Análisis Combinatorio

El análisis combinatorio tiene por objetivo determinar (contar) la cantidad de grupos (conjuntos o subconjuntos) que pueden formarse con los elementos de un conjunto según reglas de formación determinadas.

Comencemos con dos técnicas básicas de conteo: **principio de la suma** y **principio de multiplicación**. Estos principios además de servir para resolver problemas que involucran el conteo, sirven para determinar cuántas veces se ejecutan algunos pasos en los algoritmos.

Principio de adición o de la suma.

Supongamos que quiero ir desde mi casa a la UNAHUR. Puedo ir manejando mi auto o mi bicicleta o bien puedo ir en colectivo (línea 254, 172 y 96) ¿De cuántas maneras puedo hacer el viaje a la universidad?

Si voy manejando **(suceso A)** tengo **dos maneras**: voy en auto o voy en bicicleta
Si voy en colectivo **(suceso B)** tengo **tres maneras**: tomar la línea de colectivo 254, o tomar el 172 o tomar el 96.
Cantidad de maneras para ir desde mi casa a la UNAHUR: **2 + 3 = 5**
Por lo tanto, puedo ir de 5 maneras diferentes ya que se trata de eventos excluyentes entre sí. No pueden efectuarse simultáneamente las dos acciones (ir manejando o ir en colectivo).

Ahora si podemos enunciar el principio de adición:

Si A y B son dos sucesos mutuamente excluyentes o disjuntos, es decir, que no se presentan al mismo tiempo, el suceso A se puede realizar de m maneras y el B de n, entonces el suceso A o B, se podrá realizar de m + n maneras distintas.

Observación: El principio de adición se puede extender a más de dos sucesos, siempre que no haya dos de ellos que puedan efectuarse simultáneamente.

Ejemplo

Una persona puede pagar el servicio de agua potable en cualquiera de las 7 oficinas municipales o bien en cualquiera de los 30 bancos de la ciudad. ¿En cuántos lugares diferentes se puede pagar el servicio de agua potable?

lugares en donde se puede pagar = n + m = 7 +30 = 37

Principio de multiplicación

Supongamos ahora que quiero ir a Villa Gesell desde San Justo. De acuerdo al mapa de rutas de la provincia de Bs As hay cuatro rutas desde San Justo que me llevan a la ciudad de Dolores y tres rutas que me llevan desde la ciudad de Dolores hasta la ciudad de Villa Gesell. ¿Cuántos caminos que pasan por Dolores conducen a Villa Gesell?

Por cada ruta que nos lleva a Dolores tenemos 3 rutas que nos lleva a V. Gesell. Como tenemos 4 rutas desde San Justo a la ciudad de Dolores tenemos 4.3 caminos.

Ahora enunciamos el principio de multiplicación:

Si U es un suceso que puede descomponerse en dos etapas sucesivas e independientes entre sí, S y T, la etapa S se puede realizar de m maneras y la etapa T de n maneras, independientemente de cuál haya sido el resultado en la etapa; entonces, U se podrá realizar de m x n maneras distintas. Este

Ejemplo

Un algoritmo tiene 3 procedimientos (A, B, C) y cada procedimiento tiene 4 ciclos (1, 2, 3, 4). ¿Cuántos ciclos tiene el algoritmo?

Aplicando el principio fundamental del producto se tiene que:

Total de ciclos = 3x4 = 12

El conjunto E de resultados posibles es:

E = {Al, A2, A3, A4, Bl, B2, B3, B4, Cl, C2, C3, C4}

Por otro lado, los grupos a formarse con los elementos de un conjunto A pueden diferenciares por:

Los elementos diferentes que los compongan.

El orden de sucesión con el cual se toman los elementos.

La repetición o no de los elementos que forman el conjunto.

Tenemos tres maneras de agrupar los elementos de un conjunto con o sin repetición: **Variación; Permutación y Combinación.**

Analicemos cada uno de ellos teniendo en cuenta si se repiten o no los elementos del conjunto.

Variación

Variación simple o sin repetición.

Variación sin repetición de los n elementos del conjunto A tomados de a k elementos es cualquier grupo que puede formarse tomando k elementos de A, sin repetición, considerando como distintas dos variaciones cuando difieren en algún elemento, o en el orden de sucesión.

El cálculo de todas las formas posibles de hacerlo es:

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

siendo n =|A| y k (cantidad de elementos del grupo)

Aclaración: la expresión n! se conoce con el nombre de ***factorial de n*** y es el producto de los n primeros números naturales (se considera por definición que 0! = 1)

n! = n.(n-1). (n-2)…3.2.1

Ejemplo

¿Cuántos números de 2 cifras distintas pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4?

A= {1,2,3,4} →|A| = 4 k=2

$$V(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2!} = 12$$

Los doce números son:

12
13
14
21

23
24
31
32
34
41
42
41

Por otro lado, también podríamos preguntarnos cuántos números de dos cifras se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4? En este caso los elementos del conjunto A se pueden repetir. Entonces hablamos de variación con repetición.

Variación con repetición.

Variación con elementos repetidos (o con repetición) es cualquier grupo que puede formarse tomando k elementos del conjunto A, con repetición,
considerando como distintas dos variaciones cuando difieren en algún elemento, o en el orden de su sucesión.

Se calcula como:

$V'(n, k) = n^k$

Para el ejercicio propuesto la cantidad de números de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4 es:

$|A|=4 \quad k=2$

$V'(4, 2) = 4^2 = 16$

Los números que se pueden formar son:

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

Permutación

Permutación simple o sin repetición

Se trata de un reordenamiento de los n elementos distintos del conjunto.

