Matemática para informática II

Ing. Marcela Bellani
UNAHUR-2022

Contenido

Relaciones

Introducción

El concepto matemático de relación está basado en la noción de vínculo entre objetos. Algunas relaciones describen comparaciones entre elementos de un conjunto: Una caja es más pesada que otra, un hombre es más rico que otro, etc. Otras relaciones involucran elementos de conjuntos diferentes, tal como “x vive en y”, donde x es una persona e y es una ciudad, “x es propiedad de y” donde x es un edificio e y es una empresa, ´o “x nació en el País y en el año z”.

Todos los ejemplos anteriores son de relaciones entre dos o tres objetos, sin embargo, en principio, podemos describir relaciones que abarquen n objetos, donde n es cualquier entero positivo.

Las relaciones tienen una importancia fundamental tanto en la teoría como en las aplicaciones a la informática, en las bases de datos y problemas de clasificación.

Aplicaciones numéricas, recuperación de información y problemas de redes son algunos ejemplos donde las relaciones ocurren como parte de la descripción del problema, y la manipulación de relaciones es importante en la resolución de procedimientos.

Las relaciones también juegan un importante papel en la teoría de computación, incluyendo estructuras de programas y análisis de algoritmos.

Las relaciones pueden ser utilizadas para resolver problemas tales como la determinación de qué pares de ciudades están unidas por vuelos de líneas aéreas en una red, la búsqueda de un orden viable para las diferentes etapas de un proyecto complicado o la producción de una forma útil para almacenar información en bases de datos informáticas.

La matemática intenta hacerse eco de tales sucesos y, mediante un proceso de abstracción, expresarlas y estudiarlas científicamente.

Definición de relación

Sean los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Una relación R sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ es cualquier subconjunto de este producto cartesiano, es decir,

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

EJEMPLO: Las tablas de una base de datos relacional.

- ✓ Si $\mathbf{R = \varnothing}$, llamaremos a R, la ***relación vacía***.
- ✓ Si $\mathbf{R = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}$, llamaremos a R la ***relación universal***.
- ✓ Si $\mathbf{n = 2}$, diremos que R es una ***relación binaria*** y si $\mathbf{n = 3}$, una ***relación ternaria***.

Relaciones Binarias

La clase más importante de relaciones es la de las relaciones binarias. Debido a que este tipo de relaciones son las más frecuentes, el término "relación" denota generalmente una relación binaria; adoptaremos este criterio cuando no haya confusión y especificaremos las que no sean binarias con términos tales como "ternaria" o "n-aria".

DEFINICIÓN:

Dado un conjunto A, una **relación binaria** en A en B es cualquier subconjunto R del producto cartesiano A x B

$$R \subseteq A \times B = \{(a; b) \,/\, a \in A ,\, b \in B\}$$

UNAHUR
UNIVERSIDAD NACIONAL
DE HURLINGHAM

<u>Notación</u>

1. R es una relación de A en B, también se denota por R: A $\rightarrow$ B

2. Si el par (x, y) pertenece a la relación R, se acostumbra a denotar por (x, y) $\in$ R ó x R y ó y = R(x)

<u>Ejemplo:</u>

En el conjunto A= {1, 2,3} se define la relación R $\subseteq$ AxA / R = {(x; y) / x $\leq$ y}

Por extensión R= {(1;1), (1;2), (1;3), (2;2), (2;3), (3;3)}

Ejercicio

Enumera los pares ordenados de la relación R de A={0,1,2,3,4} en B={0,1,2,3},donde (a, b) $\in$ R si y solo si:

1. a=b

Rta: $R=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$

2. a+b = 4

Rta: $R=\{(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$

3. a $\geq$ b

Rta:

$$R=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(1,0),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

4. .a | b

Rta: $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$

Sea R $\subseteq$ A x B una relación, se definen:

Dominio de la relación R:

"Es el conjunto formado por todos los primeros elementos de los pares ordenados de la relación"

$$D_R = \{x \in A / \exists y \in B: (x, y) \in R\}$$

EJEMPLO:

Sea A = {rosas, margaritas, claveles, violetas} y B = {blancas, amarillos, rojas, bordo, azul} se define una relación R de A en B tal que

R = {(rosas, rojas), (margaritas, blancas), (cláveles, amarillos)}

Entonces el dominio de R es D_R = {rosas, margaritas, claveles}

Recorrido o imagen de la relación:

"Es el conjunto formado por todos los segundos elementos de los pares ordenados de la relación"

$$I_R = \{y \in B / \exists x \in A: (x, y) \in R\}$$

EJEMPLO:

La imagen de la relación R dada anteriormente es I_R = {blancas, amarillos, rojas}

Representación de una relación

Las relaciones pueden ser representadas por:

1.Un conjunto de pares ordenados.

R= {(1;2), (6;4), (1;1)}

2. Matriz de adyacencia

Antes de definir la matriz de adyacencia de una relación definamos qué se entiende por matriz.

Una matriz es una tabla o arreglo de renglones/ filas y columnas de números.

Nosotros trabajaremos con las matrices booleanas. Es decir, sus elementos solo pueden valer 0 o 1.

Cada número que encontramos en la distribución ocupa un lugar en la matriz. Dicho lugar está determinado por el cruce entre una fila y una columna. Es decir:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{n columnas}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} \text{m filas}$$

Llamamos elemento de una matriz y lo representamos simbólicamente a_{ij} al número que se encuentra en la fila i y columna j. Por lo anterior, podemos escribir a la matriz como:

$$A^{mxn} = (a_{ij}), \text{ siendo: } 1 \leq i \leq m \text{ y } 1 \leq j \leq n$$

La matriz A es de dimensión mxn. Esto quiere decir que tiene m filas y n columnas.

Ahora podemos definir la matriz de adyacencia de una relación:

> *Dados dos conjuntos finitos, no vacíos,*
>
> $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *y* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
>
> *y una relación R cualquiera de A en B, llamaremos matriz de R a la matriz booleana siguiente:*
>
> $$M_R = (m_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ si } (a_i, b_j) \in R \\ 0 \text{ si } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$
>
> *donde* $i=1,2,3,\ldots,m$ *y* $j=1,2,3,\ldots,n$

- La matriz de una relación caracteriza a la misma, o sea, si se conoce la relación se conoce la matriz y si se conoce la matriz sabremos de qué relación trata.
- La matriz M_R tiene m filas y n columnas.
- Los elementos de una matriz booleana son 0 y 1.
- Si m = n la matriz M_R se dice matriz cuadrada

Ejemplo:

1. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 4, 6, 9\}$

- Escribir por extensión R: $A \to B$ tal que $a \, R \, b \Leftrightarrow a \mid b$

R= {(1;1), (1;4), (1;6), (1;9), (2;4), (2;6), (3;6), (3;9)}

- Hallar la matriz de R

B \ A	1	4	6	9
1	1	1	1	1
2	0	1	1	0
3	0	0	1	1

$$\rightarrow M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Si A = {1, 2, 3}

- Escribir por extensión R: A $\rightarrow$ A tal que a R b $\Leftrightarrow$ a $|$ b

R= {(1;1), (1;2), (1;3), (2;2), (3;3)}

- Hallar la matriz de R

A \ A	1	2	3
1	1	1	1
2	0	1	0
3	0	0	1

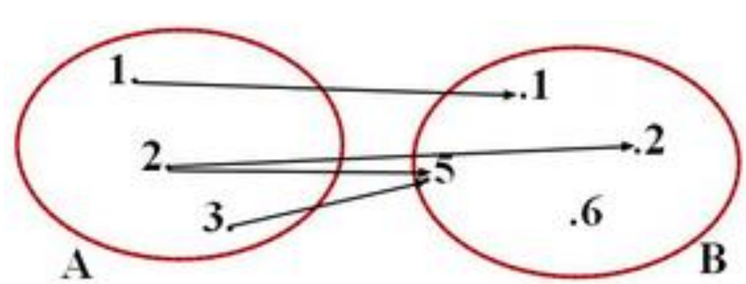
$$\rightarrow M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Representación con diagrama sagital

R: A $\rightarrow$ B

A= {1,2,3} B={1,2,5,6}

R= {(1;1), (2;2), (2;5), (3;5)}



R

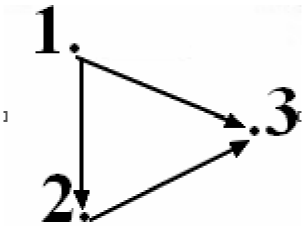
Existe otra forma de representar una relación cuando es de un conjunto en si mismo, es decir, cuando R $\subseteq$ A^2 :

4. Grafo Dirigido o dígrafo de una Relación

R: A $\rightarrow$ A

A= {1,2,3}

R= {(1;2), (1;3), (2;3)}



R

Relación inversa

Dada una relación cualquiera siempre es posible definir su relación inversa. Si R es la relación "x es el padre de y"; su relación inversa es "y es el hijo de x". Por ejemplo, si Juan es el padre de Sergio entonces Sergio es el hijo de Juan.

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, llamaremos relación inversa de una relación R de A en B, y la denotaremos por R^{-1}, al subconjunto de pares ordenados (b; a) del producto cartesiano BxA, tales que (a; b) $\in$ R. En símbolos:

$$R^{-1}: B \rightarrow A \;/\; R^{-1} = \{(b; a) \,/\, (a; b) \in R\}$$

Por lo tanto, la relación inversa está formada por los inversos de los pares de R.

Ejemplo:

1. Si A= {1, 2, 3,4} y R: A $\rightarrow$ A tal que R = {(1; 1), (2; 4), (4; 1), (1; 4)} entonces su relación inversa es:

R^{-1} = {(1; 1), (4; 2), (1; 4), (4; 1)}

Siendo el dominio de la relación inversa $D_R^{-1} = \{1,4\}$ y su imagen

$I_R^{-1} = \{1, 2,4\}$

Matricialmente

La matriz de la relación inversa R^{-1} se puede obtener a partir de la matriz de la relación R intercambiando filas por columnas. Es decir, hay que hallar la matriz traspuesta de la matriz de R.

$$\mathbf{M_R^{-1} = (M_R)^T}$$

Ejemplo:

Si A= {1, 2, 3,4} y R: A → A tal que R = {(1; 1), (2; 4), (4; 1), (1; 4)}

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La fila 1 pasa a ser la columna 1; la fila 2 pasa a ser la columna 2; la fila 3 pasa a ser la columna 3 y la fila 4 pasa a ser la columna 4.

Propiedades

- El dominio de la relación inversa R^{-1} es igual a la imagen de la relación R. Es decir, $\mathbf{D_R^{-1} = I_R}$
- La imagen de la relación inversa R^{-1} es igual al dominio de la relación R. Es decir, $\mathbf{I_R^{-1} = D_R}$

Relación complemento o complementaria.

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, llamaremos relación complemento de una relación R de A en B, y la denotaremos por $\overline{R}$, al subconjunto de pares ordenados (a, b) del producto cartesiano AxB, tales que (a, b) $\notin$ R. En símbolos:

$$\overline{R}: A \to B \;/\; R = \{(a; b) \;/\; (a; b) \notin R\} = (A \times B) - R$$

Por lo tanto, la relación complementaria está formada por los pares del producto cartesiano que NO pertenecen a R

Ejemplo:

Si A= {1, 2, 3,4} y R: A $\to$ A tal que R = {(1,1), (2,4), (4,1), (1,4)}

$\overline{R}$ está formada por los pares ordenados de AxA que no son elementos de R.

$\overline{R}$ = {(1;2), (1;3), (2;1), (2;2), (2;3), (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (4;2), (4;3), (4;4)}

Matricialmente

La matriz de la relación complemento se puede obtener a partir de la matriz de la relación R intercambiando unos por ceros. Hay que hallar el complemento de la matriz de la relación.

$$\boxed{M_{\overline{R}} = \overline{M_R}}$$

Ejercicio

Sea A = {a, b, c} y B = {1, 2, 3, 4} y las relaciones R y S definida de A en B:

R = {(a, 1), (a, 2), (a, 4), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3)}

S = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 4), (c, 1), (c, 2)},

Hallar: $\overline{R}$, R^{-1} , $\overline{S}$, S^{-1}

Rta:

$$\overline{R} = \{(a,3);(b,1);(b,2);(b,3);(c,4)\}$$

$$R^{-1} = \{(1,a);(2,a);(4,a);(4,b);(1,c);(2,c);(3,c)\}$$

$$\overline{S} = \{(a,1);(a,4);(b,1);(b,2);(b,3);(c,3);(c,4)\}$$

$$S^{-1} = \{(2,a);(3,a);(1,b);(4,b);(1,c);(2,c)\}$$

Operaciones con relaciones

Como las relaciones de A en B son conjuntos se pueden realizar con ellas las mismas operaciones entre conjuntos.

Todas las operaciones las podemos hacer por extensión o matricialmente.

1. Unión de relaciones.

Sea A = {1,2,3}; B = {a, b} y las relaciones

R_1= {(1; a), (1; b), (2; a), (3; a)} y

R_2 = {(1; b), (2; a), (3; a), (3; b)} definidas de A en B.

