第24讲 线性规划及单纯形法

- 线性规划与对偶问题
- 线性规划的标准型
- 单纯形法

线性规划及其对偶模型

1. 线性规划问题的现实来源

- 设某工厂生产两种产品甲和乙，生产中需4种设备按A，B，C，D顺序加工，每件产品加工所需的机时数、每件产品的利润值及每种设备的可利用机时数列于下表：

产品数据表

产品 \ 设备	*A*	*B*	*C*	*D*	产品利润（元 / 件）
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
设备可利用机时数（时）	12	8	16	12	

问：充分利用设备机时，工厂应生产甲和乙型产品各多少件才能获得最大利润?

- 解：设甲、乙型产品各生产x_1及x_2件，则数学模型为：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. 对偶问题的现实来源

反过来问：若厂长决定不生产甲和乙型产品，决定出租机器用于接受外加工，只收加工费，那么４种机器的机时如何定价才是最佳决策？

在市场竞争的时代，厂长的最佳决策显然应符合两条：

（1）不吃亏原则。即机时定价所赚利润不能低于加工甲、乙型产品所获利润。由此原则，便构成了新规划的不等式约束条件。

（2）竞争性原则。即在上述不吃亏原则下，尽量降低机时总收费，以便争取更多用户。

设A、B、C、D设备的机时价分别为y1、y2、y3、y4，则新的线性规划数学模型为：

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

2. 原问题与对偶问题的对应关系

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

原问题（对偶问题）

对偶问题（原问题）

$$\begin{cases} \max & g(y) = b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \le c, \\ & y \ge 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min & f(x) = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \ge b, \\ & x \ge 0, \end{cases}$$

练习写出其对偶问题

2. 线性规划数学模型的一般形式

目标函数:

$$\max \ (\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

约束条件:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \ \le (=\cdot\ge)\ b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \le (=\cdot\ge)\ b_m \\ x_1 \ge 0 \cdots\cdots x_n \ge 0 \end{cases}$$

$x_j\,(j = 1,2,\cdots,n)$ 称为决策变量

$c_j\,(j = 1,2,\cdots,n)$ 称为价值系数或目标函数系数

$b_i\,(i = 1,2,\cdots,m)$ 称为资源常数或约束右端常数

$a_{ij} \ge 0(i = 1,..,m;\ j = 1,..,n)$ 称为技术系数或约束系数

线性规划及对偶问题

原问题

$$\begin{cases} \min & f(x) = c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \end{cases}$$

对偶问题

$$\begin{cases} \max & g(y) = b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \leq c, \\ & y \geq 0, \end{cases}$$

分别记 D_P 和 D_D 为原问题 (10.11) 和对偶问题 (10.12) 的可行域.

定理 10.5.1 设原问题 (10.11) 和对偶问题 (10.12) 的都有可行点. 则

(1) 对任何 $x \in D_P$, 任何 $y \in D_D$ 均有

$$c^T x \geq b^T y. \tag{10.13}$$

(2) 若点 $x^* \in D_P$, $y^* \in D_D$ 满足 $c^T x^* = b^T y^*$, 则 x^* 和 y^* 分别是原问题 (10.11) 和对偶问题 (10.12) 的最优解.

对偶问题的经济解释

影子价格 —— 是一个向量，它的分量表示最优目标值随相应资源数量变化的变化率。

若x^*, y^* 分别为（P）和（D）的最优解， 那么 $c^T x^* = b^T y^*$。

根据 $f = b^T y^* = b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + \cdots + b_m y_m^*$

可知 $\partial f / \partial b_i = y_i^*$

y_i^* 表示 b_i 变化1个单位对目标 f 产生的影响，称 y_i^* 为 b_i的影子价格。

影子价格的经济含义

(1) 影子价格是对现有资源实现最大效益时的一种估价

企业可以根据现有资源的影子价格，对资源的使用有两种考虑：第一，是否将设备用于外加工或出租，若租费高于某设备的影子价格，可考虑出租该设备，否则不宜出租。第二，是否将投资用于购买设备，以扩大生产能力，若市价低于某设备的影子价格，可考虑买进该设备，否则不宜买进。

(2) 影子价格反映了不同的局部或个体的增量可以获得不同的整体经济效益。如果为了扩大生产能力，考虑增加设备，就应该从影子价格高的设备入手。这样可以用较少的局部努力，获得较大的整体效益。

