UNAHUR
UNIVERSIDAD NACIONAL
DE HURLINGHAM

CONJUNTOS

Comencemos por definir qué se entiende por conjunto:

El matemático alemán Georg Cantor creó una nueva disciplina matemática entre 1874 y 1897: **la teoría de conjuntos**. Su obra fue admirada y condenada simultáneamente por sus contemporáneos. Desde entonces los debates en el seno de la teoría de conjuntos han sido siempre apasionados, sin duda por hallarse estrechamente conectados con importantes cuestiones lógicas. Según la definición de conjunto de Cantor, éste es "una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto". Frege fue uno de los admiradores de la nueva teoría de Cantor, y dio una definición de conjunto similar. En 1903 Bertrand Russell demostraría que la teoría de conjuntos de Cantor era inconsistente y cuestionaría la definición de conjunto en la teoría de Cantor.

Definición de Cantor- Ferge

Un conjunto es cualquier colección desordenada de objetos

La demostración de Bertrand Russell de que esta definición era inconsistente, llevó a establecer dicha teoría, basada en *conceptos primitivos*, o sea *no definibles,* pero *ejemplificables*, como **Conjunto, elemento** y **pertenencia**.

O sea, no definiremos que es un conjunto ni un elemento ni la pertenencia, pero podemos dar infinidad de ejemplos de estos conceptos. Por otra parte, los **axiomas**, que son proposiciones aceptadas como verdaderas sin demostración, y por último los **teoremas**, que son proposiciones que deben ser demostradas a partir de los axiomas y otras proposiciones demostradas previamente.

Los conjuntos tienen por finalidad agrupar objetos que generalmente pero no siempre tienen características similares. De esta manera todas las mujeres nacidas en Bs. As. forman un conjunto.

A cada objeto de la colección lo llamaremos elemento o miembro del conjunto.

A los conjuntos los designaremos con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas. La afirmación: *"x es elemento del conjunto A"* o bien *"el elemento x pertenece al conjunto A"* se escribe

$$\mathbf{x} \in \mathbf{A}$$

y la negación de este hecho, $\neg(x \in A)$, es decir " *x no es elemento del conjunto A*" o bien "*el elemento x no pertenece al conjunto A*" ,se escribe

$$\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$$

Al definir un conjunto no debe haber confusión para determinar si un objeto particular pertenece, o no, al mismo.

Formas de representación de un conjunto

- ✓ Definición por Extensión o Enumeración

Un conjunto está definido por extensión cuando se nombra a cada uno de sus elementos.

Tendremos en cuenta las siguientes reglas para definir conjuntos por extensión:

- Los escribiremos separados por comas y encerrados por una llave inicial y otra final.
- No repetiremos ninguno de ellos teniendo en cuenta que si se lista un elemento más de una vez no importa.
- Los denotaremos en cualquier orden ya que el orden en que se especifican los elementos es irrelevante.

Ejemplo

Los siguientes conjuntos están definidos por extensión.

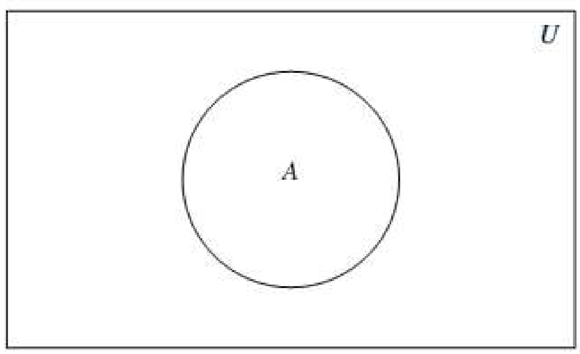
(a) El conjunto de las vocales del alfabeto romano A = {a, e, i, o, u}

(b) El conjunto formado por los números naturales impares, menores que diez.

B = {1, 3,5, 7,9}

- ✓ Diagrama de Venn

Una representación gráfica para los conjuntos son los diagramas de Venn. El conjunto universal se representa por el interior de un rectángulo y todos los demás conjuntos se representan por regiones cerradas incluidos en el mismo.



Ejercicio

Definir por extensión los siguientes conjuntos.

(a)El conjunto de los enteros no negativos menores que cinco.

A = {0, 1, 2, 3, 4}

(b) El conjunto de las letras de la palabra papa

$$B = \{p, a\}$$

(c) El conjunto de los números primos entre 3 y 15.

$$C = \{3, 5, 7,11, 13\}$$

A veces tanto en conjuntos finitos demasiado grandes como en conjuntos infinitos, se utiliza el etcétera matemático: los tres puntos **. . .**, para caracterizar a los elementos de un conjunto. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros del 1 al 100,

$$C = \{1, 2, 3, . . ., 100\}$$

o el conjunto de los enteros pares no negativos,

$$D = \{0, 2, 4, 6, . . .\}$$

Los elementos de un conjunto infinito no pueden especificarse de una forma explícita; consecuentemente, necesitaremos una forma alternativa de describir tales conjuntos implícitamente.

