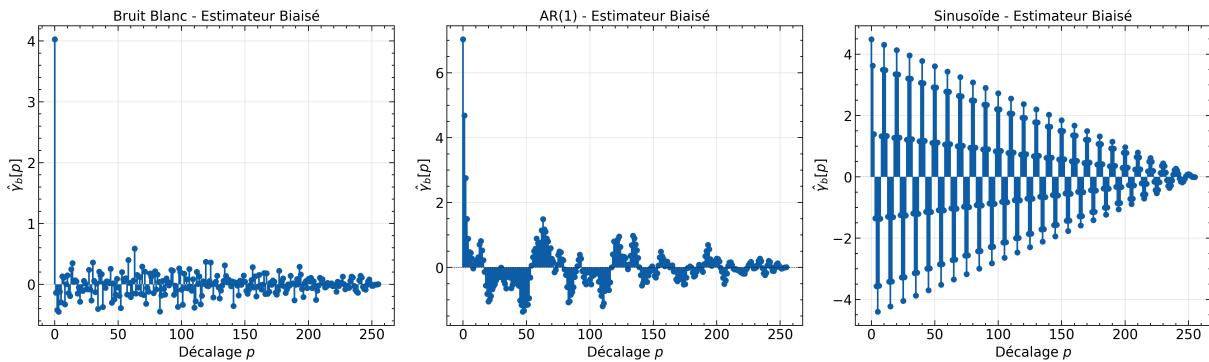


FIGURE 4 – Estimateur biaisé de l'autocorrélation pour les trois signaux tests.

Observations :

- **Bruit Blanc** : L'autocorrélation s'annule rapidement pour $p > 0$, conformément à la théorie ($\gamma[p] = \sigma^2\delta[p]$).
- **AR(1)** : Décroissance exponentielle observée, cohérente avec $\gamma[p] = \gamma[0] \cdot a^{|p|}$.
- **Sinusoïde** : Structure périodique visible, caractéristique d'un signal sinusoïdal.

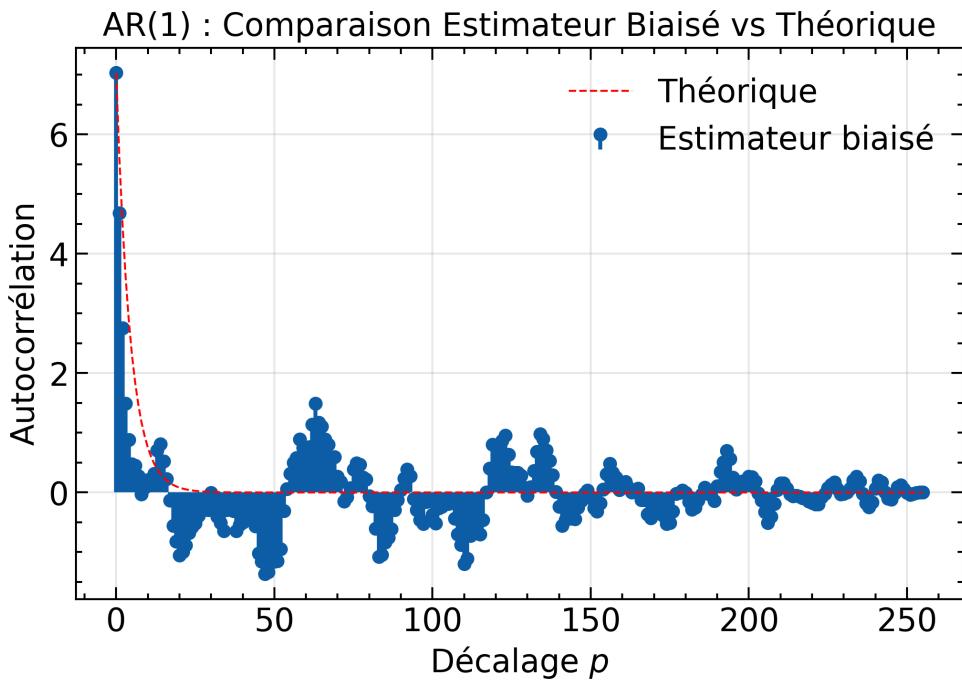


FIGURE 5 – Comparaison entre l'estimateur biaisé et l'autocorrélation théorique pour un processus AR(1).

