RAZONAMIENTOS DEDUCTIVOS

Se llama razonamiento al par ordenado ({pi}, c), cuya primera componente es un conjunto finito de proposiciones denominadas premisas, y la segunda componente es otra proposición llamada conclusión.

Un razonamiento se dice que es deductivo, si la conclusión es evidencia de los valores de verdad de las premisas.

Un razonamiento también se lo expresa como una implicación, cuyo antecedente es la conjunción de las premisas, y la conclusión es el consecuente. O sea:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots P_n \quad \Rightarrow \quad C$$

De un razonamiento no se dice que es verdadero o falso, sino, que ES VALIDO o NO VALIDO.

Se demuestra la validez o no de un razonamiento, utilizando diversos métodos.

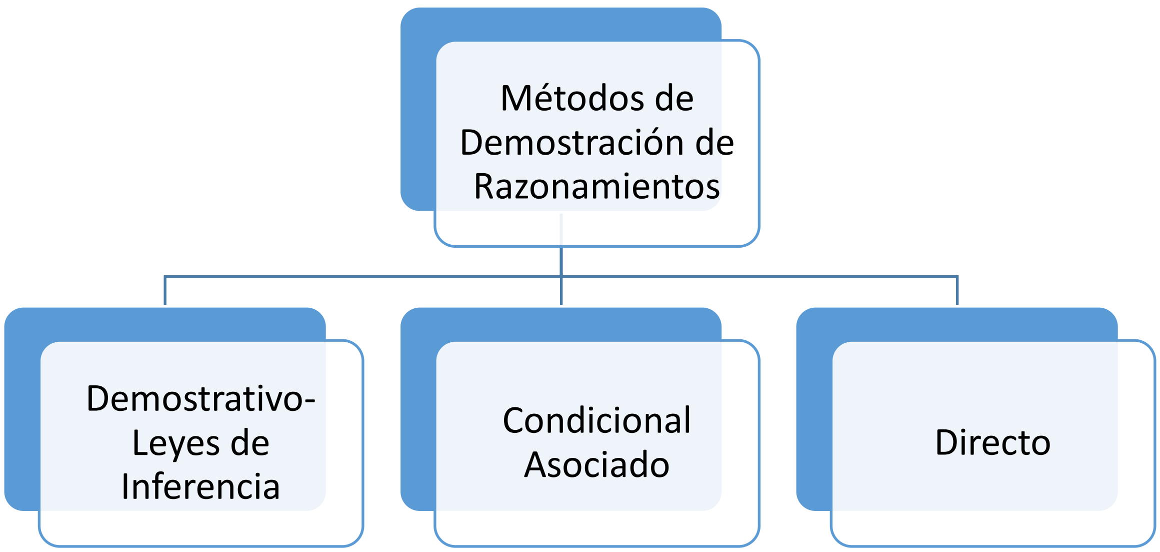
En general un razonamiento se coloca en columna, enumerando las premisas, o sea que:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ \underline{P_n} \\ C \end{array}$$

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Teóricamente, todos los teoremas de la lógica proposicional se pueden demos-trar utilizando solamente los axiomas y las reglas de validez; sin embargo, se establecen reglas de prueba y métodos de demostración con el fin de abreviar el proceso deductivo.

A continuación, se presentan los principales métodos de demostración y reglas de prueba del cálculo proposicional. Éstos son:



MÉTODO DEL CONDICIONAL ASOCIADO

Es un método mecánico, de tipo semántico

• Se basa en las tablas de verdad.

• Consiste en realizar la tabla de verdad de un condicional que tenga como antecedente la conjunción de las premisas y como consecuente la conclusión del razonamiento.

Al demostrar un razonamiento con este método, la tabla de verdad dará una **Tautología**, si el razonamiento es Válido.