- ✓ Representación por Comprensión

Un conjunto está definido por comprensión cuando se especifica una propiedad que caracteriza a todos los elementos del mismo.

Se utiliza la notación { : } o { / } y se lee "tal que "
Antes de los dos puntos se escribe la variable por ejemplo x o n y después de los dos puntos se da la propiedad.

Ejemplo

Definir por comprensión los siguientes conjuntos:

(a) El conjunto de los enteros mayores que cinco

. El universal es $\mathbb{Z}$ y el predicado es $x > 5$ por lo tanto

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x > 5\}$$

(b) El conjunto de los enteros impares.

El universal es Z y el predicado es $x = 2n + 1$ por lo tanto

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 2n + 1; n \in \mathbb{Z}\}$$

Conjuntos especiales

1.Conjunto Universal

Es el conjunto al cual pertenecen todos los elementos de los conjuntos en consideración. Lo notaremos por **U**.

Ejemplo

Para cada uno de los conjuntos siguientes, elegir un conjunto universal para definirlo.

(a) El conjunto de los enteros entre 10 y 50

El conjunto universal es el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$. Por lo tanto, el conjunto A se escribe de la siguiente forma:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ 1\,0 < x < 50\}$

(b) El conjunto de los múltiplos de 15.

El conjunto universal es el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$. Por lo tanto, el conjunto B se escribe de la siguiente forma:

$B = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x = 15\,q,\ q \in Z\}$

2.Conjunto Vacío

Al conjunto único que no contiene elementos, lo llamaremos conjunto vacío. Lo notaremos con el símbolo $\varnothing$.

El símbolo $\varnothing$ no es la letra griega fi sino que proviene del alfabeto noruego y los no noruegos debemos leerlo como "conjunto vacío"

Cardinalidad: |A|

Llamaremos cardinal de A al número de elementos distintos de A.
Si un conjunto A tiene una cantidad finita de elementos, diremos que es un conjunto finito; si el conjunto tiene una cantidad no finita de elementos diremos que es un conjunto infinito y que su cardinal es infinito.

<u>*Ejemplo*</u>

1. $A = \{\{a\}, \{b, c\}, 5, 4\}$, entonces $|A| = 4$.

2. $B = \{n \in N \ / \ n^2 = 3\}$, entonces $|B| = 0$

3. $C = \varnothing$, entonces $|\varnothing| = 0$.

4. $D = \{ \varnothing \}$, entonces $|\{\varnothing\}| = 1$

5. $|N|$ es infinito.

Igualdad entre conjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales si, y sólo si tienen los mismos elementos. Es decir, cada elemento del conjunto A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A.

Por lo tanto,

$$\{1, 3, 5,7\} = \{7,1,3,5,\} = \{1,1,3,7,5,3\}$$

El orden en que se enumeran los elementos es irrelevante al igual que la repetición del elemento.

Su expresión formal es:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x: [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

Ejemplo

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

$A = \{ a, b, c, \{a, b\}, \varnothing\}$ $B = \{ a, \varnothing, b, \varnothing, c, \varnothing, \{a, b\}, \varnothing\}$ $C=\{ a, b, c, \{a, b\}\}$

$(a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (a \in B \Rightarrow a \in A)$

$(b \in A \Rightarrow b \in B) \wedge (b \in B \Rightarrow b \in A)$

$(c \in A \Rightarrow c \in B) \wedge (c \in B \Rightarrow c \in A)$

$(\{a, b\} \in A \Rightarrow \{a, b\} \in B) \wedge (\{a, b\} \in B \Rightarrow \{a, b\} \in A)$

$(\varnothing \in A \Rightarrow \varnothing \in B) \wedge (\varnothing \in B \Rightarrow \varnothing \in A)$

Por lo tanto, $\mathbf{A = B}$

Como $\varnothing \in A \wedge \varnothing \notin C$ entonces $\mathbf{A \neq C}$

La convención establece que los elementos de un conjunto deben anotarse sin repetir. Se puede decir que en este último caso el conjunto está mal definido o mal nombrado.

Inclusión de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que A está incluido en B o que es un subconjunto de B, si cada elemento de A es también un elemento de B.

