



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



5ª ESCUELA DE VERANO DE CONTROL TURIX-DYNAMICS

El filtro de Kalman

Un curso sobre estimación de estados y parámetros

I. Santos-Ruiz & F.R. López-Estrada

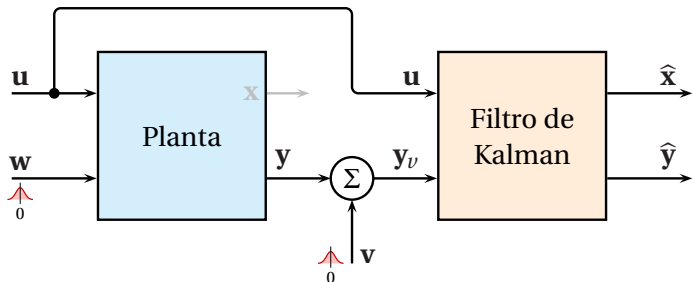
Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez

Turix-Dynamics Diagnosis and Control Group

- Estimación en condiciones inciertas: variables aleatorias
- Filtro de Kalman
- Implementación del filtro de Kalman
- Filtrado de señales sin modelo

Documentos y código fuente:

<https://github.com/isantosruiz/kalman>



El **filtro de Kalman** (FK) es un algoritmo para estimar los estados/parámetros de un sistema en presencia de incertidumbre. El FK se usa ampliamente en aplicaciones de seguimiento, navegación y control.

```
A = diag([-1,-2,-3]); B = [1;-1;1]; C = [0,1,0];
continuo = ss(A,B,C,0);
discreto = c2d(continuo,0.01);
A = discreto.a; B = discreto.b; C = discreto.c;

t = 0:0.01:10;
u = sin(t);
[y,t,x] = lsim(discreto,u,t,[0.3;0.5;0.7]);
y = y + 0.1*randn(size(y));

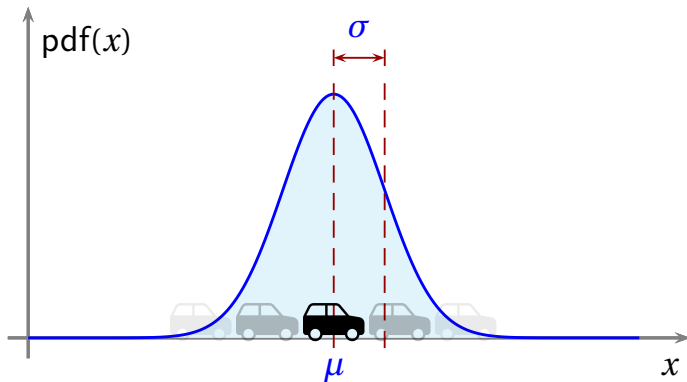
kf = KalmanFilter(A,B,C,eye(3)*1e-6,0.01);
xhat = kf.estimate(u,y');
yhat = C*xhat;
subplot(211); plot(t,y,t,yhat,'Linewidth',1)
subplot(212); plot(t,xhat,t,x,'--','LineWidth',1)
```

Estimación en condiciones inciertas

Un coche partió de $x = 0$ en $t = 0$ con velocidad $v_0 = 2 \text{ m/s}$. ¿Dónde estará el coche en $t = 10 \text{ s}$?

Estimación en condiciones inciertas

Un coche partió de $x = 0$ en $t = 0$ con velocidad $v_0 = 2 \text{ m/s}$. ¿Dónde estará el coche en $t = 10 \text{ s}$?



¿Se puede saber con certeza dónde está el carro?

Una variable aleatoria es un conjunto de posibles valores de un experimento cuyo resultado es incierto. Se describe mediante una **función de densidad de probabilidad** (PDF).

Una **variable aleatoria continua** X puede tomar cualquier valor x dentro de un intervalo o dominio específico \mathcal{D} , como el tiempo de carga de una batería o el tiempo de carrera de maratón. Además,

$$\int_{\mathcal{D}} f(x) \mathrm{d}x = 1.$$

El valor esperado de una variable aleatoria continua con PDF dada por $f(x)$ se define por:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathcal{D}} x f(x) \mathrm{d}x$$

Las PDF se caracterizan por ciertas medidas denominadas **momentos**, que son los valores esperados de las potencias de la variable aleatoria.

Existen dos tipos de momentos:

- El **k -ésimo momento** es el valor esperado de la k -ésima potencia de la variable aleatoria: $\mathbb{E}[X^k]$

El primer momento $\mathbb{E}[X]$ es la **media** (μ) de la variable aleatoria.

- El **k -ésimo momento central** es el valor esperado de la k -ésima potencia de la distribución de la variable aleatoria respecto a su media: $\mathbb{E}[(X - \mu)^k]$

El segundo momento central $\mathbb{E}[(X - \mu)^2]$ es la **varianza** (σ^2) de la variable aleatoria.

Ejercicio: Hallar la media (primer momento) y la varianza (segundo momento central) de la variable aleatoria definida por la siguiente PDF triangular en \mathcal{D} : $0 \leq x \leq 4$:

$$f(x) = \begin{cases} x/6 & \text{para } 0 \leq x < 3, \\ (4-x)/2 & \text{para } 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Variables aleatorias

```
f = @(x) (x/6).*double(x<3)+(4-x)/2.*double(x>=3);  
fplot(f,[0,4])
```

Variables aleatorias

```
f = @(x) (x/6).*double(x<3)+(4-x)/2.*double(x>=3);  
fplot(f,[0,4])  
% Cálculo analítico (aproximado numéricamente)  
integral(f,0,4) % ¿Es una PDF?  
mu = integral(@(x)x.*f(x),0,4)  
sigma2 = integral(@(x)(x-mu).^2.*f(x),0,4)
```

```
f = @(x) (x/6).*double(x<3)+(4-x)/2.*double(x>=3);  
fplot(f,[0,4])  
  
% Cálculo analítico (aproximado numéricamente)  
integral(f,0,4) % ¿Es una PDF?  
mu = integral(@(x)x.*f(x),0,4)  
sigma2 = integral(@(x)(x-mu).^2.*f(x),0,4)  
  
% Cálculo por fuerza bruta  
pdf = makedist('Triangular','A',0,'B',3,'C',4);  
x = random(pdf,1000000,1);  
mu = mean(x)  
sigma2 = var(x)
```