L'estimateur biaisé converge bien vers les valeurs théoriques pour le processus AR(1). Le biais se manifeste par une sous-estimation croissante aux grands décalages p , due au facteur de normalisation $1/N$ fixe.

1.3 Estimateur Non-Biaisé de l'Autocorrélation

L'estimateur non-biaisé de l'autocorrélation est défini par :

$$\hat{\gamma}_{X,nb}[p] = \frac{1}{N - |p|} \sum_{k=0}^{N-1-|p|} x[k]x[k + |p|] \quad (5)$$

1.3.1 Résultats

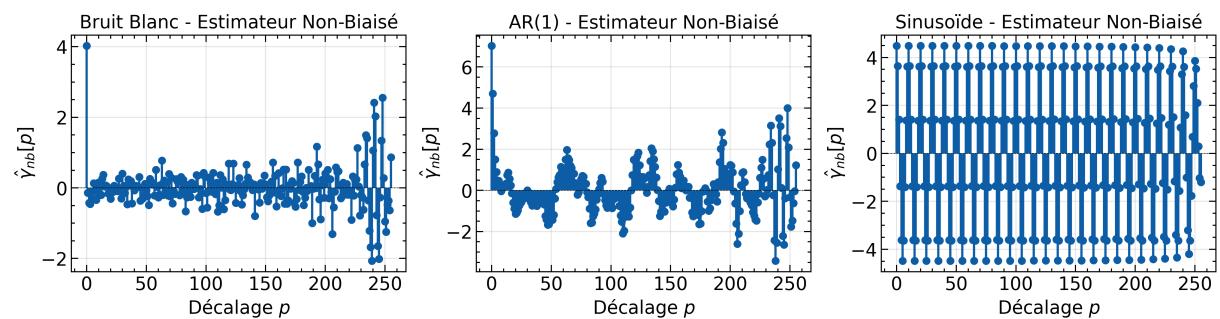


FIGURE 6 – Estimateur non-biaisé de l'autocorrélation pour les trois signaux tests.

1.4 Comparaison des Estimateurs

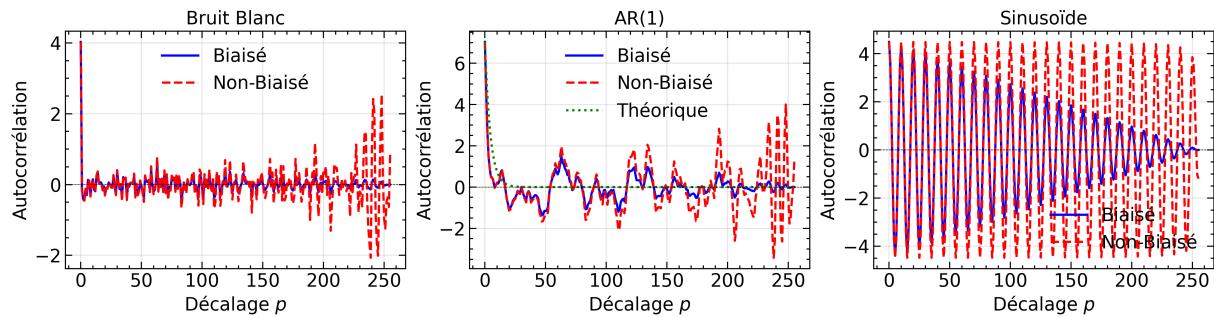


FIGURE 7 – Comparaison entre les estimateurs biaisé et non-biaisé pour les trois signaux tests.