Se denota por $A \subseteq B$, es decir,

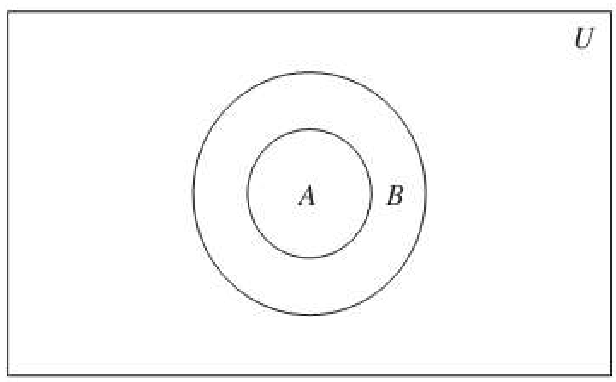
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

También se puede decir que:

B incluye a A, en símbolos $B \supseteq A$

A es un subconjunto de B y B es un superconjunto de A.

− Si A es un subconjunto de B, $A \subseteq B$, entonces la región que representa a A, estaría contenida en la que representa a B.



Ejemplo

Probar cuales de los siguientes conjuntos A = {2, 4,6} y C= {8,1} son subconjuntos de $B = \{x \in N \ / \ x= 2\,q, \ q \in N\}$

Probamos con cada uno de los elementos de A y B:

$2 \in A \Rightarrow 2 \in B$	$8 \in C \Rightarrow 8 \in B$
$4 \in A \Rightarrow 4 \in B$	$1 \in C \wedge 1 \notin B$
$6 \in A \Rightarrow 6 \in B$	Por lo tanto C no es subconjunto de B

Por lo tanto $A \subseteq B$

Algunas propiedades de la inclusión

1.Sea U el conjunto universal y A un conjunto cualquiera. Entonces $A \subseteq U$.

$$\forall A: A \subseteq U$$

"Todo conjunto es subconjunto del universal"

2.Sea A un conjunto cualquiera, entonces; $\varnothing \subseteq A$.

$$\forall A: \varnothing \subseteq A$$

"El vacío es subconjunto de cualquier conjunto"

3.Propiedad Reflexiva

Para cualquier conjunto A, se verifica que $A \subseteq A$

$$\forall A: A \subseteq A$$

"Todo conjunto es subconjunto de sí mismo"

Ejercicios

1. Dado el conjunto $A = \{-1, 2, \{3\}, \{1; 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

$3 \in A$ Falso, no figura en la lista de los elementos de A

$\{1, 2\} \subseteq A$ Falso, 1 es elemento de $\{1,2\}$ y 1 no es elemento de A. En símbolos: $1 \in \{1,2\} \wedge 1 \notin A$

$\{1, 2\} \in A$ Verdadero**,** figura en la lista de los elementos de A

UNAHUR
UNIVERSIDAD NACIONAL DE HURLINGHAM

$\{\{3\}\} \subseteq A$ Verdadero, $\{3\} \in \{\{3\}\} \Rightarrow \{3\} \in A$

$\{3\} \subseteq A$ Falso, 3 es elemento de $\{3\}$ y 3 no es elemento de A. En símbolos: $3 \in \{3\} \wedge 3 \notin A$

$\varnothing \in A$ Falso, no figura en la lista de elementos de A

$\{-1, 2\} \subseteq A$ Verdadero, $-1 \in \{-1,2\} \Rightarrow -1 \in A$ y $2 \in \{-1,2\} \rightarrow 2 \in A$

$\varnothing \subseteq A$ Verdadero, propiedad $\forall A$: $\varnothing \subseteq A$

$\{\{1, 2\},-1\} \in A$ Falso, no figura en el listado de los elementos de A

2.Determinar todos los subconjuntos de los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{a, b\}$

Utilizaremos la definición de subconjunto $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B)$

De la proposición 2 se sigue que el conjunto vacío, $\varnothing \subseteq \{a, b\}$

$a \in \{a, b\}$ entonces $\{a\} \subseteq \{a, b\}$
$b \in \{a, b\}$ entonces $\{b\} \subseteq \{a, b\}$
$a \in \{a, b\}$ y $b \in \{a, b\}$ entonces $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$

Por lo tanto, el conjunto A tiene cuatro subconjuntos distintos:

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, y $\{a, b\}$

(b) $B = \{\{a\}\}$

Es un conjunto unitario ya que tiene un único elemento, el conjunto $\{a\}$. Sus subconjuntos son el $\varnothing$ y el $\{\{a\}\}$.