EJEMPLO

Demostrar la validez o no, del siguiente razonamiento, utilizando el condicional asociado:

$$P1:\ p \Rightarrow (q \wedge r)$$

$$\underline{P2: -(q \wedge r)}$$

$$C:\ -p$$

Solución:

La proposición asociada es $\left[p \Rightarrow (q \wedge r)\right] \wedge \left[-(q \wedge r)\right] \Rightarrow -p$

Para demostrar su validez, se debe probar que la misma es una tautología. Y se hará mediante una tabla de verdad:

{[p	→	(q	∧	r)]	∧	¬	(q	∧	r) }	→	¬	P
V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	V	F	F	F	V	V	F

⌧ *MÉTODO DIRECTO:*

Se va comprobando que efectivamente, desde las hipótesis establecidas se puede arribar a la conclusión dada, en forma univoca.

Ejemplo

Se parte de alguna de las premisas, desandando el camino, puesto que se sabe que siempre son verdaderas, hasta obtener el valor de verdad de cada proposición y el de la conclusión:

$P1:\ p \Rightarrow \overbrace{(q \wedge r)}^{V}$	Si p es V, q y r serán V. Por lo tanto, P2 será F. Eso no puede
$P2:-\ (q \wedge r)$	suceder, luego p es F.
$C:\ \neg p$	Entonces, la conclusión es V.

- ✓ **LEYES DE INFERENCIAS:**

Son reglas que nos sirven para probar que a partir de unas premisas dadas es posible hacer la demostración para una conclusión específica. Su objetivo es abreviar las demostraciones. Se llaman reglas de inferencias, a todo razonamiento deductivo válido. -

A continuación, destacamos las reglas de mayor utilización en las demostraciones matemáticas:

MODUS PONENS

$p \Rightarrow q$	*"Si llueve, entonces las calles se mojan"*	*(premisa)*
$\underline{p}$	*"Llueve"*	*(premisa)*
q	*"Luego, las calles se mojan"*	*(conclusión)*

MODUS TOLLENS

$p \Rightarrow q$	*"Si llueve, entonces las calles se mojan"*
$\underline{\neg q}$	*"Las calles no se mojan"*
$\neg p$	*"Luego, no llueve"*

CONJUNCIÓN Y SIMPLIFICACIÓN

Conjunción: Si disponemos de dos enunciados afirmados como dos premisas separadas, mediante la adjunción, podemos unirlos en una sola premisa utilizando el operador ∧ (conjunción).

p	"*Juan es cocinero*"
q	"*Pedro es policía*"
$p \wedge q$	"*Juan es cocinero y Pedro es policía*"

Simplificación: obviamente, es la operación inversa. Si disponemos de un enunciado formado por dos miembros unidos por una conjunción, podemos hacer de los dos miembros dos enunciados afirmados por separado.

$p \wedge q$	"*Tengo una manzana y tengo una pera*"
p	"*Tengo una manzana*"

ó

$p \wedge q$	"*Tengo una manzana y tengo una pera*"
q	"*Tengo una pera*"

LEY DE LA ADICIÓN

Dado un enunciado cualquiera, es posible expresarlo como una elección (disyunción) acompañado por cualquier otro enunciado.

p	"*He comprado manzanas*
$p \vee q$	"*He comprado manzanas o he comprado peras*"

SILOGISMO HIPOTÉTICO

$p \Rightarrow q$	"*Si la bola roja golpea a la bola blanca, la bola blanca se mueve*"
$q \Rightarrow r$	"*Si la bola blanca golpea a la bola negra, la bola negra se mueve*"
$p \Rightarrow r$	"*Si la bola roja golpea a la bola blanca, la bola negra se mueve*"

A continuación, se hace un resumen de las leyes de inferencia más comunes.

Resumen de las leyes de inferencia más importantes.

