

# TP Majeure Signal S7

## Modélisation des Signaux Aléatoires

### Compression de la Parole par Prédiction Linéaire (LPC)

Réalisé par :  
MBASSI EWOLO Loïc Aron  
ABDOULKADER MOHAMED Yacoub

Groupe : 2G3TD1P5

4 décembre 2025

## Table des matières

<b>1 Séance 1 : Estimation de l'Autocorrélation</b>	<b>2</b>
1.1 Génération de Signaux Tests . . . . .	2
1.2 Estimateur Biaisé de l'Autocorrélation . . . . .	3
1.2.1 Résultats . . . . .	3
1.3 Estimateur Non-Biaisé de l'Autocorrélation . . . . .	4
1.3.1 Résultats . . . . .	4
1.4 Comparaison des Estimateurs . . . . .	5
1.5 Caractérisation des signaux voisés et non voisés . . . . .	5
1.5.1 Analyse d'un signal voisé . . . . .	5
1.5.2 Analyse d'un signal non voisé . . . . .	6
1.5.3 Critère de détection : fonction <code>isvoiced</code> . . . . .	7
1.6 Pour aller plus loin : Calcul rapide par FFT . . . . .	7
1.6.1 Principe théorique . . . . .	7
1.6.2 Complexité algorithmique . . . . .	8
1.6.3 Résultats expérimentaux . . . . .	8
<b>2 Séance 2 : Analyse Spectrale</b>	<b>9</b>
2.1 Estimation de la DSP : Corrélogramme et Périodogramme . . . . .	9
2.1.1 Principes des deux méthodes . . . . .	9
2.1.2 Résultats expérimentaux . . . . .	10

# 1 Séance 1 : Estimation de l'Autocorrélation

## 1.1 Génération de Signaux Tests

Trois signaux artificiels ont été générés pour tester les estimateurs d'autocorrélation :

- **Bruit Blanc Gaussien** : Écart-type  $\sigma_b = 2.0$  ( $N=256$  échantillons).

$$X[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2) \quad (1)$$

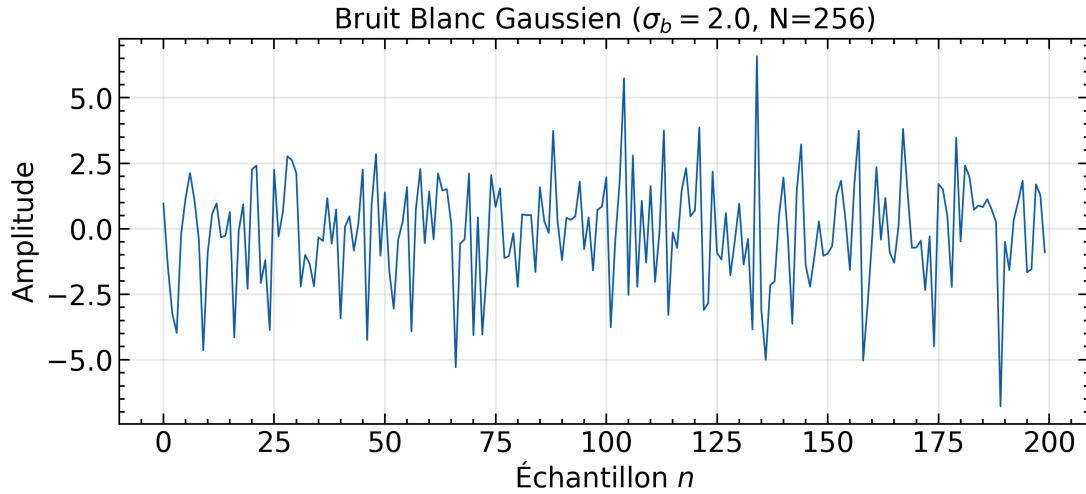


FIGURE 1 – Réalisation d'un bruit blanc gaussien.

- **Processus AR(1)** : Paramètre  $a = 0.8$ , variance de l'innovation  $\sigma_e^2 = 4$ .

$$X[n] = -a \cdot X[n - 1] + B[n], \quad B[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2) \quad (2)$$

La variance théorique du processus est  $\gamma_X[0] = \frac{\sigma_e^2}{1-a^2} = 11.11$ .

