Relaciones de orden

Relación de ORDEN

La relación $R \subseteq A^2$ es de orden $\Leftrightarrow$ es

- **Reflexiva**
- **Antimétrica**
- **Transitiva**

Las relaciones de **orden** también se denominan de **orden amplio.**

A las relaciones de **ORDEN** (amplio) se las suele representar por el símbolo: $\preccurlyeq$

$a \preccurlyeq b$ decimos "a precede a b" si a es anterior a b en el orden establecido

Cuando en un conjunto hay definida una relación de orden, diremos que dicho conjunto está ordenado y se denota: **$(A ; \preccurlyeq)$**

Una relación R es de **orden estricto** si y sólo si es a-simétrica y transitiva.

Se dice que el conjunto A es un conjunto estrictamente ordenado y se indica (A; $\prec$).

ELEMENTOS COMPARABLES En un conjunto ordenado (A, $\preccurlyeq$) dos elementos $a, b \in \mathrm{A}$ si dicen comparables "sí y solo sí" $a \preccurlyeq b \ \vee \ b \preccurlyeq a$

Si a $\npreccurlyeq$ b y b $\npreccurlyeq$ a, decimos que a y b no son comparables

Relación de orden parcial Una relación R es de orden parcial, si algunos elementos no son comparables entre sí.

Relación de orden total Una relación R es de orden total si todos los elementos son comparables $\forall a, b \in A$: $a \preccurlyeq b \ \vee \ b \preccurlyeq a$

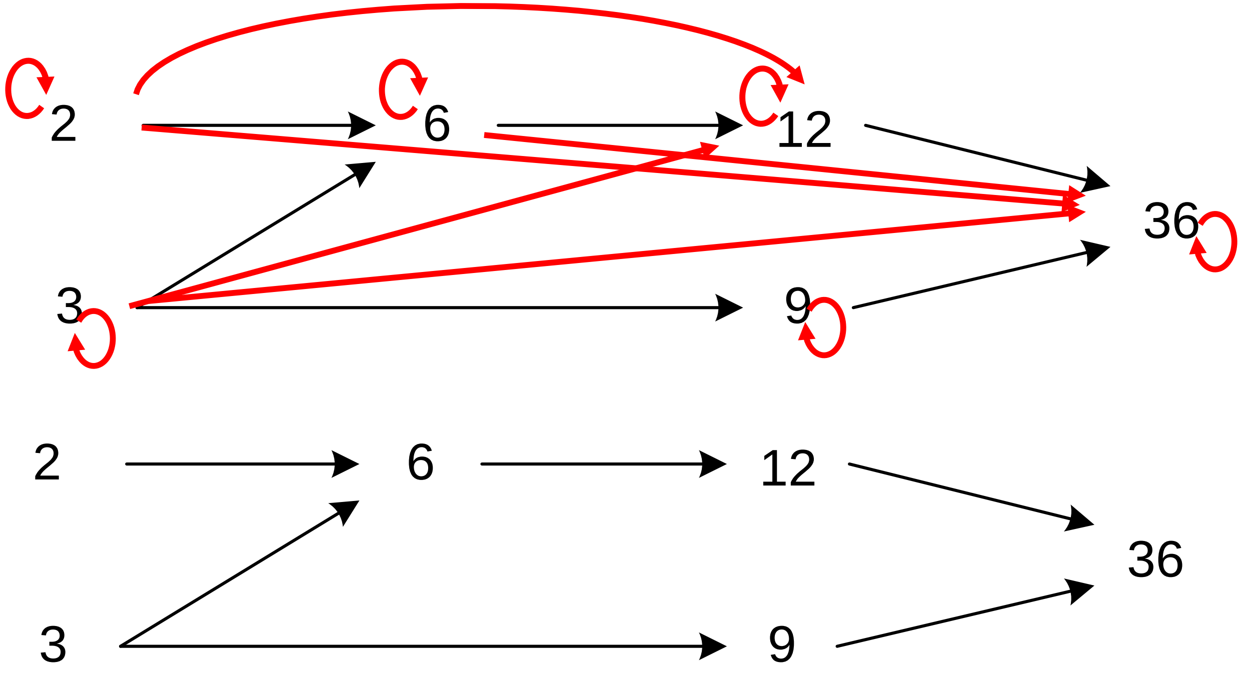
Ejemplo: la relación "menor o igual que..."

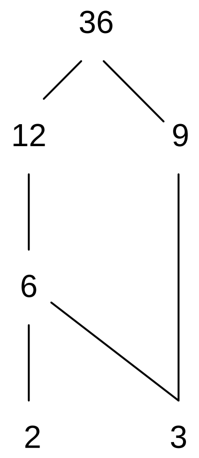
Diagrama de Hasse

Es posible representar un conjunto ordenado y finito mediante un diagrama llamado de Hasse.

En el diagrama se suprimen los bucles y las aristas transitivas

Ejemplo: Sea A = { 2, 3, 6, 9, 12, 36 } ordenado por la relación “es divisor de”





puede omitirse el sentido de las aristas si se las dibuja de abajo hacia arriba.

