线性代数

一、基本知识

1. 本书中所有的向量都是列向量的形式：

   $$\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

   本书中所有的矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 都表示为：

   $$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{bmatrix}$$

   简写为：$(x_{i,j})_{m\times n}$ 或者 $[x_{i,j}]_{m\times n}$ 。

2. 矩阵的`F`范数：设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{m\times n}$，则其`F` 范数为：$||\mathbf{A}||_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}$ 。

   它是向量的 L_2 范数的推广。

3. 矩阵的迹：设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{m\times n}$，则$\mathbf{A}$的迹为： $tr(\mathbf{A}) = \sum_i a_{i,i}$。

   迹的性质有：

   - $\mathbf{A}$ 的`F` 范数等于$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 的迹的平方根：$||\mathbf{A}||_F = \sqrt{tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)}$ 。
   - $\mathbf{A}$ 的迹等于$\mathbf{A}^T$ 的迹：$tr(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}^T)$ 。
   - 交换律：假设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，则有：$tr(\mathbf{A}\mathbf{B}) = tr(\mathbf{B}\mathbf{A})$ 。
   - 结合律：$tr(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}) = tr(\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}) = tr(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{A})$ 。

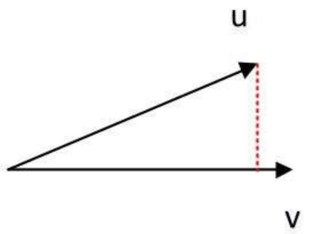
二、向量操作

1. 一组向量 $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_n$ 是线性相关的：指存在一组不全为零的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得：$\sum_{i=1}^n a_i \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{0}}$ 。

   一组向量 $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_n$ 是线性无关的，当且仅当 $a_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n$ 时，才有：$\sum_{i=1}^n a_i \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{0}}$ 。

2. 一个向量空间所包含的最大线性无关向量的数目，称作该向量空间的维数。

3. 三维向量的点积：$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = |\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}| \cos(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ 。



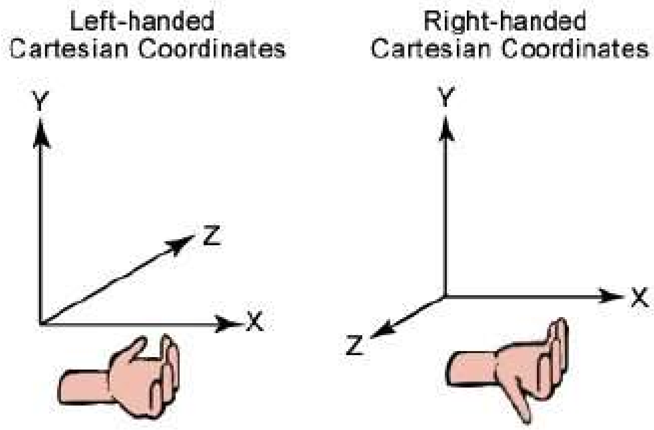
4. 三维向量的叉积：

$$\vec{\mathbf{w}}=\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}=\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{bmatrix}$$

其中 $\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}}$ 分别为 x,y,z 轴的单位向量。

$$\vec{\mathbf{u}}=u_x\vec{\mathbf{i}}+u_y\vec{\mathbf{j}}+u_z\vec{\mathbf{k}},\quad \vec{\mathbf{v}}=v_x\vec{\mathbf{i}}+v_y\vec{\mathbf{j}}+v_z\vec{\mathbf{k}}$$

- $\vec{\mathbf{u}}$ 和 $\vec{\mathbf{v}}$ 的叉积垂直于 $\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}$ 构成的平面，其方向符合右手规则。
- 叉积的模等于 $\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}$ 构成的平行四边形的面积
- $\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}=-\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{u}}$
- $\vec{\mathbf{u}}\times(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}})=(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{v}}-(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{w}}$