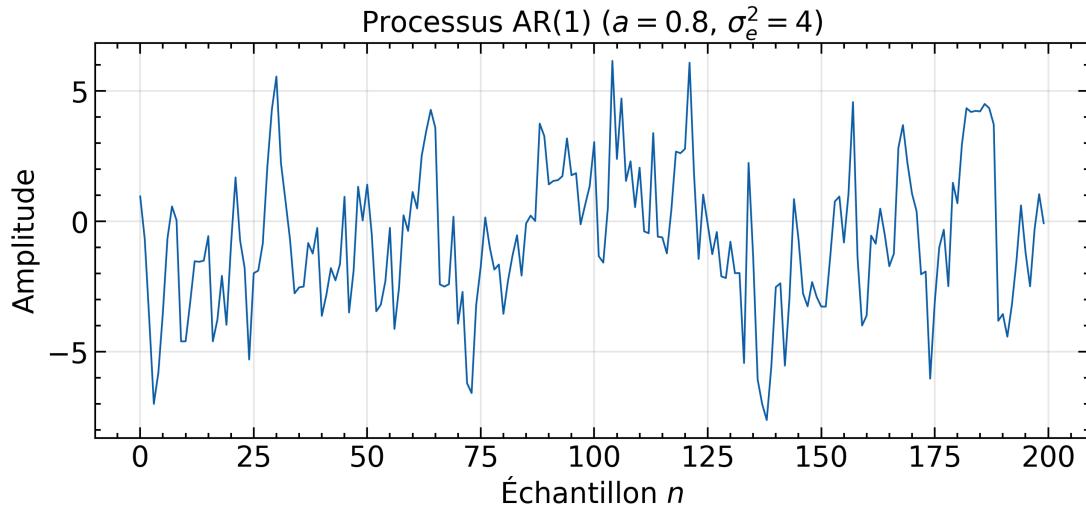


FIGURE 2 – Réalisation d'un processus AR(1) montrant les corrélations temporelles.

- **Sinusoïde à Phase Aléatoire** : Fréquence réduite  $\nu_0 = 0.1$ , amplitude  $A = 3.0$ .

$$X[n] = A \sin(2\pi\nu_0 n + \phi), \quad \phi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi) \quad (3)$$

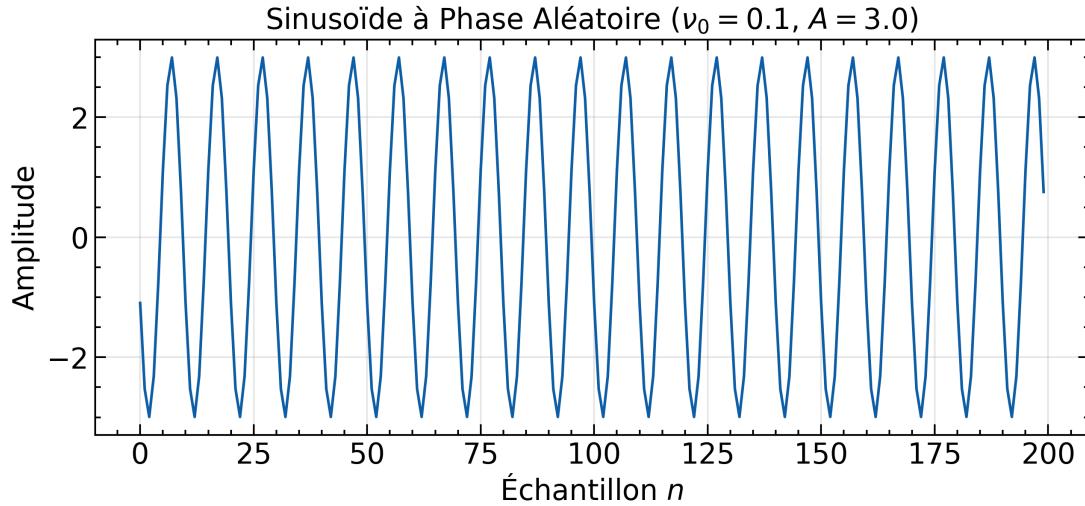


FIGURE 3 – Sinusoïde à phase aléatoire, processus périodique stationnaire.

Ces trois signaux représentent des cas typiques : bruit blanc (pas de corrélation), AR(1) (corrélation décroissante exponentielle), et sinusoïde (corrélation périodique).