La PDF normal o “gaussiana”

Normal univariada:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

La PDF normal o “gaussiana”

Normal univariada:

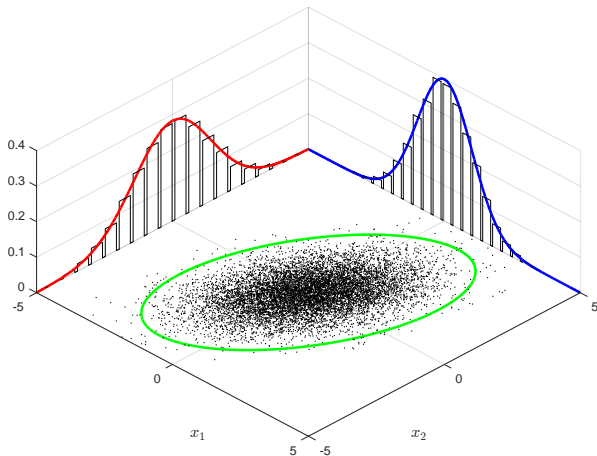
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

Normal multivariada:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

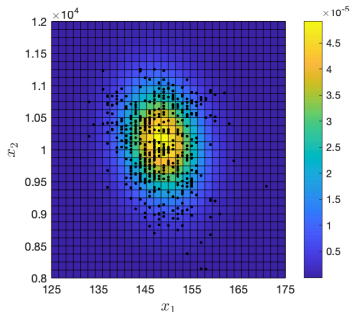
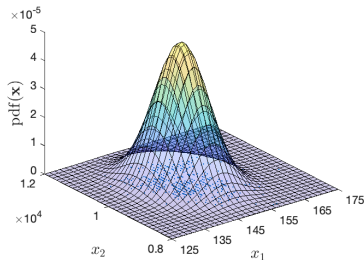
PDF normal bivariada



Las proyecciones sobre los ejes de x_1 y x_2 son gaussianas.

Estimando una PDF a partir de muestras

```
[x,t] = chemical_dataset;  
x = x(1:2,:);  
mu = mean(x)  
Sigma = cov(x)
```

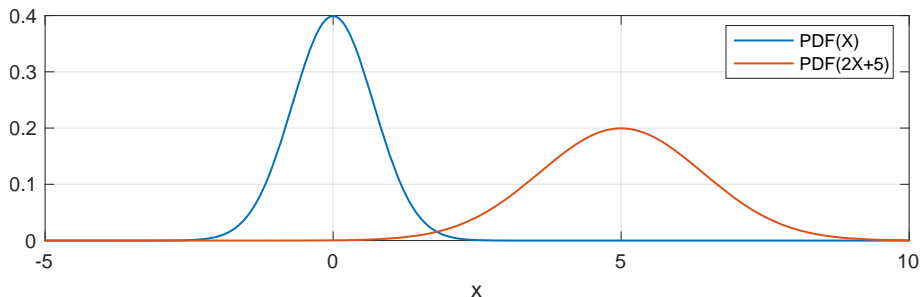


Transformación lineal de variables aleatorias

Si X es una variable aleatoria normal, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $Y := aX + b$ también es aleatoria normal, $Y \sim \mathcal{N}(\mu + b, \sigma^2 a^2)$.

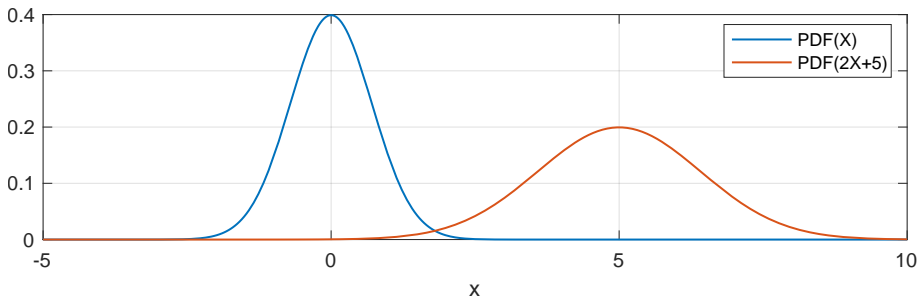
Transformación lineal de variables aleatorias

Si X es una variable aleatoria normal, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $Y := aX + b$ también es aleatoria normal, $Y \sim \mathcal{N}(\mu + b, \sigma^2 a^2)$.



Transformación lineal de variables aleatorias

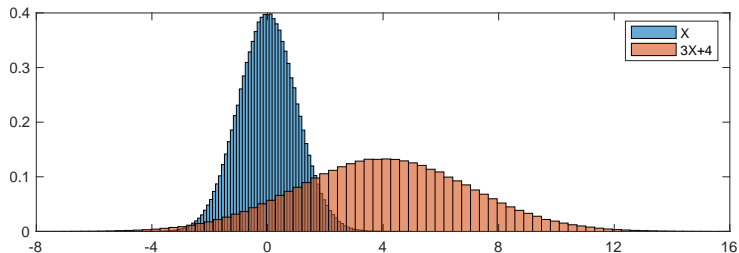
Si X es una variable aleatoria normal, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $Y := aX + b$ también es aleatoria normal, $Y \sim \mathcal{N}(\mu + b, \sigma^2 a^2)$.



Ejercicio: Generar 1 000 000 muestras pseudoaleatorias con distribución normal estandarizada (i.e. $\mu = 0, \sigma^2 = 1$) y almacenarlas en un arreglo x . Luego, calcular $y = 3x + 4$, obtener su media y su varianza. Finalmente, graficar los histogramas de x e y .