5. 三维向量的混合积：

$$[\vec{\mathbf{u}}\ \vec{\mathbf{v}}\ \vec{\mathbf{w}}]=(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})\cdot\vec{\mathbf{w}}=\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}})$$
$$=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_x & v_x & w_x\\ u_y & v_y & w_y\\ u_z & v_z & w_z\end{vmatrix}$$

其物理意义为：以 $\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}$ 为三个棱边所围成的平行六面体的体积。 当 $\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}$ 构成右手系时，该平行六面体的体积为正号。

6. 两个向量的并矢：给定两个向量 $\vec{\mathbf{x}}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\vec{\mathbf{y}}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$ ，则向量的并矢记作：

$$\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m\end{bmatrix}$$

也记作 $\vec{\mathbf{x}} \otimes \vec{\mathbf{y}}$ 或者 $\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{y}}^T$。

三、矩阵运算

1. 给定两个矩阵 $\mathbf{A}=(a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{B}=(b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ，定义：
   - 阿达马积`Hadamard product`（又称作逐元素积）：
$$\mathbf{A}\circ\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}b_{1,n} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}b_{m,1} & a_{m,2}b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}b_{m,n} \end{bmatrix}$$
   - 克罗内积`Kronnecker product`：
$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & a_{1,2}\mathbf{B} & \cdots & a_{1,n}\mathbf{B} \\ a_{2,1}\mathbf{B} & a_{2,2}\mathbf{B} & \cdots & a_{2,n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}\mathbf{B} & a_{m,2}\mathbf{B} & \cdots & a_{m,n}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$
2. 设 $\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}$ 为 n 阶向量， $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X}$ 为 n 阶方阵，则有：
$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\vec{\mathbf{x}})}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=\frac{\partial(\vec{\mathbf{x}}^T\vec{\mathbf{a}})}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=\vec{\mathbf{a}}$$
$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}})}{\partial\mathbf{X}}=\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}^T=\vec{\mathbf{a}}\otimes\vec{\mathbf{b}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$
$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}^T\vec{\mathbf{b}})}{\partial\mathbf{X}}=\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{a}}^T=\vec{\mathbf{b}}\otimes\vec{\mathbf{a}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$
$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{a}})}{\partial\mathbf{X}}=\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}^T\vec{\mathbf{a}})}{\partial\mathbf{X}}=\vec{\mathbf{a}}\otimes\vec{\mathbf{a}}$$
$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}})}{\partial\mathbf{X}}=\mathbf{X}(\vec{\mathbf{a}}\otimes\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{b}}\otimes\vec{\mathbf{a}})$$
$$\frac{\partial[(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{a}})^T\mathbf{C}(\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{b}})]}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=\mathbf{A}^T\mathbf{C}(\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{b}})+\mathbf{B}^T\mathbf{C}(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{a}})$$
$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}})}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\vec{\mathbf{x}}$$
$$\frac{\partial[(\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})^T\mathbf{A}(\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})]}{\partial\mathbf{X}}=(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)(\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}}^T$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{b}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\vec{\mathbf{c}})}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}}^T + \mathbf{A}\mathbf{X}\vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{b}}^T$$

3. 如果 f 是一元函数，则：
   - 其逐元向量函数为：$f(\vec{\mathbf{x}}) = (f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))^T$ 。
   - 其逐矩阵函数为：

$$f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} f(x_{1,1}) & f(x_{1,2}) & \cdots & f(x_{1,n}) \\ f(x_{2,1}) & f(x_{2,2}) & \cdots & f(x_{2,n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_{m,1}) & f(x_{m,2}) & \cdots & f(x_{m,n}) \end{bmatrix}$$

   - 其逐元导数分别为：

$$f'(\vec{\mathbf{x}}) = (f'(x1), f'(x2), \cdots, f'(x_n))^T$$
$$f'(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} f'(x_{1,1}) & f'(x_{1,2}) & \cdots & f'(x_{1,n}) \\ f'(x_{2,1}) & f'(x_{2,2}) & \cdots & f'(x_{2,n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'(x_{m,1}) & f'(x_{m,2}) & \cdots & f'(x_{m,n}) \end{bmatrix}$$