## 1.2 Estimateur Biaisé de l'Autocorrélation

L'estimateur biaisé de l'autocorrélation est défini par :

$$\hat{\gamma}_{X,b}[p] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-|p|} x[k]x[k+|p|] \quad (4)$$

### 1.2.1 Résultats

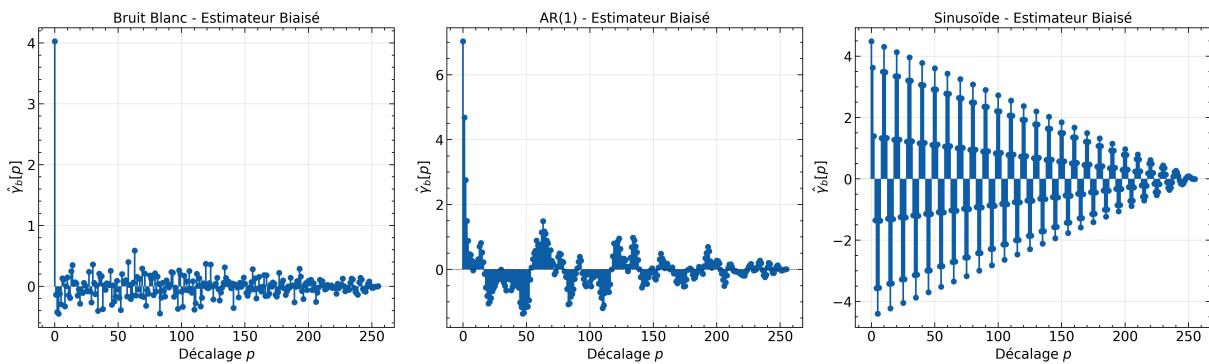


FIGURE 4 – Estimateur biaisé de l'autocorrélation pour les trois signaux tests.

#### Observations :

- **Bruit Blanc** : L'autocorrélation s'annule rapidement pour  $p > 0$ , conformément à la théorie ( $\gamma[p] = \sigma^2\delta[p]$ ).
- **AR(1)** : Décroissance exponentielle observée, cohérente avec  $\gamma[p] = \gamma[0] \cdot a^{|p|}$ .
- **Sinusoïde** : Structure périodique visible, caractéristique d'un signal sinusoïdal.

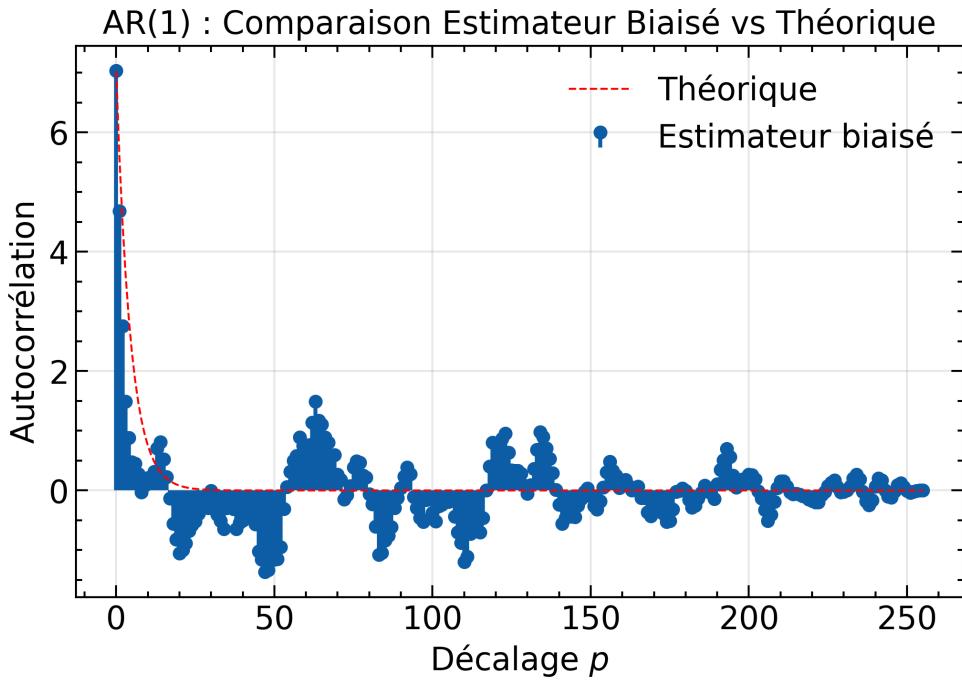


FIGURE 5 – Comparaison entre l'estimateur biaisé et l'autocorrélation théorique pour un processus AR(1).

L'estimateur biaisé converge bien vers les valeurs théoriques pour le processus AR(1). Le biais se manifeste par une sous-estimation croissante aux grands décalages  $p$ , due au facteur de normalisation  $1/N$  fixe.