定理 10.5.2 *(线性规划对偶定理)*

(1) 若线性规划问题 (10.11) 或其对偶问题 (10.12) 之一有最优解，则两个问题都有最优解．而且，两问题的最优目标函数值相等．

(2) 若线性规划问题 (10.11) 或其对偶问题 (10.12) 之一的目标函数值无界，则另一问题无可行解．

证明: (1) 假设 (10.11) 有最优解 x^*. 由于线性规划是一个凸规划，由定理 9.2.4 知 x^* 是最优解的充要条件是存在 Lagrange 乘子向量 $\lambda^* R^m$, $\mu^* \in R^n$ 使得

$$\begin{cases} c - A^T\lambda^* - \mu^* = 0, \\ \lambda^* \geq 0,\ Ax^* - b \geq 0,\ \lambda^{*T}(Ax^* - b) = 0, \\ \mu^* \geq 0,\ x^* \geq 0,\ \mu^{*T}x^* = 0. \end{cases}$$

不难看出， $\lambda^* \in D_D$. 而且,

$$b^T\lambda^* = \lambda^{*T}Ax^* = c^Tx^*.$$

由定理 10.5.1 知 λ^* 是 (10.12) 的最优解．类似地可以证明：若 (10.12) 有最优解，则相应的 Lagrange 乘子是 (10.11) 的最优解.

定理 10.5.3 若线性规划问题 (10.11) 及其对偶问题 (10.12) 有最优解的充要条件是 D_P 和 D_D 都不是空集.

定理 10.5.4 对偶问题的对偶问题是原问题.

如果原问题含有大量的约束，而自变量的个数相对少的话，

通过求解对偶问题会在计算上带来好处.

线性规划

- 1939年 苏联 JI.B.KaHTOPOBHR(康特罗维奇)提出类似线性规划的模型
- 美国 库普曼斯 研究运输问题，看到线性规划在经济中的应用的意义
- 1949年 美国Dantzig（丹捷格）提出求出求解线性规划的单纯形法，并给出很多有价值的理论，奠定线性规划的理论基础，1953年提出改进单纯形法
- 1954年 Lemke提出对偶单纯形法
- 1976年 Bland 提出避免循环的方法

- 1972年V. Clee和G. Minty发现，单纯形法的迭代次数是指数次运算，不是好算法，对单纯形法提出挑战
- 1979年苏联 哈奇阳 提出椭球算法，是多项式算法，但实际计算中，其与单纯形法的计算量差不多
- 1984年 N.Karmarkar提出又一个多项式算法—Karmarkar算法，本质属于内点算法，理论上优于单纯形法，对求解大规模实际问题具有巨大潜力
- 1980年前后 形成求解线性规划的有效集法，理论上与单纯形法等价，但解决问题的侧重点不同，各有优缺点，相互补充

标准形式

标准型的主要特征：

① 目标最小；

② 约束等式；

③ 变量非负；

④ 右端非负。

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\vdots \quad\quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

标准型的紧缩形式：

$$\min Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geq 0 & j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

标准型的矩阵形式：

$$\min Z=CX$$

$$s.t.\begin{cases}AX=b\\ X\geq 0\end{cases}$$

如何化为标准形式?

目标函数的转换

如果是求极大值即 $\max z=\sum c_j x_j$ 则可将目标函数乘以(-1)，可化为求极小值问题。

即 $\min z'=-z=-\sum c_j x_j$

也就是：令 $z'=-z$，可得到上式。

变量的变换

若存在取值无约束的变量 x_j，可令 $x_j=x_j'-x_j''$

其中：$x_j', x_j''\geq 0$

约束方程的转换：由不等式转换为等式。

$$\sum a_{ij}x_j \le b_i \longrightarrow \sum a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+i} \ge 0$$ 称为松弛变量

$$\sum a_{ij}x_j \ge b_i \longrightarrow \sum a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+i} \ge 0$$ 称为剩余变量

变量 $x_j \le 0$ 的变换

可令 $x_j' = -x_j$，显然 $x_j' \ge 0$.

标准化举例（例）：

$$\min Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 \le 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\text{取值无约束} \end{cases}$$

$$\min Z' = -x_1' + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_6$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1' - 2x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 9 \\ 3x_1' + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 4 \\ 4x_1' + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' = 6 \\ x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

- 线性规划问题的求解方法

一 般 有两种方法
- 图 解 法
  - 两个变量、直角坐标
  - 三个变量、立体坐标
- 单纯形法
  - 适用于任意变量、但必需将一般形式变成标准形式

下面我们分析一下简单的情况—— 只有两个决策变量的线性规划问题，这时可以通过图解的方法来求解。图解法具有简单、直观、便于初学者窥探线性规划基本原理和几何意义等优点。