Transformación lineal de variables aleatorias

```
x = randn(1000000,1);  
mu_x = mean(x)  
sigma2_x = var(x)  
y = 3*x+4;  
mu_y = mean(y)  
sigma2_y = var(y)  
histogram(x,100,'Normalization','pdf'); hold on  
histogram(y,100,'Normalization','pdf'); hold off
```



Consideremos el promediado de n números que se obtienen secuencialmente en el tiempo:

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

Consideremos el promediado de n números que se obtienen secuencialmente en el tiempo:

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n} \left(x_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)$$

Consideremos el promediado de n números que se obtienen secuencialmente en el tiempo:

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n} \left(x_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)$$

$$p_{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k$$

Consideremos el promediado de n números que se obtienen secuencialmente en el tiempo:

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n} \left(x_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)$$

$$p_{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n-1} x_k = (n-1) p_{n-1}$$

Recursividad: Modelos con memoria

Consideremos el promediado de n números que se obtienen secuencialmente en el tiempo:

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n} \left(x_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)$$
$$p_{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n-1} x_k = (n-1) p_{n-1}$$
$$p_n = p_{n-1} + \frac{1}{n} (x_n - p_{n-1})$$

En el tiempo n no es necesario tener almacenada toda la sucesión de muestras, porque el promedio previo p_{n-1} contiene resumida la historia del sistema.

Codificando el promediador

promediador.m

```
classdef promediador < handle
    properties
        n
        p
    end
    methods
        function obj = promediador
            obj.n = 0;
            obj.p = 0;
        end
        function p = agregar(obj,x)
            obj.n = obj.n + 1;
            obj.p = obj.p + 1/obj.n*(x - obj.p);
            p = obj.p;
        end
    end
end
```

Una aproximación al filtro de Kalman

Ejercicio: Compro “un kilo” de tortillas, pero no confío en que la cantidad entregada sea la correcta, así que efectúo una serie de pesajes con mi báscula casera. Tomo una nueva medición cada minuto, registrando los siguientes valores:

n (min)	0	1	2	3	4	5
z (kg)	1.000	0.980	0.972	0.973	0.970	0.967

¿Cuál es la mejor estimación del peso considerando el promedio acumulado después de 5 minutos?

Una aproximación al filtro de Kalman

Por la ecuación del promediador, suponiendo que $\{z_n\}$ son las medidas y $\{\hat{x}_n\}$ son las mejores estimaciones del peso:

$$\hat{x}_n = \hat{x}_{n-1} + \frac{1}{n} (z_n - \hat{x}_{n-1})$$

Estimaciones sucesivas:

$$\hat{x}_0 = 1.000$$

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_0 + \frac{1}{1} (z_1 - \hat{x}_0) = 0.990$$

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + \frac{1}{2} (z_2 - \hat{x}_1) = 0.984$$

$$\hat{x}_3 = \hat{x}_2 + \frac{1}{3} (z_3 - \hat{x}_2) = 0.981$$

$$\hat{x}_4 = \hat{x}_3 + \frac{1}{4} (z_4 - \hat{x}_3) = 0.979$$

$$\hat{x}_5 = \hat{x}_4 + \frac{1}{5} (z_5 - \hat{x}_4) = 0.977$$

Una aproximación al filtro de Kalman

Notación “estadística” simplificada:

$$\hat{x}_{n|n} = \hat{x}_{n|n-1} + \frac{1}{n} (z_n - \hat{x}_{n|n-1})$$

$$\boxed{\text{Estimación del estado actual}} = \boxed{\text{Predicción del estado actual}} + \boxed{\text{Factor}} \times \left(\boxed{\text{Medición}} - \boxed{\text{Predicción del estado actual}} \right)$$

👉 En el ejercicio anterior, se dio la misma importancia al valor declarado por el vendedor que a la medición obtenida por el usuario. ¿Es posible asignar niveles de confianza diferentes? **No todos los vendedores son igual de honestos y no todas las balanzas son igual de exactas.**

Una aproximación al filtro de Kalman

Notación “estadística” simplificada:

$$\hat{x}_{n|n} = \hat{x}_{n|n-1} + \frac{1}{n} (z_n - \hat{x}_{n|n-1})$$

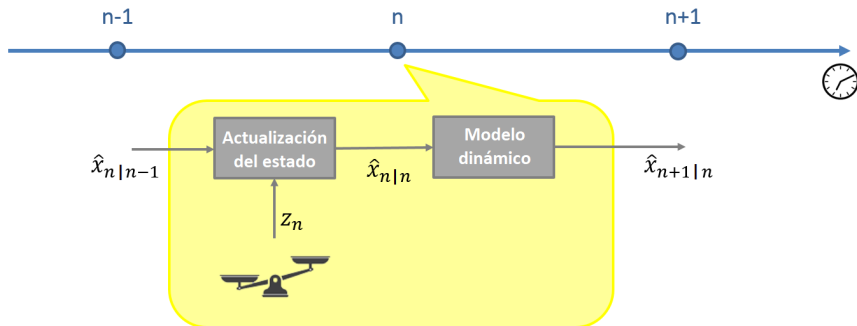
$$\boxed{\text{Estimación del estado actual}} = \boxed{\text{Predicción del estado actual}} + \boxed{\text{Factor}} \times \left(\boxed{\text{Medición}} - \boxed{\text{Predicción del estado actual}} \right)$$

👉 En el ejercicio anterior, se dio la misma importancia al valor declarado por el vendedor que a la medición obtenida por el usuario. ¿Es posible asignar niveles de confianza diferentes? **No todos los vendedores son igual de honestos y no todas las balanzas son igual de exactas.**

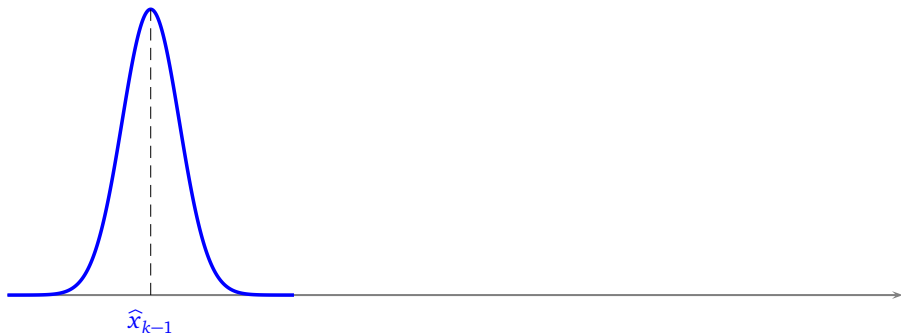
👉 Las mediciones sucesivas parecen disminuir con el tiempo, posiblemente porque las tortillas pierden humedad y, en consecuencia, peso. ¿Es posible incluir la dinámica de la pérdida de humedad para obtener predicciones más confiables?