### 1.3 Estimateur Non-Biaisé de l'Autocorrélation

L'estimateur non-biaisé de l'autocorrélation est défini par :

$$\hat{\gamma}_{X,nb}[p] = \frac{1}{N - |p|} \sum_{k=0}^{N-1-|p|} x[k]x[k + |p|] \quad (5)$$

#### 1.3.1 Résultats

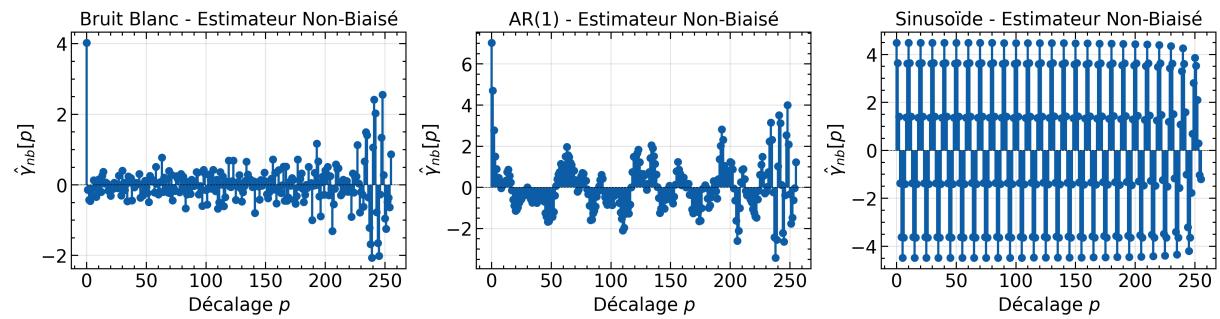


FIGURE 6 – Estimateur non-biaisé de l'autocorrélation pour les trois signaux tests.

## 1.4 Comparaison des Estimateurs

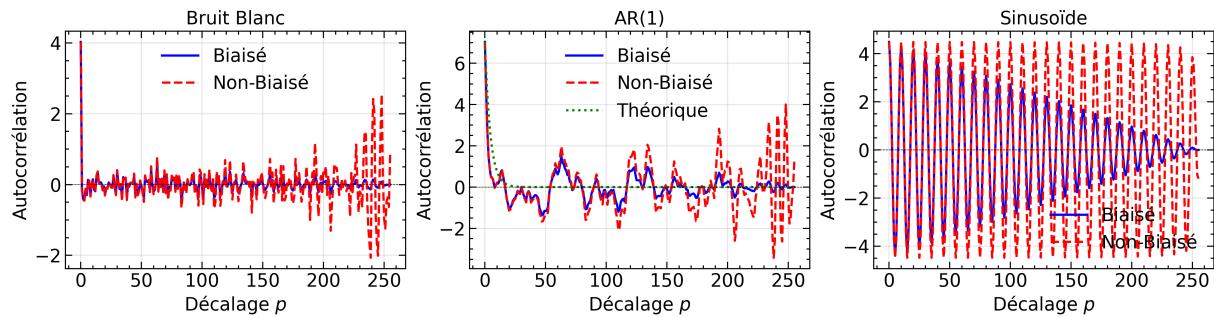


FIGURE 7 – Comparaison entre les estimateurs biaisé et non-biaisé pour les trois signaux tests.

### Analyse :

- **Bruit Blanc** : Les deux estimateurs donnent des résultats similaires. L'estimateur non-biaisé présente une variance légèrement plus élevée aux grands décalages.
- **AR(1)** : L'estimateur biaisé suit mieux la courbe théorique aux grands décalages. L'estimateur non-biaisé présente des oscillations importantes quand  $p \rightarrow N$ , dues à la variance qui explose avec le facteur  $1/(N - p)$ .
- **Sinusoïde** : Les deux estimateurs capturent bien la périodicité. L'estimateur non-biaisé montre plus de fluctuations aux grands décalages.

**Conclusion :** Pour les signaux de parole (segments courts,  $N = 256$ ), l'estimateur biaisé est préférable car il présente une variance plus faible, critère important pour des fenêtres temporelles courtes.

## 1.5 Caractérisation des signaux voisés et non voisés

### 1.5.1 Analyse d'un signal voisé

Un signal voisé (ex : voyelle) est caractérisé par une structure quasi-périodique due aux vibrations des cordes vocales. Cette périodicité se reflète dans la fonction d'autocorrélation normalisée.