1.1. Por extensión: consiste en nombrar todos los pares de R_1 y de R_2 sin repetirlos.

$$R_1 \cup R_2 = \{(1; a), (1; b), (2; a), (3; a), (3; b)\}$$

1.2. Matricialmente:

La matriz de la unión de relaciones se puede calcular haciendo la suma booleana entre las matrices M_{R1} y M_{R2}. Se indica como $M_{R1} \vee M_{R2}$ y se lee "**operación o**"

$$\boxed{M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}}$$

Para hacer la operación "o" se utiliza la siguiente tabla y se comparan los elementos que se encuentran en la misma posición en cada matriz.

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Para el ejemplo se tienen las matrices de las relaciones R_1 y R_2

$M_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ $\qquad$ $M_{R2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$

Ahora hacemos la operación "$\vee$" teniendo en cuenta que se obtiene otra matriz H de igual dimensión (3x2):

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{32} & h_{32} \end{pmatrix}$$

Calculamos cada uno de los coeficientes de H de la siguiente manera:

$h_{11} = a_{11} \vee b_{11} = 1 \vee 0 = 1$

$h_{12} = a_{12} \vee b_{12} = 1 \vee 1 = 1$

$h_{21} = a_{21} \vee b_{21} = 1 \vee 1 = 1$

$h_{22} = a_{22} \vee b_{22} = 0 \vee 0 = 0$

$h_{31} = a_{31} \vee b_{31} = 1 \vee 1 = 1$

$h_{32} = a_{32} \vee b_{32} = 0 \vee 1 = 1$

Por lo tanto,

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Intersección de relaciones.

Sea A = {1,2,3}; B = {a, b} y las relaciones R_1= {(1; a), (1; b), (2; a), (3; a)} y R_2 = {(1; b), (2; a), (3; a), (3; b)} definidas de A en B.

2.1. Por extensión: consiste en nombrar los pares comunes a R_1 y a R_2

$$R_1 \cap R_2 = \{(1; b), (3; a), (2; a)\}$$

2.2. Matricialmente:

La matriz de la intersección de relaciones se puede calcular haciendo la conjunción entre las matrices M_{R1} y M_{R2}. Se indica como $M_{R1} \wedge M_{R2}$ y se lee "**operación y**"

$$\boxed{M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}}$$

Para hacer la operación "y" se utiliza la siguiente tabla y se realiza entre elementos en posiciones iguales en ambas matrices.

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

Para el ejemplo se tienen las matrices de las relaciones R_1 y R_2

$$M_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \qquad M_{R2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Ahora hacemos la operación "$\wedge$" teniendo en cuenta que se obtiene otra matriz D de igual dimensión (3x2):

$$H= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{32} & d_{32} \end{pmatrix}$$

Calculamos cada uno de los coeficientes de D de la siguiente manera:

$d_{11} = a_{11} \wedge b_{11} = 1 \wedge 0 = 0$

$d_{12} = a_{12} \wedge b_{12} = 1 \wedge 1 = 1$

$d_{21} = a_{21} \wedge b_{21} = 1 \wedge 1 = 1$

$d_{22} = a_{22} \wedge b_{22} = 0 \wedge 0 = 0$

$d_{31} = a_{31} \wedge b_{31} = 1 \wedge 1 = 1$

$d_{32} = a_{32} \wedge\vee b_{32} = 0 \wedge 1 = 0$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. DIFERENCIA

Sea A = {1,2,3}; B = {a, b} y las relaciones R_1= {(1; a), (1; b), (2; a), (3; a)} y R_2 = {(1; b), (2; a), (3; a), (3; b)} definidas de A en B.

2.1. Por extensión: consiste en sacar de R_1 los pares que tiene en común con R_2

$$R_1 - R_2 = \{(1; a)\}$$

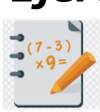
Matricialmente

$$\boxed{M_{R_1 - R_2} = M_{R_1} \wedge \overline{M_{R_2}}}$$

Para el ejemplo

$$M_{R_1 - R_2} = M_{R_1} \wedge \overline{M_{R_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio



Sea A = {a, b, c} y B = {1, 2, 3, 4} y las relaciones R y S definida de A en B:

R = {(a, 1), (a, 2), (a, 4), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3)}

S = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 4), (c, 1), (c, 2)},

Hallar: $S \cap R$, $(R \cup S)^{-1}$, R-S, S-R

<u>Rta:</u>

$$S \cap R = \{(a,2);(b,4);(c,1);(c,2)\}$$

$$(R \cup S)^{-1} = \{(1,a);(2,a);(3,a);(4,a);(1,b);(4,b);(1,c);(2,c);(3,c)\}$$

$$R - S = \{(a,1);(a,4);(c,3)\}$$

$$S - R = \{(a,3);(b,1)$$

Composición de relaciones

Para entender la idea de composición de relaciones podemos empezar por un ejemplo simple.

Supongamos que tenemos el conjunto de personas y en él se definen dos relaciones La primera de ellas R que relaciona dos personas si "x es la madre de y" y la segunda relación S tal que dos personas están relacionadas si "y es el padre de z". Al hacer la composición entre R y S se obtiene otra relación que establece que dos personas están relacionadas si "x es la abuela de z".

Definición

Sean A, B, C conjuntos, R una relación de A en B, y S una relación de B en C. Entonces se puede definir una nueva relación, la composición de R y S, que se escribe S°R formada por los pares (a; c) donde a es un elemento de A y c es un elemento de C para los cuales existe un elemento b de B tal que el par ordenado (a; b) es elemento de la relación R y el par (b; c) es elemento de la relación S.

En símbolos:

$$S°R = \{(a; c) \in A \times C \;/\; \exists\, b \in B \wedge (a, b) \in R \wedge (b; c) \in S\}.$$

Es decir, a está relacionado con c por S°R si se puede ir de a a c en dos etapas: primero a un vértice intermedio b por la relación R y luego de b a c por la relación S. La relación S°R se puede entender como "S a continuación de R" puesto que representa el efecto combinado de dos relaciones, primero R y después S.

Gráficamente

$$a \xrightarrow{\textbf{R}} b \xrightarrow{\textbf{S}} c$$

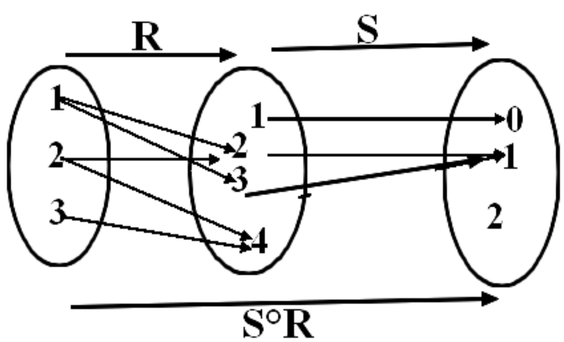
EJEMPLO:

Sean dos relaciones $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ siendo

A= {1,2,3}; B= {1,2,3,4}; C= {0,1,2};

R= {(1;2), (1;3), (2;2), (2;4), (3;4)} y S= {(1;0), (2;1), (3;1)}

Gráficamente:



$$S°R = \{(1;\ 1),\ (2;\ 1)\}$$

Analíticamente:

$(S°R)\ (1) = S\ (R\ (1)) = S\ (2 \text{ ó } 3) = 1 \rightarrow (1;\ 1)$

$(S°R)\ (2) = S\ (R\ (2)) = S\ (2 \text{ ó } 4) = 1 \rightarrow (2;\ 1)$

Matricialmente

La matriz de la composición de relaciones se obtiene realizando el producto booleano entre ellas. **Importa el orden** en el cual se colocan las matrices.

$$M_{S°R} = M_R \otimes M_S$$

El producto booleano es similar al producto usual de matrices pero reemplazando las operaciones suma y multiplicación por $\vee$ y $\wedge$.

<u>Aclaración:</u> para que se pueda realizar el producto booleano el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda matriz.

Y el matriz producto tendrá una dimensión de: número de filas de la primera matriz y numero de columnas de la segunda matriz.

Veamos el siguiente ejemplo:

Sean dos relaciones $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ siendo

A= {1,2,3}; B= {1,2,3,4}; C= {0,1,2};

R= {(1;2), (1;3), (2;2), (2;4), (3;4)} y S= {(1;0), (2;1), (3;1)}

$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tenemos que hallar $M_{S \circ R} = M_R \otimes M_S$

Como M_R es una matriz de 2x4 y M_S es de 4x3,

Son iguales

entonces el resultado será una matriz C de 2x3 : $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$

para calcular cada uno de sus elementos hacemos:

$c_{11} = (a_{11} \wedge b_{11}) \vee (a_{12} \wedge b_{21}) \vee (a_{13} \wedge b_{31}) \vee (a_{14} \wedge b_{41}) =$

$= (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$

$c_{12} = (a_{11} \wedge b_{12}) \vee (a_{12} \wedge b_{22}) \vee (a_{13} \wedge b_{32}) \vee (a_{14} \wedge b_{42}) =$

$= (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = 1$

$c_{13} = (a_{11} \wedge b_{13}) \vee (a_{12} \wedge b_{23}) \vee (a_{13} \wedge b_{33}) \vee (a_{14} \wedge b_{43}) =$

$= (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$

$c_{21} = (a_{21} \wedge b_{11}) \vee (a_{22} \wedge b_{21}) \vee (a_{23} \wedge b_{31}) \vee (a_{24} \wedge b_{41}) =$

$= (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) = 0$

$c_{22} = (a_{21} \wedge b_{12}) \vee (a_{22} \wedge b_{22}) \vee (a_{23} \wedge b_{32}) \vee (a_{24} \wedge b_{42}) =$

$= (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 1$

$c_{23} = (a_{21} \wedge b_{13}) \vee (a_{22} \wedge b_{23}) \vee (a_{23} \wedge b_{33}) \vee (a_{24} \wedge b_{43}) =$

$= (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) = 0$

$c_{31} = (a_{21} \wedge b_{11}) \vee (a_{22} \wedge b_{21}) \vee (a_{23} \wedge b_{31}) \vee (a_{24} \wedge b_{41}) =$

$= (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) = 0$

$c_{32}=(a_{21} \wedge b_{12}) \vee (a_{22} \wedge b_{22}) \vee (a_{23} \wedge b_{32}) \vee (a_{24} \wedge b_{42}) =$

$=(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 0$

$c_{33}=(a_{21} \wedge b_{13}) \vee (a_{22} \wedge b_{23}) \vee (a_{23} \wedge b_{33}) \vee (a_{24} \wedge b_{43}) =$

$=(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) = 0$

Por lo tanto,

$$M_{S \circ R} = M_R \otimes M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde

$$\mathbf{S \circ R = \{(1; 1), (2; 1)\}}$$

Ejercicios

<u>1.</u> Calcular $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \otimes B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A \vee B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A \wedge B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A \otimes B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>2.</u> Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{a, y, b\}$, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ tal que

R = {(a, y), (b, x), (b, z)}, S = {(x, a), (y, y), (z, a), (y; b)},
hallar S º R

$$M_{S\circ R} = M_R \otimes M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,   S º R = {(a; y), (a; b), (b; a)}

Relaciones en el mismo conjunto

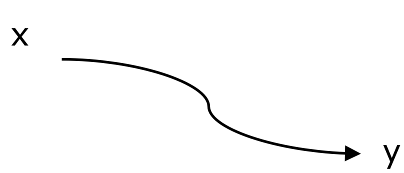
Dado un conjunto A, una **relación binaria** en A es cualquier subconjunto *R* del producto cartesiano A x A

$$R \subseteq A \times A = \{(a; b) \ / \ a, b \in A\}$$

Como se dijo anteriormente una relación binaria definida en el mismo conjunto puede ser representada por un dígrafo.
Los dígrafos nos ofrecen una forma bastante conveniente de visualizar cuestiones relativas a una relación binaria definida en el mismo conjunto.
Por esta razón desarrollaremos algunos conceptos de dígrafos paralelamente a nuestro tratamiento de las relaciones binarias.

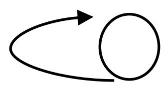
Representación de una relación mediante un dígrafo

Cuando dos elementos x e y de A estén relacionados, es decir, x R y, trazaremos un arco dirigido desde x hasta y. Graficamente

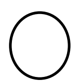


Definiremos a **x** como vértice inicial y a **y** como vértice final de la arista **(x, y).**

Una arista que una un punto consigo mismo la llamaremos ***bucle***. Graficamente



Un vértice que no sea inicial ni final de ninguna arista es un ***vértice aislado***.