Una aproximación al filtro de Kalman

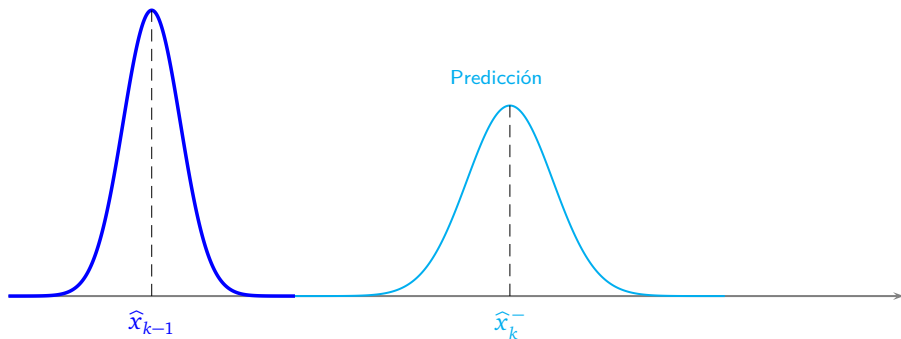
$$\hat{x}_{n|n} = \hat{x}_{n|n-1} + \underbrace{K_n}_{\text{Ganancia}} \underbrace{(z_n - \hat{x}_{n|n-1})}_{\text{Innovación}}$$



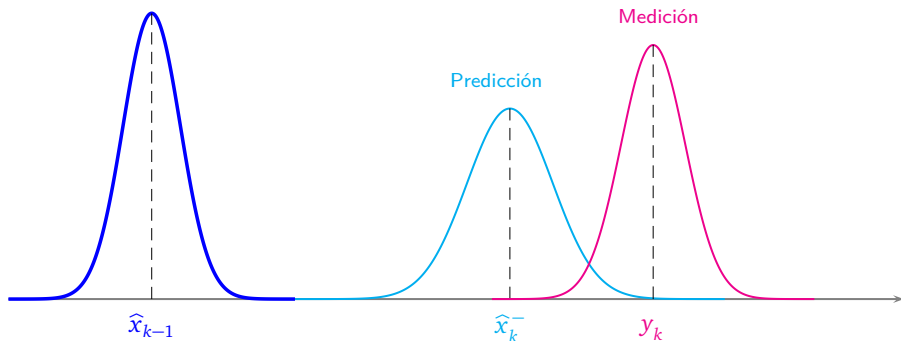
Propagación de distribuciones gaussianas



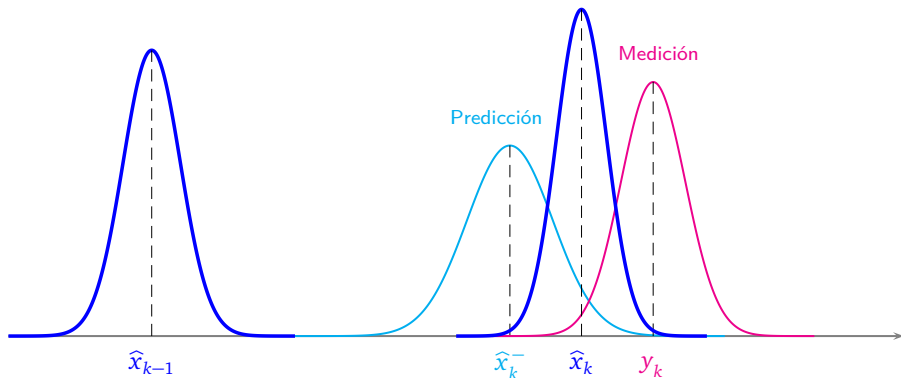
Propagación de distribuciones gaussianas



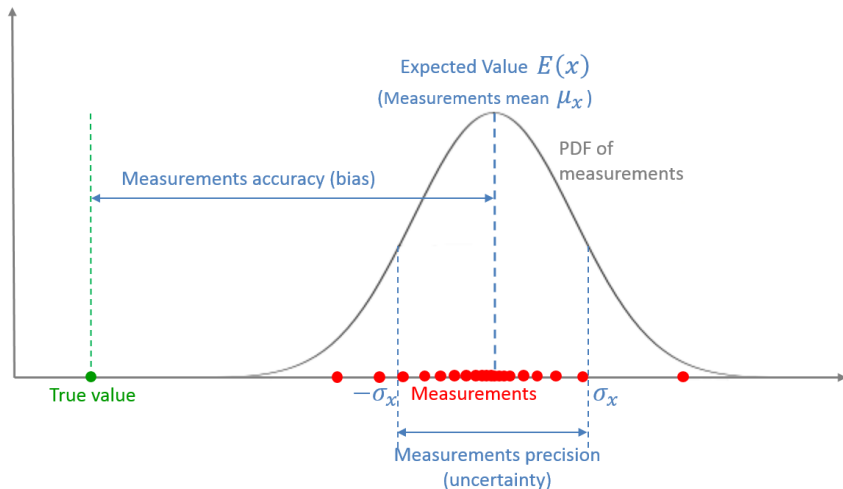
Propagación de distribuciones gaussianas