图解法

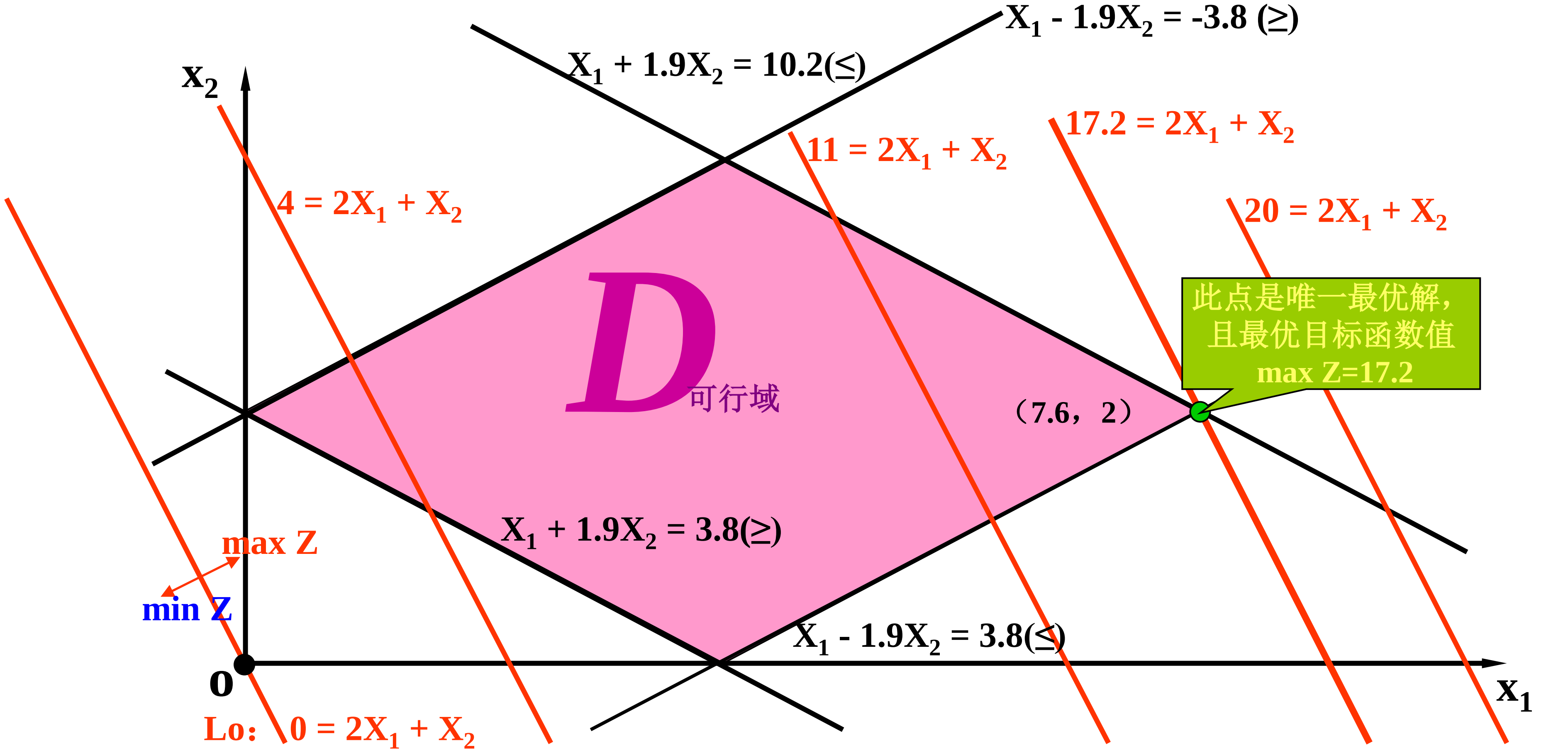
例1.5 用图解法求解线性规划问题

$$\max \ Z = 2X_1 + X_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} X_1 + 1.9X_2 \geq 3.8 \\ X_1 - 1.9X_2 \leq 3.8 \\ X_1 + 1.9X_2 \leq 10.2 \\ X_1 - 1.9X_2 \geq -3.8 \\ X_1 , \ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