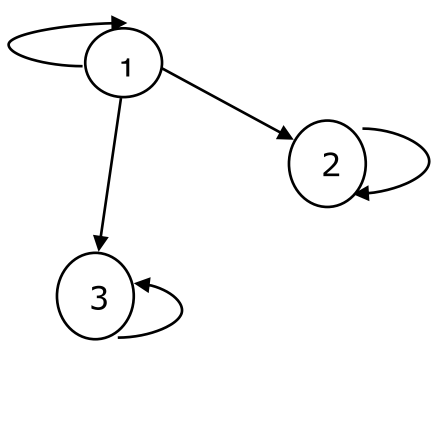


Ejemplo

1.Si $A = \{1, 2, 3\}$ y R: A $\rightarrow$ A tal que a R b $\Leftrightarrow$ a$\mid$b

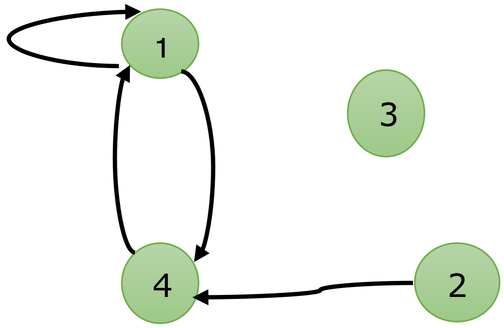
R= {(1;1), (1;2), (1;3), (2;2), (3;3)}

Su dígrafo es



2.Si A={1,2,3,4} y R: A $\rightarrow$ A tal que R = {(1;1),(2;4),(4;1),(1;4)}

Su dígrafo es



En el cual se puede ver que el vértice 3 no está conectado con ningún otro.Por eso se lo llama **vertice aislado.**

Propiedades de las relaciones binarias

Estudio de las propiedades de una relación binaria sobre un conjunto finito

Sea A un conjunto y R una relación binaria definida en él. Diremos que:

- *R* es ***reflexiva*** si: "Todos los elementos están relacionados consigo mismo", en otras palabras, para todo *x* elemento de A, *x* está relacionado con *x*. Es decir:

$$\textbf{R es reflexiva} \Leftrightarrow \forall x: x \in A \rightarrow x R x.$$

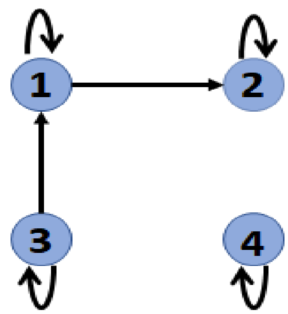
R **no es reflexiva** si existe algún $x \in A$ tal que *x no esté relacionado con x*. Es decir

$$R \textbf{ no es reflexiva} \Leftrightarrow \exists x \, (\boldsymbol{x} \in A \wedge x \text{ no está relacionado con } x)$$

Gráficamente, *R* es reflexiva si ***todos los elementos tienen bucle***. No lo es si hay algún elemento que no tiene bucle.

Si A = {1, 2, 3, 4} y R es la relación R = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (1; 2), (3; 1)}.

En el dígrafo



Propiedad

> ***R* es reflexiva** $\Leftrightarrow$ $\Delta_A \subseteq$ **R** *siendo* $\Delta_A = \{(a; a) / a \in A\}$
>
> *Matricialmente*
>
> ***R* es reflexiva** $\Leftrightarrow$ $I \leq M_R$

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y R es la relación R = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (1; 2), (3; 1)}.

Por extensión:

Δ_A ={(1;1),(2;2),(3;3),(4;4)} $\subseteq$ *R* = {(<u>1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4</u>), (1; 2), (3; 1)}

Matricialmente:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leq M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de una relación reflexiva se caracteriza por tener todos los elementos de su diagonal principal igual a uno.

- R es **Arreflexiva** si: "Ningún elemento está relacionado consigo mismo", en otras palabras, no existe x elemento de A que esté relacionado consigo mismo:

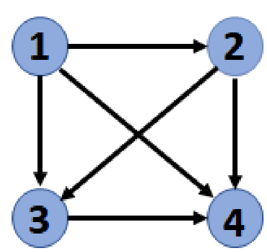
$\forall\ x \in A$, *x no está relacionado con x*.

Gráficamente, *R* es arreflexiva si ***ningún elemento tiene bucle***.

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y *R* es la relación R = {(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)}

En el dígrafo



Propiedad

R es arreflexiva $\Leftrightarrow \Delta_A \cap R = \varnothing$

Matricialmente

R es arreflexiva $\Leftrightarrow I \wedge M_R = N$ *siendo N la matriz nula*

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y *R* es la relación R = {(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)}

Por extensión

Δ_A ={(1;1),(2;2),(3;3),(4;4)} $\cap$ ***R*** = {(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)} = ∅

Matricialmente:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I \wedge M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de una relación arreflexiva se caracteriza por tener todos los elementos de su diagonal principal igual a cero.

- *R* es Simétrica si "Cada vez que *x* está relacionado con *y* se sigue que *y* está relacionado con *x*". Es decir

R es simétrica $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A: x \, R \, y \rightarrow y \, R \, x$

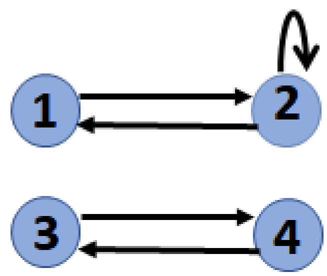
Gráficamente:

R es simétrica si "Cada flecha de ida tiene otra de vuelta ". Es decir, si todos los elementos que están relacionados entre sí tienen *doble flecha*. No lo es si hay alguna flecha que no sea doble.

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y R es la relación R = {(1;2), (2;1), (2;2), (3;4), (4;3)}

En el dígrafo (DG):



Si DG es el dígrafo de una relación simétrica, entonces entre cada dos vértices distintos del DG existen dos aristas o no existe ninguna.

Propiedad

$$\textbf{\textit{R es simétrica}} \Leftrightarrow R = R^{-1}$$

Matricialmente

$$\textbf{\textit{R es simétrica}} \Leftrightarrow M_R = (M_R)^t$$

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y R es la relación R = {(1;2), (2;1), (2;2), (3;4), (4;3)}

Por extensión

$\boldsymbol{R} = \{(1;2), (2;1), (2;2), (3;4), (4;3)\} = \{(2;1), (1;2), (2;2), (4;3), (3;4)\} = \boldsymbol{R}^{-1}$

Matricialmente

$$\mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{M_R})^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M_R} = (\mathbf{M_R})^t$$

En la matriz de una relación simétrica hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas. La diagonal principal puede tener unos o ceros.

***R* no es simétrica** si podemos encontrar dos elementos *x e y* en A tales que *x* esté relacionado con *y* e *y* no lo esté con *x*. En otras palabras:

R es no simétrica $\Leftrightarrow \exists$ **x, y** $\in$ **A: x R y** $\wedge$ **y no está relacionado con x**

En la matriz de una relación no simétrica no hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas y su diagonal principal debe tener todos ceros.

- *R* es **Antisimétrica si** cuando $(x, y) \in$ R y $(y; x) \in$ R, entonces $x = y$. Es decir,

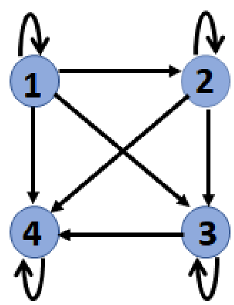
R es antisimétrica $\Leftrightarrow \forall$ ***x, y*** $\in$ ***A: x R y*** $\wedge$ ***y R x*** $\rightarrow$ ***x = y***

***Gráficamente*:**

Ninguna flecha de ida tiene otra de vuelta, salvo en el caso de los bucles, que están permitidos. Es decir, si todos los elementos que están relacionados entre sí tienen *flecha simple*. No lo es si hay alguna *flecha doble*.

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y *R* es la relación "ser menor o igual que", se tiene:
R = {(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)}



Si DG es el dígrafo de una relación antisimétrica, entonces entre cada dos vértices distintos de A, existe un arco o no existe ninguno.

Propiedad

R es antisimétrica ⇔ _R_ ∩ _R_ $^{-1}$ ⊆ Δ_A

Matricialmente:

R es antisimétrica ⇔ M_R ∧ M_R^{-1} ≤ _I_ *siendo I la matriz identidad*

<u>*Ejemplo:*</u>

Si A = {1, 2, 3} y *R* es la relación "ser menor o igual que", se tiene:

R = {(1; 2), (1; 3), (2; 3), (1; 1), (2; 2), (3; 3)}

Por extensión

R = {(1; 2), (1; 3), (2; 3), (1; 1), (2; 2), (3; 3)} ∩ ***R*** $^{-1}$

={(2;1),(3;1),(3;2),(1;1),(2;2),(3;3)}= (1;1),(2;2),(3;3)}= Δ_A

Matricialmente

$$M_R \wedge (M_R)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

En la matriz de una relación antisimétrica no hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas pudiendo haber unos en la diagonal principal de la matriz.

<u>R es no antisimétrica</u> ⇔ ∃ _x, y_ ∈ _A_ : (_x R y_ ∧ _y R x_ ∧ _x_ ≠ _y_)

O sea, si podemos encontrar dos elementos *x* y *y* en A tales que *x* esté relacionado con *y e* y relacionado con *x*, siendo ambos distintos, entonces la relación es no antisimétrica.

En la matriz de una relación no antisimétrica hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas.

- R es **Asimétrica** si "Cada vez que *x R y* se sigue que *y no está relacionado con x.* Es decir,

***R* es asimétrica** $\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A: x\, R\, y \rightarrow$ *y no está relacionado con x*

En otras palabras

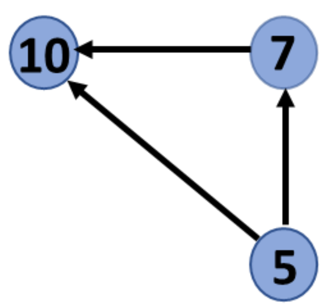
R es asimétrica* $\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A$*: x no está relacionado con y ó y no está relacionado con x

***Gráficamente*:** Ninguna flecha de ida tiene otra de vuelta, y no están permitidos los bucles.

<u>*Ejemplo:*</u>

Si A = {5, 7, 10} y *R* es la relación "ser menor que", se tiene:

R = {(5; 7), (5; 10), (7; 10)}



<u>Propiedad</u>

R es asimétrica $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} = \varnothing$

Matricialmente

R es asimétrica $\Leftrightarrow M_R \wedge M_R^{-1} = N$ *siendo N la matriz nula*

Ejemplo:

Si A = {5, 7, 10} y *R* es la relación “ser menor que”, se tiene:

R = {(5; 7), (5; 10), (7; 10)}

Por extensión

R = {(5; 7), (5; 10), (7; 10)} $\cap$ **R^{-1}** = {(7; 5), (10; 5), (10; 7)} **=** $\varnothing$

Matricialmente:

$$M_R \wedge (M_R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = N$$

En la matriz de una relación asimétrica no hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas y su diagonal principal tiene todos ceros.

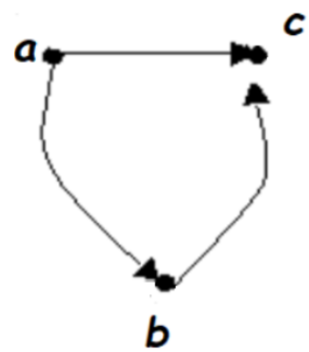
R no es asimétrica $\Leftrightarrow \exists\, x, y \in A : x\ R\ y \;\wedge\; y\ R\ x$

En la matriz de una relación no asimétrica puede haber coincidencia de unos en las posiciones simétricas ó bien unos en la diagonal principal.

- *R es* **Transitiva** si “cuando (*x; y*) $\in$ R y (*y; z*) $\in$ *R,* entonces (*x; z*) $\in$ *R.* Es decir,

  R es transitiva $\leftrightarrow \forall$ ***x, y, z*** $\in$ **A: *x R y*** $\wedge$ ***y R z*** $\rightarrow$ ***x R z***

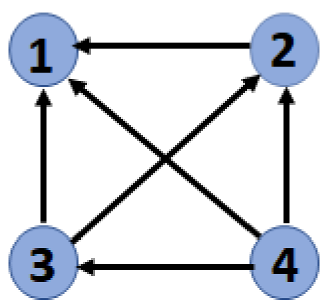
***Gráficamente*:** Siempre que haya dos flechas consecutivas, debe haber otra que una el primer elemento con el tercero.



Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y *R* es la relación "ser mayor que", se tiene:

R = {(2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3)}



Propiedad

R es transitiva $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

Matricialmente:

R es transitiva $\Leftrightarrow M_R \otimes M_R \leq M_R$

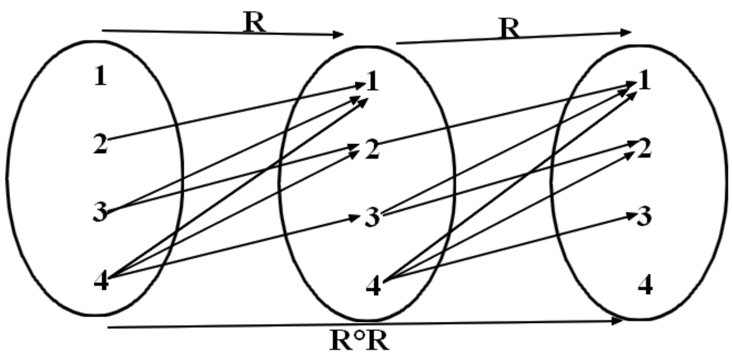
Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y *R* es la relación "ser mayor que", se tiene:

R = {(2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3)}

Por extensión

R* ° *R* =** {(3; 1), (4; 1), (4; 2)} $\subseteq$ ***R = {(2; 1), **(3; 1)**, (3; 2), **(4; 1), (4; 2)**, (4; 3)}



Matricialmente:

$$M_R \otimes M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq M_R$$

La relación **R no es transitiva**, si podemos encontrar elementos *a, b, c* en A tales que *a R b* y *b R c*, pero *a* no esté relacionado con *c*.