Propagación de distribuciones gaussianas



Estadística de las mediciones



Discretización de modelos lineales

En tiempo continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$



En tiempo discreto:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k$$

Discretización de modelos lineales

En tiempo continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$



En tiempo discreto:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{A}_d = \exp(\mathbf{A}T_s) = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (\mathbf{A}T_s)^i$$

$$\mathbf{B}_d = \left(\int_0^{T_s} \exp(\mathbf{A}\tau) \, d\tau \right) \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} (\exp(\mathbf{A}T_s) - \mathbf{I}) \mathbf{B}$$

Discretización de modelos lineales

En tiempo continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$



En tiempo discreto:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{A}_d = \exp(\mathbf{A}T_s) = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (\mathbf{A}T_s)^i$$

$$\mathbf{B}_d = \left(\int_0^{T_s} \exp(\mathbf{A}\tau) d\tau \right) \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} (\exp(\mathbf{A}T_s) - \mathbf{I}) \mathbf{B}$$

Atajo numérico:

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} T_s\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$



c2d()

- 👉 El filtro de Kalman es **óptimo** en el sentido de que proporciona la estimación del estado con la **mínima varianza del error**, dadas las mediciones y el modelo dinámico del sistema.

- 👉 El filtro de Kalman es **óptimo** en el sentido de que proporciona la estimación del estado con la **mínima varianza del error**, dadas las mediciones y el modelo dinámico del sistema.
- 👉 Se asume que existe incertidumbre en la dinámica del sistema (**ruido de proceso**: estímulos inciertos, dinámicas desconocidas o difíciles de modelar). También se considera incertidumbre en la medición (**ruido de medición**: interferencia y mala calibración en los sensores, imprecisión por baja resolución). Los ruidos se asumen blancos, de media cero y no correlacionados en el tiempo (e.g. gaussianos).

- ➡ El filtro de Kalman es **óptimo** en el sentido de que proporciona la estimación del estado con la **mínima varianza del error**, dadas las mediciones y el modelo dinámico del sistema.
- ➡ Se asume que existe incertidumbre en la dinámica del sistema (**ruido de proceso**: estímulos inciertos, dinámicas desconocidas o difíciles de modelar). También se considera incertidumbre en la medición (**ruido de medición**: interferencia y mala calibración en los sensores, imprecisión por baja resolución). Los ruidos se asumen blancos, de media cero y no correlacionados en el tiempo (e.g. gaussianos).
- ➡ El filtro de Kalman se puede implementar en tiempo real (en línea) con bajo costo computacional.

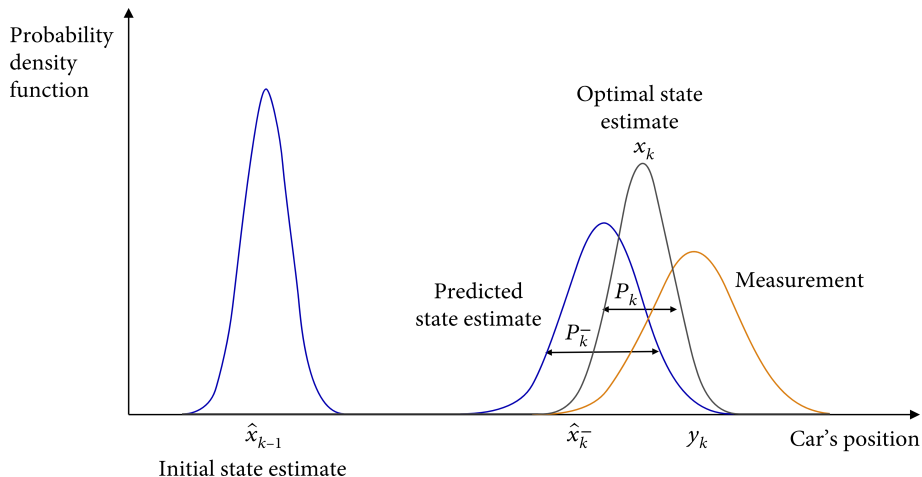
El filtro de Kalman es un estimador insesgado:

$$\mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}] = \mathbb{E}[\mathbf{x}]$$

Más precisamente, es el estimador insesgado de mínima varianza (MVUE, *minimum variance unbiased estimator*):

$$\underset{\hat{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmín}} \mathbb{E}[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^{\top}]$$

Idea general del proceso de filtrado



Filtro de Kalman en tiempo discreto

Señales y sistemas

Dinámica lineal estocástica en tiempo discreto:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Señales y sistemas

Dinámica lineal estocástica en tiempo discreto:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

Modelo de ruido blanco gaussiano:

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0} \qquad \mathbb{E}[\mathbf{v}_k] = \mathbf{0}$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Señales y sistemas

Dinámica lineal estocástica en tiempo discreto:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

Modelo de ruido blanco gaussiano:

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0} \qquad \mathbb{E}[\mathbf{v}_k] = \mathbf{0}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^{\top}] = \begin{cases} \mathbf{Q} & \text{para } i = k \\ \mathbf{0} & \text{para } i \neq k \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^{\top}] = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{para } i = k \\ \mathbf{0} & \text{para } i \neq k \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_i^{\top}] = \mathbf{0} \quad \text{para toda } k, i$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Actualización con la medición: `correct()`

Sea $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ una estimación previa (a priori) de \mathbf{x}_k :

$$\hat{\mathbf{e}}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k^- = \mathbb{E}[\hat{\mathbf{e}}_k^- \hat{\mathbf{e}}_k^{-\top}] = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^{\top}]$$

Cuando están disponibles las mediciones (\mathbf{y}) se actualiza la estimación:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

donde

$\hat{\mathbf{x}}_k$: Estimación actualizada (a posteriori) de \mathbf{x}_k

\mathbf{K}_k : Factor de ajuste (Ganancia de Kalman)

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Ganancia de Kalman

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k &= \mathbb{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top] = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C})^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^\top\end{aligned}$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Ganancia de Kalman

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k &= \mathbb{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top] = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C})^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^\top\end{aligned}$$

