Producto booleano

Dado $A \in \{0,1\}^{n \cdot m}$ y $B \in \{0,1\}^{m \cdot p}$ se define $C = A \odot B$ con $C \in \{0,1\}^{n \cdot p}$

donde los $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m} a_{ik} \wedge b_{kj}$ $\forall i: 1,2,\ldots\ldots. n$ $\forall j: 1,2,\ldots\ldots. m$

Ejemplo: sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vamos a hallar la matriz producto $C = A \odot B$

Como A es una matriz de 2x3 y B una de 3x2, C es de 2x2 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$c_{11} = (a_{11} \wedge b_{11}) \vee (a_{12} \wedge b_{21}) \vee (a_{13} \wedge b_{31}) = (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = 1$

$c_{12} = (a_{11} \wedge b_{12}) \vee (a_{12} \wedge b_{22}) \vee (a_{13} \wedge b_{32}) = (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0$

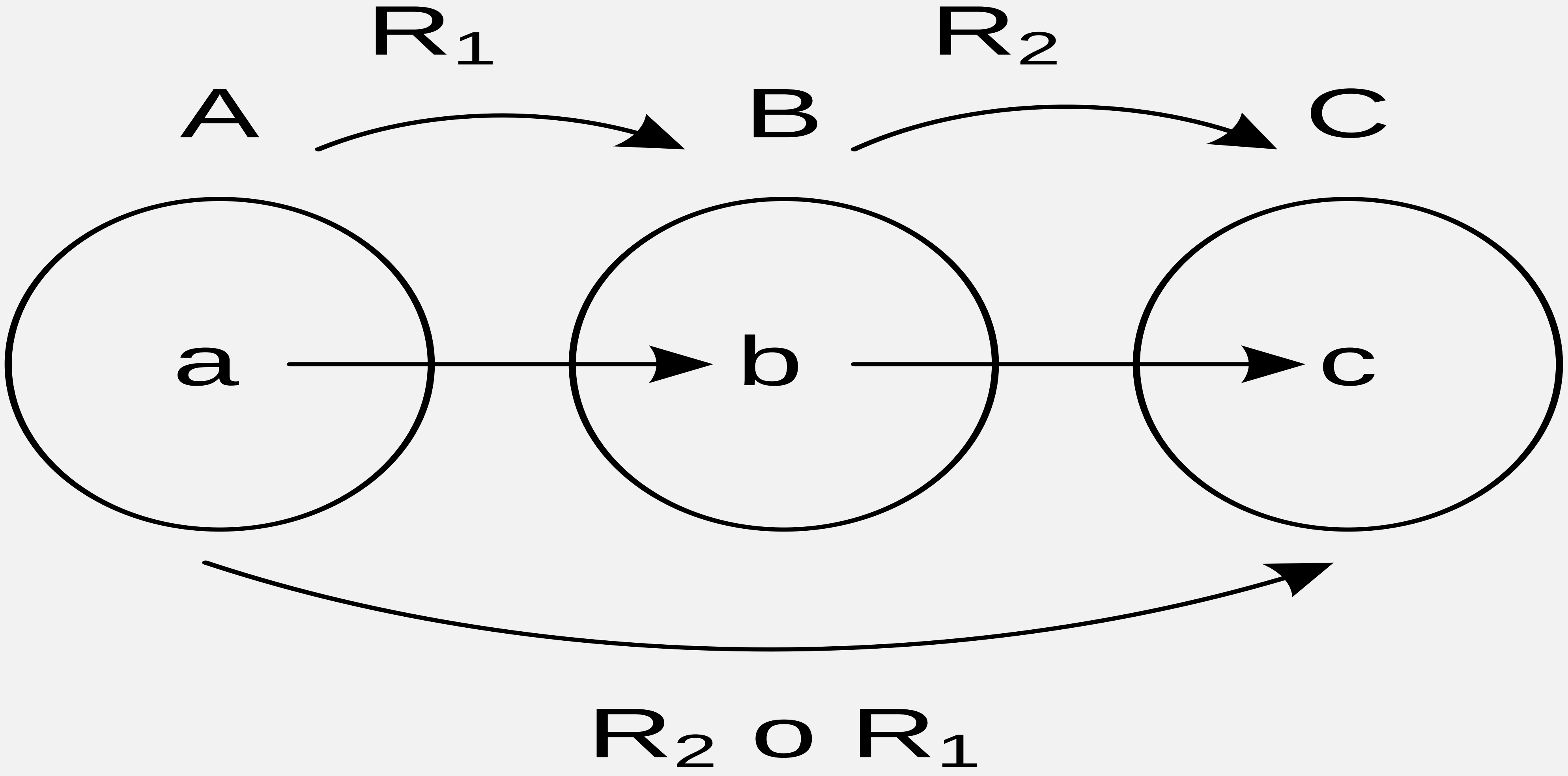
$c_{21} = (a_{21} \wedge b_{11}) \vee (a_{22} \wedge b_{21}) \vee (a_{23} \wedge b_{31}) = (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = 1$