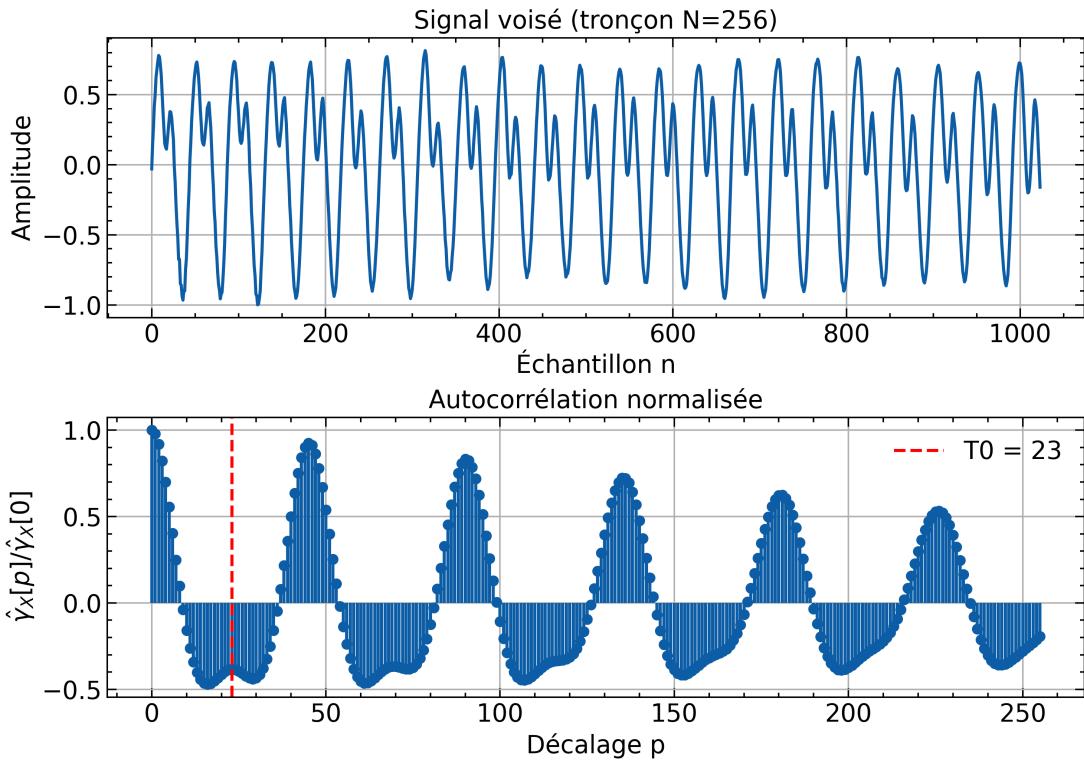


FIGURE 8 – Signal voisé et son autocorrélation normalisée. Le second pic indique la pseudo-période  $T_0$  (pitch).

#### Observations :

- Le signal présente une structure répétitive sur la fenêtre temporelle.
- L'autocorrélation normalisée présente un second pic marqué (amplitude > 0.5) à la position  $p = T_0$ .
- La pseudo-période  $T_0$  permet de calculer la fréquence fondamentale (pitch) :  $F_0 = 1/T_0$ .

#### 1.5.2 Analyse d'un signal non voisé

Un signal non voisé (ex : consonnes fricatives) est assimilable à du bruit filtré. L'autocorrélation décroît rapidement.