Conjunto de partes P(A) o conjunto potencia

*El conjunto de partes de un conjunto A es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Lo denotamos **P(A)**.*

<u>*Ejemplo*</u>

Determinar el conjunto de partes de los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{a, b\}$; (b) $B = \{\{a\}\}$; (c) $C = \{1, 2, 3\}$;(d) $D = \{1, \{2, 3\}\}$

(a) $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

(b) $P(B) = \{\varnothing, \{\{a\}\}\}$

(c) $P(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

(d) $P(D) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, \{2, 3\}\}\}$

- *Si A es un conjunto finito con n elementos, entonces el cardinal del conjunto de partes, $|P(A)|$, es 2^n.*

<u>*Ejemplo*</u>

a) Para $A = \{1, 2, 3\}$, tenemos que $|A| = 3$ y $|P(A)| = 8$.

b) Para $B = \{a\}$, tenemos $|B| = 1$ y $|P(B)| = 2$.

c) Para $C=\varnothing$ se cumple que $|\varnothing| = 0$, y $|P(\varnothing)| = |\{\varnothing\}| = 1$.

Ejercicios

1. Dado A = $\{$ a, b, c, {a, b},∅ $\}$ determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\varnothing \subseteq \varnothing$ Verdadero; propiedad $\forall A: \varnothing \subseteq A$

b) $\varnothing \in \varnothing$ Falso; el conjunto vacío no tiene elementos

c) $\{a\} \subseteq A$ Verdadero ;a es elemento de $\{a, b, c, \{a, b\}, \varnothing\}$ entonces
$\{a\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b\}, \varnothing\}$ por la definición de inclusión. O bien {a} es elemento de P(A)

d) $\varnothing \in \{\varnothing\}$ Verdadero; ∅ figura en el conjunto

e) $|A| = 4$ Falso; $|\{a, b, c, \{a, b\}, \varnothing\}| = 5$

f) $\{a, b\} \subseteq A$ Verdadero; a y b son elementos de $\{a, b, c, \{a, b\}, \varnothing\}$ entonces
$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b\}, \varnothing\}$ por definición de inclusión

j) $\{a, b, c\} \in A$ Falso; los elementos del conjunto son :

$$a \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$$
$$b \in \{a, b, c, \{a, b\}, \varnothing\}$$
$$c \in \{a, b, c, \{a, b\}, \varnothing\}$$
$$\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}, \varnothing\}$$
$$\varnothing \in \{a, b, c, \{a, b\}, \varnothing\}$$

2. Dado A = $\{5\}$:

2.1 Hallar P(P(A)) y P(P(A))

$|A| = 1$; $|P(A)| = 2^1 = 2$ **P(A) =** $\{\varnothing, \{5\}\}$

$|P(A)| = 2$; $|P(P(A))| = .2^2 = 4$ **P(P(A)) =** $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{5\}\}, \{\varnothing, \{5\}\}\}$

$|P(P(A))| = 4$; $|P(P(P(A)))| = .2^4 = 16$

2.2 Determinar el valor de verdad de las siguientes expresiones, justificar:

a) $5 \in P(P(A))$ Falso; no figura en el listado de $P(P(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\}, \{\{5\}\}, \{\varnothing, \{5\}\}\}$

b) $\varnothing \notin P(A)$ Falso; $\varnothing$ figura en el listado de $P(A) = \{\varnothing, \{5\}\}$

c) $\{\{5\}\} \in P(P(A))$ Verdadero; figura en el listado de $P(P(A))$

d) $\{5\} \subseteq P(A)$ Falso; es elemento de $P(P(A))$

e) $P(A) \subseteq P(P(A))$ Falso; es elemento de $P(P(A))$

Operaciones entre conjuntos

Introduciremos las operaciones con conjuntos que nos van a permitir obtener nuevos conjuntos, partiendo de conjuntos ya conocidos. A y B serán dos conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U.

Definiremos las principales operaciones entre conjuntos.

⌦ *Unión*

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A **o** a B **o a ambos**. Se denota $A \cup B$.

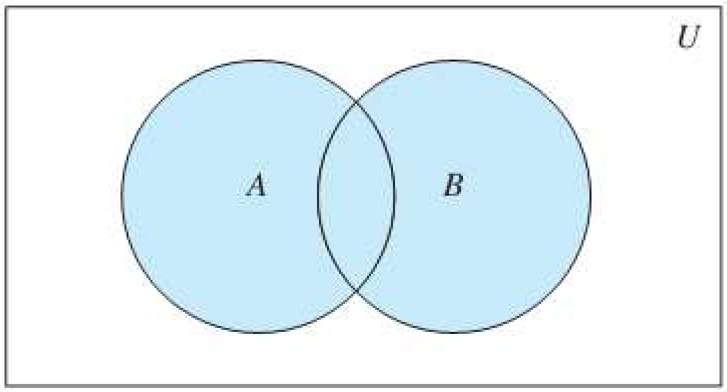
$$A \cup B = \{x \;/\; x \text{ es elemento de A o bien de B}\}$$