$c_{22} = (a_{21} \wedge b_{12}) \vee (a_{22} \wedge b_{22}) \vee (a_{23} \wedge b_{32}) = (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0$

COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Sean A, B y C tres conjuntos y R1: $A \rightarrow B$ y R2: $B \rightarrow C$ dos relaciones, llamamos composición de R_1 seguida de R_2, que se indica $R_2 \circ R_1$, a

$R_2 \circ R_1 = \{ (a, c) / \exists\, b \in B \wedge (a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2 \}$

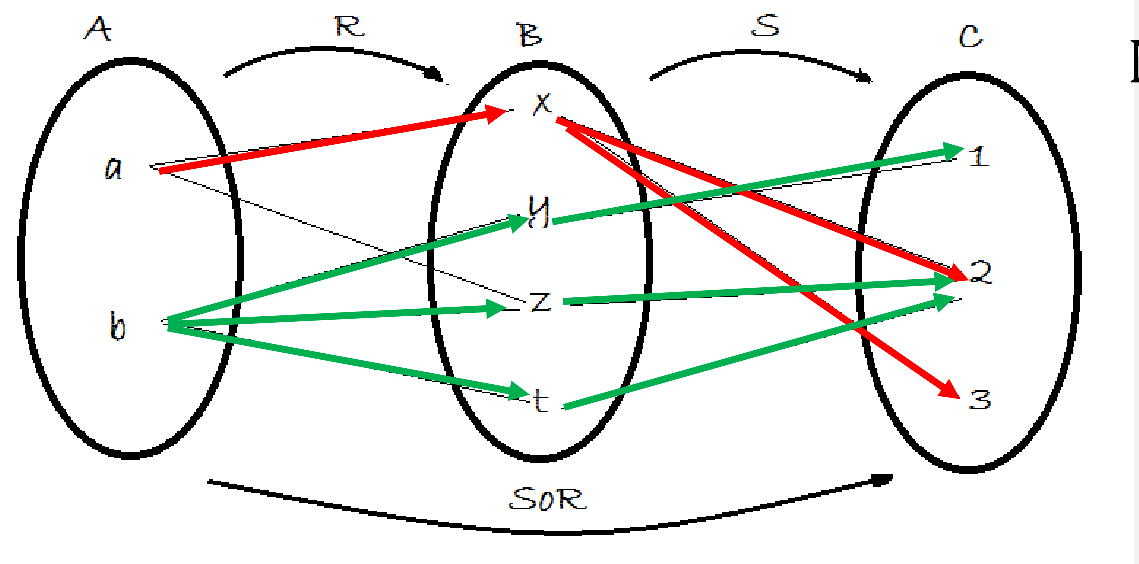


Ejemplo: Sean los conjuntos A = {a, b } B = { x, y, z, t } C = { 1, 2, 3 } y las relaciones binarias:

R : A → B / R = { (a; x) , (a; z) , (b; y) , (b; z) , (b; t) }

S : B → C / S = { (x; 2) , (x; 3) , (y; 1) , (z; 2), (t; 2) }

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S$$



$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2x4} \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{4x3}$$

$$M_{S\circ R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SoR= { (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2)}

$$M_{S\circ R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

Propiedades

- Si R_1: A $\rightarrow$ B, R_2: B $\rightarrow$ C son relaciones <u>no</u> se verifica la propiedad conmutativa $R_2 \circ R_1 \neq R_1 \circ R_2$

- propiedad asociativa $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$

- R_1^{-1} y R_2^{-1} son las relaciones recíprocas de R_1 y $R_2 \Rightarrow (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$

- Sean A, B, C tres conjuntos finitos, R_1: A $\rightarrow$ B, R_2: B $\rightarrow$ C dos relaciones y M_{R1} y M_{R2} las matrices de adyacencia $\Rightarrow$ para la composición $R_2 \circ R_1$ la matriz de adyacencia es $M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2}$

PROPIEDADES DE LA RELACIONES

Sean A un conjunto y una relación R: A $\rightarrow$ A

- ✓ **Reflexiva**

R es reflexiva $\Leftrightarrow \forall$ a $\in$ A $\Rightarrow$ (a, a) $\in$ R o bien a R a

El dígrafo de R tiene bucles en todos sus vértices

La matriz de R tiene todos "1" en la diagonal principal

Propiedad : **R es reflexiva $\Leftrightarrow \Delta_A \subseteq$ A**   Matricialmente $I \leq M_R$