图解法

$$\max\ Z = 2X_1 + X_2$$



线性规划图解法

由于线性规划模型中只有两个决策变量，因此只需建立平面直角坐标系就可以进行图解了。

1.建立平面直角坐标系，标出**坐标原点**，**坐标轴的指向**和**单位长度**。

2.对约束条件加以图解，找出可行域。

3.画出目标函数等值线。

4.结合目标函数的要求求出最优解。

线性规划问题解的状况

- 线性规划问题
  - 无可行解
  - 有可行解
    - 无最优解
    - 有最优解
      - 唯一最优解
      - 无穷多最优解

由图解法得到的启示：

1.求解线性规划问题时，解的情况有：唯一解；无穷多最优解；无界解；无可行解。

2.若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个凸集。

3.若线性规划问题的最优解存在，则最优解或最优解之一（有无穷多最优解）一定是可行域的凸集的某个顶点。

4.解题思路是，先找出凸集的任一顶点，计算在顶点处的目标函数值。比较周围相邻顶点的目标函数值是否比这个值大，如果为否，则该顶点就是最优解的点或最优解的点之一，否则转到比这个点的目标函数值更大的另一顶点，重复上述过程，一直到找出使目标函数值达到最大的顶点为止。

线性规划的基本定理

$$\min \quad c^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

其中 $A = A_{m \times n}$， $m < n$，

$c \in R^n$， $b \in R^m$，

假设 rank（A）= m，

即 A 是行满秩的.

引理： 设 A=$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是秩为m的m×n 矩阵，

$k = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$,

则 $x \in k$ 为 k 的顶点（极点）的充要条件为 x 的所有正分量在A中对应的列向量构成线性无关组。

设 $A=[p_1, p_2, \cdots, p_m, p_{m+1}, \cdots, p_n]$,

其中 $p_j=[a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}]^T$ 表示矩阵A的第 j 列

由于$rank(A)=m$, 因此存在m各线性无关的列向量,

不防设A的前m列向量 $p_1, \cdots, p_m$线性无关. 记

$$A = [B, N]$$

$$x = [x_B, x_N]^T$$

定义:

基(矩阵): B 非基矩阵: N

基向量: $p_1, \cdots, p_m$ 非基向量: $p_{m+1}, \cdots, p_n$

基变量: $x_B = (x_1, \cdots, x_m)$ 非基变量: x_N

$$Ax = b \iff [B, N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$$

$$\iff Bx_B + Nx_N = b$$

$$\iff x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

当非基变量 $x_N = 0$ 时，基变量 $x_B = B^{-1}b$

$$f(x) = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T b + (c_N^T - c_B^T N)x_N.$$

定义 2.3.3 称

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

为线性规划对应于基 B 的**基本解**（basic solution）.

定义 2.3.5 若 x 是可行解又是基本解，则称 x 为基本可行解（basic feasible solution），此时称 B 为可行基.

引理 2.3.1 设 $\bar{x}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，则 $\bar{x}$ 是基本解的充分必要条件是：$\bar{x}$ 的非零分量 $\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \cdots, \bar{x}_{i_r}$ 对应的向量 $\bar{p}_{i_1}, \bar{p}_{i_2}, \cdots, \bar{p}_{i_r}$ 线性无关.

定理 2.3.1 如果线性规划问题有可行解，则一定有基本可行解.

定理 2.3.2 如果线性规划问题有最优解，则一定有最优基本可行解.

定理 2.3.3 $\bar{x}$ 是可行解集 D 的极点（顶点）的充分必要条件是：$\bar{x}$ 是基本可行解.