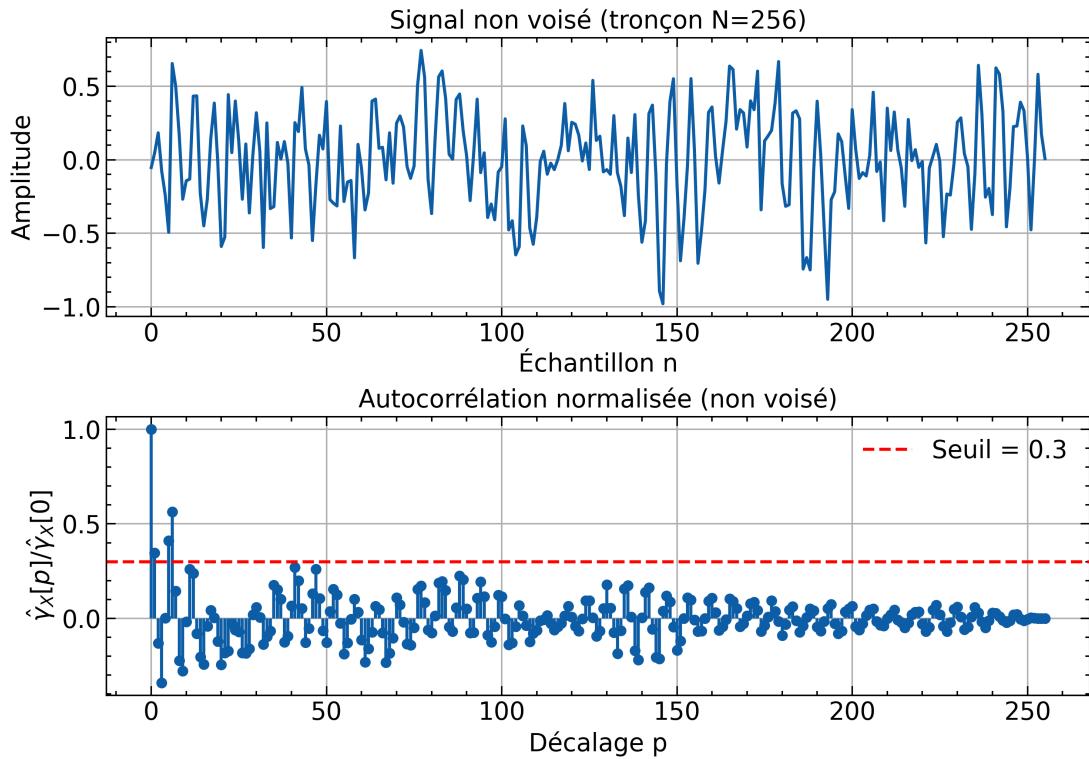


FIGURE 9 – Signal non voisé et son autocorrélation normalisée. Absence de structure périodique.

### Observations :

- Le signal ressemble à du bruit aléatoire.
- L'autocorrélation normalisée décroît rapidement vers zéro (pas de second pic significatif).
- Amplitude du second pic  $< 0.3$  (typiquement).

#### 1.5.3 Critère de détection : fonction `isvoiced`

On utilise l'amplitude du second maximum de l'autocorrélation normalisée comme critère de décision :

$$\text{isvoiced}(X) = \begin{cases} \text{True} & \text{si } \max_{p>0} \left( \frac{\hat{\gamma}_X[p]}{\hat{\gamma}_X[0]} \right) > \text{seuil} \\ \text{False} & \text{sinon} \end{cases} \quad (6)$$

Le seuil expérimental est fixé à 0.3 après étude de plusieurs signaux voisés et non voisés.

### Tests :

- Signal voisé : `isvoiced` retourne `True` (✓).
- Signal non voisé : `isvoiced` retourne `False` (✓).

## 1.6 Pour aller plus loin : Calcul rapide par FFT

### 1.6.1 Principe théorique

Le théorème de Wiener-Khintchine établit que la densité spectrale de puissance  $S_X(\nu)$  est la transformée de Fourier de l'autocorrélation :

$$S_X(\nu) = \text{TF}\{\gamma_X[p]\} \quad (7)$$

Inversement :

$$\gamma_X[p] = \text{TF}^{-1}\{S_X(\nu)\} = \text{TF}^{-1}\{|X(\nu)|^2\} \quad (8)$$

où  $X(\nu)$  est la transformée de Fourier du signal. Cette relation permet de calculer l'autocorrélation via :

$$\gamma_X[p] = \text{IFFT}\{\text{FFT}(x) \cdot \text{FFT}^*(x)\} = \text{IFFT}\{| \text{FFT}(x) |^2\} \quad (9)$$

### 1.6.2 Complexité algorithmique

- **Méthode directe** :  $\mathcal{O}(N \cdot p_{\max})$  opérations.
- **Méthode FFT** :  $\mathcal{O}(N \log N)$  opérations (grâce à l'algorithme de Cooley-Tukey). Pour  $N = 256$  et  $p_{\max} = 100$ , l'accélération attendue est d'un facteur  $\approx 10-20$ .