1. *Modus Ponens (MP)* $p \Rightarrow q$ $\sim p \Rightarrow q$ $\underline{p}$ $\underline{\sim p}$ $\therefore q$ $\therefore q$	2. *Modus Tollens (MT)* $p \rightarrow q$ $\neg p \rightarrow \neg q$ $\underline{\sim q}$ $\underline{q}$ $\therefore \sim p$ $\therefore p$	3. *Silogismo hipotético (SH)* $p \Rightarrow q$ $\underline{q \Rightarrow r}$ $\therefore p \Rightarrow r$
4. *Silogismo Disyuntivo (SD)* $p \vee q$ $p \vee q$ $\underline{\sim q}$ $\underline{\sim p}$ $\therefore p$ $\therefore q$	5. *Adición* $\underline{p}$ $\therefore p \vee q$	6. *Dilema constructivo* $p \Rightarrow q$ $r \Rightarrow s$ $\underline{p \vee r}$ $\therefore q \vee s$
7. *Demostración por casos* $p \rightarrow r$ $\underline{q \rightarrow r}$ $\therefore (p \vee q) \Rightarrow r$	8. *Simplificación* $\underline{p \wedge q}$ $\therefore p$	9. *Conjunción* p $\underline{q}$ $\therefore p \wedge q$

EJEMPLO

1- Resolver el siguiente razonamiento, utilizando las distintas leyes:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \neg (p \vee \neg q) \\ 2. & (\neg p \wedge q) \Rightarrow r \\ 3. & s \\ 4. & \neg(\neg r \vee \neg s) \Rightarrow t \end{array}\right\} \textit{PREMISAS}$$

$$\left.\begin{array}{ll} C. & t \end{array}\right\} \textit{CONCLUSIÓN}$$

5. $\neg p \wedge q$ DE MORGAN EN 1
6. r MODUS PONENS EN 2 Y 5
7. $r \wedge s$ ~~ADICIÓN~~ EN 6 Y 3 Conjunción
8. $\neg(\neg r \vee \neg s)$ DE MORGAN EN 7

----

9. t MODUS PONENS EN 4 Y 8

2-Idem anterior:

1. $(p \vee q) \vee (p \wedge r)$
2. $(p \vee q) \Rightarrow s$ PREMISAS
3. $(p \wedge r) \Rightarrow s$

C. $s \vee t$ CONCLUSIÓN

4. $p \vee q$ SILOGISMO DIYUNTIVO EN 1,[redacted] Y 3
5. s MODUS PONENS EN 2 Y 4
6. $s \vee t$ ADICIÓN EN 5

SE PRUEBA DESDE 4 NUEVAMENTE, PERO USANDO EL SD CON LA OTRA PROPOSICIÓN:

7. $p \wedge r$ SILOGISMO DIYUNTIVO EN 1,2 [redacted]
8. s MODUS PONENS EN 3 Y 7
9. $s \vee t$ ADICIÓN EN 8

----

10. $s \vee t$ ES VÁLIDO ([redacted])

- ✓ <u>MÉTODO DE LA CONTRADICCIÓN.</u>

Es el método conocido como “por el absurdo”.

Una de las condiciones que debe verificar el conjunto de axiomas, dado para la teoría, es la *consistencia*. Es decir, a partir de ellos no pueden derivarse, por aplicación de las reglas lógicas, *contradicciones.* Esto constituye la fundamentación del método de demostración por reducción al absurdo, el cual puede enunciarse así:

"Si al suponer que la proposición **-** *P es un teorema, se puede establecer como teorema una proposición contradictoria, entonces el supuesto* **-** *P es falso, es decir, la proposición P es un teorema".*

El mismo comienza suponiendo que la conclusion es Falsa. Se empieza a “subir” hacia las premisas, utilizando el valor obtenido para comprobar la veracidad de las mismas. Si el razonamiento es válido, se dará una “contradicción”, generando que el valor de una de las premisas resulte falso.

EJEMPLO

$P1:\ p \Rightarrow (q \wedge r)$

$P2: -(q \wedge r)$

$C:\ -p$ ⟶ 1) Se supone −p Falsa, por lo tanto, p es V.

2) Si p es V, (q ∧ r) debe ser V, ya que la P1 es V. Por lo tanto, q y r son V
3) Al ir a la P2, resulta que la misma con los valores anteriores, resulta ser F→ABSURDO!!!! , pues la P 2 es V por hipótesis.
4) Por lo tanto, el razonamiento es Válido.