R es no transitiva ⇔ ∃ a, b, c ∈ A: a R b ∧ b R c ∧ a no está relacionado con c

Ejemplo de una relación no transitiva utilizando matrices

Sea la relación R definida en el conjunto A= {1,2} dada por su matriz

$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Hacemos el producto booleano de la matriz consigo misma

$$M_R \otimes M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Luego comparamos la matriz de la relación y la matriz del producto booleano. Esto se hace posición contra posición. Es decir, la posición a_{11} de la matriz booleana con la posición a_{11} de la matriz de la relación. Para el ejemplo sería 1 **> 0.**

COMO HAY UNA POSICIÓN MAYOR EN LA MATRIZ DEL PRODUCTO NO SE SIGUE HACIENDO LA COMPARACIÓN

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es mayor que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto R no es transitiva

Conclusiones

Sea $R \subseteq A \times A$ y sea M_R la matriz asociada a R (en el caso en que A sea finito).

Sea $\Delta_A = \{(x; x) \ / \ x \in A\}$ (la "relación diagonal" de $A \times A$).

Entonces:

***R* es reflexiva ⇔ ($\Delta_A \subseteq R$) ⇔ I ≤ M_R.**

M_R tiene 1 en todas las posiciones de la diagonal principal. En el dígrafo *todos los elementos tienen bucle*.

***R* es arreflexiva ⇔ $\Delta_A \cap R = \varnothing$ ⇔ I ∧ M_R = N** siendo N la matriz nula.

M_R tiene 0 en todas las posiciones de la diagonal principal. En el dígrafo *todos los elementos no tienen bucle*.

***R* es simétrica ⇔ ($R = R^{-1}$) ⇔ ($M_R = (M_R)^t$),** es decir, si M_R es simétrica. En el dígrafo de una relación simétrica, cada dos vértices distintos del dígrafo existen dos aristas en sentido contrario o no existe ninguna.

R* es no simétrica** $\Leftrightarrow \exists$ ***x, y $\in$ **A: x *R y*** $\wedge$ ***y no está relacionado con x .*** En M_R no hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas y su diagonal principal tiene todos ceros

***R* es antisimétrica** $\Leftrightarrow (R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A) \Leftrightarrow (M_R \wedge (M_R)^t \leq I)$.En M_R no existen fuera de la diagonal principal dos posiciones simétricas cuyos valores sean 1 simultáneamente.

I denota la "matriz identidad", es decir, aquella que tiene unos en la diagonal principal y el resto de elementos son nulos. En el dígrafo de una relación antisimétrica, entre cada dos vértices distintos de A, existe un arco o no existe ninguno.

R es no antisimétrica $\Leftrightarrow \exists x, y \in A: (x R y \wedge y R x \wedge x \neq y)$. En la matriz de una relación no antisimétrica M_R hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas.

R es asimétrica $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} = \varnothing \Leftrightarrow M_R \wedge (M_R)^t = N$ siendo N la matriz nula. En la matriz de una relación asimétrica M_R no hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas y su diagonal principal tiene todos ceros. En el dígrafo de una relación asimétrica M_R no hay arcos de ida y vuelta, y no están permitidos los bucles.

R no es asimétrica $\Leftrightarrow \exists x, y \in A: x R y \wedge y R x$. En la matriz de una relación M_R no asimétrica puede haber coincidencia de unos en las posiciones simétricas ó bien unos en la diagonal principal.

***R* es transitiva** $\Leftrightarrow$ **(**$\boldsymbol{R \circ R \subseteq R}$**)** $\Leftrightarrow$ **(** $\boldsymbol{M_R \otimes M_R \leq M_R}$ **).** En el dígrafo de una relación transitiva M_R siempre que haya dos flechas consecutivas, debe haber otra que una el primer elemento con el tercero.

Ejercicios

1. Sea A = $\{0,1\}$.Utilizando el dígrafo, estudiar las propiedades de las siguientes relaciones:

1.1 $R_1 = \{(0; 0), (1; 1)\}$

1.2 $R_2 = \{(0; 1), (1; 0)\}$

1.3 $R_3 = \{(0; 0), (0; 1)\}$

1.4 $R_4 = A \times A$

RTA:

1.1 $R_1 = \{(0; 0), (1; 1)\}$

R_1 es reflexiva, simétrica; antisimétrica y transitiva.

1.2 $R_2 = \{(0; 1), (1; 0)\}$

R_2 es arreflexiva, simétrica y no transitiva.

1.3 $R_3 = \{(0; 0), (0; 1)\}$

R_3 es no reflexiva, no simétrica, antisimétrica y transitiva.

1.4 $R_4 = A \times A$

A x A es reflexiva, simétrica y transitiva.

2. Dar un ejemplo de una relación en el conjunto A= {1, 2, 3,4} que:

2.1 Sea reflexiva y simétrica, pero no transitiva

Solución

R= {(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (1;2), (2;1), (2;3), (3;2)}

2.2 Sea simétrica y transitiva, pero no reflexiva

Solución

$R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$

2.3 Sea reflexiva, antisimétrica, pero no transitiva

Solución

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,4)\}$

2.4 Sea reflexiva, antisimétrica y transitiva

Solución

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3)\}$

Estudio de propiedades en relaciones binarias no finitas

En el caso de conjuntos infinitos estudiamos sus propiedades a partir de la definición de la relación. Veamos el siguiente ejemplo:

Determinar las propiedades de la siguiente relación:

R es la relación definida en $\mathbb{Z}$, donde *x R y* si y sólo si x + *y* es par

En símbolos: $x\ R\ y \Leftrightarrow x + y = 2.q, q \in \mathbb{Z}$

Reflexiva. $\forall x: x \in A \rightarrow x\ R\ x$.

Dado $x \in \mathbb{Z}$ cualquiera, se verifica que $x + x = 2x$ es par, luego $x\ R\ x$, es decir la relación "par" es reflexiva.

En símbolos $\forall x \in \mathbb{Z}: x + x = 2x \rightarrow x\ R\ x$

Simétrica. $\forall x,y \in A: x\ R\ y \rightarrow y\ R\ x$

Dados x e y cualesquiera de $\mathbb{Z}$, se verifica: $x\ R\ y$ si y sólo si $x + y$ es par entonces $y + x$ es par si y sólo si $y\ R\ x$ luego la relaciones "par" es simétrica. En símbolos:

$$\forall x,y \in \mathbb{Z} : x\ R\ y \Leftrightarrow x + y = 2.q, q \in \mathbb{Z} \rightarrow y + x = 2.q, q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y\ R\ x$$

Conmutatividad

Por lo tanto, la relación "par" es simétrica

Antisimétrica. $\forall x, y \in A: x\ R\ y \wedge y\ R\ x \rightarrow x = y$

Sean x e y dos enteros distintos cualesquiera tales que $x + y$ sea par. Entonces, $y + x$ también es "par", luego $\exists x, y \in \mathbb{Z}: x\ R\ y \wedge y\ R\ x \wedge x \neq y$ por lo tanto la relación "par" no es antisimétrica.

Contraejemplo:

$\exists 3,5 \in \mathbb{Z}: 3\ R\ 5 \wedge 5\ R\ 3 \wedge 3 \neq 5$

Asimétrica. $\forall x, y \in A : x\ R\ y \rightarrow$ *y no está relacionado con x*

Sean x e y dos enteros distintos cualesquiera tales que $x + y$ sea par. Entonces, $y + x$ también es "par", luego $\exists x, y \in Z: x\ R\ y \wedge y\ R\ x$ por lo tanto la relación "par" no es asimétrica.

Contraejemplo:

$\exists 3,5 \in \mathbb{Z}: 3\ R\ 5 \wedge 5\ R\ 3$

Transitiva. $\forall x, y, z \in A: x\ R\ y \wedge y\ R\ z \rightarrow x\ R\ z$

Dados x, y, z cualesquiera de $\mathbb{Z}$, tendremos:

$\forall x, y, z \in A: x\ R\ y \wedge y\ R\ z \rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : x + y = 2p \wedge \exists q \in \mathbb{Z} : y + z = 2q \rightarrow$ *sumando miembro a miembro* $x + y + y + z = 2p + 2q \rightarrow x + z = 2p + 2q - 2y \rightarrow x + z = 2\ (p + q - y) \rightarrow x + z = 2k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow x + z$ par $\rightarrow x\ R\ z$

Por lo tanto, la relación "par" es transitiva.

Estas propiedades permiten caracterizar distintos tipos de relaciones de gran importancia en estructuras de datos, flujos de información, computación, …

Clasificación de relaciones binarias

Las propiedades vistas anteriormente permiten caracterizar distintos tipos de relaciones de gran importancia en estructuras de datos, flujos de información, computación, …

¿Cómo se clasifican las relaciones?

Relación de equivalencia en *A*

si *R* verifica las propiedades *reflexiva, simétrica y transitiva.*

Ejemplo: en el conjunto de las personas nacidas en Argentina la relación *R* en la cual *x* está relacionada con *y* si y sólo si *x* e *y* nacieron en la misma provincia es una relación de equivalencia.

Relación de orden amplio en *A*

si R verifica las propiedades *reflexivas, antisimétrica y transitiva.*

En este caso, se dice que (*A*, R) es un **conjunto ordenado**.

Ejemplo: Son conjuntos ordenados: (N, ≤), (Z, ≤), (Q, ≤) y (R, ≤).

Relación de orden estricto en *A*

si R verifica las propiedades ar*reflexiva, asimétrica y transitiva.*

Ejemplo: El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y la relación "menor"

Relaciones de equivalencia

Este tipo de relaciones binarias permiten clasificar o agrupar a los elementos del conjunto en el que están definidas. Por ejemplo, podemos clasificar a los números en pares e impares; a los colores en fríos y cálidos. Es decir, trataremos a los elementos de un conjunto más por sus propiedades que como objetos individuales. En tales situaciones, podremos ignorar todas las propiedades que no sean de interés y tratar elementos diferentes como “equivalentes”, a menos que puedan diferenciarse utilizando únicamente las propiedades que nos interesen.

¿Cuándo una relación binaria es de equivalencia?

> *Una relación binaria es de equivalencia cuando la relación cumple con las propiedades* ***reflexiva; simétrica y transitiva***

Esto no la excluye de cumplir otras propiedades, pero para decir que es de equivalencia debe cumplir si o si reflexividad, simetría y transitividad.

Dígrafo de una relación de equivalencia

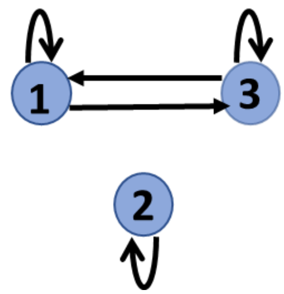
El dígrafo asociado a una relación de equivalencia, R, tiene algunas características que lo distinguen.

- Como R es reflexiva, cada vértice tiene un bucle.
- La simetría implica que si existe un arco desde a hasta b, también existe un arco desde b hasta a.
- La transitividad implica que si existe un arco desde a hasta b y existe un arco desde b hasta c entonces existe un arco desde a hasta c.

Ejemplo

En el conjunto A= {1, 2, 3}se define la siguiente relación R= {(1;1), (2;2), (3;3), (1;3), (3;1)}

Cuya matriz es $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y su dígrafo es



Veamos si es una relación de equivalencia a partir de su matriz

Reflexiva **I ≤ M_R**

La relación es reflexiva ya que $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ por lo tanto **R** es **reflexiva**

Simétrica $\boldsymbol{M_R = (M_R)^t}$

$$(M_R)^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_R$$ por lo tanto **R** es **simétrica**

Transitiva $\boldsymbol{M_R \otimes M_R \leq M_R}$

$$M_R \otimes M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ por lo tanto **R** es **transitiva**

*Al ser **R** reflexiva, simétrica y transitiva **R** es de **equivalencia**.*

En el dígrafo de la relación **R s**e observan dos partes. Cada una de ellas muestra los elementos que están relacionados entre sí. Así se tiene que el 1 está relacionado con el 1 (propiedad reflexiva) y con el 3; el 2 está relacionado con el 2 (propiedad reflexiva) y el 3 está relacionado con el 3 (propiedad reflexiva) y con el 1.A cada una de esas partes del dígrafo se la llama clase de equivalencia. Es decir, R tiene dos clases de equivalencia: la clase formada por el 1 y el 3, y la clase formada por el 2. Lo nombramos así: la clase del 1 o la clase del 3, y la clase del 2.

¿Qué se entiende por clase de equivalencia de un elemento?

Sea A un conjunto y R una relación de equivalencia en A. Para cada elemento $a \in A$ se define la **clase de equivalencia de *a*** como el conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con a. Se denota: $\mathbf{[a]} = \{x \in A \ / \ x \text{ R } a\}$.

Cualquier elemento $x \in \mathbf{[a]}$ se llama **representante** de la clase $[a]$.

Para el ejemplo:

$\mathbf{[1]} = \{x \in A \ / \ x \text{ R } 1\} = \{1, 3\} = \mathbf{[3]}$

$\mathbf{[2]} = \{x \in A \ / \ x \text{ R } 2\} = \{2\}$

$\mathbf{[3]} = \{x \in A \ / \ x \text{ R } 3\} = \{3, 1\} = \mathbf{[1]}$

En las relaciones de equivalencia se suele utilizar el símbolo ≡. Es decir, que en lugar de

escribir ***1R2*** pondremos ***1≡2*** indicando la relación (equivalencia) entre dichos elementos.

Propiedades.

Si R es una relación de equivalencia en *A*, $\forall$ *a*, *b* $\in$ *A*, se satisfacen las propiedades siguientes:

- *Toda clase de equivalencia tiene por lo menos un elemento ya que la relación R es reflexiva. Es decir a* $\in$ [*a*] y por tanto [*a*] $\neq \varnothing$.