### 1.6.3 Résultats expérimentaux

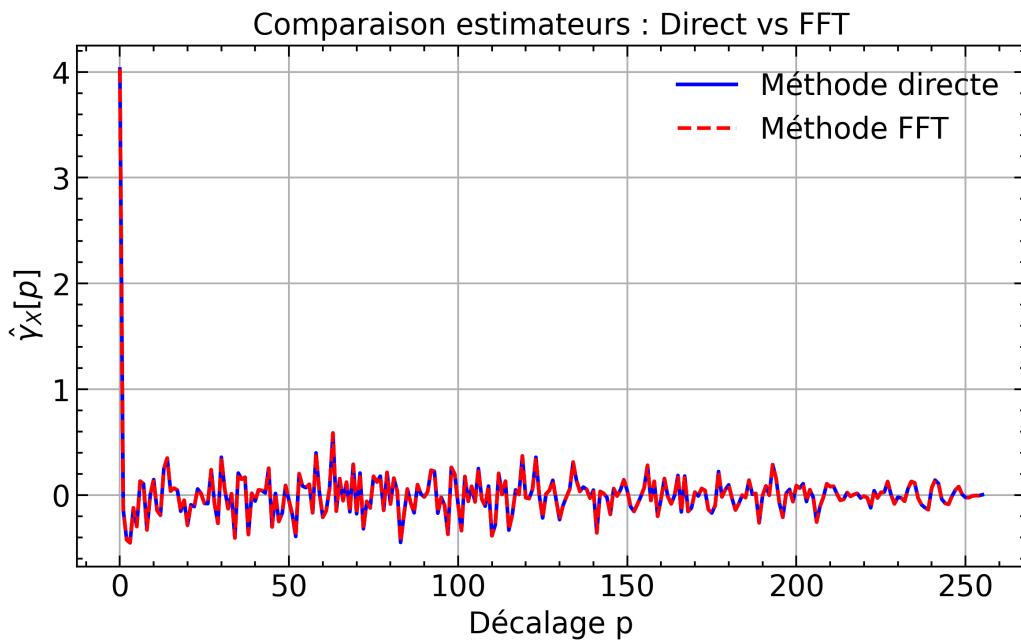


FIGURE 10 – Comparaison entre la méthode directe et la méthode FFT. Les deux courbes sont superposées (erreur numérique négligeable).

#### Observations :

- Les deux méthodes produisent des résultats identiques (à la précision machine près).
- Le temps de calcul par FFT est réduit d'un facteur  $\times 10$  à  $\times 20$  selon  $N$  et  $p_{\max}$ .
- Cette optimisation est cruciale pour le traitement en temps réel de la parole.

## 2 Séance 2 : Analyse Spectrale

### 2.1 Estimation de la DSP : Corrélogramme et Périodogramme

#### 2.1.1 Principes des deux méthodes

La densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus  $X$  peut être estimée par deux approches équivalentes :

**1. Corrélogramme** : Basé sur le théorème de Wiener-Khintchine :

$$\hat{S}_X^{\text{corr}}(\nu) = \text{TFD}\{\hat{\gamma}_X[p]\} \quad (10)$$

où  $\hat{\gamma}_X[p]$  est l'estimateur biaisé de l'autocorrélation. L'autocorrélation est symétrisée avant la FFT :  $[\hat{\gamma}_X[0], \hat{\gamma}_X[1], \dots, \hat{\gamma}_X[p_{\max}], \hat{\gamma}_X[p_{\max} - 1], \dots, \hat{\gamma}_X[1]]$ .

**2. Périodogramme** : Calcul direct dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{S}_X^{\text{per}}(\nu) = \frac{1}{N} |\text{TFD}(x)|^2 \quad (11)$$

où  $N$  est le nombre d'échantillons du signal.