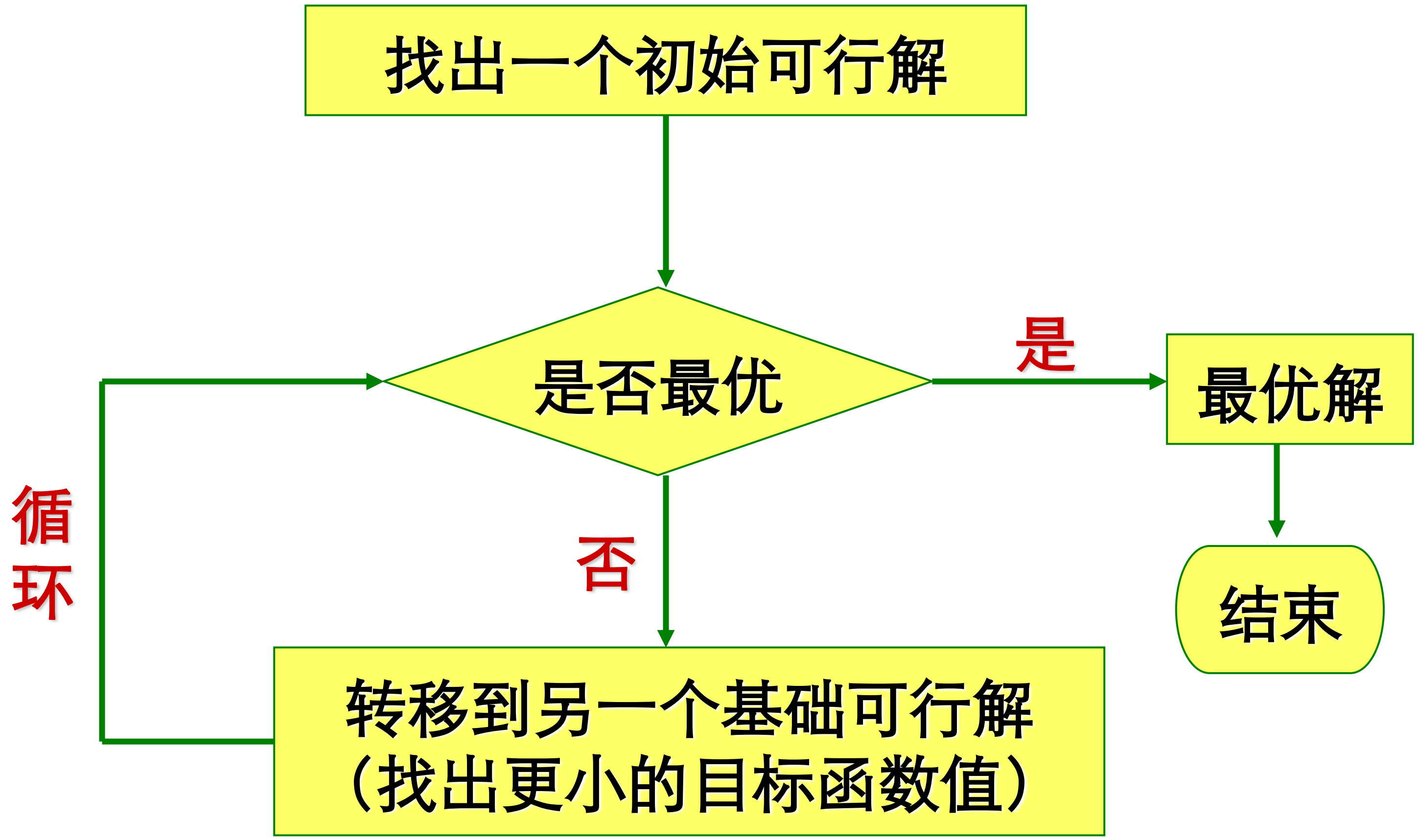
推论 2.3.2 如果线性规划问题有最优解，则最优解必在某个顶点处达到.

单纯形法的计算步骤

如何改善？

如何判断没有有限最优解？

- 单纯形法的思路



核心是：变量迭代

例：考虑线性规划：

$$\min\ z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{aligned} 2x_1 - 4x_3 + x_4 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

基变量	x_2, x_4
非基变量	x_1, x_3

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_4 &= 6 - 2x_1 + 4x_3 \\ x_2 &= 5 + x_1 - 3x_3 \end{aligned}$$

令 $x_1 = x_3 = 0$，得 $x_4 = 6, x_2 = 5$ 即得一基本解 $(0,5,0,6)^T$

是否是基本可行解? $x_B = B^{-1}b \geq 0$ $(0,5,0,6)^T$ 是基本可行解

$(0,5,0,6)^T$是否为最优解？

把 x_2和 x_4代入目标函数以消去基变量x_2和 x_4

$$z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4$$
$$= 9 - 10x_1 + 27x_3$$

$(0,5,0,6)^T$不是最优解，

x_1 增大， z 增小

2	0	-4	1	6
-1	1	3	0	5
1	-3	2	4	0

2	0	-4	1	6
-1	1	3	0	5
-10	0	27	0	-9

不是最优解，关键是目标函数中出现负的系数

最优解的条件：是目标函数中不出现负的系数

取 x_1为进基变量（换入变量），选择离基变量（换出变量）。

确定换出变量的原则：

使新的基础解可行，既满足非负性条件.

原来的变量

基变量	x_2, x_4
非基变量	x_1, x_3

x_3仍为非基变量，故x_3取值为 0

因此换出变量只需保证

$$\begin{cases} x_4 = 6 - 2x_1 \geq 0 \\ x_2 = 5 + x_1 \geq 0 \end{cases}$$

当$x_4 = 0$时，非负性条件得到满足，选择 x_4作为换出变量

$$x_j \le \min\{\frac{b_i}{a_{ij}} \mid a_{ij} > 0, 1 \le i \le m\}$$

选取使右端达到最小下标的 i 对应的元

2	0	-4	1	6
-1	1	3	0	5
-10	0	27	0	-9

→

1	0	-2	1/2	3
0	1	1	1/2	8
0	0	7	5	21

则$x_1 = 3, x_2 = 8, (x_3 = 0, x_4 = 0)$

最优解：$(3, 8, 0, 0)^T$

最优值：-21

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

目标是min，则最优性判定条件是检验数非负

目标是max，则最优性判定条件是检验数非正

算法 10.1 *(单纯形法，* $A = (B, N)$.*)*

步 *1* 取初始基础可行解 $x = (x_B^T, x_N^T)^T = (b^T, 0^T)^T$.