- *Dos elementos cualesquiera del conjunto A están relacionados si y sólo si pertenecen a la misma clase de equivalencia.*

  Es decir $[a] = [b] \leftrightarrow a \, R \, b$.

- *La intersección de dos clases de equivalencia [a]; [b] cualquiera es igual al vacío si y sólo si los elementos a, b no están relacionados.*

  Es decir $[a] \cap [b] = \varnothing \leftrightarrow$ *a no está relacionado con b.*

La relación de equivalencia establece en el conjunto *A* una partición: cada clase de equivalencia es un conjunto no vacío; la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto A y éstas son disjuntas dos a dos.

¿Qué es partición de un conjunto A?

Sea A un conjunto y sea P un conjunto formado por subconjuntos de A. $A_i \subseteq A$

Decimos que P= $\{A_i\}$, $\forall i \; A_i \subseteq A$, es una partición de A si se verifican las siguientes tres condiciones:

1) *Los elementos de la partición son no vacíos. En símbolos:*

$$\forall A_i \in P \rightarrow A_i \neq \varnothing$$

2) *Dos elementos distintos de la partición son disjuntos. En símbolos:*

$$\text{Dados } A_i , A_j \in P \rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing , \text{ si } i \neq j$$

3) *Todo elemento de A pertenece a algún elemento de la partición o, lo que es lo mismo, A es la unión de todos los elementos de la partición.*

$$\forall a \in A \ \exists A_i \in P / a \in A_i$$

Ejemplo.

Sea A = {1; 2; 3; 4; 5; a; b; c; d}. Entonces P_1 = {{1; a; c} ;{2; 3; 4; 5} ;{b; d}} es una partición de A ya que:

1) *Los elementos de la partición son no vacíos*

A_1= {1; a; c} ≠ ∅ ; A_2= {2; 3; 4; 5} ≠ ∅ ; A_3 = {b; d} ≠ ∅

2) *Dos elementos distintos de la partición son disjuntos.*

$A_1 \cap A_2$ = {1; a; c} ∩ {2; 3; 4; 5} = ∅

$A_1 \cap A_3$ = {1; a; c} ∩ {b; d} = ∅

$A_2 \cap A_3$ = {2; 3; 4; 5} ∩ {b; d} = ∅

3) *Todo elemento de A pertenece a algún elemento de la partición*

$1 \in A_1$; $2 \in A_2$, $3 \in A_2$, $4 \in A_2$, $5 \in A_2$, $a \in A_1$, $b \in A_3$, $c \in A_1$, $d \in A_3$

Pero **no** son particiones de A los conjuntos:

P_2= {{5; b; c}; {2; 3; 4; 1}; {d}} ya que no se verifica ***3)***

P_3= {{1; a; c}; {2; 3; 4; 5}; {b; d; 1}} ya que no se verifica ***2).***

¡Importante!: *no confundir el concepto de partición de un conjunto A con el conjunto de partes de A.*

Conjunto cociente

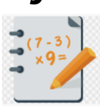
Sea *A* un conjunto y R una relación de equivalencia en *A*. Se llama **conjunto cociente** de *A* por R al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de los elementos de *A*. Lo denotamos:

$$A\ /\ R = \{[a]\ /\ a \in A\}.$$

indicando así que es el conjunto A partido por la relación de equivalencia R.

Para el ejemplo ***A* / R = {[1], [2]}**

Ejercicios



1. Hallar todas las particiones del conjunto *A* = {1*;* 2*;* 3}. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en *A*?

Solución:

Podemos armar la partición, cuya clase solo contenga un solo elemento:

P_1= {{1}, {2}, {3}}

Las que contengan más de un elemento:

P_2= {{1}, {2,3}}

P_3= {{1,2}, {3}}

P_4= {{1,3}, {2}}

P_5= {{1, 2,3}}

Por lo tanto, son 5 relaciones de equivalencia las que pueden definirse en A

2. Sea *A* = {*a; b; c; d; e; f*}. Dada la relación de equivalencia R en *A*

R= {(*a; a*) ;(*b; b*) ;(*c; c*) ;(*d; d*) ;(*e; e*) ;(*f; f*) ;(*a; b*) ;(*b; a*) ;(*a; f*) ;(*f; a*) ;(*b; f*) ;(*f; b*) ;(*c; e*) ;(*e; c*)}

Hallar

2.1. La clase de *b*

2.2. La clase de *c*

2.3. La clase de *d*

2.4. La partición asociada a *R*

Solución

2.1. [b] = {x $\in$ A / x R b}= {b, a, f}

2.2. [c] = {x $\in$ A / x R c}= {c, e}

2.3. [d] = {x $\in$ A / x R d}= {d}

2.4. P = {{a, b, f}, {c, e}, {d}}

Teorema Fundamental de las Relaciones de equivalencia

Primera parte:

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces la familia de todas las clases de equivalencia de los elementos de A produce una partición de A.

$$\frac{A}{R} = P$$

Segunda parte

Dada una partición de un conjunto A, puede definirse en él una relación de equivalencia R tal que el conjunto cociente A/R coincida con la partición dada.

$$\mathbf{P = \frac{A}{R}}$$

Ejemplo

Sea A = {1, 2, 3, 4} y {{1, 2}, {3,4}} una partición de A. Determínese la relación de equivalencia correspondiente en A.

Solución

Si tenemos en cuenta que las clases de equivalencia son los subconjuntos de la partición, tendremos

[1] = {1, 2} y [3] = {3,4}

A partir de la definición de clases de equivalencia y de que R ha de ser de equivalencia, tendremos:

[1] = {1, 2}, luego (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) $\in$ R

[3] = {3,4}, luego (3,3), (3; 4), (4, 4), (4,3) $\in$ R

Entonces

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 3), (3, 4), (3, 3), (4, 4)}

Relación congruencia módulo n

EL RELOJ DE GAUSS

A Gauss[1] se lo conoce como "el príncipe de los matemáticos", es uno de los grandes genios de toda la historia, su talento destacó ya desde la infancia.

Cuando apenas tenía 24 años escribió el libro "*Disquisitiones arithmeticae*", en el cual introduce las congruencias, que han sido utilizadas por todos los matemáticos a partir de entonces.

Veamos en qué consiste esta teoría de las congruencias o aritmética de los relojes.

La esfera de un reloj tiene doce números distribuidos en el perímetro de un círculo. Después del número 12 debería venir el 13, pero lo que hacemos es volver a contar desde el principio. Podríamos construir una tabla que tuviese 12 columnas, para comprenderlo más claramente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Esta operación la llevamos a cabo cada día cuando miramos el reloj, ya que para distinguir las horas que preceden al mediodía de las que le siguen es habitual seguir contando a partir del número 12. Por ejemplo, cuando nos referimos a las 17 hs entendemos que equivale a las "5 de la tarde", por lo que en ese sentido sabemos que el 17 es la misma "clase" que el 5.

[1] Johann Carl Friedrich Gauss(Brunswick, 30 de abril de 1777 – Gotinga, 23 de febrero de 1855), fue un matemático, astrónomo, geodesta, y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica

Gauss se plantea diferentes relojes. Por ejemplo, un reloj que tenga sólo cinco horas cuya tabla sería:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
…	…	…	…	…

Ahora podemos decir que el 17 es de la misma "clase" que el 2.

Es fácil saber a qué clase pertenece un número cualquiera. Por ejemplo, para el 19 tendríamos que dar 3 vueltas al reloj de 5 horas para sumar 15 y luego empezar de nuevo hasta llegar al número 4, de modo que pertenece a la clase del 4. Esto es lo mismo que dividir 19 por 5 y quedarnos con el resto de la división que es 4.

Esta operación es muy práctica cuando se trata de números muy grandes. Si queremos saber a qué clase pertenece el número 40248, en ese reloj de 5 horas, dividimos al número dado por 5, lo que nos da un cociente de 8049 y un resto de 3; por lo tanto, pertenece a la clase del 3. Como los múltiplos de 5 dan resto 0 al dividirlos por 5, lo que se hace es llamar 0 a la clase del 5.

Por lo tanto, la tabla queda de la siguiente manera:

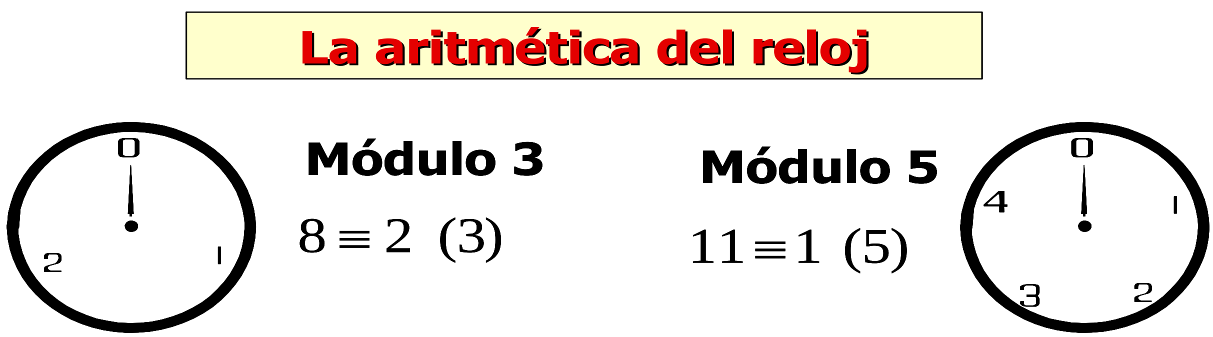
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	…	…	…	…

Podríamos decir que el 16 es lo mismo que el 1, pero una igualdad como $16 = 1$ se podría prestar a confusión, por lo que se suele poner de la forma $16 \equiv 1$. Pero es obvio que hay que añadir un dato más: es necesario saber en qué tipo de reloj nos estamos moviendo.

Para este reloj de 5 horas lo indicamos poniendo a la derecha mod 5 (mod: módulo). Por lo cual la expresión anterior queda: $16 \equiv 1 \pmod 5$ o bien $16 \equiv 1$ (5).

Esta expresión es lo mismo que decir que 16 y 1 son equivalentes en módulo 5. Sin embargo, la forma correcta de referirse a la expresión anterior es "16 es congruente con 1 módulo 5".

Para saber si dos números cualesquiera son congruentes módulo 5 basta con hacer la diferencia[2] y ver si el resultado es múltiplo de 5. Para este caso tendríamos $16 - 1 = 15$, que es múltiplo de 5.



Ahora comencemos a formalizar:

[2] Dividir consiste en realizar restas sucesivas, por eso podemos o bien dividir el número por el módulo y considerar el resto, o bien restarle al número los múltiplos necesarios de 5.

UNAHUR
UNIVERSIDAD NACIONAL
DE HURLINGHAM

Definición:

En $\mathbb{Z}$ se define la relación congruencia módulo n $\in \mathbb{N}$ como:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}\ a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow n \mid (a - b),\ n \in \mathbb{N}$$

Se dice que dos enteros cualesquiera a, b son congruentes módulo n si su diferencia es divisible por n, siendo n un número natural.

Probaremos que es una relación de equivalencia

$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \equiv b\ (n) \leftrightarrow a - b = n.q\ ;\ q \in \mathbb{Z}$

<u>Reflexiva</u> ¿a ≡ a(n)?

$\forall a \in \mathbb{Z} \rightarrow a - a = n.\ 0 \rightarrow 0 \in \mathbb{Z} \rightarrow a - a = n.q\ ;\ q \in \mathbb{Z} \rightarrow$

$\mathbf{a \equiv a(n)}$

<u>Simétrica</u> a ≡ b (n) →¿b ≡ a (n)?

$\forall a, b \in \mathbb{Z}\quad \mathbf{a \equiv b\ (n)} \rightarrow a - b = n.q\ ;\ q \in \mathbb{Z} \rightarrow (-1)\ a - b = (-1).n .q\ ;\ q \in \mathbb{Z} \rightarrow$

$b - a = n\ (-1.q\ )\ ;\ q \in \mathbb{Z} \rightarrow b - a = n.\ q_1\ ;\ q_1 \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{b \equiv a\ (n)}$

<u>Transitiva</u> a ≡ b (n) ∧ b ≡ c (n) → ¿ a ≡ c (n)?