4. 各种类型的偏导数：
   - 标量对标量的偏导数：$\frac{\partial u}{\partial v}$ 。
   - 标量对向量（n 维向量）的偏导数：$\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{v}}} = (\frac{\partial u}{\partial v_1}, \frac{\partial u}{\partial v_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial v_n})^T$ 。
   - 标量对矩阵($m \times n$ 阶矩阵)的偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial V_{1,1}} & \frac{\partial u}{\partial V_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial V_{1,n}} \\ \frac{\partial u}{\partial V_{2,1}} & \frac{\partial u}{\partial V_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial V_{2,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial V_{m,1}} & \frac{\partial u}{\partial V_{m,2}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial V_{m,n}} \end{bmatrix}$$

   - 向量（m 维向量）对标量的偏导数：$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial v} = (\frac{\partial u_1}{\partial v}, \frac{\partial u_2}{\partial v}, \cdots, \frac{\partial u_m}{\partial v})^T$ 。
   - 向量（m 维向量）对向量 (n 维向量) 的偏导数（雅可比矩阵，行优先）

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial \vec{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} & \frac{\partial u_1}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial v_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial v_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial v_1} & \frac{\partial u_m}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial v_n} \end{bmatrix}$$

     如果为列优先，则为上面矩阵的转置。
   - 矩阵($m \times n$ 阶矩阵)对标量的偏导数

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_{1,1}}{\partial v} & \frac{\partial U_{1,2}}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial U_{1,n}}{\partial v} \\ \frac{\partial U_{2,1}}{\partial v} & \frac{\partial U_{2,2}}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial U_{2,n}}{\partial v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial U_{m,1}}{\partial v} & \frac{\partial U_{m,2}}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial U_{m,n}}{\partial v} \end{bmatrix}$$

5. 对于矩阵的迹，有下列偏导数成立：

$$\frac{\partial [tr(f(\mathbf{X}))]}{\partial \mathbf{X}} = (f'(\mathbf{X}))^T$$

$$\frac{\partial [tr(\mathbf{AXB})]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$$

$$\frac{\partial [tr(\mathbf{AX}^T \mathbf{B})]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{BA}$$

$$\frac{\partial [tr(\mathbf{A} \otimes \mathbf{X})]}{\partial \mathbf{X}} = tr(\mathbf{A})\mathbf{I}$$

$$\frac{\partial [tr(\mathbf{AXBX})]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}^T \mathbf{X}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{X} \mathbf{A}^T$$

$$\frac{\partial [tr(\mathbf{X}^T \mathbf{BXC})]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{BXC} + \mathbf{B}^T \mathbf{X} \mathbf{C}^T$$

$$\frac{\partial [tr(\mathbf{C}^T \mathbf{X}^T \mathbf{BXC})]}{\partial \mathbf{X}} = (\mathbf{B}^T + \mathbf{B})\mathbf{XCC}^T$$

$$\frac{\partial [tr(\mathbf{AXBX}^T \mathbf{C})]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \mathbf{X} \mathbf{B}^T + \mathbf{CAXB}$$

$$\frac{\partial [tr((\mathbf{AXB} + \mathbf{C})(\mathbf{AXB} + \mathbf{C}))]}{\partial \mathbf{X}} = 2\mathbf{A}^T (\mathbf{AXB} + \mathbf{C})\mathbf{B}^T$$

6. 假设 $\mathbf{U} = f(\mathbf{X})$ 是关于 $\mathbf{X}$ 的矩阵值函数（$f : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m \times n}$），且 $g(\mathbf{U})$ 是关于 $\mathbf{U}$ 的实值函数（$g : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$），则下面链式法则成立：

$$\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{X}} = \left(\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{i,j}} \right)_{m \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{1,1}} & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{1,n}} \\ \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{2,1}} & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{2,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{m,1}} & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{m,2}} & \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{m,n}} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\sum_k \sum_l \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial u_{k,l}} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial x_{i,j}} \right)_{m \times n} = \left(tr \left[\left(\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_{i,j}} \right] \right)_{m \times n}$$