En símbolos

$$\mathbf{A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee \; x \in B\}}$$

Se lee A unión B

Su representación gráfica es la siguiente



Ejemplo

Sean los conjuntos $A = \{n \in N: n \leq 8\}$; $B = \{n \in N: n \text{ es par y } n \leq 10\}$

Hallar $A \cup B$

Solución

$A \cup B = \{n \in N: n \leq 8\} \cup \{n \in N: n \text{ es par y } n \leq 10\} =$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

⌦ Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que tienen en común los conjuntos A y B. Se denota

$A \cap B$.

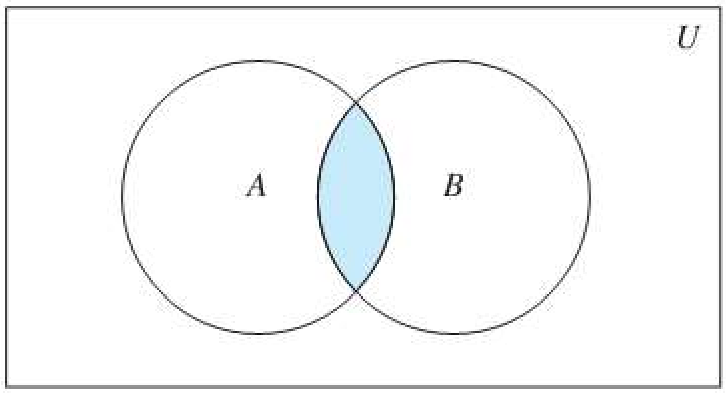
$A \cap B = \{x: x \text{ es elemento de A y de B}\}$

En símbolos

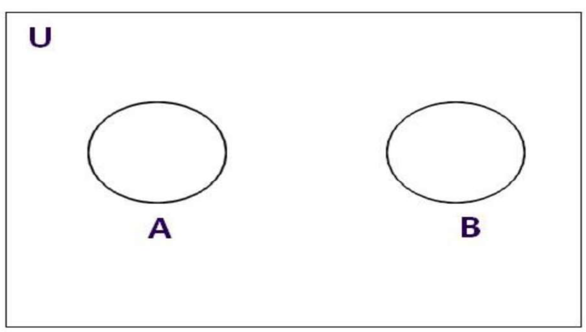
$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

Se lee A intersección B

Su representación gráfica es la siguiente



Si A y B no tienen elementos en común, es decir, **si $A \cap B = \varnothing$** ; entonces diremos que A y B son **conjuntos disjuntos**. Su diagrama de Venn es:



Ejemplo

Sean los conjuntos $A = \{n \in N: n \leq 8\}$;

$B = \{n \in N: n \text{ es par y } n \leq 10\}$

Hallar $A \cap B$

Solución

$A \cap B = \{n \in N: n \leq 8\} \cap \{n \in N: n \text{ es par y } n \leq 10\}=$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\}= \{2, 4, 6, 8\}$

⌦ *Complemento*

El complemento de un conjunto A es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que no son elementos de A.

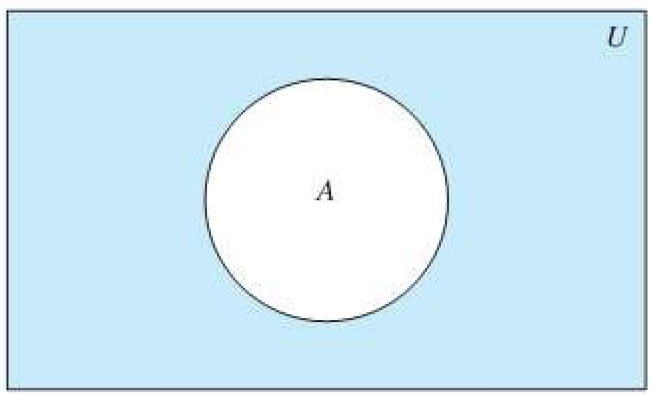
$$\overline{A} = A^c = \{x: x \text{ no es elemento de } A\}$$

Se denota $\overline{A}$ o A^c.
En símbolos

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A^c} = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in \mathbf{U} \wedge \mathbf{x} \notin \mathbf{A}\}$$

El conjunto $\mathbf{A^c}$ se lee "complemento de A"

Su representación gráfica es la siguiente



Ejemplo

Sea $A = \{n \in N: n \leq 12\}$ su complemento es

$A^C = \{n \in N: n > 12\}$

⌦ Diferencia

La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Se denota por

A - B.

