Matemática I

CLASE N°3-CLASE N°4

Ing. Marcela Bellani
UNAHUR | 2021

En estas clases se desarrollarán los siguientes temas:

- Proposiciones equivalentes.

-Leyes Lógicas

-Redes de conmutación

Proposiciones lógicamente equivalentes

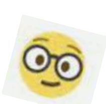
Dos proposiciones p y q se llaman equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas. De ser así se denota: $p \equiv q$

Se observa al realizar las tablas de verdad de las proposiciones: $p \rightarrow q$ y $\sim p \vee q$

p	$\rightarrow$	q
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	V	F

$\neg$	p	$\vee$	q
F	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	F
V	F	V	F

Como vemos, luego de realizar las tablas de verdad encontramos que ambas proposiciones tienen el mismo resultado final. Con esto, decimos que ambas proposiciones son lógicamente equivalentes, y en este caso particular lo simbolizamos: $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$



Teorema: Si dos expresiones lógicas son equivalentes, entonces, la expresión que se obtiene al operarlas con la bicondicional es una tautología.

Si F es equivalente a G, entonces $F \leftrightarrow G$ es una tautológica.

Leyes Lógicas

Aquellas fórmulas lógicas que resultan ser siempre verdaderas sin importar la combinación de los valores de verdad de sus proposiciones simples, son tautologías o leyes lógicas. En el cálculo proposicional existen algunas tautologías especialmente útiles cuya demostración se reduce a la confección de su correspondiente tabla de verdad, a saber:

Involución

$\sim(\sim p) \equiv p$

Idempotencia

$(p \wedge p) \equiv p$

$(p \vee p) \equiv p$

Conmutatividad

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

Asociatividad

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Distributividad:

$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

De Morgan

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Absorción

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Identidad

$p \wedge T \equiv p$

$p \vee F \equiv p$

Dominación

$p \wedge F \equiv F$

$p \vee V \equiv V$

Negación

$p \wedge \neg p \equiv F$

$p \vee \neg p \equiv V$

Bicondicional

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Condicional

$p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$

Aclaración: Se representa con T a una tautología y con F a una contradicción.

Simplificación

1. Simplificar la siguiente proposición, utilizando leyes lógicas

$[(\sim p \Rightarrow q) \wedge p] \vee (q \wedge \sim p) \vee \sim(p \vee \sim q) \equiv$	De Morgan/Involución
$[(\sim p \Rightarrow q) \wedge p] \vee (q \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge q) \equiv$	idempotencia
$[(\sim p \Rightarrow q) \wedge p] \vee (q \wedge \sim p) \equiv$	ley de implicación/involución
$[(p \vee q) \wedge p] \vee (q \wedge \sim p) \equiv$	Absorción
$p \vee (q \wedge \sim p) \equiv$	distributiva
$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim p) \equiv$	Ley de Negación
$(p \vee q) \wedge T \equiv$	neutro
$p \vee q$	

2.Negar y simplificar la siguiente proposición. Luego hacer el circuito de conmutación correspondiente

$(p \rightarrow q) \wedge [\neg q \wedge (r \vee \neg q)]$

Comienzo negando la proposición (aclaración: también se puede hacer la negación al final de la simplificación)

$\neg[(p \rightarrow q) \wedge [\neg q \wedge (r \vee \neg q)]] \equiv$ ley de implicación/absorción

$\neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q)]] \equiv$ De Morgan

$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q) \equiv$ De Morgan/ doble negación