四、特殊函数

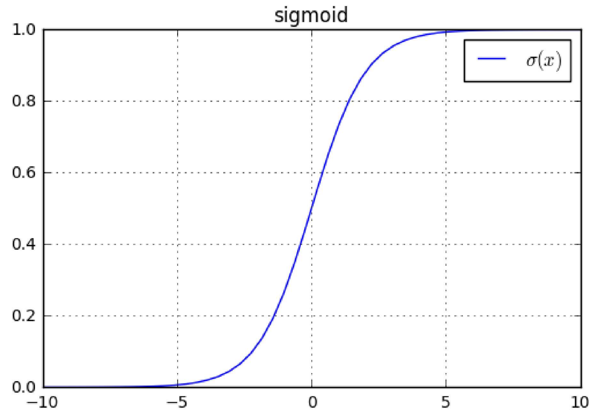
1. 这里给出机器学习中用到的一些特殊函数。

4.1 sigmoid 函数

1. `sigmoid` 函数：

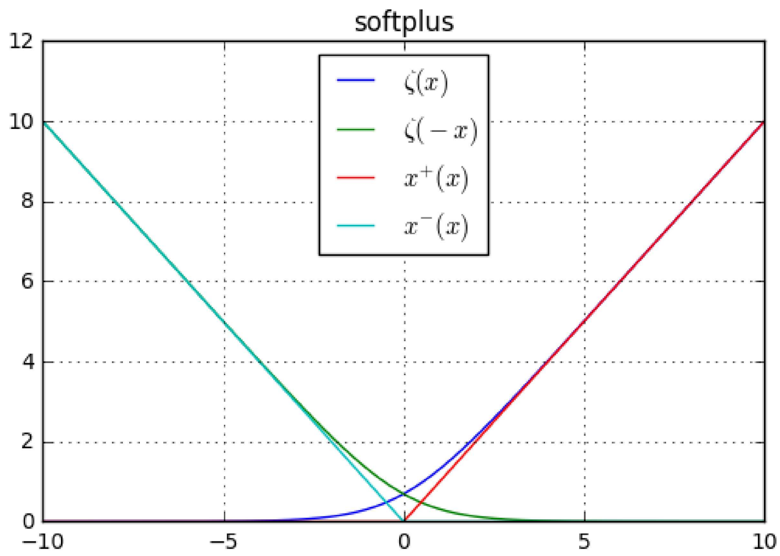
$$\sigma(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$$

   - 该函数可以用于生成二项分布的 ϕ 参数。
   - 当 x 很大或者很小时，该函数处于饱和状态。此时函数的曲线非常平坦，并且自变量的一个较大的变化只能带来函数值的一个微小的变化，即：导数很小。



4.2 softplus 函数

1. `softplus` 函数：$\zeta(x) = \log(1+\exp(x))$ 。
   - 该函数可以生成正态分布的 σ^2 参数。
   - 它之所以称作 `softplus`，因为它是下面函数的一个光滑逼近：$x^+ = \max(0,x)$ 。