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}\quad \mathbf{a \equiv b\ (n)} \wedge \mathbf{b \equiv c\ (n)} \rightarrow a - b = n.q\ ;\ q \in \mathbb{Z} \wedge b - c = n.q_1\ ;\ q_1 \in \mathbb{Z} \rightarrow a - b + b - c = n.q + n.q_1;\ q \in \mathbb{Z}\ ;\ q_1 \in \mathbb{Z}\ Z \rightarrow a - c = n.(.q + q_1\ );\ q + q_1 \in \mathbb{Z} \rightarrow$

$a - c = n.\ q_2\ ;\ q_2 \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{a \equiv c\ (n)}$

Al ser una relación de equivalencia buscamos las clases de equivalencia:

$[a] = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv a\ (n)\} = \{x \in \mathbb{Z} / x - a = n.q;\ q \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} / x = n.q + a\ ;\ q \in \mathbb{Z}\}$

Analizando la expresión anterior para algunos casos particulares se llega a las siguientes conclusiones:

$\mathbf{[0]} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 0\ (n)\} = \{x \in \mathbb{Z} / x - 0 = n.q;\ q \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} / x = n.q\ ;\ q \in \mathbb{Z}\} =$

= {múltiplos enteros de *n*}

$\mathbf{[1]} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 1\ (n)\} = \{x \in \mathbb{Z} / x - 1 = n.q;\ q \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} / x = n.q + 1;\ q \in \mathbb{Z}\} =$

= {los enteros que al dividir por *n* dan resto 1}

$\mathbf{[2]} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 2\ (n)\} = \{x \in \mathbb{Z} / x - 2 = n.q;\ q \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} / x = n.q + 2;\ q \in \mathbb{Z}\} =$ = {los enteros que al dividir por *n* dan resto 2}

$\mathbf{[3]} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 3\ (n)\} = \{x \in \mathbb{Z} / x - 3 = n.q;\ q \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} / x = n.q + 3;\ q \in \mathbb{Z}\} =$

= {los enteros que al dividir por *n* dan resto 3}

…

…

$\mathbf{[n-1]} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv \mathbf{n-1}(n)\} = \{x \in \mathbb{Z} / x - (n-1) = n.q; q \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} / x = n.q + (n-1); q \in \mathbb{Z}\} =$

= {los enteros que al dividir por *n* dan resto n-1}

$\mathbf{[n]} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv \mathbf{n}\ (n)\} = \{x \in \mathbb{Z} / x - n = n.q;\ q \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} / x = n.q + n;\ q \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x = n.(q+1);\ q \in \mathbb{Z}\} = \{$múltiplos enteros de $n\} = [0]$

A partir del entero n comienzan a repetirse las clases de equivalencia. Por lo tanto, el conjunto cociente es:

$$\frac{Z}{\equiv n} = \mathrm{Z_n} = \{[0],\ [1],\ [2],\ [3],\ldots,\ [\mathrm{n}-1]\}$$

Un ejemplo clásico de clasificación de los números enteros es el de las ***clases de restos***. Elegido un cierto número natural como módulo, se ordenan todos los números enteros en tantas filas como dicho módulo.

Los infinitos números enteros que formen cada fila formarían una clase de equivalencia. Para saber rápidamente a qué clase pertenece un cierto elemento se busca el resto de su división entera (no decimal) por el módulo. Si el resto es cero, o sea que el número es múltiplo del módulo, pertenecería a la fila superior, la llamada clase cero. En otro caso, el resto (entre uno y el módulo menos uno) indicaría la fila a la que pertenece. Si el número fuese negativo se actúa igual, pero dividiendo de manera que el cociente sea negativo pero el resto positivo.

Por ejemplo, las clases de restos módulo 3:

[0]=Clase 0 ={*b*∈ $\mathbb{Z}$ / su resto al dividir por 3 es 0}={....,-6,-3 ,0,3,6,9,12 ,...}=[3]=…

[1]=Clase 1={*b*∈ $\mathbb{Z}$ / su resto al dividir por 3 es 1}={....,-5,-2,1,4,7,10,13 ,...}= [4]=…

[2]=Clase 2 ={*b*∈$\mathbb{Z}$ / su resto al dividir por 3 es 2}={...,-4,-1,2,5,8,11,14, ...}= [5]=…

El número 4571 pertenece a la clase 2 ya que al dividirlo por 3 resulta, 2 de resto.

-5 pertenece a la clase 1 ya que: $-5 = 3 \cdot (-2) + 1$.

Relación de orden

Cualquier ejemplo en el que ordenemos elementos se tratará casi seguro de una relación de orden. El orden de los números reales o el alfabético de las letras lo son. Con criterios muy claros.

Definición

Se llama relación de orden amplio sobre un conjunto A a cualquier relación $\underline{\alpha}$ que verifica las siguientes las propiedades:

Reflexiva
Antisimétrica
Transitiva

El par $(A, \underline{\alpha})$ formado por un conjunto A no vacío y una relación de orden amplio $\underline{\alpha}$ definida sobre él, se llama conjunto ordenado.

Algunos conjuntos ordenados son:

- El conjunto de partes de A con la relación inclusión. $(\mathrm{P}(\mathrm{A}), \subseteq)$
- Los números naturales con la relación "divide a", la relación divisibilidad. $(\mathbb{N}, |)$
- El conjunto de los números naturales con la relación "es menor que". $(\mathbb{N}, \leq)$
- El conjunto de los divisores positivos de n con la relación "es divisor de". $(\mathrm{D}(\mathrm{n}), |)$

En el conjunto ordenado $(\mathrm{A}, \underline{\alpha})$, dos elementos $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{A}$ se dicen comparables si $\mathrm{a}\underline{\alpha}\mathrm{b}$ o $\mathrm{b}\underline{\alpha}\mathrm{a}$. Es decir $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \underline{\alpha}$ o $(\mathrm{b}, \mathrm{a}) \in \underline{\alpha}$.

Ejemplo

En el conjunto ordenado $(\mathbb{N}, |)$ los elementos 3 y 6 son comparables ya que el 3 divide exactamente a 6, mientras que 3 y 7 no son comparables ya que 3 no divide exactamente a 7 y 7 no divide exactamente a 3.

Ejercicio

En el conjunto $(A = \{1, 2, 4, 5, 6\}, |)$. ¿Qué elementos son comparables con 4? ¿Y con 1? ¿Hay algún elemento que sea comparable con todos los demás?

Solución

Con el 4 son comparables el 1, el 2 y el 4 ya que $1|4$; $2|4$ y $4|4$

Con el 1 son comparables todos ya que 1 es divisor del $1, 2, 4, 5, 6$

Cuando en el conjunto A, ordenado con $(A, \underline{\alpha})$, dos elementos cualesquiera son siempre comparables, se dice que $\underline{\alpha}$ es un **orden total**. En caso contrario se dice que $\underline{\alpha}$ es un **orden parcial**.

Ejemplo

$(P(A), \subseteq)$ con $A = \{1, 2\}$ es un orden parcial ya que $\{1\}$ no está incluido en $\{2\}$ y $\{2\}$ no está incluido en $\{1\}$. Por lo tanto, no son comparables.

Clasificación de relaciones de orden.

Relación de orden amplio

Una relación es de orden amplio si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Por ejemplo: la inclusión de conjuntos $\subseteq$ es una relación de orden amplio en el conjunto de partes P(A).

Relación de orden estricto

Una relación es de orden estricto si es **arreflexiva**, **asimétrica** y **transitiva**.

Por ejemplo: la relación "menor que", $<$ **,** es una relación de orden estricto en $\mathbb{N}$.

Un orden amplio puede ser un:

Orden parcial

Una relación de orden amplio es parcial, si algunos elementos del conjunto no son comparables entre sí.

Por ejemplo: la inclusión de conjuntos $\subseteq$, en el conjunto de partes P(A) es un orden parcial.

Orden total

Una relación de orden amplio es un orden total si todos los elementos del conjunto son comparables siendo su diagrama de Hasse lineal.

Es decir, $\forall a, b \in A: a\underline{\alpha}b \vee b\underline{\alpha}a$

Por ejemplo: la relación "menor o igual que", $\leq$, es una relación de orden total.

Conjunto bien ordenado

Un conjunto está bien ordenado por una relación de orden amplio, si y solo si está totalmente ordenado, y además todo subconjunto no vacío tiene primer elemento.

De ahora en más cuando hablemos de orden nos referiremos a un orden amplio.

Ejemplo

1) En $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define la relación: $a\underline{\alpha}b \Leftrightarrow$ existe $c \in \mathbb{N}_0$ tal que $a + c = b$

   Verifica que es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, es un orden.

   $\mathbb{N}_0$ está totalmente ordenado, sean $x, y \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$ existen $d, f \in \mathbb{N}_0$ tal que $x + d = y \;\vee\; y + f = x$, luego $x\underline{\alpha}y \vee y\underline{\alpha}x$. Por lo tanto, está totalmente ordenado.

2) En $\mathbb{N}$ se define la siguiente relación: $a\underline{\alpha}b \Leftrightarrow$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot k = b$

   Verifica que es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, es un orden.

   El conjunto $(\mathbb{N}, \underline{\alpha})$ está ordenado, pero no totalmente ordenado.

DIAGRAMA DE HASSE

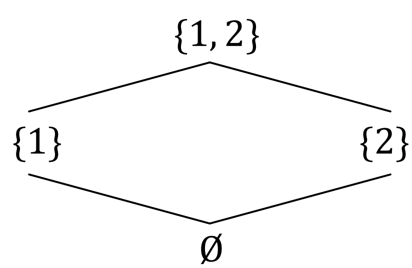
Consiste en la simplificación del dígrafo que representa la relación de orden $\underline{\alpha}$.

Para obtener el diagrama de Hasse:

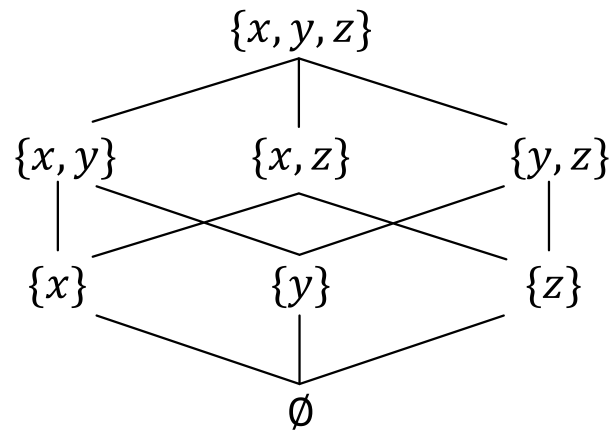
- *Se eliminan las aristas que pueden ser deducidas de otras por transitividad.*
- *Se eliminan los lazos (se sabe que todos los posibles lazos están, por reflexividad)*
- *Se ubican los vértices de modo que todas las flechas vayan hacia arriba, y se eliminan las flechas*

<u>*Ejemplo*</u>

1) Diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(\mathrm{P}(\mathrm{A}), \subseteq)$ con $\mathrm{A} = \{1, 2\}$



2) Diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(\mathrm{P}(\mathrm{A}), \subseteq)$ con $\mathrm{A} = \{x, y, z\}$:



3) Diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(\mathrm{D}(30), |)$

Para tener en cuenta

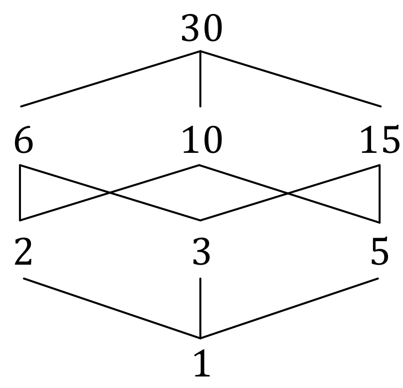
Sea n, un número entero positivo, en general si $n = {p_1}^{k_1} \cdot {p_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot {p_i}^{k_i}$, con lo p_i distintos números primos, se llama $d(n)$ a la cantidad de divisores positivos de n, la cual se obtiene de la siguiente manera:

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_i + 1)$$

Para saber la cantidad de divisores positivos de 30, lo factoreamos:

$30 = 5^{1} \cdot 3^{1} \cdot 2^{1} \cdot 1$

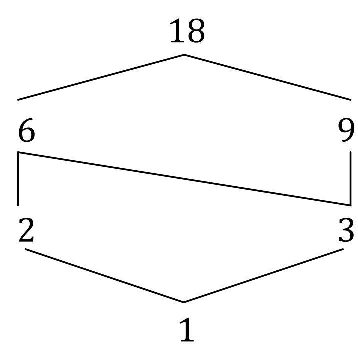
La cantidad de divisores positivos de 30 es $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$



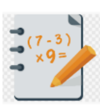
4) Diagrama de Hasse para el conjunto ordenado $(\mathrm{D}(18), |)$

Factoreamos $18 = 3^{2} \cdot 2^{1} \cdot 1$

Por lo tanto, la cantidad de divisores positivos de 18, es $(1+2) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 = 6$



Ejercicio



En el conjunto $\mathrm{A} = \{0, 2, 5, 10, 11, 15\}$, se define la relación

α: $x\alpha y \Leftrightarrow x\alpha y$

a) Probar que $(\mathrm{A}, \leq)$ está ordenado.

b) Realizar el diagrama de Hasse.

c) ¿Está totalmente ordenado? ¿Es un buen orden?

Solución:

(a) Para probar que $(A, \leq)$ está ordenado hay que verificar las propiedades: reflexiva; antisimétrica y transitiva.

α es reflexiva ya que $\forall x \in A: x \leq x \Rightarrow (x,x) \in \alpha$

α es antisimétrica ya que $\forall x, y \in A: (x,y) \in \alpha \wedge (y,x) \in \alpha \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

α es transitiva ya que $\forall x, y, z \in A: (x,y) \in \alpha \wedge (y,z) \in \alpha \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq y \Rightarrow (x,z) \in \alpha$

Por lo tanto $(A, \leq)$ *es un conjunto ordenado.*

(b) Diagrama de Hasse

(c) Es un orden total ya que $0 \leq 2 \leq 5 \leq 10 \leq 11 \leq 15$. *Es bien ordenado porque todo subconjunto no vacío tiene primer elemento.*

Elementos característicos de un conjunto ordenado

Sea (A, α) un conjunto ordenado.

