RELACIONES BINARIAS

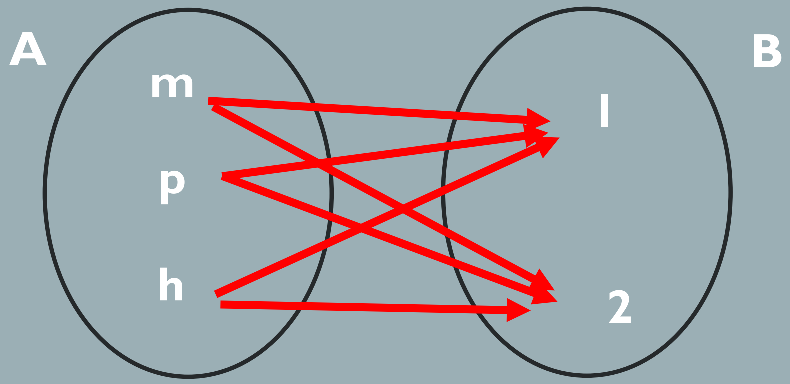
Par Ordenado: Llamamos par ordenado al conjunto de dos elementos a y b, con un criterio de orden que indica cuál es el primer elemento y cuál es el segundo, lo indicamos (a, b).

Producto Cartesiano: Sean A y B dos conjunto, llamamos producto cartesiano y lo indicamos A x B al conjunto de todos los pares ordenados que pueden formarse entre A y B, o sea:

$$A \times B = \{ (x; y) \,/\, x \in A \wedge y \in B \}$$

Ejemplo: Sean $A = \{ m, p, h \}$ y $B = \{ 1, 2 \}$

$|A| = 3 \qquad |B| = 2 \;\Rightarrow\; |A \times B| = 3 \,.\, 2 = 6$



$$A \times B = \{ (m; 1), (m; 2), (p; 1), (p; 2), (h; 1), (h; 2) \}$$

$$B \times A = \{ (1; m), (1; p), (1; h), (2; m), (2; p), (2; h) \}$$

Observación:

- ❖ $A \times B \neq B \times A$
- ❖ Si $A = \emptyset \vee B = \emptyset \Rightarrow A \times B = \emptyset$
- ❖ Si $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \Rightarrow |A \times B| = |A| \,.\, |B|$

Relaciones

Definición: Sean A y B dos conjuntos y sea A x B su producto cartesiano, llamamos relación R a R $\subseteq$ A x B, que indicamos R: A $\rightarrow$ B.

Si A = B $\Rightarrow$ R $\subseteq$ A2 y se dice binaria en A

<u>COMO SE REPRESENTAN LAS RELACIONES</u>

Conjunto de pares ordenados: $R = \{(p;1),(m;1),(m;2)\}$

Diagramas de Venn

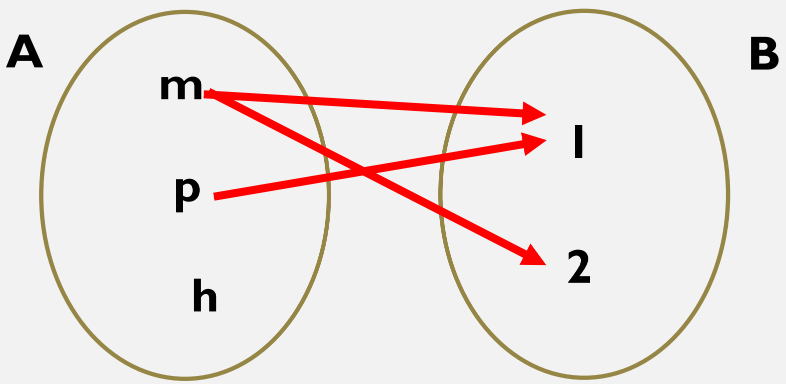
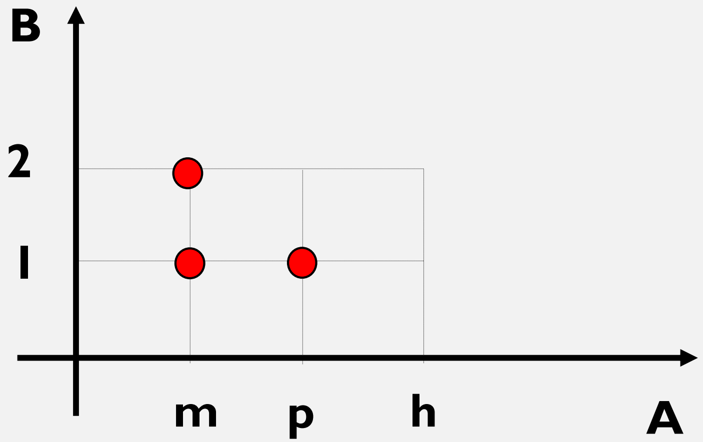


Grafico cartesiano



Dominio e Imagen: Sean A y B dos conjuntos y sea $R \subseteq A \times B$,

- **Dominio de la relación al conjunto $D_R = \{ x \in A \,/\, (x, y) \in R \}$.**
  $D_R \subseteq A$

El conjunto formado por los primeros elementos de los pares ordenados de la relación

- **Imagen de la relación al conjunto $I_R = \{ y \in B \,/\, (x, y) \in R \}$.**
  $I_R \subseteq B$

El conjunto formado por los segundos elementos de los pares ordenados de la relación

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$ sea $R \subseteq A \times B \,/\, R: x < y$