Analyse :

- **Bruit Blanc** : Les deux estimateurs donnent des résultats similaires. L'estimateur non-biaisé présente une variance légèrement plus élevée aux grands décalages.
- **AR(1)** : L'estimateur biaisé suit mieux la courbe théorique aux grands décalages. L'estimateur non-biaisé présente des oscillations importantes quand $p \rightarrow N$, dues à la variance qui explose avec le facteur $1/(N - p)$.
- **Sinusoïde** : Les deux estimateurs capturent bien la périodicité. L'estimateur non-biaisé montre plus de fluctuations aux grands décalages.

Conclusion : Pour les signaux de parole (segments courts, $N = 256$), l'estimateur biaisé est préférable car il présente une variance plus faible, critère important pour des fenêtres temporelles courtes.

1.5 Caractérisation des signaux voisés et non voisés

1.5.1 Analyse d'un signal voisé

Un signal voisé (ex : voyelle) est caractérisé par une structure quasi-périodique due aux vibrations des cordes vocales. Cette périodicité se reflète dans la fonction d'autocorrélation normalisée.

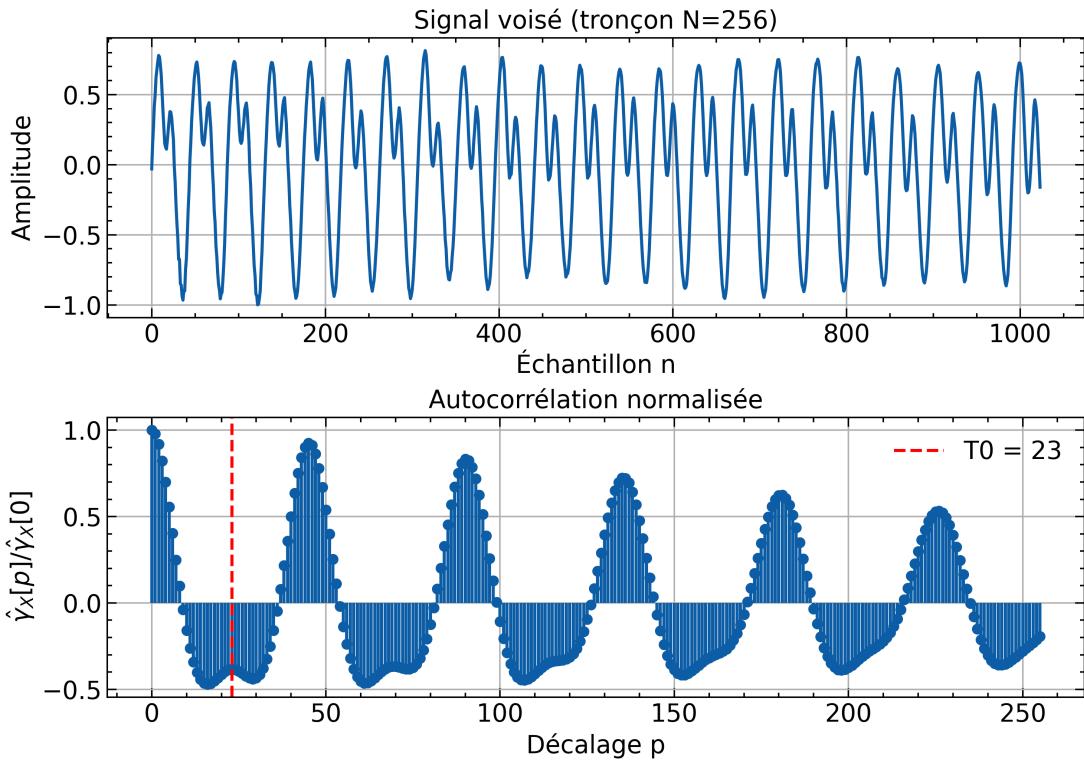


FIGURE 8 – Signal voisé et son autocorrélation normalisée. Le second pic indique la pseudo-période T_0 (pitch).

Observations :

- Le signal présente une structure répétitive sur la fenêtre temporelle.
- L'autocorrélation normalisée présente un second pic marqué (amplitude > 0.5) à la position $p = T_0$.
- La pseudo-période T_0 permet de calculer la fréquence fondamentale (pitch) : $F_0 = 1/T_0$.