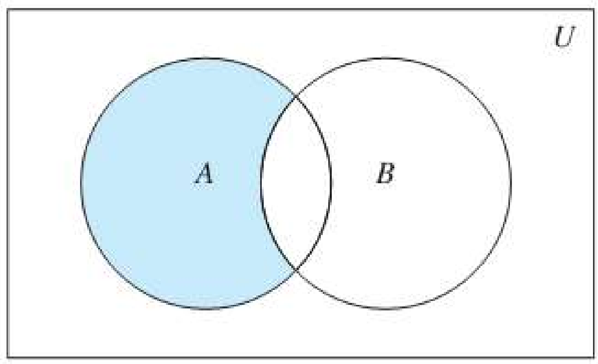
A - B = {x: x es elemento de A y no de B}

En símbolos

$$\mathbf{A - B = \{x: x \in A \ \wedge \ x \in B\} = A \cap \overline{B} = A \cap B^C}$$

Se lee "A menos B"

Su representación gráfica es la siguiente



el complemento de A es igual a la diferencia entre U (universal) y A, es decir,

$$\mathbf{A^c = U - A}.$$

Ejemplo

Sea A = {n $\in$ N: n $\leq$ 12} y B = {n $\in$ N: n es impar y n $\leq$ 10}.

Hallar A – B y B – A.

Solución: A - B = {2, 4, 6, 8, 10, 11,12} ; B - A = $\varnothing$

⌦ *Diferencia Simétrica*

La diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B pero no a ambos. Se denota por A $\triangle$ B.

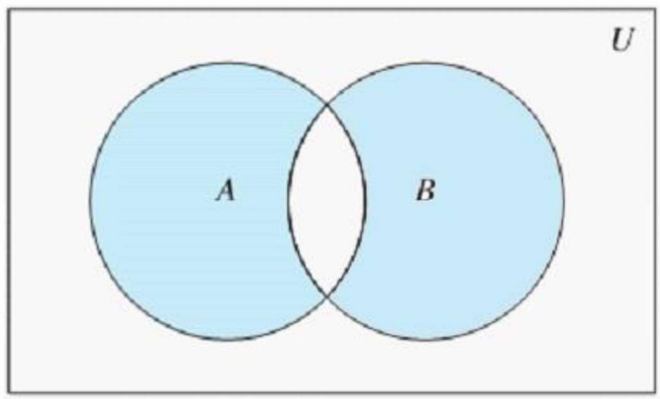
A $\triangle$ B = {x / x es elemento de A o de B pero no de ambos}

En símbolos

$$\mathbf{A \triangle B=\{x \ / \ x \in A \ \veebar \ x \in B\}= (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)}$$

Se lee **"A diferencia simétrica B"**

Su representación gráfica es la siguiente



Ejemplo

Sea $A = \{n \in N: n \leq 12\}$ y $B = \{n \in N: n \text{ es impar y } n \leq 10\}$

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{2,4,6,8,10,11,12\} \cup \varnothing = \{2,4,6,8,10,11,12\}$

Ejercicio

Se consideran los conjuntos $A = \{2,4,6\}$; $B = \{6, 4,2,6\}$; $C = \{1, 0,3\}$; $E = \{6\}$;$D = \{x \in Z \,/\, x^2 \leq 3\} = \{-1,0, 1\}$ (números enteros cuyo cuadrado es menor que 3).

Realizar las siguientes operaciones:

$\mathbf{(A \cup B) - C} = (\{2,4,6\} \cup \{6,4,2,6\}) - \{1,0,3\} = \{2,4,6\}$

$\mathbf{(C \cap B) \cup A} = (\{1,0,3\} \cap \{6,4,2,6\}) \cup \{2,4,6\} = \varnothing \cup \{2,4,6\} = \{2,4,6\}$

$\mathbf{E \cup A} = \{6\} \cup \{2, 4,6\} = \{2, 4,6\}$

$\mathbf{(A \cup C) \cap E} = (\{2,4,6\} \cup \{1,0,3\}) \cap \{6\} = \{2,4,6,1,0,3\} \cap \{6\} = \{6\}$

(A ∆ E) – B = ((A-E) ∪ (E-A))–B =({2,4,6} – {6}) ∪ ({6} – {2,4,6}) – {6,4,2,6} = ({2,4} ∪ ∅) - {6,2,4,6}= ∅

D ^{C} = complemento de D = Z – { -1, 0,1}

Propiedades algebraicas entre conjuntos

Las operaciones con conjuntos cumplen muchas propiedades algebraicas, algunas de las cuales son similares a las propiedades que cumplen los números reales y sus operaciones.