步 *2* 计算非基变量的检验数 $\sigma_N = c_N^T - c_B^T N$. 若 $\sigma_N \geq 0$, 则停止计算，得解 x. 否则在非基变量中确定换入变量 x_j 使 $\sigma_j = \min\{\sigma_k,\ k \in N\}$.

步 *3* 令 $\bar{\alpha}_j$ 表示 N 的第 j 列. 若 $\alpha_j \leq 0$, 则停止计算. 此时，问题的解不存在. 否则转下一步.

步 *4* 确定下标 i 使

$$\frac{b_i}{\alpha_{ij}} = \min\{\frac{b_k}{\alpha_{kj}} \mid \alpha_{kj} > 0\}.$$

步 *5* 以 α_{ij} 为主元，在方程组 $Ax = b$ 中进行 *Gauss* 消元，将第 j 列变为单位向量. 转步 *2*.

表格单纯形法

标准型：

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1} + \cdots + c_{n+m}x_{n+m}$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} -Z & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+m} & b \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_m \\ 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{m+n} & 0 \end{pmatrix}$$

表格单纯形法

基变量

$C_j \rightarrow$			c_1	$\cdots$	c_n	c_{n+1}	$\cdots$	c_{n+m}	θ_i
C_B	基	b	x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	
c_{n+1}	x_{n+1}	b_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	1		0	θ_1
c_{n+2}	x_{n+2}	b_2	a_{21}	$\cdots$	a_{2n}	0		0	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_{n+m}	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	0		1	θ_m
-Z		-Z_0	C_1-Z_1	$\cdots$	C_n-Z_n	0	$\cdots$	0	

基变量系数

检验数

右端常数

最小比值列

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} a_{ij} \qquad j = 1,2,\ldots\ldots n$$

$$Z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} b_i$$

c_j			1	-3	2	4	θ_i
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
4	x_4	6	2	0	-4	1	6/2
-3	x_2	5	-1	1	3	0	
σ_j		9	-10	0	27	0	

$$\sigma_1 = c_1 - (c_4 a_{11} + c_2 a_{21}) = 1 - (4 \times 2 + (-3) * (-1)) = -10$$

c_j			1	-3	2	4	θ_i
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	x_1	3	1	0	-2	1/2	
-3	x_2	8	0	1	1	1/2	
σ_j		-21	0	0	7	5	

单纯形法进一步讨论

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots c_n x_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

人造基

添加人工变量造成基

去掉人工变量

处理方法　两阶段法

$$\min Z = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m}$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \sim x_n \geq 0, x_{n+1} \sim x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

人工变量

两阶段法

第一阶段

$$\max Z = -x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m}$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \sim x_n \geq 0, x_{n+1} \sim x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

第一阶段最优解中:

如果Z<0, 则原问题没有基本可行解;

如果Z=0, 则若人工变量全为非基变量,则得到原问题的基本可行解. 否则基本可行解退化,继续迭代就可以得到基本可行解.

两阶段单纯形法

第一阶段

$$\max Z = -x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m}$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \sim x_n \geq 0, x_{n+1} \sim x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

第二阶段

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$$

以第一阶段最优基作为初始基本可行解,继续迭代.

初始基础可行解的确定 — 两阶段单纯形法

原线性规划的可行解存在 $\Leftrightarrow$

上述线性规划的最优解存在，并且最优目标函数值为 0

例6

$$\text{Max } z = -3x_1 + x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4$$
$$-2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1$$
$$3x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 \geq 0、\ x_2 \geq 0、\ x_3 \geq 0$$

例6用两阶段法求解，第一阶段的线性规划问题可写为

$$\max z = -x_6 - x_7$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \quad - x_5 + x_6 \quad &= 1 \\ 3x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_7 &= 9 \\ x_j \geq 0 \qquad\qquad\qquad\quad & \end{aligned}$$

c_j			0	0	0	0	0	-1	-1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0	4
-1	x_6	1	-2	[1]	-1	0	-1	1	0	1
-1	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1	3
			-2	4	0	0	-1	0	0	
0	x_4	3	3	0	2	1	1	-1	0	1
0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0	~
-1	x_7	6	[6]	0	4	0	3	-3	1	1
			6	0	4	0	3	-4	0	
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2	
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3	
0	x_1	1	1	0	2/3	0	1/2	-1/2	1/6	
			0	0	0	0	0	-1	-1	