Cálculo de la ganancia óptima:

$$\frac{d(\text{tr}(\mathbf{P}_k))}{d\mathbf{K}_k} = \mathbf{0}$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Ganancia de Kalman

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k &= \mathbb{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top] = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C})^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^\top\end{aligned}$$

Cálculo de la ganancia óptima:

$$\frac{d(\text{tr}(\mathbf{P}_k))}{d\mathbf{K}_k} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^\top + \mathbf{R})^{-1}$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Ganancia de Kalman

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k &= \mathbb{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top] = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C})^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^\top\end{aligned}$$

Cálculo de la ganancia óptima:

$$\frac{d(\text{tr}(\mathbf{P}_k))}{d\mathbf{K}_k} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^\top + \mathbf{R})^{-1}$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^-$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Actualización en el tiempo: `predict()`

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Actualización en el tiempo: `predict()`

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Actualización en el tiempo: `predict()`

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Actualización en el tiempo: `predict()`

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \quad \implies \quad \mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbb{E}[\mathbf{e}_{k+1}^- \mathbf{e}_{k+1}^{-\top}]$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Actualización en el tiempo: `predict()`

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \quad \implies \quad \mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbb{E}[\mathbf{e}_{k+1}^- \mathbf{e}_{k+1}^{-\top}] \quad \implies \quad \mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q}$$

Filtro de Kalman en tiempo discreto

Actualización en el tiempo: `predict()`

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$$

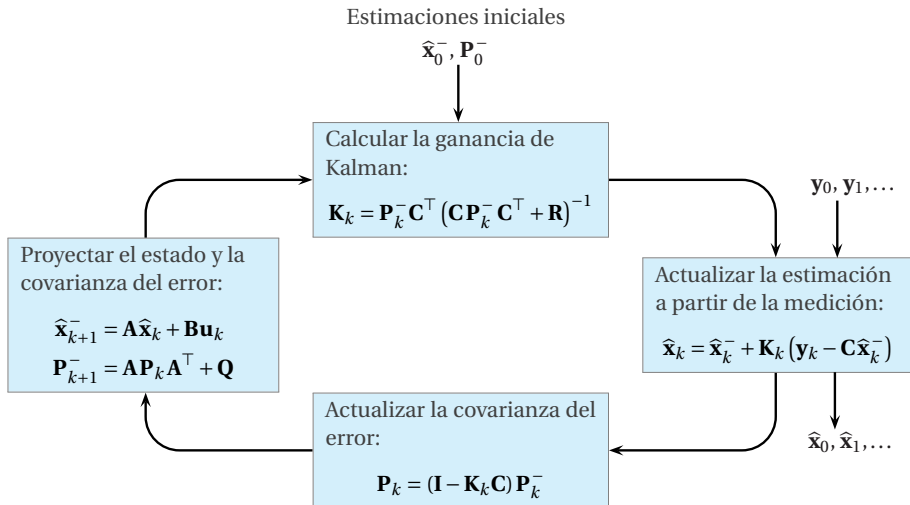
$$\mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \quad \implies \quad \mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbb{E}[\mathbf{e}_{k+1}^- \mathbf{e}_{k+1}^{-\top}] \quad \implies \quad \mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q}$$

Para cerrar el ciclo del FK:

$$k+1 \rightarrow k$$

Filtro de Kalman: El algoritmo



Codificando el filtro de Kalman

Requisitos de entrada

- Parámetros del sistema: \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , T_s .
- Estimaciones iniciales: \mathbf{x}_0^- , \mathbf{P}_0^- .
- En cada paso de tiempo k , proporcionar: \mathbf{u}_k , \mathbf{y}_k .

Subrutinas o métodos

- `initialize(\mathbf{x}_0^- , \mathbf{P}_0^-)`: Inicializa el vector de estado y la matriz de covarianza del error.
- `[$\hat{\mathbf{x}}_k$, \mathbf{P}_k] = correct(\mathbf{y}_k , $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, \mathbf{P}_k^-)`: Calcula la ganancia \mathbf{K}_k . Luego, usa esa ganancia para estimar el estado y la covarianza del error a partir de la medición actual y de la predicción obtenida de la dinámica del sistema.
- `[$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$, \mathbf{P}_{k+1}^-] = predict(\mathbf{u}_k , $\hat{\mathbf{x}}_k$)`: Predice el estado del sistema y la covarianza del error para el siguiente paso de tiempo.

Código del FK orientado a objetos

```
classdef KalmanFilter < handle
    properties
        A    % State-transition matrix
        B    % Control matrix
        C    % Observation matrix
        Q    % Process noise covariance matrix
        R    % Measurement noise covariance matrix
        K    % Kalman gain
        x    % Estimated state
        P    % Estimation error covariance matrix
    end
    methods
        function obj = KalmanFilter(A,B,C,Q,R,Ts)
            obj.A = A; obj.B = B; obj.C = C;
            obj.Q = Q; obj.R = R;
            if nargin > 5
                obj.A = expm(A*Ts);
                obj.B = (obj.A-eye(size(A)))/A*B;
            end
            obj.initialize
        end
    end
end
```

Código del FK orientado a objetos

```
function initialize(obj,x,P)
    if nargin < 2
        obj.x = zeros(size(obj.A,2),1);
    else
        obj.x = x;
    end
    if nargin < 3
        obj.P = eye(size(obj.A));
    else
        obj.P = P;
    end
end

function x = predict(obj,u)
    obj.x = obj.A*obj.x + obj.B*u;
    obj.P = obj.A*obj.P*obj.A' + obj.Q;
    x = obj.x;
end
```

Código del FK orientado a objetos

```
function x = correct(obj,y)
    obj.K = obj.P*obj.C'/(obj.C*obj.P*obj.C'+obj.R);
    obj.x = obj.x + obj.K*(y-obj.C*obj.x);
    obj.P = (eye(size(obj.K*obj.C))-obj.K*obj.C)*obj.P;
    x = obj.x;
end

function x = estimate(obj,u,y)
    n = size(obj.x,1);
    m = size(y,2);
    x = zeros(n,m);
    for k = 1:m
        x(:,k) = obj.correct(y(:,k));
        obj.predict(u(:,k));
    end
end
end
end
```