La cantidad de permutaciones posibles de n elementos distintos coincide con las variaciones de n elementos tomados de a n.

$$P(n) = V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$\therefore \; P(n) = n!$

Ejemplo

¿De cuántas maneras se pueden reordenar las letras de la palabra SOL?

P (3) = 3! = 3.2.1 =6

Las seis permutaciones son

sol
lso
ols
slo
los
osl

Observación: cada una de estas construcciones no tienen significado en nuestro idioma, por eso reciben el nombre de anagrama.

Permutación con elementos repetidos

Supongamos ahora que queremos encontrar todos los anagramas que se pueden formar con las letras de la palabra MARGARITA.

Por un lado, sabemos que vamos a reordenar las letras de la palabra y por otro lado vemos que tiene letras repetidas como la A que se repite 3 veces y la R que se repite 2 veces. Esto quiere decir que tenemos que descontar del total de permutaciones sin repetición (9!) las permutaciones entre las tres A dividiendo por 3! y lo mismo para las dos R, al dividir por 2!

$$P_9^{3,2} = \frac{9!}{3!.2!} = \frac{9.8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,.\,2} = 30240$$

Por lo tanto, para calcular las permutaciones con repetición deberemos hacer:

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{n!}{k_1!.\,k_2!\ \ldots .\ k_n!}$$

siendo
k_1=cantidad de veces que se repite el elemento 1
k_2=cantidad de veces que se repite el elemento 2
.
.
.
K_n=cantidad de veces que se repite el elemento n

Combinación

Combinaciones simples o sin repetición

Una combinación simple o sin repetición de los n elementos del conjunto A tomados de a k elementos es cualquier grupo que puede formarse tomando k elementos de A, sin repetición, considerando como distintas dos combinaciones cuando difieren

Se utiliza la siguiente fórmula para hallar las combinaciones de n elementos distintos tomados de a k elementos:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{con } 0 \leq k \leq n$$

Este cálculo se denomina ***número combinatorio*** de n elementos en k.

Es un cálculo de mucha utilidad que aparece en las distribuciones de probabilidad con suma frecuencia. Notación:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{m!\,(n-k)!} \qquad \text{siendo } 0 \leq k \leq n$$

Ejemplo

¿Cuántos equipos de vóley distintos se pueden armar con 16 jugadores?

Es decir, se trata de calcular de cuántas maneras se pueden elegir 6 jugadores de un grupo de 16 personas.

$$C(16,6) = \frac{16!}{6!(16-6)!} = \frac{16!}{6!\,.10\,!} = \frac{16.15.14.13.12.11.10!}{6!\,.\;10!} = \frac{16.15.14.13.12.11}{6.5.4.3.2.1} = 8008$$

equipos

Ahora consideremos la posibilidad de obtener todas las combinaciones de n en k con repetición. Es decir, los grupos de k elementos a elegir del conjunto de n elementos pueden tener elementos repetidos o, equivalentemente, pueden ser elegidos en más de una oportunidad.

Se utiliza la siguiente expresión para realizar el cálculo de cuántas selecciones en estas condiciones son posibles:

$$C'(n,k) = \binom{n+\mathrm{k}-1}{k} = C(n+\mathrm{k}-1,\mathrm{k}) = \frac{(n+\mathrm{k}-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Observación: como existe la posibilidad de repetir los elementos k puede ser mayor que n (n ≤ k, k ≥ n)

Combinaciones con repetición

Combinación con elementos repetidos de los n elementos de un conjunto A tomados de a k elementos es cualquier grupo que puede formarse tomando k elementos de A, con repetición, considerando como distintas dos combinaciones cuando difieren en algún elemento, sin importar el orden de sucesión.

Ejemplo

¿Cuántos menúes de dos platos se pueden combinar entre las opciones que incluyen carne vacuna (c), verduras (v), pollo (p) y cereales ricos en fibras (f)?

Podríamos hacer las siguientes parejas de combinaciones:

cc cv cp cf

vp vv vf pp

…
Haciendo el cálculo a partir del número combinatorio

$$C´(4,2) = \binom{4+2-1}{2} = C(5,2) = \frac{5!}{2!\,.\,3!} = \frac{5.4.3!}{2.\,3!} = 10$$

Resumen

		Repetición	Elementos diferentes	¿Importa el orden?	Cálculo	Ejemplo
1	*Variaciones*	Sin	k ≤ n	Si	$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	Cantidad de números de 4 cifras distintas con los dígitos del 1 al 9: V (9, 4) = 9! = 3028 (9-4)!
		Con	k ≤ n k ≥ n	Si	V´(n, k)= n^k	Cantidad de números de 4 cifras con los dígitos del 1 al 9: V´ (9, 4) = 9^4 = 6561
2	*Permutación*	Sin	k = n	Si	P(n) =n!	Cantidad de números de 4 cifras distintas con los dígitos 2,4,6,8: P (4) = 4! = 24
		Con	k ≥ n	Si	$P_n^{k_1,k_2,\dots,k_n} = \frac{n!}{k_1!.\,k_2!\,\dots.\,k_n!}$	Cantidad de anagramas con las

						letras de la palabra ANANA: $P_5^{k1k2..kn} = \frac{5!}{2!3!} = 10$
3	*Combinación*	Sin	k ≤ n	No	$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Cantidad de equipos de truco que pueden formarse con 6 personas: $C(6,3) = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$
		Con	k ≤ n k ≥ n	No	C´(n,k)=C(n+k-1,k)	Cantidad de formas de embocar 10 bolas de pool en 6 troneras: C´(10, 6) = C (10+6-1,6) = $\frac{15!}{6!\,9!}$ =5005