Relación de Equivalencia

Relación de Equivalencia

La relación R $\subseteq$ A^2 es de equivalencia $\Leftrightarrow$ es

- **Reflexiva**
- **Simétrica**
- **Transitiva**

Las relaciones de equivalencia se suelen indicar $\sim$

Sea $\sim$ una relación de equivalencia en A $\neq$ Ø.

Llamamos clase de equivalencia del elemento a $\in$ A es el conjunto de todos los elementos de A equivalentes a “a”. **Cla = { x $\in$ A / x R a } = [a] = $\bar{a}$**

El conjunto formado por las clases de equivalencia se llama conjunto cociente.

$$\frac{A}{R} = \frac{A}{\sim} = \{ \text{Cla} \ / \ a \in A \}$$

El conjunto formado por UN representante de cada clase se denomina **CONJUNTO DE INDICES.**

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Las clases de equivalencia constituyen una partición de A

Recíprocamente, toda partición de un conjunto induce en el mismo una relación de equivalencia.

Relación De equivalencia $\Longleftrightarrow$ **Partición del conjunto**

i. Clx $\neq \emptyset$

ii. Clx $\cap$ Cly $= \emptyset$ si $x \neq y$

iii. Clx $\cup$ Cly $\cup$ …. $=$ A

Sea A un conjunto NO vacío, Sea P = $\{A_1, A_2, .., A_n\}$

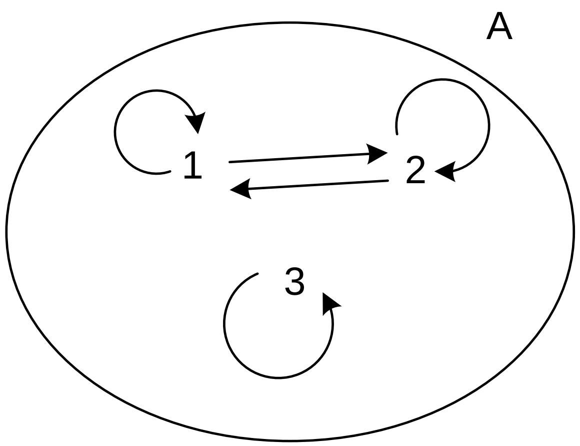
P es una partición del conjunto A si y solo si

- $A_i \neq \emptyset$
- $A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall\, i \neq j$
- $\cup A_i = A$

Ejemplo : Sea A = { 1, 2, 3 } y la relación

R = { (1; 1), (2; 2), (3; 3), (1; 2), (2; 1) }

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$



R es de equivalencia pues cumple con las propiedades:

Reflexiva:

$\forall$ x $\in$ A: x R x

Simétrica:

$\forall$ x, y $\in$ A: x R y $\Rightarrow$ y R x

Transitiva:

$\forall$ x, y, z $\in$ A: x R y $\wedge$ y R z $\Rightarrow$ x R z

Clases de equivalencia:

Cl_1 = { 1, 2 } Cl_3 = { 3 }

Conjunto Cociente:

$\frac{A}{R}$ = { Cl_1, Cl_3 }

Conjunto de Índices:

I = { 1, 3 }

Congruencia módulo n

En el conjunto Z de los números enteros se define la relación **congruencia módulo n** de la siguiente manera:

a es congruente con b módulo n $\quad$ $\mathbf{a \equiv b_{(n)} \Leftrightarrow n \mid a - b}$ $\quad$ Con $n \in \mathbb{N}$

La relación de **congruencia módulo n** es un relación de **equivalencia** en el conjunto Z de números enteros pues es:

a es congruente con b módulo n $\quad$ $\mathbf{a \equiv b_{(n)} \Leftrightarrow r_n(a) = r_n(b)}$

Donde $\mathbf{r_n(a)}$ es el resto de dividir "**a**" por "**n**"

Reflexiva: $\forall\, a \in A$: a R a

$\forall\, a \in Z$: $a - a = 0 \Rightarrow a - a = n \,.\, 0 \Rightarrow n \mid a - a \Rightarrow a\, R\, a$

Simétrica: $\forall\, a, b \in A : a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$

$\forall\, a, b \in Z: a\,R\,b \Rightarrow n \mid a - b \quad \Rightarrow a - b = n.\,k,\ k \in Z$

$\Rightarrow -(a - b) = -n.\,k \Rightarrow b - a = n.\,(-k),\ -k \in Z \Rightarrow n \mid b - a \Rightarrow b\,R\,a$

Transitiva: $\forall\, a, b, c \in Z: a\,R\,b \wedge b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$

$\forall\, a, b, c \in Z\ a\,R\,b \wedge b\,R\,c \quad \Rightarrow n \mid a - b \wedge n \mid b - c$

$\Rightarrow n \mid a - b \quad \Rightarrow a - b = n.\,k_1, \qquad k_1 \in Z$

$\Rightarrow n \mid b - c \quad \Rightarrow b - c = n.\,k_2, \qquad k_2 \in Z$

sumando m.a.m $\quad a - c = n.\,(k_1 + k_2); \qquad (k_1 + k_2) \in Z$

$\Rightarrow n \mid a - c \quad \Rightarrow a\,R\,c$

Propiedad: Sea n un número natural , en el conjunto de los números enteros la congruencia módulo n determina una partición en Z en n **clases de equivalencia.**

$Cla = \{ x \in A / x \, R \, a \} = \{ x - a = n .q \} = \{ x = n.x + a \}$

$Cl_0 = \{ n.x + 0, x \in Z \}$

$Cl_1 = \{ n.x + 1, x \in Z \}$

$Cl_2 = \{ n.x + 2, x \in Z \}$

$Cl_{(n-1)} = \{ n.x + n - 1, x \in Z \}$

El **conjunto cociente** se escribe **Zn** = $\{ Cl_0, Cl_1, Cl_2, \ldots., Cl_{(n-1)} \}$

Ejemplo: Si $n = 3 \Rightarrow a \equiv b(3)$ determina una partición del conjunto Z en 3 clases de Equivalencia.

$Cl_0 = \{ 3x, x \in Z \}$ $Cl_1 = \{ 3x + 1, x \in Z \}$ $Cl_2 = \{ 3x + 2, x \in Z \}$