QR方法复共轭特征值情形

2023/6/19 10:39

QR方法

$$\underline{Q^T A Q} = \begin{pmatrix} R_{11} & & & \\ & \underline{R_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{mm} \end{pmatrix}$$

R_{ii} 或是一个实数

或是一个具有一对复共轭特征值

的 2×2 矩阵

假设 R_{11} 有一对复共轭特征值， $R_{11} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

可求出特征值 $\lambda, \bar{\lambda}$，和特征向量 $v, \bar{v}$.

$\tilde{Q}_1 = [v, \bar{v}]$ 　则 $\tilde{Q}_1^H R_{11} Q_{11} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$

$Q_1 = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & \\ & I_{n-2} \end{pmatrix}$ 　 $Q_1^H Q^T A Q Q_1 = Q_1^H \begin{pmatrix} R_{11} & & & \\ & R_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{mm} \end{pmatrix} Q_1^H$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \bar{\lambda} & & & \\ & & R_{22} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{mm} \end{pmatrix}$$

A对应 λ 的特征向量： QQ_1 的第一列

$R_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ 　 $(\lambda-1)(\lambda-4)+6=0$ 　 $\lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0$

$\lambda = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} i$

$\lambda = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} i$

$R_{11} - \lambda I = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} i & 2 \\ -3 & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} i \end{pmatrix}$ 　 $V = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ 　 $v = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$