$R = \{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$

$D_R = \{1, 2, 3\} \subseteq A$ **$I_R = \{2, 3, 4\} \subseteq B$**

Relación recíproca o inversa: Sean A y B dos conjuntos y $R: A \to B$ una relación, llamamos relación recíproca o inversa de R, que indicamos R^{-1}, a

$$\mathbf{R^{-1}: B \to A \,/\, R^{-1} = \{ (y, x) \,/\, (x, y) \in R \}}$$

Ejemplo: En el ejemplo anterior, sea $R \subseteq A \times B \Rightarrow R^{-1} \subseteq B \times A$

$R = \{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$

$R^{-1} = \{ (2,1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3) \}$

$D_R{}^{-1} = \{ 2, 3, 4 \} \subseteq B$ $\qquad$ $I_R{}^{-1} = \{ 1, 2, 3 \} \subseteq A$

Observación:

- $D_R{}^{-1} \subseteq B$ $\qquad$ $I_R{}^{-1} \subseteq A$
- $D_R{}^{-1} = I_R$ $\qquad$ $I_R{}^{-1} = D_R$

Relación complementaria: Sean A y B dos conjuntos y R: A $\rightarrow$ B una relación, llamamos relación complementaria de R, que indicamos $\bar{R}$

$$\bar{R} = \{(x, y) \in A x\, B / (x, y) \notin R\}$$

Ejemplo Sea A = { 1, 2, 3, 4 } y B = { 2, 3, 4 } sea R $\subseteq$ A x B / R: x < y

R = { (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) }

$$\overline{\mathrm{R}} = \{(2,2), (3,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

MATRIZ BOOLEANA . OPERACIONES

Una matriz es un arreglo bidimensional de números.
Una matriz se representa por medio de una letra mayúscula(A,B..) y sus elementos con la misma letra en minúscula (a,b...), con un doble subíndice donde el primero indica la fila y el segundo la columna a la que pertenece.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz booleana: Sean m y n dos números naturales, definimos como matriz booleana de elementos a_{ij} a la matriz A $\in$ { 0, 1 }mxn, indicando así que la matriz tiene m filas y n columnas y los elementos a_{ij} son 0 y 1

MATRIZ DE UNA RELACIÓN

Sean A y B dos conjuntos finitos con I A I = m y I B I = n y sea R: A $\rightarrow$ B una relación, llamamos matriz de la relación o matriz de adyacencia de R a la matriz
$M_R = ((mij)) \in \{ 0, 1 \}^{mxn}$ donde

$$m_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{si\ (\ ai,\ bj\ ) \in R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{si\ (\ ai,\ bj\ ) \notin R} \end{cases}$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Sean A = { 1, 2. 3 }, B = { 1, 2 } y R: A $\rightarrow$ B / R = { (1, 1), (3, 2) }

Sea $\overline{\mathrm{R}}$ la relación complementaria de R $\Rightarrow \mathrm{M}_{\overline{\mathrm{R}}} = \overline{\mathrm{M}_{\mathrm{R}}}$

Sea R^{-1} la relación inversa de R $\Rightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{R}^{-1}} = (\mathrm{M}_{\mathrm{R}})^{\mathrm{t}}$

Sean R: A $\rightarrow$ B y S: A $\rightarrow$ B y M_{R} y M_{S} sus matrices $\Rightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{R}\cup\mathrm{S}} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}} \vee \mathrm{M}_{\mathrm{S}}$

Sean R: A $\rightarrow$ B y S: A $\rightarrow$ B y M_{R} y M_{S} sus matrices $\Rightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{R}\cap\mathrm{S}} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}} \wedge \mathrm{M}_{\mathrm{S}}$

Matriz Complementaria

Dada A $\in$ { 0, 1 }^{mxn} decimos que B $\in$ { 0, 1 }^{mxn} es la complementaria de A si

$$\mathbf{b_{ij}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{ij} = 1 \ \forall i \ \forall j \\ 1 & \text{si } a_{ij} = 0 \ \forall i \ \forall j \end{cases}$$

Si B es la matriz complementaria de A, lo indicamos $B = \bar{A}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Transpuesta

Transponer significa cambiar filas por columnas.

Si A $\in$ { o, 1 }^{mxn} se define traspuesta de A a la matriz B $\in$ { 0, 1 }^{nxm} / bij = aji $\forall$i: 1…m, $\forall$j: 1…n .

Se indica $A^t = B$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(2x3)} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{(3x2)}$$

Suma booleana o disyunción. Operación “o”

$$C = A \vee B$$

$\{0, 1\}^{mxn}$ $\{0, 1\}^{mxn}$ $\{0, 1\}^{mxn}$

$$c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$$

$$\forall\, i: 1.....m;\ \forall\, j: 1....n$$

La operación “o” tiene la misma definición que la disyunción.

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \vee B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Conjunción. Operación "y"

$$C = A \wedge B$$

$$c_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$$

$$\forall\ i: 1\ldots\ldots m;\ \forall\ j: 1\ldots.n$$

$\{0, 1\}^{mxn}$ $\{0, 1\}^{mxn}$ $\{0, 1\}^{mxn}$

La operación "y" tiene la misma definición que la conjunción

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relaciones y Dígrafos

Las relaciones definidas sobre un conjunto con un número finito de elementos permiten ser representadas por un gráfico llamado dígrafo o grafo dirigido. Tiene vértices, que son los elementos del conjunto, y aristas dirigidas, que representan los elementos de la relación.

Ejemplo: Sea A = { 1, 2, 3, 4 } y

R = { (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 3) }