$(p \wedge \neg q) \vee q \equiv$ Distributiva

$(p \vee q) \wedge (\neg q \vee q) \equiv$ley de negación

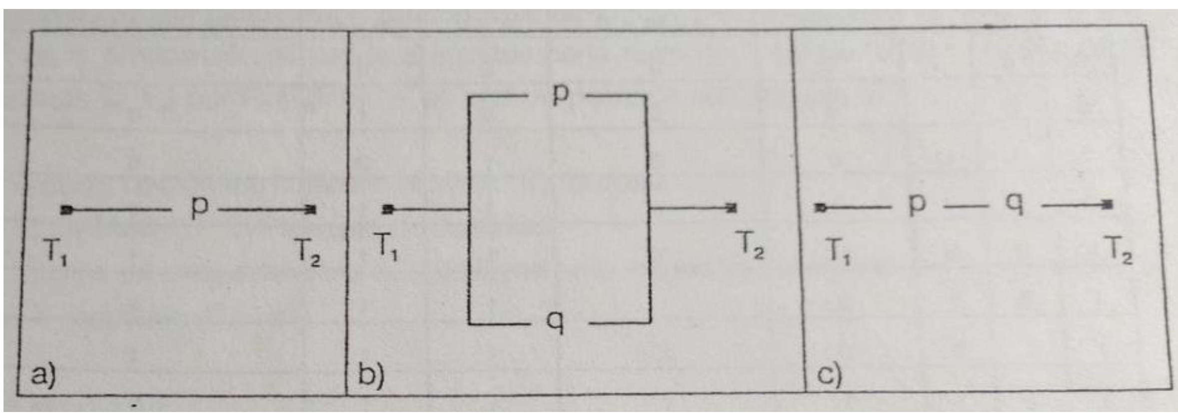
$(p \vee q) \wedge T \equiv$identidad

$(p \vee q)$

Redes de conmutación

Una red de conmutación está formada por cables e interruptores que conectan dos terminales T_1 y T_2. Si un interruptor está abierto, entonces no pasa la corriente por él y si el interruptor está cerrado pasa corriente por él.

Distintas formas de conectar los interruptores

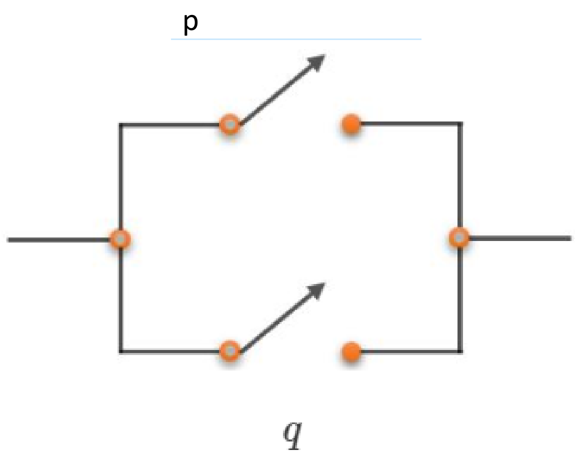


a) existe sólo un interruptor indicado con la letra "p"

b) la corriente pasa de T_1 a T_2 si cualquiera de los interruptores p, q está cerrado. Aquí los interruptores están en paralelo y se representa mediante la proposición "$p \vee q$"

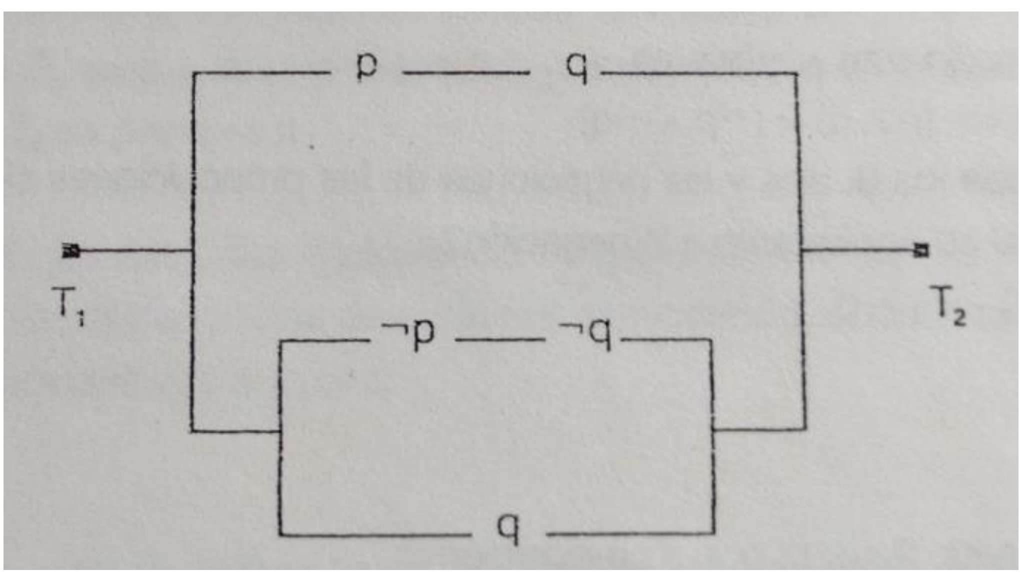
c) se necesita que los dos interruptores estén cerrados para que la corriente circule de T_1 a T_2. Aquí los interruptores están en serie y esta red se representa por la proposición "$p \wedge q$"

Para nuestro ejemplo el circuito de conmutación es:



Ejercicios

1.Dada la siguiente red de conmutación:



Se pide:

1.1. Simplificar la red

1.2. Graficar la red obtenida

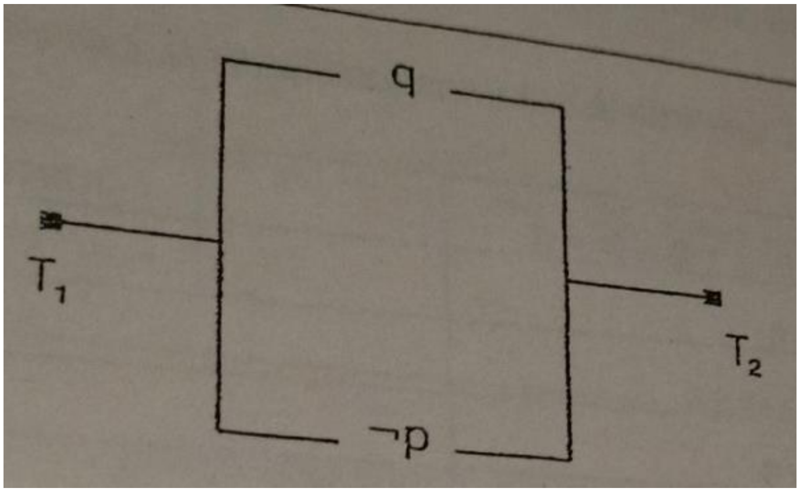
Solución

La red se expresa como $(p \wedge q) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \vee q)$

1.1.

$(p \wedge q) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \vee q) \equiv$	Ley distributiva de ∨ respecto de ∧
$(p \wedge q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \equiv$	Ley de negación
$(p \wedge q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge T) \equiv$	Elemento neutro de ∧
$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)) \equiv$	Asociativa y conmutativa
$((p \wedge q) \vee q) \vee \neg p \equiv$	Absorción
$q \vee \neg p$	

1.2.



2.Sea $[(\neg s \vee (r \wedge p) \vee r) \wedge \neg s] \vee (\neg s \vee (s \wedge r))$

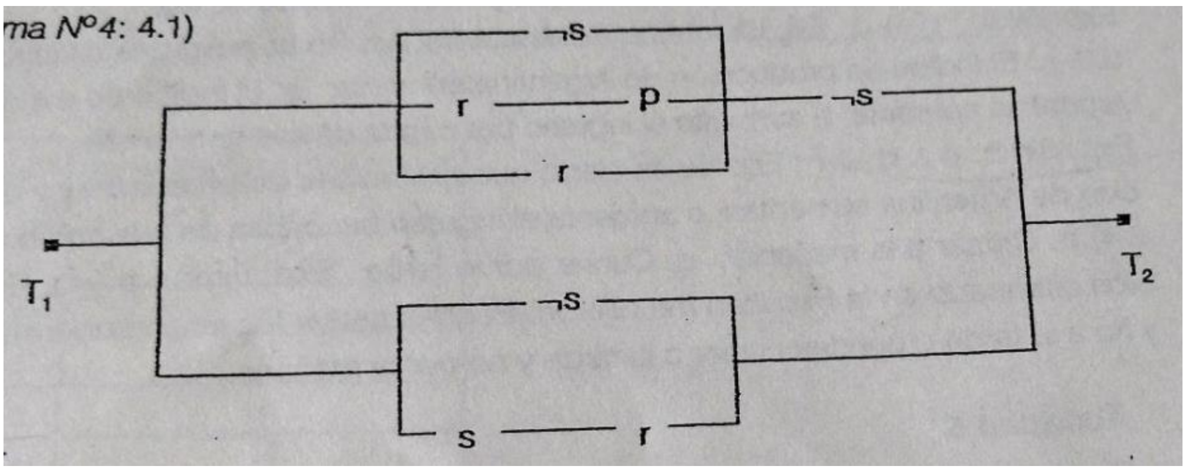
Se pide:

2.1. Diseñar un circuito que represente la expresión simbólica dada.

2.2. Encuentra una red de conmutación que sea equivalente a la original mediante la simplificación de la expresión simbólica dada.

<u>Solución</u>

2.1.



2.2.

$[(\neg s \vee (r \wedge p) \vee r) \wedge \neg s] \vee (\neg s \vee (s \wedge r)) \equiv$	Asociativa
$[(\neg s \vee ((r \wedge p) \vee r)) \wedge \neg s] \vee (\neg s \vee (s \wedge r)) \equiv$	Absorción
$[(\neg s \vee r) \wedge \neg s] \vee (\neg s \vee (s \wedge r)) \equiv$	Asociativa
$[((\neg s \vee r) \wedge \neg s) \vee \neg s] \vee (s \wedge r)) \equiv$	Absorción
$\neg s \vee (s \wedge r) \equiv$	Ley Distributiva
$(\neg s \vee s) \wedge (\neg s \vee r) \equiv$	Ley de negación
$T \wedge (\neg s \vee r) \equiv$	Elemento Neutro
$\neg s \vee r$	