- ✓ **Arreflexiva**

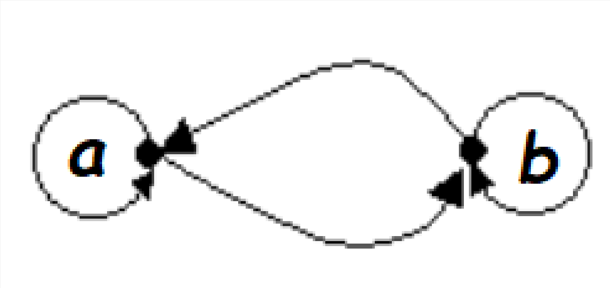
R es arreflexiva $\Leftrightarrow \forall$ a $\in$ A $\Rightarrow$ (a, a) $\notin$ R

En su dígrafo ningún elemento tiene bucle

En la matriz de R la diagonal principal son todos "0"

Propiedad: **R es arreflexiva $\Leftrightarrow \Delta_A$**   Matricialmente $I \wedge M_R = N \ (matriz\ nula)$

✓ Simétrica



R es simétrica $\Leftrightarrow \forall\ (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ o bien

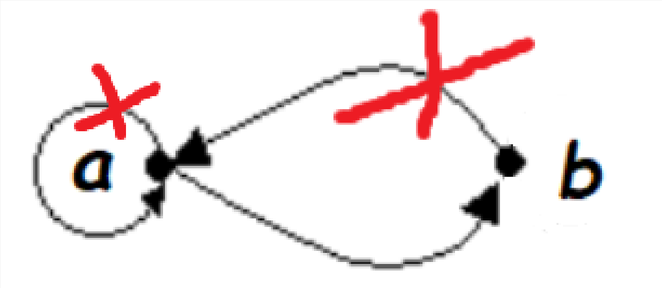
$\forall\ a, \forall\ b \in A: a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a$

En el dígrafo de R si hay un arco dirigido de "*a*" a *"b"* existe también un arco dirigido de "b" a "a"

$$R \text{ es simétrica} \Leftrightarrow R = R^{-1}$$

La matriz de R es simétrica respecto de la diagonal principal $MR = (MR)^t$

✓ Asimétrica



R es asimétrica $\Leftrightarrow \forall\ (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$ o bien

$\forall\ a, \forall\ b \in A: a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a$

$$R \text{ es asimétrica} \Leftrightarrow R \cap R^{-1} = \varnothing$$

La $MR \wedge (MR)^t = N$ matriz nula

En el dígrafo de R si hay un arco dirigido de "a" a "b" no hay de "b" a "a"

✓ Antisimétrica

R es antisimétrica $\Leftrightarrow$ Si (a, b) $\in$ R $\wedge$ (b, a) $\in$ R $\Rightarrow$ a = b

o bien $\forall$ a, $\forall$ b $\in$ A: a R b $\wedge$ b R a $\Rightarrow$ a = b

Propiedad:

$$R \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A \quad con \ \ \Delta_A = \{(a;a) / a \in A\}$$

Matricialmente

$MR \wedge (MR)^t \leq I$ matriz identidad

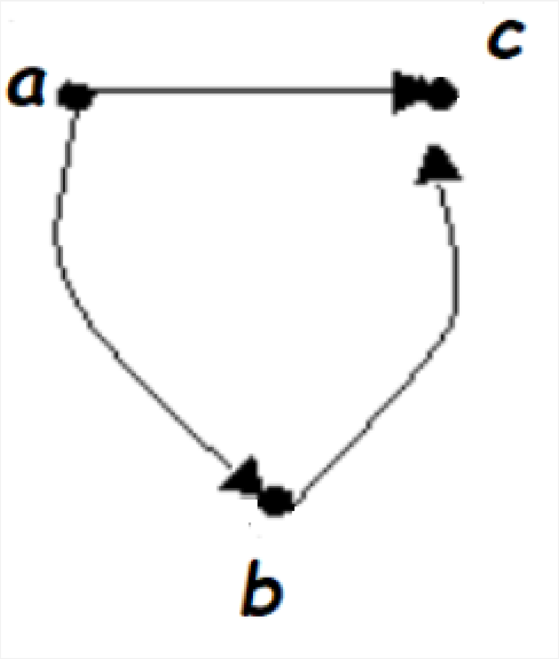
El dígrafo de R tiene la propiedad de que entre dos vértices distintos cualesquiera hay a lo sumo un arco dirigido.

✓ **Transitiva**

R es transitiva $\Leftrightarrow$ Si (a, b) $\in$ R $\wedge$ (b, c) $\in$ R $\Rightarrow$ (a, c) $\in$ R

o bien $\forall$ a, b, c $\in$ A: a R b $\wedge$ b R c $\Rightarrow$ a R c

El dígrafo de R tiene la propiedad de que siempre que existan arcos dirigidos de “a” a “b” y de “b” a “c” entonces también existe un arco dirigido de “a” a “c”



Propiedad

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{R} \circ \mathrm{R} \subseteq R$$

Matricialmente

$$R \text{ es transitiva} \Leftrightarrow M_R \odot M_R \leq M_R$$