第二阶段将上表中的人工变量x_6，x_7除去，目标函数改为：　　$\text{Max } z = -3x_1 + x_3$

再从上表中的最后一个表出发，继续用单纯形法计算。

			-3	0	1	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	~
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	9
-3	x_1	1	1	0	[2/3]	0	1/2	3/2
			0	0	3	0	3/2	
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	
0	x_2	5/2	-1/2	1	0	0	-1/4	
1	x_3	3/2	3/2	0	1	0	3/4	
			-3/2	0	0	0	-3/4	

Matlab软件 Optimization Toolbox

- linprog 求解线性规划
- bintprog 求解0-1整数规划
- fmincon 求解带约束的非线性规划
- fminunc 求解无约束非线性规划
- ga 采用遗传算法求解规划问题

线性规划

例1 混合配料问题

某糖果厂用原料A，B，C加工成三种不同牌号的糖果甲、乙、丙。已知各种牌号糖果中A、B、C含量、原料成本、各种原料的每月限制用量，三种牌号糖果的单位加工费及售价，如表1-17所示。问该厂每月生产这三种牌号糖果各多少kg，才能使其获利最大。试建立这个问题的线性规划的数学模型。

表 1-17

原料	甲	乙	丙	原料成本（元/kg）	每月限制用量(kg)
A	≥60%	≥30%		2.00	2000
B				1.50	2500
C	≤20%	≤50%	≤60%	1.00	1200
加工费（元/kg）	0.50	0.40	0.30		
售价（元/kg ）	3.40	2.85	2.25		

解 用i=1,2,3分别代表原料A，B，C，用j=1,2,3分别代表甲、乙、丙三种糖果，x_{ij}为生产第j种糖果耗用的第i种原料的kg数量。该厂的获利为三种牌号糖果的售价减去相应的加工费和原料成本，三种糖果的生产量分别为：

$x_{甲}$，$x_{乙}$，$x_{丙}$

$$
\begin{aligned}
\max z &= (3.40-0.50)(x_{11}+x_{21}+x_{31})+(2.85-0.40)(x_{12}+x_{22}+x_{32}) \\
&+(2.25-0.30)(x_{13}+x_{23}+x_{33})-2.0(x_{11}+x_{12}+x_{13}) \\
&-1.50(x_{21}+x_{22}+x_{23})-1.0(x_{31}+x_{32}+x_{33}) \\
&=0.9x_{11}+1.4x_{21}+1.9x_{31}+0.45x_{12}+0.95x_{22}+1.45x_{32} \\
&-0.05x_{13}+0.45x_{23}+0.95x_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 2000 \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 2500 \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}\le 1200 \\
x_{11}\ge 0.6(x_{11}+x_{21}+x_{31}) \\
x_{31}\le 0.2(x_{11}+x_{21}+x_{31}) \\
\mathrm{x}_{12}\ge 0.3(x_{12}+x_{22}+x_{32}) \\
x_{32}\le 0.5(x_{12}+x_{22}+x_{32}) \\
x_{33}\le 0.6(x_{13}+x_{23}+x_{33}) \\
\mathrm{x}_{\mathrm{ij}}\ge 0(i=1,2,3;\ j=1,2,3)
\end{cases}
$$

原料月供应量限制

含量成分的限制

- 计算采用Matlab软件

[x,feval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

结果：

Matlab 中线性规划的标准型为

$$\min_{x} c^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

Matlab code

```
f=-[0.9 1.4 1.9 0.45 0.95 1.45 -0.05 0.45 0.95]';
A=[1 0 0 1 0 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1 0 0 1 0;
    0 0 1 0 0 1 0 0 1;
    -0.4 0.6 0.6 0 0 0 0 0 0;
    -0.2 -0.2 0.8 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 -0.7 0.3 0.3 0 0 0;
    0 0 0 -0.5 -0.5 0.5 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 -0.6 -0.6 0.4];
b=[2000 2500 1200 0 0 0 0 0]';
lb=zeros(9,1);
[x,feval]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
```