- *Un elemento x de A es maximal de A, si no hay en A elemento alguno distinto de él que sea estrictamente posterior a él. Es decir, ningún elemento de A, lo sigue. En símbolos,*
  $x \in A$ es elemento maximal si no existe $a \in A$, $a \neq x$, tal que $x \underline{\alpha}\, a$

Si el maximal es único, se lo llama **Máximo** o **Último elemento**.

- *Un elemento y de A es minimal de A si no hay en A elemento alguno distinto de él que sea estrictamente anterior a él. Es decir, ningún elemento de A, lo precede. En símbolos,*
  $y \in A$ es elemento minimal si no existe $a \in A$, $a \neq y$, tal que $x \underline{\alpha}\, y$

Si el minimal es único se lo llama **Mínimo** o **Primer elemento.**

Ahora consideremos un (A, α) un conjunto ordenado y un subconjunto de A no vacío. Simbólicamente $\emptyset \neq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$.

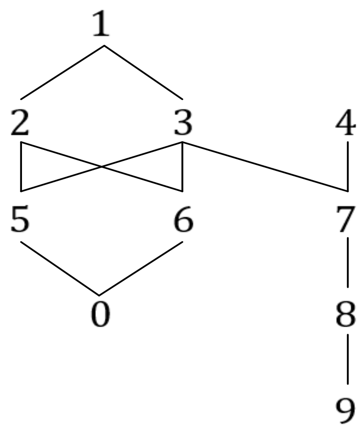
- *$C \in A$ es **cota superior** de B si **C sigue a todos los elementos de B**.*
- *$S \in A$ es **supremo** de B, si es el primer elemento del conjunto de*

- *$c \in A$ es **cota inferior** de B si **c precede a todos los elementos de B***
- *i $\in$ A es **ínfimo** de B si es el último elemento del conjunto de cotas inferiores.*

Observaciones

- Se dice que B está acotado si tiene cotas superiores e inferiores.
- Si el supremo pertenece al subconjunto B es el máximo de B.
- Si el ínfimo pertenece al subconjunto B es el mínimo de B.

Ejemplo



Maximales de $A = \{1, 4\}$ *.No tiene máximo.*

Minimales de $A = \{0, 9\}$ *.No tiene mínimo.*

Para $\boldsymbol{B = \{5, 6, 3\}}$

Minimales de $A = \{0, 9\}$ *Cotas sup.*$=$ $\{3, 1\}$*; supremo* $= 3$

Máximo de A: No existe *Cotas inf.* $=$ $\{0\}$*; ínfimo* $= 0$

Mínimo de A: No existe

Para $\boldsymbol{B = \{5, 6\}}$

Cotas superiores $= \{2, 3, 1\}$*; no existe supremo*

Cotas inferiores $= \{0\}$*; ínfimo* $= 0$

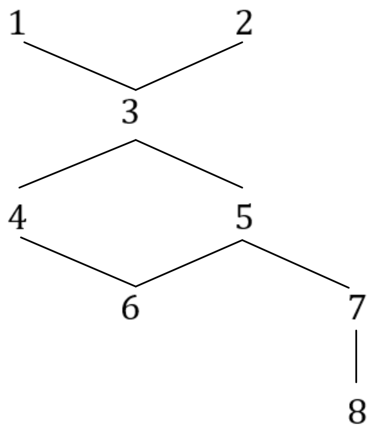
Ejercicios

1. Sea $\mathrm{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ordenado como sigue

a) Hallar los elementos maximales y minimales; ¿Hay máximo? ¿Hay mínimo?

b) Enumerar los subconjuntos de 3 elementos que estén bien ordenados

c) Considerar el subconjunto $\mathrm{B} = \{4, 5, 6\}$ y hallar cotas superiores e



inferiores de B. ¿Hay supremo para B? ¿Hay ínfimo para B?

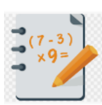
Resolución:

(a) Maximales $= \{1, 2\}$; Minimales $= \{8, 6\}$. No tiene máximo ni mínimo

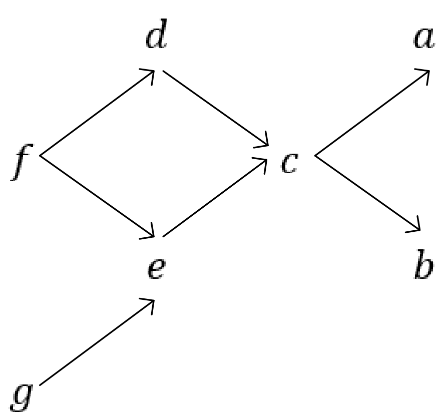
(b) Listamos los subconjuntos $\mathrm{A_i}$: $\mathrm{A_1} = \{8, 7, 5\}$; $\mathrm{A_2} = \{7, 5, 3\}$; $\mathrm{A_3} = \{5, 3, 2\}$; $\mathrm{A_4} = \{5, 3, 1\}$; $\mathrm{A_5} = \{6, 5, 3\}$; $\mathrm{A_6} = \{6, 4, 2\}$.

(c) $\{\text{Cotas inferiores de B}\} = \{6\}$; $\{\text{Cotas superiores de B}\} = \{3, 2, 1\}$;

Ínfimo $= 6$; Supremo $= 3$.



2. En $\mathrm{A} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ordenado como sigue:



a) Hallar maximales; minimales; primer elemento; último elemento.

b) Considerar $\mathrm{B} = \{c, d, e\}$ y hallar cotas superiores e inferiores, ínfimo, mínimo, supremo, máximo de B

Resolución:

(a) Maximales $= \{a, b\}$. Minimales $= \{f, g\}$. No tiene primer elemento ni último elemento por tener más de un minimal y más de un maximal.

(b) Cotas inferiores $= \{f\}$. $\{\text{Cotas superiores de B}\} = \{c, a, b\}$. $\text{Ínfimo} = f$. Supremo $= c$

Inducción completa

Un ejemplo de inducción matemática que puede ayudarnos a entender cómo funciona este principio es considerar una fila infinita de fichas de dominó colocadas de pie y suficientemente próximas como ilustra la imagen. Si cae la primera ficha hacia atrás inmediatamente cae el siguiente entonces podemos afirmar que se caerán todas las fichas en un determinado momento. Es decir, sea la proposición que afirma que la ficha n se cae. Si cae la primera ficha, y si siempre que la ficha n se caiga también se cae la ficha siguiente entonces se caerán todas las fichas.

La inducción es el proceso de obtener un resultado general a partir del análisis de casos particulares.

Se sabe que una determinada afirmación es verdadera para algunos casos particulares y surge la pregunta. ¿Dicha afirmación sigue siendo verdadera para los infinitos números naturales restante?
Existen muchas afirmaciones que sólo son válidas para un número finito de casos y en consecuencia son falsas para un número infinito de situaciones. Sin embargo, podemos encontrar proposiciones (afirmaciones) que son verdaderas para todos los números naturales.

Por ejemplo la proposición p= $n^2 \geq 1;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ es **Verdadera** para todos los números naturales pero la proposición $q = n \geq 4;\ \forall\, n \in N$ es **Falsa** pues $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n < 4$, como es el caso de $n = 1$.

La técnica de demostración por inducción matemática es utilizada para probar que proposiciones de la forma $\forall x{:}P(n)$ enunciadas sobre el conjunto de los números naturales son verdaderas , o sea si la proposición p está dada para cada $n \in \mathbb{N}$ por una afirmación $p(n)$, probar que $p(n)$ es Verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.
Una demostración por la técnica de inducción matemática consiste de dos pasos:

1) Paso base: para n = primer elemento del conjunto considerado
Se demuestra la validez de la proposición p evaluada para el primer elemento del conjunto. Puede ser cero o cualquier número natural dependiendo del punto de partida o condición inicial del problema que se está demostrando.

2) Paso de inducción:

Consiste en demostrar que la implicación P (h) →P (h + 1) es verdadera. Se llama **Hipótesis inductiva** a **P (h),** es decir la proposición o afirmación evaluada para n**=h.** Se asume que la hipótesis inductiva es Verdadera.

Se llama **Tesis inductiva** a **P (h + 1)**, es decir la proposición o afirmación evaluada para para n=h+1.

Apoyados en la suposición de validez de la proposición P (h) se demuestra la validez de la proposición P (h + 1).

Cuando se cumplen los dos pasos de la técnica por inducción matemática, entonces se ha demostrado que la proposición P(*n*) es verdadera para todo número natural *n*, es decir, se ha demostrado que ∀x: P(*n*) es verdadero.

Antes de comenzar con la resolución de ejercicios vamos a introducir la **notación sigma** para representar la adición de términos en donde se sigue un comportamiento definido. Esta notación para la suma, donde se utilizará la letra griega Σ, se define como:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

siendo m y n n números enteros tales que m ≤ n.

El símbolo i es el índice de la suma; m es el límite inferior del índice y n es el límite superior del índice.

Ejemplo 1

Calcular el valor exacto de la siguiente suma

$$\sum_{i=3}^{6} (2i+3)$$

Es claro que el primer sumando se calcula al evaluar en i =3 y corresponde al valor 2·3 + 3 = 9. Al evaluar en i = 4, se obtiene el valor 11, y siguiendo el proceso para los seis sumandos, se tiene que:

$$\sum_{i=3}^{6} (2i+3) = 9 + 11 + 13 + 15 = 37$$

En el caso particular en que m = 1 nos queda la suma de los primeros n términos de la sucesión a_n y se escribe como:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Ahora sí comenzamos con los ejercicios de inducción completa

Ejemplo 1

Probar utilizando la técnica de demostración por inducción matemática que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{(n(n+1))^2}{2} \qquad \text{para } n \in \mathbb{Z}^+$$

Para el desarrollo de la demostración considerar que se tiene la proposición

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4} \qquad \text{para } n \in \mathbb{Z}^+$$

1)Paso base, n = 1

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 = 1$$

$$\frac{(n(n+1))^2}{4} = \frac{(1(1+1))^2}{4} = 1$$

Como se obtiene el mismo resultado en la sumatoria de términos y en la fórmula que es la solución de la sumatoria entonces la proposición *p* (1) es verdadera y la demostración continúa en el paso inductivo.

2)Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$$P(h) = \sum_{i=1}^{h} i^3 = \frac{(h(h+1))^2}{4} \qquad V(p(h)) = v$$

Se asume que la proposición *p* (h) es verdadera

Tesis inductiva, n = h + 1

$$P(h+1) = \sum_{i=1}^{h+1} i^3 = \frac{(h+1)(h+2))^2}{4}$$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{h+1} i^3 = \sum_{i=1}^{h} i^3 + (h+1)^3 = \underbrace{\frac{(h(h+1))^2}{4}}_{\text{por hipótesis inductiva}} + (h+1)^3 = \frac{h^2.(h+1)^2 + 4(h+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(h+1)^2(h^2+4(h+1))}{4} = \frac{(h+1)^2(h^2+4h+1))}{4} = \frac{(h+1)^2(h+2)^2}{4}$$

Como se cumple la igualdad, la proposición P (h + 1) es verdadera, por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{(n(n+1))^2}{2} \text{ para } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ es verdadera}$$

Ahora veamos un ejemplo en el cual hay que demostrar por inducción completa **una proposición que no tiene sumatoria**.

Ejemplo 2

Demostrar por inducción matemática que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para el desarrollo de la demostración considerar que se tiene la proposición

$P(n) = 7^n - 2^n = 5 \cdot q$, para $q \in \mathbb{N}$.

1) Paso base, n = 1

$P(1) = 7^1 - 2^1 = 7 - 2 = 5$

la proposición p (1) es verdadera porque al evaluar 7^1-2^1 se obtiene como resultado el número 5 el cual es múltiplo de 5.

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva,n* = *h

P (h) = $7^{h} - 2^{h} = 5 \cdot m$, para $m \in Z^{+} \rightarrow 7^{h} = 5 \cdot m + 2^{h}$

Se asume que la proposición p (h) es verdadera.

Tesis inductiva n* = *h* + *1

$$P\,(h + 1) = 7^{h+1} - 2^{h+1} = 5 \cdot r$$

Demostración

$\mathbf{7^{h+1} - 2^{h+1}} = 7 \cdot 7^{h} - 2 \cdot 2^{h} = 7.(5\,m + 2^{h}) - 2 \cdot 2^{h} = 7.5.m + 7.\ 2^{h} - 2 \cdot 2^{h} =$

Reemplazando por hipótesis inductiva

$= 7.5.m + 2^{h}(7 - 2) = 7.5.m + 2^{h}.5 = 5.(7 + 2^{h}) = \mathbf{5.\,r}$ siendo r = 7 + 2

Como se cumple la igualdad, la proposición p (h +1) es verdadera, por lo tanto

P(n) = $7^{n} - 2^{n} = 5 \cdot q$, para $q \in \mathbb{N}$ es verdadera

Ejemplo 3

Si $n \in \mathbb{Z}^{+}$ y n es impar, pruébese que $8 \mid n^{2} - 1$

Utilizamos el principio de inducción matemática.

1) Paso base, n = 1

En efecto, para cada **a** entero, se verifica que **a |0** luego, en particular, **8 |0**, es decir,

8 | 1^{2} – 1 de aquí que la proposición sea cierta para n = 1.