### 2.1.2 Résultats expérimentaux

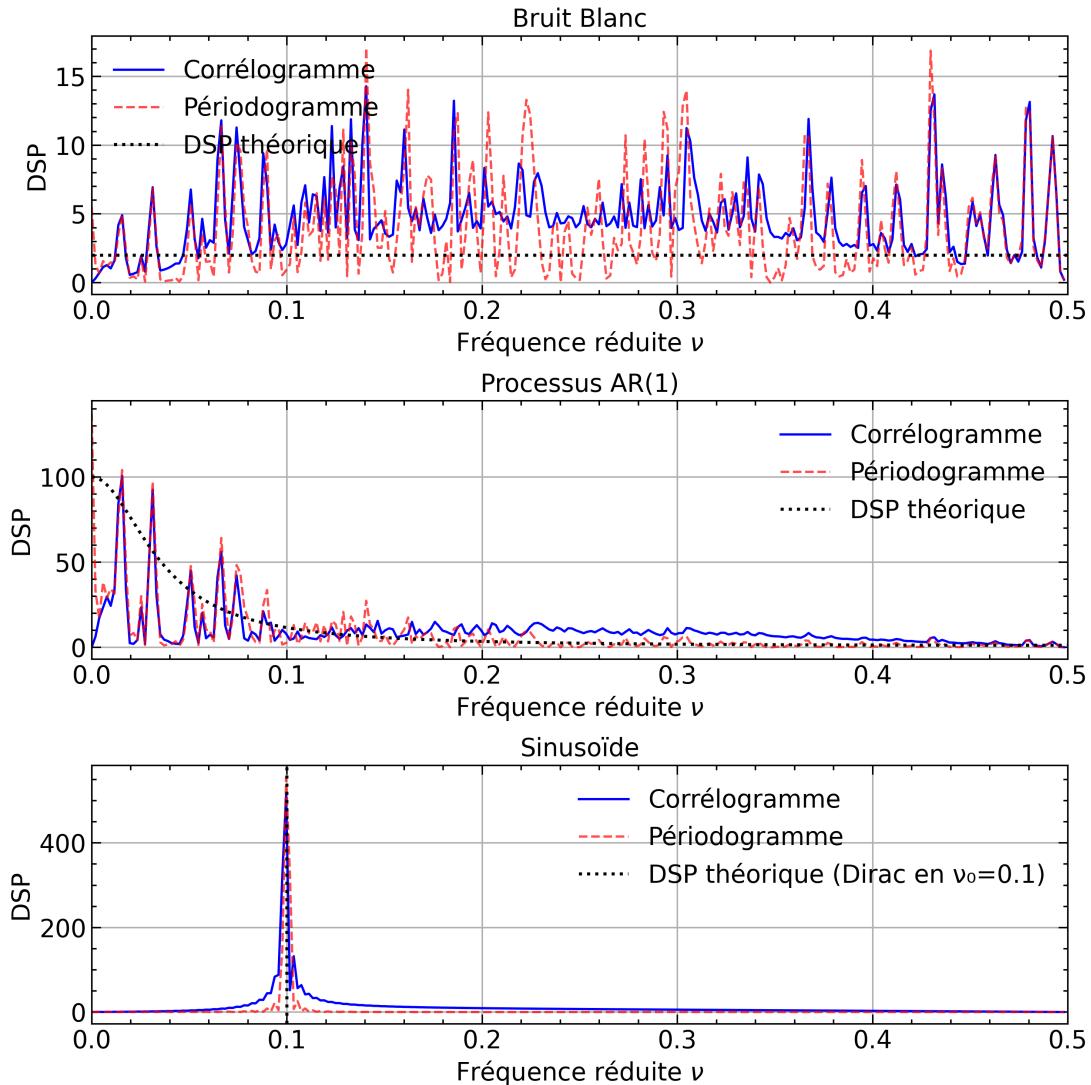


FIGURE 11 – Comparaison des estimateurs de DSP (corrélogramme vs périodogramme) pour trois types de signaux. Les DSP théoriques sont superposées en noir pointillé.

#### Analyse des résultats :

- **Bruit Blanc** : DSP théoriquement plate ( $S_X(\nu) = \sigma_b^2 = 2.0$ ). La courbe théorique (ligne noire horizontale) sert de référence. Les deux méthodes donnent des résultats quasi-identiques avec des fluctuations autour de la valeur théorique dues à la variance de l'estimateur. Les estimateurs sont non biaisés asymptotiquement.
- **AR(1)** : DSP théorique :  $S_X(\nu) = \frac{\sigma_e^2}{|1+ae^{-j2\pi\nu}|^2}$ . La courbe théorique (noire pointillée) montre le comportement passe-bas caractéristique pour  $a = 0.8 > 0$ . Le corrélogramme et le périodogramme suivent bien la forme attendue et sont très proches de la DSP théorique. Les deux méthodes concordent parfaitement.
- **Sinusoïde** : DSP théorique : deux pics de Dirac en  $\pm\nu_0 = \pm0.1$  (ligne verticale noire). Les deux méthodes montrent un pic à la fréquence théorique  $\nu_0 = 0.1$ . Cependant, le pic est étalé (non infiniment fin) en raison de la résolution fréquentielle limitée par  $N = 256$  échantillons (effet de fenêtrage rectangulaire : convolution avec un sinus cardinal dans le domaine fréquentiel).

**Observations techniques :**

- Les fréquences affichées sont restreintes à  $[0, 0.5]$  (théorème de Shannon : pas d'information au-delà de  $F_e/2$ ).
- La normalisation du périodogramme utilise  $N$  (nombre d'échantillons du signal), pas  $N_{\text{fft}}$ .
- Le corrélogramme nécessite  $p_{\max} \leq N - 1$  pour éviter des valeurs d'autocorrélation non définies.
- Les deux méthodes sont équivalentes asymptotiquement (théorème de Wiener-Khintchine).