Ejemplo de estimación de estados

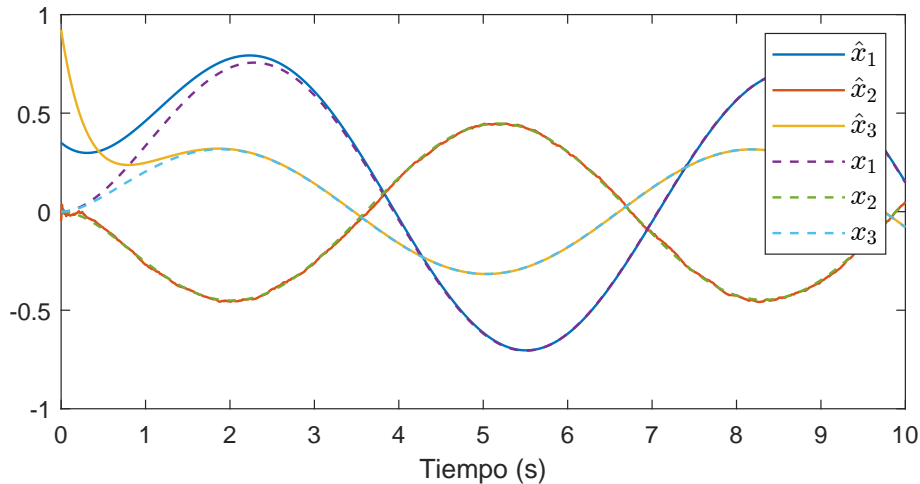
```
A = diag([-1,-2,-3]); B = [1;-1;1]; C = [0,1,0];
planta = ss(A,B,C,0);
Q = 1e-5*eye(3); R = 1e-2;
Ts = 0.01;

t = 0:Ts:10; u = sin(t);
[ysim,t,xsim] = lsim(planta,u,t,[0;0;0]);
y = ysim + sqrt(R)*randn(size(y));

kf = KalmanFilter(A,B,C,Q,R,Ts);
kf.initialize(rand(3,1));
x = zeros(3,1001);
for k = 1:numel(t)
    x(:,k) = kf.estimate(u(k),y(k));
end
% x = kf.estimate(u,y');

plot(t,x',t,xsim,'--','LineWidth',1)
```



Ejemplo de estimación de estados



A la larga, conforme $k \rightarrow \infty$, la ganancia de Kalman (\mathbf{K}_k) y la covarianza del error (\mathbf{P}_k) tienden a alcanzar valores finales constantes:

$$\mathbf{K}_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{K}_k$$

$$\mathbf{P}_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_k$$

 En MATLAB, los valores finales \mathbf{K}_{∞} y \mathbf{P}_{∞} se pueden calcular con las funciones `kalman()` y `dlqe()`.

Filtro de Kalman en MATLAB

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{H}\mathbf{w}_k + \mathbf{v}_k$$

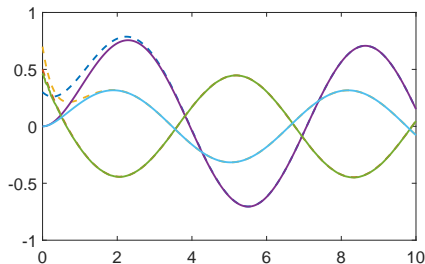
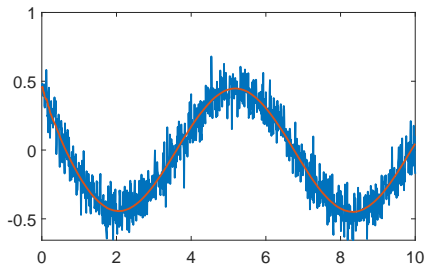
La planta estocástica se modela con las matrices del espacio de estado:

\mathbf{A} , $[\mathbf{B}, \mathbf{G}]$, \mathbf{C} , $[\mathbf{D}, \mathbf{H}]$

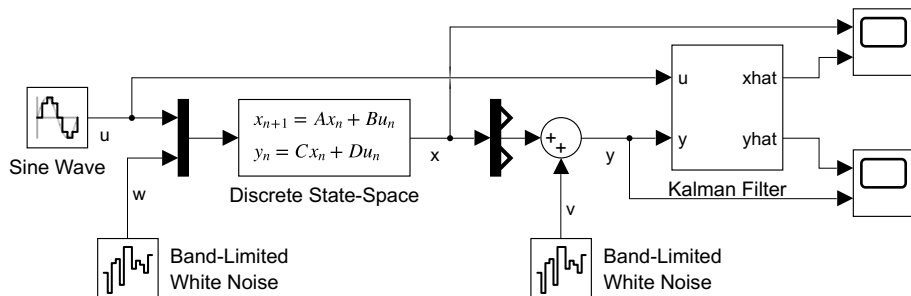
```
A = diag([-1,-2,-3]); B = [1;-1;1]; C = [0,1,0]; D = 0;
continuo = ss(A,B,C,D);
Ts = 0.01;
discreto = c2d(continuo,Ts);
A = discreto.a; B = discreto.b; C = discreto.c;
G = eye(3);
H = zeros(1,3);
planta = ss(A,[B,G],C,[D,H],Ts);
Q = 1e-5*eye(3); R = 1e-2;
[estimador,K,P] = kalman(planta,Q,R)
```

Filtro de Kalman en MATLAB

```
t = 0:0.01:10; u = sin(t);  
[y,t,x] = lsim(discreto,u,t,[0.3;0.5;0.7]);  
y = y + 0.1*randn(size(y));  
[yest,t] = lsim(estimador,[u;y'],t);  
yhat = yest(:,1); xhat = yest(:,2:end);  
subplot(121); plot(t,y,t,yhat,'LineWidth',1)  
subplot(122); plot(t,x,'--',t,xhat,'LineWidth',1)
```



Filtro de Kalman en Simulink



$$\mathbf{A} = \text{diag}([-1, -2, -3]), \quad \mathbf{B} = [1; -1; 1], \quad \mathbf{C} = [0, 1, 0], \quad T_s = 10 \text{ ms}$$

$$\text{Noise power 1} = [1; 1; 1] \times 10^{-4}, \quad \text{Noise power 2} = [1 \times 10^{-2}]$$

Sine Wave (Amplitude = 5, Frequency = 1)

¿Podemos filtrar una señal si no tenemos un modelo dinámico del sistema?