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$$P(h) = 8 \mid h^2 - 1 \qquad V(P(h)) = v$$

Tesis inductive, n = h + 2

$$P(h+2) = 8 \mid (h+2)^2 - 1$$

Demostración

$\underline{(h+2)^2 - 1} = h^2 + 4h + 4 - 1 = h^2 - 1 + 4(h+1)$

pero h es impar, luego h + 1 es par y por tanto, existirá $q \in \mathbb{Z}$ tal que $h + 1 = 2q$ de donde $4(k+1) = 8q$, es decir, $4(k+1)$ es un múltiplo de 8, y

$$\underline{(h+2)^2 - 1} = h^2 - 1 + 8q \Rightarrow$$

Reemplazando por la hipótesis inductiva ($8 \mid h^2 - 1$)

$\mathbf{(h+2)^2 - 1} = 8k + 8q \Rightarrow (h+2)^2 - 1 = 8(k+q) \mathbf{= 8t}$ con $k, q, t \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, $8 \mid n^2 - 1$ es verdadera

Sigamos con más ejemplos.

Ejemplo 4

Probar utilizando el principio de inducción completa $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{n}{4n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Paso base, n = 1

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{1}{(4.1-3)(4.1+1)} = \frac{1}{1.(4.1+1)}$$

y $\quad \dfrac{n}{4n+1} = \dfrac{1}{4.1+1}$

Por lo tanto, P (1) es verdadera

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$$P(h) = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{(4.i-3).(4.i+1)} = \frac{h}{4.h+1}$$

Tesis inductiva, n = h + 1

$$P(h+1) = \sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{(4.i-3).(4.i+1)} = \frac{h+1}{4.(h+1)+1} = \frac{h+1}{4.h+5}$$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{(4.i-3).(4.i+1)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{(4.i-3).(4.i+1)} + \frac{1}{[4.(h+1)-3][4.(h+1)+1]}$$

$$= \frac{h}{4.h+1} + \frac{1}{(4.h+1)(4.h+5)} = \frac{h.(4.h+5)+1}{(4.h+1)(4.h+5)} = \frac{4h^2+5h+1}{(4.h+1)(4.h+5)} =$$

$$= \frac{4.(h+1).(h+1/4)}{(4.h+1)(4.h+5)} = \frac{(h+1)(4.h+1)}{(4.h+1)(4.h+5)} = \frac{h+1}{4.h+5}$$

Por lo tanto, P (h+1) es verdadera entonces la proposición P(n) es verdadera para todos los Naturales.

Análisis Combinatorio

El análisis combinatorio tiene por objetivo determinar (contar) la cantidad de grupos (conjuntos o subconjuntos) que pueden formarse con los elementos de un conjunto según reglas de formación determinadas.

Comencemos con dos técnicas básicas de conteo: **principio de la suma** y **principio de multiplicación**. Estos principios además de servir para resolver problemas que involucran el conteo, sirven para determinar cuántas veces se ejecutan algunos pasos en los algoritmos.

Principio de adición o de la suma.

Supongamos que quiero ir desde mi casa a la UNAHUR. Puedo ir manejando mi auto o mi bicicleta o bien puedo ir en colectivo (línea 254, 172 y 96) ¿De cuántas maneras puedo hacer el viaje a la universidad?

Si voy manejando **(suceso A)** tengo **dos maneras**: voy en auto o voy en bicicleta
Si voy en colectivo **(suceso B)** tengo **tres maneras**: tomar la línea de colectivo 254, o tomar el 172 o tomar el 96.
Cantidad de maneras para ir desde mi casa a la UNAHUR: **2 + 3 = 5**
Por lo tanto, puedo ir de 5 maneras diferentes ya que se trata de eventos excluyentes entre sí. No pueden efectuarse simultáneamente las dos acciones (ir manejando o ir en colectivo).

Ahora si podemos enunciar el principio de adición:

Si A y B son dos sucesos mutuamente excluyentes o disjuntos, es decir, que no se presentan al mismo tiempo, el suceso A se puede realizar de m maneras y el B de n, entonces el suceso A o B, se podrá realizar de m + n maneras distintas.

Observación: El principio de adición se puede extender a más de dos sucesos, siempre que no haya dos de ellos que puedan efectuarse simultáneamente.

Ejemplo

Una persona puede pagar el servicio de agua potable en cualquiera de las 7 oficinas municipales o bien en cualquiera de los 30 bancos de la ciudad. ¿En cuántos lugares diferentes se puede pagar el servicio de agua potable?

lugares en donde se puede pagar = n + m = 7 +30 = 37

Principio de multiplicación

Supongamos ahora que quiero ir a Villa Gesell desde San Justo. De acuerdo al mapa de rutas de la provincia de Bs As hay cuatro rutas desde San Justo que me llevan a la ciudad de Dolores y tres rutas que me llevan desde la ciudad de Dolores hasta la ciudad de Villa Gesell. ¿Cuántos caminos que pasan por Dolores conducen a Villa Gesell?

Por cada ruta que nos lleva a Dolores tenemos 3 rutas que nos lleva a V. Gesell. Como tenemos 4 rutas desde San Justo a la ciudad de Dolores tenemos 4.3 caminos.

Ahora enunciamos el principio de multiplicación:

Si U es un suceso que puede descomponerse en dos etapas sucesivas e independientes entre sí, S y T, la etapa S se puede realizar de m maneras y la etapa T de n maneras, independientemente de cuál haya sido el resultado en la etapa; entonces, U se podrá realizar de m x n maneras distintas. Este principio, al igual que el principio de la suma, también puede

Ejemplo

Un algoritmo tiene 3 procedimientos (A, B, C) y cada procedimiento tiene 4 ciclos (1, 2, 3, 4). ¿Cuántos ciclos tiene el algoritmo?

Aplicando el principio fundamental del producto se tiene que:

Total de ciclos = 3x4 = 12

El conjunto E de resultados posibles es:

E = {Al, A2, A3, A4, Bl, B2, B3, B4, Cl, C2, C3, C4}

Por otro lado, los grupos a formarse con los elementos de un conjunto A pueden diferenciares por:

Los elementos diferentes que los compongan.

El orden de sucesión con el cual se toman los elementos.

La repetición o no de los elementos que forman el conjunto.

Tenemos tres maneras de agrupar los elementos de un conjunto con o sin repetición: **Variación; Permutación y Combinación.**

Analicemos cada uno de ellos teniendo en cuenta si se repiten o no los elementos del conjunto.

Variación

***Variación simple o sin repetición*.**

Variación sin repetición de los n elementos del conjunto A tomados de a k elementos es cualquier grupo que puede formarse tomando k elementos de A, sin repetición, considerando como distintas dos variaciones cuando difieren en algún elemento, o en el orden de sucesión.

El cálculo de todas las formas posibles de hacerlo es:

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

siendo n =|A| y k (cantidad de elementos del grupo)

Aclaración: la expresión n! se conoce con el nombre de ***factorial de n*** y es el producto de los n primeros números naturales (se considera por definición que 0! = 1)

n! = n.(n-1). (n-2)…3.2.1

<u>*Ejemplo*</u>

¿Cuántos números de 2 cifras distintas pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4?

A= {1,2,3,4} →|A| = 4 k=2

$$V(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2!} = 12$$

Los doce números son:

12
13
14
21
23
24
31
32
34
41
42
41

Por otro lado, también podríamos preguntarnos cuántos números de dos cifras se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4? En este caso los elementos del conjunto A se pueden repetir. Entonces hablamos de variación con repetición.

Variación con repetición.

Variación con elementos repetidos (o con repetición) es cualquier grupo que puede formarse tomando k elementos del conjunto A, con repetición,
considerando como distintas dos variaciones cuando difieren en algún elemento, o en el orden de su sucesión.

Se calcula como:

$V'(n, k) = n^k$

Para el ejercicio propuesto la cantidad de números de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4 es:

$|A|=4 \quad k=2$

$V'(4, 2) = 4^2 = 16$

Los números que se pueden formar son:

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

Permutación

Permutación simple o sin repetición

Se trata de un reordenamiento de los n elementos distintos del conjunto.

La cantidad de permutaciones posibles de n elementos distintos coincide con las variaciones de n elementos tomados de a n.

$$P(n) = V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$\therefore \; P(n) = n!$

Ejemplo

¿De cuántas maneras se pueden reordenar las letras de la palabra SOL?

P (3) = 3! = 3.2.1 =6

Las seis permutaciones son

sol
lso
ols
slo
los
osl

Observación: cada una de estas construcciones no tienen significado en nuestro idioma, por eso reciben el nombre de anagrama.

Permutación con elementos repetidos

Supongamos ahora que queremos encontrar todos los anagramas que se pueden formar con las letras de la palabra MARGARITA.

Por un lado, sabemos que vamos a reordenar las letras de la palabra y por otro lado vemos que tiene letras repetidas como la A que se repite 3 veces y la R que se repite 2 veces. Esto quiere decir que tenemos que descontar del total de permutaciones sin repetición (9!) las permutaciones entre las tres A dividiendo por 3! y lo mismo para las dos R, al dividir por 2!

$$P_9^{3,2} = \frac{9!}{3!\,.2!} = \frac{9.8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,.\,2} = 30240$$

Por lo tanto, para calcular las permutaciones con repetición deberemos hacer:

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{n!}{k_1!.k_2!\ldots.k_n!}$$

siendo
k_1=cantidad de veces que se repite el elemento 1
k_2=cantidad de veces que se repite el elemento 2
.
.
.
K_n=cantidad de veces que se repite el elemento n

Combinación

Combinaciones simples o sin repetición

Una combinación simple o sin repetición de los n elementos del conjunto A tomados de a k elementos es cualquier grupo que puede formarse tomando k elementos de A, sin repetición, considerando como distintas dos combinaciones cuando difieren en algún elemento, sin importar el orden de sucesión.

Se utiliza la siguiente fórmula para hallar las combinaciones de n elementos distintos tomados de a k elementos:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{con } 0 \leq k \leq n$$

Este cálculo se denomina ***número combinatorio*** de n elementos en k.

Es un cálculo de mucha utilidad que aparece en las distribuciones de probabilidad con suma frecuencia. Notación:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{m!\,(n-k)!} \qquad \text{siendo } 0 \leq k \leq n$$

Ejemplo

¿Cuántos equipos de vóley distintos se pueden armar con 16 jugadores? Es decir, se trata de calcular de cuántas maneras se pueden elegir 6 jugadores de un grupo de 16 personas.

$$C(16,6) = \frac{16!}{6!(16-6)!} = \frac{16!}{6!\,.10\,!} = \frac{16.15.14.13.12.11.10!}{6!\,.\ 10!} = \frac{16.15.14.13.12.11}{6.5.4.3.2.1} = 8008$$

equipos

Ahora consideremos la posibilidad de obtener todas las combinaciones de n en k con repetición. Es decir, los grupos de k elementos a elegir del conjunto de n elementos pueden tener elementos repetidos o, equivalentemente, pueden ser elegidos en más de una oportunidad.

Se utiliza la siguiente expresión para realizar el cálculo de cuántas selecciones en estas condiciones son posibles:

$$C'(n,k) = \binom{n+\mathrm{k}-1}{k} = C(n+\mathrm{k}-1,\mathrm{k}) = \frac{(n+\mathrm{k}-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Observación: como existe la posibilidad de repetir los elementos k puede ser mayor que n (n ≤ k, k ≥ n)

Combinaciones con repetición

Combinación con elementos repetidos de los n elementos de un conjunto A tomados de a k elementos es cualquier grupo que puede formarse tomando k elementos de A, con repetición, considerando como distintas dos combinaciones cuando difieren en algún elemento, sin importar el orden de sucesión.

Ejemplo

¿Cuántos menúes de dos platos se pueden combinar entre las opciones que incluyen carne vacuna (c), verduras (v), pollo (p) y cereales ricos en fibras (f)?

Podríamos hacer las siguientes parejas de combinaciones:

cc	cv	cp	cf
vp	vv	vf	pp

…

Haciendo el cálculo a partir del número combinatorio

$$C'(4,2) = \binom{4+2-1}{2} = C(5,2) = \frac{5!}{2!\,.\,3!} = \frac{5.4.3!}{2.\,3!} = 10$$

Resumen

		Repetición	Elementos diferentes	¿Importa el orden?	Cálculo	Ejemplo
1	*Variaciones*	Sin	k ≤ n	Si	$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	Cantidad de números de 4 cifras distintas con los dígitos del 1 al 9: V (9, 4) = $\frac{9!}{(9-4)!}$ = 3028
		Con	k ≤ n k ≥ n	Si	V´(n, k)= n^k	Cantidad de números de 4 cifras con los dígitos del 1 al 9: V´ (9, 4) = 9^4 = 6561
2	*Permutación*	Sin	k = n	Si	P(n) =n!	Cantidad de números de 4 cifras distintas con los dígitos 2,4,6,8: P (4) = 4! = 24
		Con	k ≥ n	Si	$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{n!}{k_1!.k_2!\ldots.k_n!}$	Cantidad de anagramas con las letras de la palabra ANANA: $P_5^{k1k2..kn} = \frac{5!}{2!3!} = 10$
3	*Combinación*	Sin	k ≤ n	No	$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Cantidad de equipos de truco que pueden formarse con 6 personas: $C(6,3) = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$
		Con	k ≤ n k ≥ n	No	C´(n,k)=C(n+k-1,k)	Cantidad de formas de embocar 10 bolas de pool en 6 troneras: C´(10, 6) = C (10+6-1,6) = $\frac{15!}{6!\,9!}$ =5005