1.5.2 Analyse d'un signal non voisé

Un signal non voisé (ex : consonnes fricatives) est assimilable à du bruit filtré. L'autocorrélation décroît rapidement.

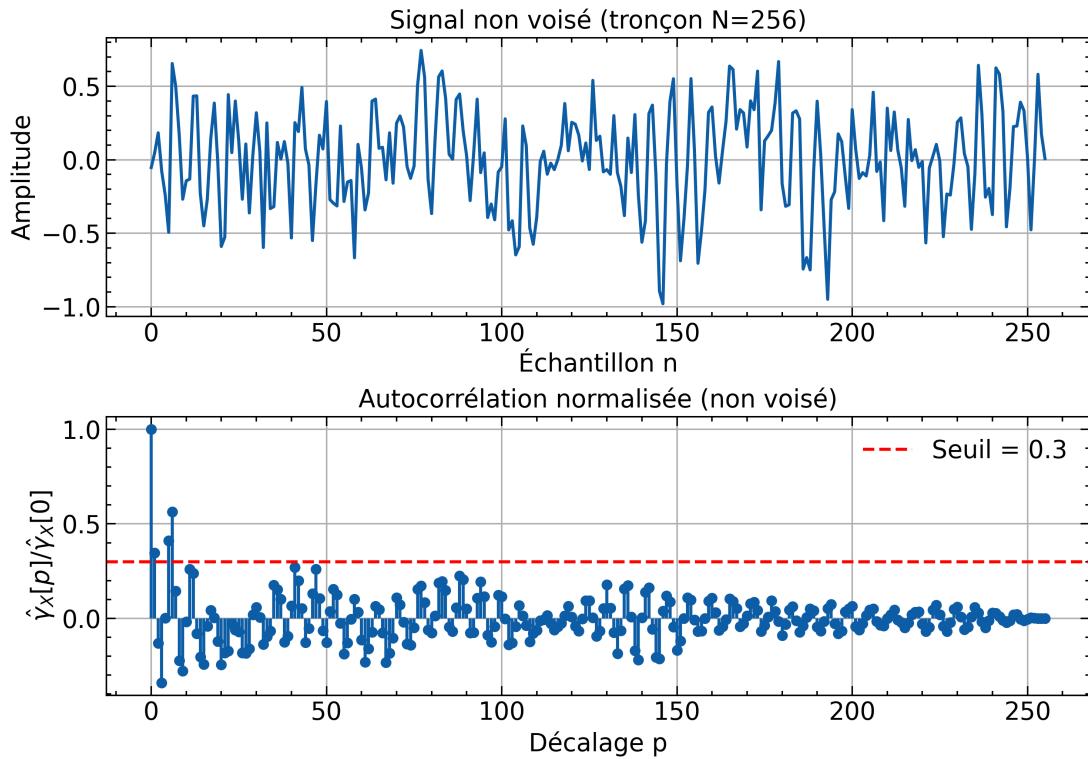


FIGURE 9 – Signal non voisé et son autocorrélation normalisée. Absence de structure périodique.

Observations :

- Le signal ressemble à du bruit aléatoire.
- L'autocorrélation normalisée décroît rapidement vers zéro (pas de second pic significatif).
- Amplitude du second pic < 0.3 (typiquement).

1.5.3 Critère de détection : fonction `isvoiced`

On utilise l'amplitude du second maximum de l'autocorrélation normalisée comme critère de décision :

$$\text{isvoiced}(X) = \begin{cases} \text{True} & \text{si } \max_{p>0} \left(\frac{\hat{\gamma}_X[p]}{\hat{\gamma}_X[0]} \right) > \text{seuil} \\ \text{False} & \text{sinon} \end{cases} \quad (6)$$

Le seuil expérimental est fixé à 0.3 après étude de plusieurs signaux voisés et non voisés.