Propiedades Idempotentes

Dado cualquier conjunto A en un universal arbitrario U, se verifica:

1. A ∪ A = A

2. A ∩ A = A

Propiedades Conmutativas

Dados dos conjuntos A y B de un universal arbitrario U, se verifica:

1. A ∪ B = B ∪ A

2. A ∩ B = B ∩ A

Propiedades Asociativas

Dados tres conjuntos A, B y C de un universal arbitrario, U, se verifica:

1. A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C

2. A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C

Propiedades de Absorción

Dados dos conjuntos A, B de un universal arbitrario, U, se verifica:

1. A ∪ (A ∩ B) = A

2. A ∩ (A ∪ B) = A

Propiedades Distributivas

Dados tres conjuntos A, B y C de un conjunto universal arbitrario, U, se verifica:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Elemento neutro

Dado un conjunto cualquiera de un universal arbitrario, U, se verifica:

1. $A \cup \varnothing = A$ entonces $\varnothing$ es elemento **neutro de** $\cup$ de conjuntos

2. $A \cap U = A$ entonces **U** es elemento **neutro de** $\cap$ de conjuntos

Elemento absorbente

Dado un conjunto cualquiera de un universal arbitrario, U, se verifica:

1. $A \cup U = U$ entonces **U** es elemento **absorbente de** $\cup$ de conjuntos

2. $A \cap \varnothing = \varnothing$ entonces $\varnothing$ es elemento **absorbente de** $\cap$ de conjuntos

Propiedad Involutiva

Dado un conjunto cualquiera A de un universal U, se verifica:

$(A^c)^c = A$

Propiedades del Complemento

Dado un conjunto cualquiera A de un universal arbitrario U, se verifica:

1. $A \cup A^c = U$

2. $U^c = \varnothing$

3. $A \cap A^c = \varnothing$

4. $\varnothing^c = U$

Leyes de De Morgan

Dados dos conjuntos A y B en un universal U, se verifica:

1. “El complemento de la unión de conjuntos es igual a la intersección de sus complementos.”

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

2. “El complemento de la intersección de conjuntos es igual a la unión de sus complementos.”

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Ejemplo

Probar las siguientes identidades utilizando las propiedades anteriores:

1. $A \cap B = A - B^c$

Demostración

$A - B^c =$ por definición de diferencia

$A \cap (B^c)^c =$ propiedad de involución

$A \cap B$

2. $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$

Demostración

$A \cup (A^c \cap B) =$ Propiedad distributiva

$(A \cup A^c) \cap (A \cup B) =$ Propiedad de identidad

$U \cap (A \cup B) =$ elemento neutro

$A \cup B$

3. $A - (A^c \cup B) = A - B$

Demostración

$A - (A^c \cup B) =$ por definición de diferencia

$A \cap (A^c \cup B)^c =$ ley de De Morgan

$A \cap ((A^c)^c \cap B^c) =$ ley de involución

$A \cap (A \cap B^c)$ = ley asociativa

$(A \cap A) \cap B^c$ = idempotencia

$A \cap B^c$ = definición de diferencia

A - B

Además de las operaciones anteriores podemos hacer otra operación con conjuntos llamada producto cartesiano.

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A y B, llamamos producto cartesiano de A por B al conjunto:

$$A \times B = \{(x; y) \,/\, x \in A \wedge y \in B\}$$

Esto quiere decir que el producto cartesiano está formado por todos los pares ordenados que se pueden formar con primera componente del primer conjunto y segunda componente del segundo conjunto.

Ejemplo

Sea A = {1, 2} y B = {a, b, c}. Entonces

A x B = {(1; a), (1; b), (1; c), (2; a), (2; b), (2; c)}

B x A = {(a;1), (a; 2), (b;1), (b; 2), (c;1), (c; 2)}

También,

A x A $=A^2$ = {(1; 1), (1; 2), (2;1), (2; 2)}

B x B $=B^2$ = {(a; a), (a; b), (a; c), (b; a), (b; b), (b; c), (c; a), (c; b), (c; c)}

En los ejemplos anteriores se observa que el producto cartesiano de dos conjuntos no es conmutativo. Es decir, en general, A x B es distinto de B x A

$$A \times B \neq B \times A$$

Cardinal del producto cartesiano

Si $|A| = n$ y $|B| = m$ entonces $|A \times B| = |A|.|B| = n.m$

Ejemplo.