¿Podemos filtrar una señal si no tenemos un modelo dinámico del sistema?

Considerar el siguiente modelo dinámico:

$$x_{k+1} = x_k + w_k$$

$$y_k = x_k + v_k$$

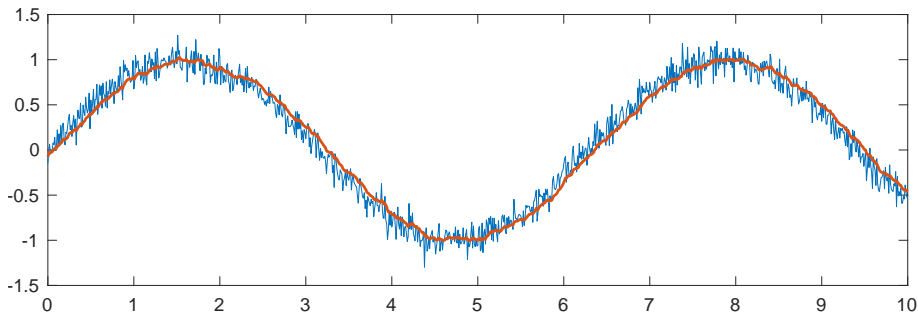
En el filtro de Kalman, tomar $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$. Sintonizar empíricamente los valores de Q y R .

Filtrando señales sin modelo

```
t = 0:0.01:10;  
y = sin(t) + 0.1*randn(size(t));  
kf = KalmanFilter(1,0,1,0.01,1);  
ykalman = kf.estimate(zeros(size(t)),y);  
p = plot(t,y,t,ykalman);
```


Filtrando señales sin modelo

```
t = 0:0.01:10;  
y = sin(t) + 0.1*randn(size(t));  
kf = KalmanFilter(1,0,1,0.01,1);  
ykalman = kf.estimate(zeros(size(t)),y);  
p = plot(t,y,t,ykalman);
```

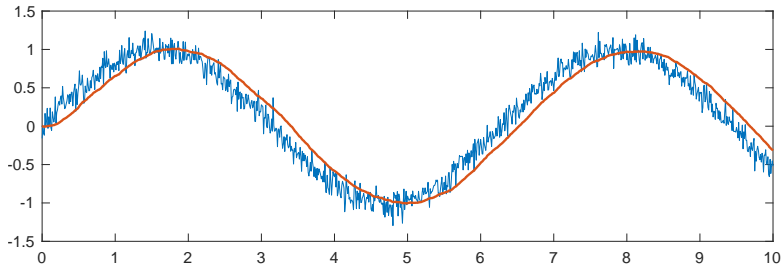


No matar moscas a escopetazos

Filtro FIR de media móvil:

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_{n-49}}{50}$$

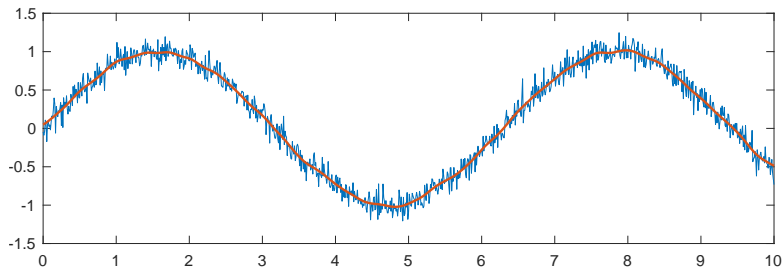
```
t = 0:0.01:10;  
y = sin(t) + 0.1*randn(size(t));  
yfir = filter(ones(50,1),50,y);  
plot(t,y,t,yfir)
```



No matar moscas a escopetazos

Suavizado gaussiano: Filtro de media móvil ponderada con ponderaciones gaussianas.

```
t = 0:0.01:10;  
y = sin(t) + 0.1*randn(size(t));  
ygauss = smoothdata(y,'gaussian',50);  
plot(t,y,t,ygauss)
```



A word cloud featuring the phrase "Thank You" in numerous languages and colors. The words are arranged in a circular pattern, with "thank you" in large red letters at the center. Other prominent words include "danke" (blue), "gracias" (green), "merci" (orange), and "teşekkür ederim" (pink). Smaller words like "spas", "dank je", "misaotra", "matondo", "paldies", "grazzi", "mahalo", "tapadh leat", "xhala", "asante", "manana", "obrigada", "murmakoze", "tenki", "chokrame", "murnat", "trugarez", "merci", "shukriya", "dhanyavadagalu", "diolch", "xixie", "eucharistw", "grazie", "tanemirt", "rahmet", "arigato", "go raibh maith agat", "mochchakkeram", "dijere dieuf", "tau", " дякую", "sulpay", "gratias ago", "gracies", "kop khun krap", "sukriya", "sagolun", "didi madloba", "mesí", "dekuji", "sobodi", "dziękuje", "hvala", "mauruuru", "kösönöm", "bayatalaa", "gracie", "nandri", "nami", "enkosi", "bedankt", "spasibo", "Баярлалаа", "рахмат", "vinaka", "spasibi", "blagodaram", "kia ora", "barka", "welalin", "tack", "ngiyabonga", "raahmat", "nawak", "dank", "akun", "dankun", "aciü", "chhorakaloutioun", "najes tuke", "kam sah hammida", "rahmat", "toshake shanyaband", "감사합니다", and "ευχαριστώ" are also visible. The colors used include blue, green, orange, pink, red, yellow, and purple.