计算结果

x11=0.5800e+003

x21= 0.2862e+003

x31= 0.1005e+003

x12=1.4200e+003

x22=2.2138e+003

x32= 1.0995e+003

x13=0.0000

x23=0.0000

x33= 0.0000

例2 捷运公司在下一年度的1~4月的4个月内拟租用仓库堆放物资。已知各月份所需仓库面积列于表1-2。仓库租借费用随合同期而定，期限越长，折扣越大，具体数字见表1-3。租借仓库的合同每月初都可办理，每份合同具体规定租用面积和期限。因此该厂可根据需要，在任何一个月初办理租借合同。每次办理时可签一份合同，也可签若干份租用面积和租借期限不同的合同，试确定该公司签订租借合同的最优决策，目的是使所付租借费用最小。

表1-2

单位：100m^2

月 份	1	2	3	4
所需仓库面积	15	10	20	12

表1-3

单位：元/100m^2

合同租赁期限	1 个月	2 个月	3 个月	4 个月
合同期内的租费	2800	4500	6000	7300

例2中若用变量x_{ij}表示捷运公司在第i(i=1,…,4)个月初签订的租借期为j(j=1,…,4)个月的仓库面积的合同。因5月份起该公司不需要租借仓库，故x_{24}，x_{33}，x_{34}，x_{42}，x_{43}，x_{44}均为零。该公司希望总的租借费用为最小，故有如下数学模型：

目标函数

$$\min z = 2\,800(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+4\,500(x_{12}+x_{22}+x_{32})$$

$$+6\,000(x_{13}+x_{23})+7\,300x_{14}$$

结果是多少?

约束条件 s.t.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\geq 15 \\ x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{21}+x_{22}+x_{23}\geq 10 \\ x_{13}+x_{14}+x_{22}+x_{23}+x_{31}+x_{32}\geq 20 \\ x_{14}+x_{23}+x_{32}+x_{41}\geq 12 \\ x_{ij}\geq 0(\mathrm{i}=1,..,\mathrm{m};\ \mathrm{j}=1,..,\mathrm{n}) \end{cases}$$

投资问题

例3：某部门现有资金200万元，今后五年内考虑给以下的项目投资。已知：项目A：从第一年到第五年每年年初都可投资，当年末能收回本利110%；项目B：从第一年到第四年每年年初都可投资，次年末能收回本利125%，但规定每年最大投资额不能超过30万元；项目C：需在第三年年初投资，第五年末能收回本利140%，但规定最大投资额不能超过80万元；项目D：需在第二年年初投资，第五年末能收回本利155%，但规定最大投资额不能超过100万元。

问：

应如何确定这些项目的每年投资额，使得第五年年末拥有资金的本利金额为最大？

投资问题

解： 1）确定决策变量：连续投资问题

设 x_{ij}（i = 1—5，j = 1、2、3、4）表示第 i 年初投资于A(j=1)、B(j=2)、C(j=3)、D(j=4)项目的金额。这样我们建立如下*决策变量*：

A	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{51}
B	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	
C			x_{33}		
D		x_{24}			

2）约束条件：

第一年：A当年末可收回投资，故第一年年初应把全部资金投出去，于是：

$$x_{11}+x_{12}=200$$

第二年：B次年末才可收回投资故第二年年初的资金为$1.1x_{11}$，于是：

$$x_{21}+x_{22}+x_{24}=1.1x_{11}$$

第三年：年初的资金为$1.1x_{21}+1.25x_{12}$，于是：

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1.1x_{21}+1.25x_{12}$$

第四年：年初的资金为$1.1x_{31}+1.25x_{22}$，于是：

$$x_{41}+x_{42}=1.1x_{31}+1.25x_{22}$$

第五年：年初的资金为$1.1x_{41}+1.25x_{32}$，于是：

$$x_{51}=1.1x_{41}+1.25x_{32}$$

B、C、D的投资限制：$x_{i2}\leqslant 30$（$i=1$，2，3，4），$x_{33}\leqslant 80$，$x_{24}\leqslant 100$

3）目标函数及模型：

$$\text{Max } z=1.1x_{51}+1.25x_{42}+1.4x_{33}+1.55x_{24}$$

$$\text{s.t. } x_{11}+x_{12}=200$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{24}=1.1x_{11}$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1.1x_{21}+1.25x_{12}$$

$$x_{41}+x_{42}=1.1x_{31}+1.25x_{22}$$

$$x_{51}=1.1x_{41}+1.25x_{32}$$

$$x_{i2}\leqslant 30\ (i=1、2、3、4),$$

$$x_{33}\leqslant 80,\ x_{24}\leqslant 100$$

$$x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,3,4,5;\ j=1,2,3,4)$$

练 习

- 编写单纯形方法的程序
- 利用编写的程序计算例2和例3.
- 利用Matlab软件求解例2和例3,对比与自己所编程序的所得结果。
- 复习上课内容,练习自己独立求解例题

作业

- 《Numerical Optimization》
  13.1， 13.5