Elementos Distinguidos de un Conjunto Ordenado

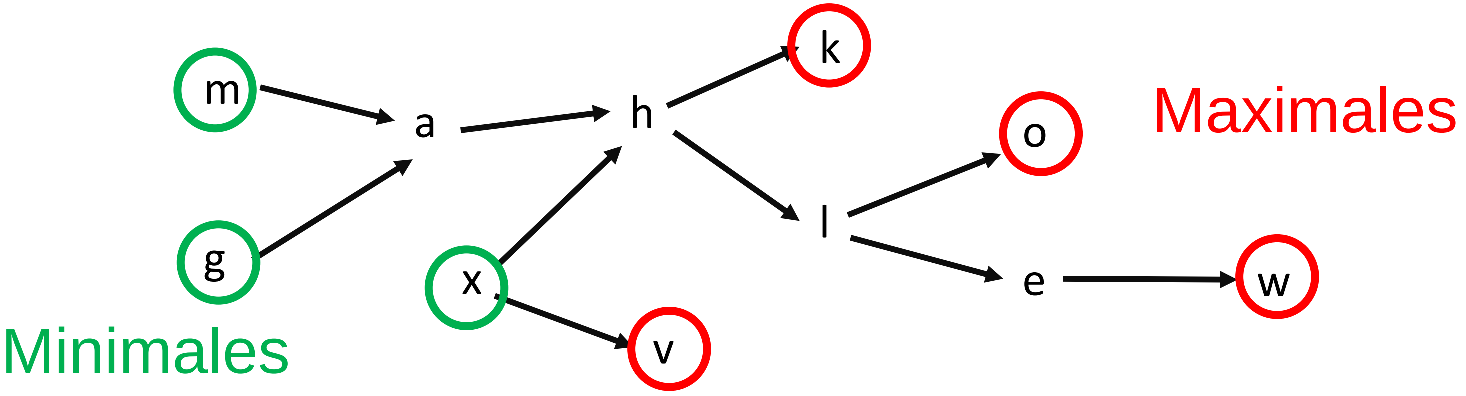
Sea (A; $\preccurlyeq$) un conjunto ordenado

Un elemento a $\in$ A es **maximal** si: $\forall\, x \in \mathbf{A} \,/\, \mathbf{a} \preccurlyeq x \Rightarrow x = \mathbf{a}$

ningún elemento "lo sigue" excepto si mismo

Un elemento a $\in$ A es **minimal** si: $\forall\, x \in \mathbf{A} \,/\, x \preccurlyeq \mathbf{a} \Rightarrow x = \mathbf{a}$

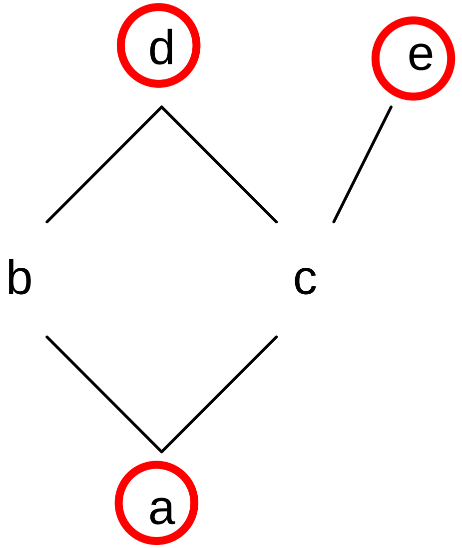
ningún elemento "lo precede" excepto si mismo



Ejemplo: Sea A = { a, b, c, d, e } ordenado según el diagrama

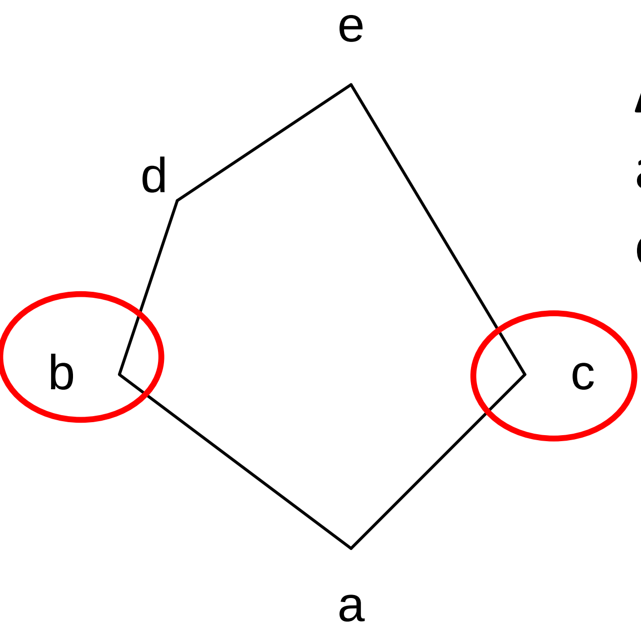
Maximales = { d, e }

Minimales = { a }



Observaciones

- Los **maximales y/o minimales** pueden **no ser únicos**
- Si el **maximal es único** se lo llama **máximo o último elemento (1_A)**
  $\boldsymbol{a\ es\ máximo \Leftrightarrow \forall x: x \preccurlyeq a}$
- Si el **minimal es único** se lo llama **mínimo o primer elemento(0_A)**
  $\boldsymbol{a\ es\ mínimo \Leftrightarrow \forall x: a \preccurlyeq x}$