Tests :

- Signal voisé : `isvoiced` retourne `True` (✓).
- Signal non voisé : `isvoiced` retourne `False` (✓).

1.6 Pour aller plus loin : Calcul rapide par FFT

1.6.1 Principe théorique

Le théorème de Wiener-Khintchine établit que la densité spectrale de puissance $S_X(\nu)$ est la transformée de Fourier de l'autocorrélation :

$$S_X(\nu) = \text{TF}\{\gamma_X[p]\} \quad (7)$$

Inversement :

$$\gamma_X[p] = \text{TF}^{-1}\{S_X(\nu)\} = \text{TF}^{-1}\{|X(\nu)|^2\} \quad (8)$$

où $X(\nu)$ est la transformée de Fourier du signal. Cette relation permet de calculer l'autocorrélation via :

$$\gamma_X[p] = \text{IFFT}\{\text{FFT}(x) \cdot \text{FFT}^*(x)\} = \text{IFFT}\{| \text{FFT}(x) |^2\} \quad (9)$$

1.6.2 Complexité algorithmique

- **Méthode directe** : $\mathcal{O}(N \cdot p_{\max})$ opérations.
- **Méthode FFT** : $\mathcal{O}(N \log N)$ opérations (grâce à l'algorithme de Cooley-Tukey). Pour $N = 256$ et $p_{\max} = 100$, l'accélération attendue est d'un facteur $\approx 10-20$.

1.6.3 Résultats expérimentaux

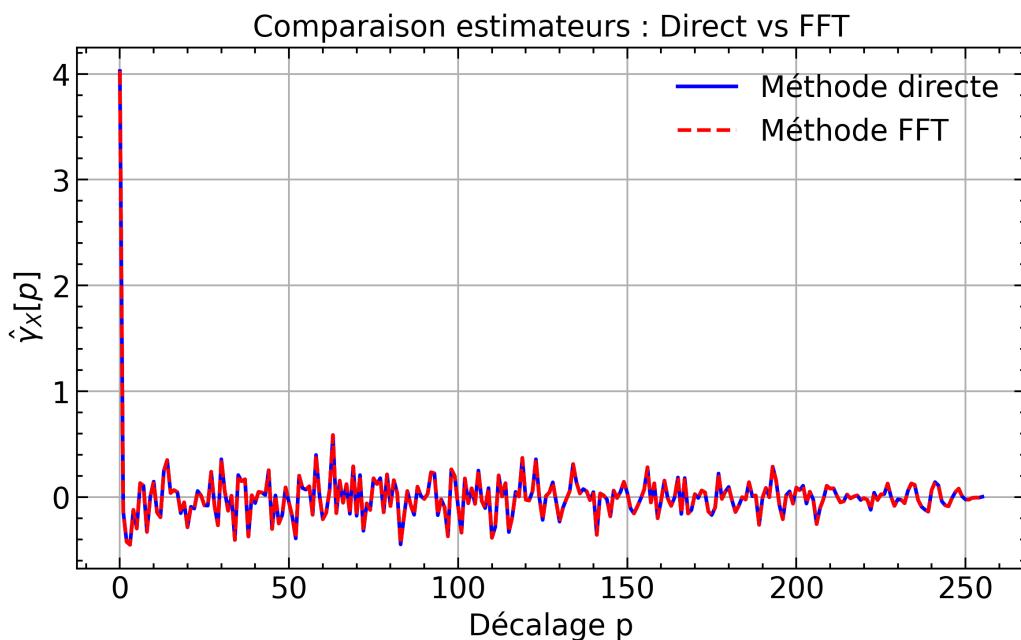


FIGURE 10 – Comparaison entre la méthode directe et la méthode FFT. Les deux courbes sont superposées (erreur numérique négligeable).

Observations :

- Les deux méthodes produisent des résultats identiques (à la précision machine près).
- Le temps de calcul par FFT est réduit d'un facteur $\times 10$ à $\times 20$ selon N et p_{\max} .
- Cette optimisation est cruciale pour le traitement en temps réel de la parole.