Sea $A = \{1,2\}$ y $B = \{a, b, c\}$; $|A| = 2$ y $|B| = 3$ entonces $|A \times B| = |A|.|B| = 2.3 = 6$

Cardinalidad de la unión de conjuntos

Teniendo en cuenta que $A \cup B$ consta de todos los elementos que están en A o en B o en ambos si calculamos el $|A \cup B|$ como la suma del $|A|$ y el $|B|$ y A y B tienen elementos en común estaríamos contando dos veces (una como parte de A y otra como parte de B).Por lo tanto, para calcular la cardinalidad de la unión de conjuntos sumamos la cardinalidad de A y la cardinalidad de B, y le restamos la cardinalidad de la intersección entre A y B.
En símbolos,
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Cardinalidad del complemento de un conjunto

Muchas veces es más rápido contar los elementos que no se encuentran en un conjunto, que contar aquellos que sí pertenecen a él. De esta manera, para determinar la cardinalidad de un conjunto, podemos restar la cardinalidad de su complemento, de la cardinalidad del conjunto universal.
En símbolos,
$|A| = |U| - |A^c|$

Ejemplo

¿La asistencia a los cines se vio afectada por la llegada de Netflix? Para estudiar este asunto un grupo de investigación cinematográfico realizó una encuesta entre personas cuyas edades estaban comprendidas entre 16 y 50 años obteniendo la siguiente información:

388 personas señalaron que habían visto una película en el cine el mes pasado;

495 personas señalaron que habían visto una película por Netflix el mes pasado;

281 personas señalaron que vieron una película en el cine y por Netflix el mes pasado;

98 personas señalaron que no vieron una película en el cine ni por Netflix el mes pasado.

Con esta información el grupo de investigación planteó las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas personas entrevistadas vieron una película en el cine o por Netflix el mes pasado?
2. ¿Cuántas personas entrevistadas vieron exclusivamente una película en el cine el mes pasado?
3. ¿Cuántas personas entrevistadas vieron exclusivamente una película por Netflix el mes pasado?

Solución

Se puede dibujar un diagrama de Venn ya que la encuesta divide a las personas en dos categorías (las personas que ven una película en el cine y las personas que ven una película por Netflix). Es decir, tenemos dos conjuntos:

T= {personas / la persona vió una película en el cine el mes pasado}

C= {personas / la persona vió una película por Netflix el mes pasado}

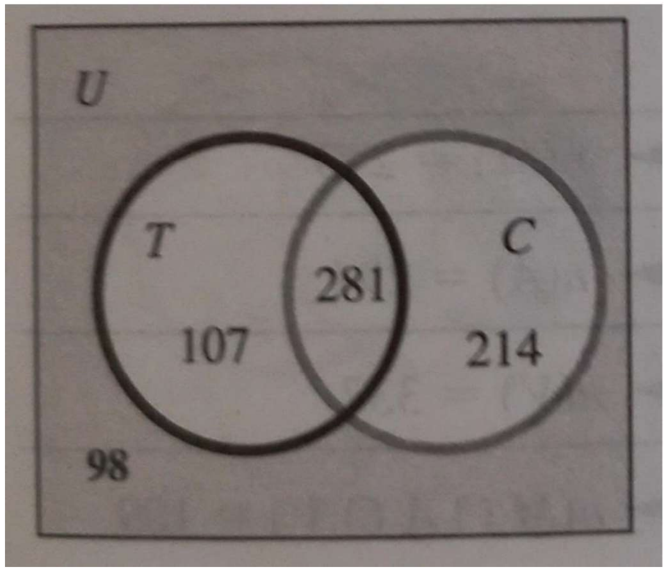
Ahora convirtamos la información de la encuesta en símbolos:

$|T| = 338$; $|C| = 495$; $|T \cap C| = 281$ y $|(T \cup C)^c| = 98$

Dibujamos el diagrama de Venn con dos círculos que se traslapan. En la intersección de T y C anotamos 281.Además,como sabemos que $|T|= 388$ y $|T \cap C| = 281$ la diferencia (388-281 = 107) indica que 107 personas vieron una película en el cine pero no en Netflix.

Por otro lado, $|C| = 495$, la diferencia 495-281 = 214 nos indica que 214 personas vieron una película por Netflix pero no en el cine.

Por lo tanto, el diagrama de Venn nos queda



Ahora ya podemos comenzar a contestar las preguntas.

1. Hay que hallar el total de personas entrevistadas. Es decir, el |U|.
   Del diagrama se ve que |U| = 98 + 107 + 281 + 214 = 700
   Por lo tanto,700 personas participaron en la encuesta.
2. Del diagrama se ve que las personas entrevistadas que vieron exclusivamente una película en el cine el mes pasado son 107.
3. Del diagrama se ve que las personas entrevistadas que vieron exclusivamente una película por Netflix el mes pasado son 214.