2. 如果定义两个函数：

$$x^+ = \max(0, x)$$
$$x^- = \max(0, -x)$$

则它们分布获取了 $y = x$ 的正部分和负部分。

根据定义有：$x = x^+ - x^-$ 。而 $\zeta(x)$ 逼近的是 x^+， $\zeta(-x)$ 逼近的是 x^-，于是有：

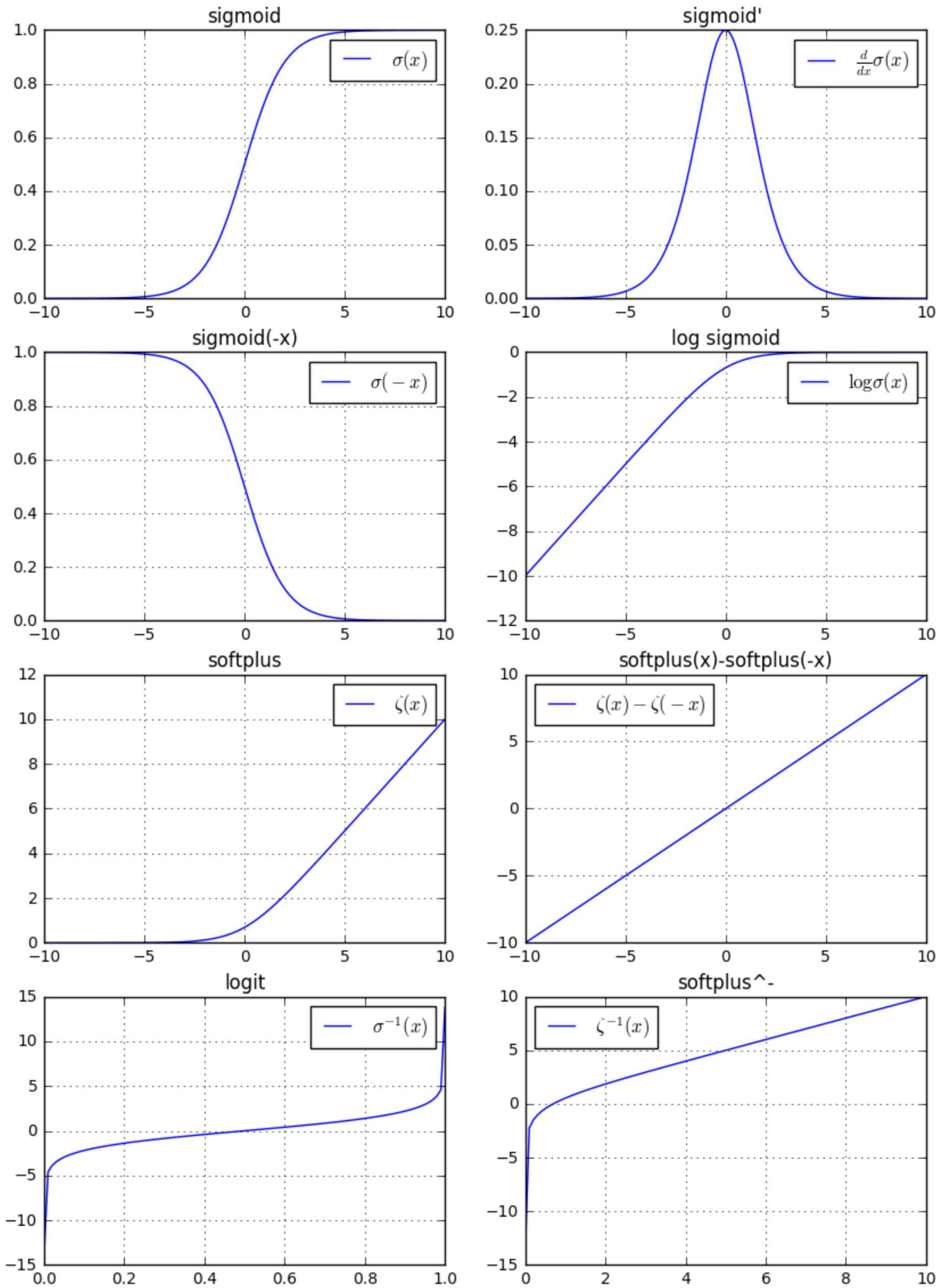
$$\zeta(x) - \zeta(-x) = x$$

3. `sigmoid`和`softplus`函数的性质：

$$\sigma(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x) + \exp(0)}$$
$$\frac{d}{dx}\sigma(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x))$$
$$1 - \sigma(x) = \sigma(-x)$$
$$\log \sigma(x) = -\zeta(-x)$$
$$\frac{d}{dx}\zeta(x) = \sigma(x)$$
$$\forall x \in (0, 1), \sigma^{-1}(x) = \log(\frac{x}{1 - x})$$
$$\forall x > 0, \zeta^{-1}(x) = \log(\exp(x) - 1)$$
$$\zeta(x) = \int_{-\infty}^{x} \sigma(y) dy$$
$$\zeta(x) - \zeta(-x) = x$$