Átomos: Sea (A; $\preccurlyeq$) un conjunto ordenado con primer elemento 0_A, los átomos son los elementos que siguen inmediatamente al primer elemento

Ejemplo: Sea A = { a, b, c, d, e } ordenado según el diagrama de Hasse

Son átomos { b, c }

Cotas

Sean (A, $\preccurlyeq$) un conjunto ordenado y $B \neq \emptyset$, $B \subseteq A$

- $k \in A$ es **cota superior** de B si $\forall\, x \in B$, $x \preccurlyeq k$

Las cotas superiores de un subconjunto ordenado son los elementos ***que siguen*** a todos los elementos del subconjunto.

El conjunto de las **cotas superiores** se llama **conjunto mayorante**

- $k \in A$ es **cota inferior** de B si $\forall\, x \in B$, $k \preccurlyeq x$

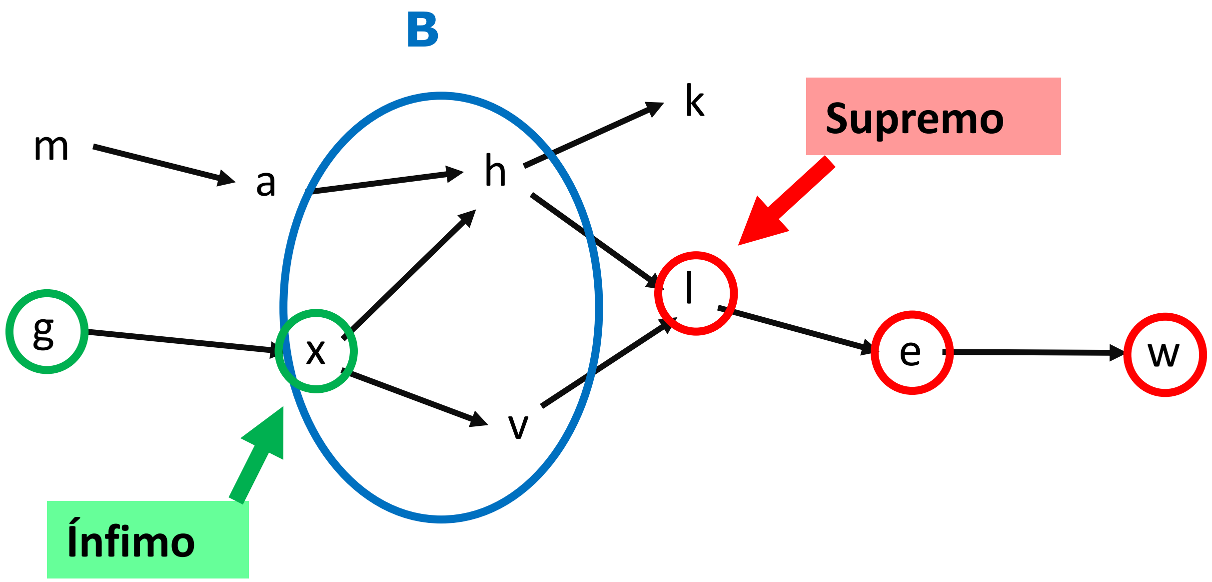
Las cotas inferiores de un subconjunto ordenado son los elementos ***que preceden*** a todos los elementos del subconjunto.

El conjunto de las **cotas inferiores** se llama **conjunto minorante**

- ✓ A la **menor** de las **cotas superiores** se la denomina **supremo**
- ✓ A la **mayor** de las **cotas inferiores** se la denomina **ínfimo**
- ✓ Si el **supremo pertenece a B** entonces es **máximo de B**
- ✓ Si el **ínfimo pertenece a B** entonces es **mínimo de B**

Ejemplo:

Sea A = { m, g, a, x, h, v, k, l , e, w } ordenado de la siguiente forma:



Para B = { x, v, h }

C.S.= {l, e, w}

Sup= l Max_B= No tiene

C.Inf.= {x, g}

Inf.= x Min_B= x

Conjunto bien ordenado

Sea (A, $\preccurlyeq$) un conjunto ordenado, está **bien ordenado** si todo subconjunto de A tiene primer elemento, es decir que si $\forall$ B $\neq$ Ø , B $\subseteq$ A, B tiene primer elemento.

Ejemplo: El conjunto IN de números naturales con la relación $\leq$ es un conjunto bien ordenado.

Observaciones

- $\preccurlyeq$ se llama **buen orden.**
- Si B $\neq$ Ø, B $\subseteq$ A $\Rightarrow$ B está bien ordenado.
- Si (A, $\preccurlyeq$) está bien ordenado $\Rightarrow$ A está totalmente ordenado.