其中 $f^{-1}(\cdot)$ 为反函数。

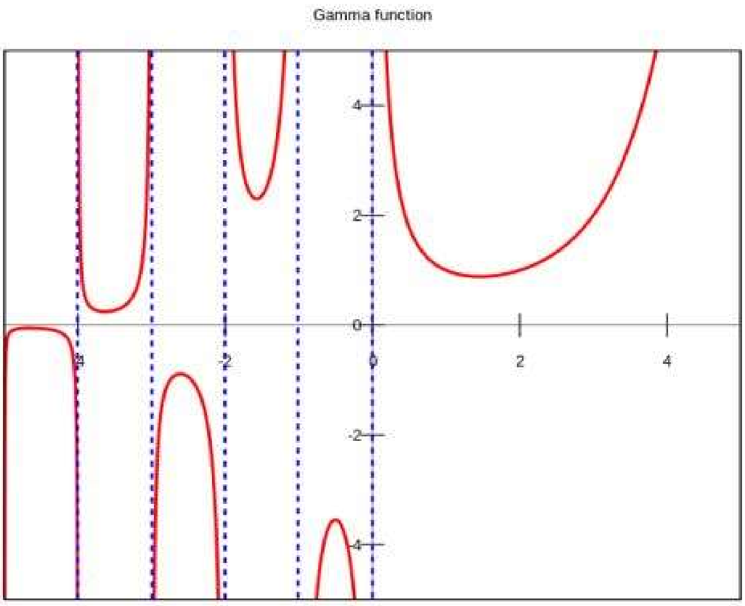
$\sigma^{-1}(x)$ 也称作`logit`函数。



4.3 伽马函数

1. 伽马函数定义为：

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \quad ,x\in\mathbb{R}$$
$$or. \quad \Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \quad ,z\in\mathbb{Z}$$



性质为：

- 对于正整数 n 有：$\Gamma(n)=(n-1)!$ 。
- $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ ，因此伽马函数是阶乘在实数域上的扩展。
- 与贝塔函数的关系：

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

- 对于 $x\in(0,1)$ 有：

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$$

  则可以推导出重要公式：$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ 。
- 对于 $x>0$，伽马函数是严格凹函数。

2. 当 x 足够大时，可以用 `Stirling` 公式来计算 `Gamma` 函数值：$\Gamma(x)\sim\sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x+1/2}$ 。

4.4 贝塔函数

1. 对于任意实数 $m,n>0$ ，定义贝塔函数：

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

其它形式的定义：

$$B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}(x)\cos^{2n-1}(x)dx$$
$$B(m,n)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$$
$$B(m,n)=\int_0^1\frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$$

2. 性质：
   - 连续性：贝塔函数在定义域 $m>0,n>0$ 内连续。
   - 对称性：$B(m,n)=B(n,m)$ 。
   - 递个公式：
$$B(m,n)=\frac{n-1}{m+n-1}B(m,n-1),\quad m>0,n>1$$
$$B(m,n)=\frac{m-1}{m+n-1}B(m-1,n),\quad m>1,n>0$$
$$B(m,n)=\frac{(m-1)(n-1)}{(m+n-1)(m+n-2)}B(m-1,n-1),\quad m>1,n>1$$
   - 当 m,n 较大时，有近似公式：
$$B(m,n)=\frac{\sqrt{(2\pi)m^{m-1/2}n^{n-1/2}}}{(m+n)^{m+n-1/2}}$$
   - 与伽马函数关系：
     - 对于任意正实数 m,n ，有：
$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$
     - $B(m,1-m)=\Gamma(m)\Gamma(1-m)$ 。