Méthodes mathématiques de la théorie quantique - 2022

Bases de l'Information quantique - Day 2

Nana Engo

Department of Physics
Faculty of Science
University of Yaounde I

`https://github.com/NanaEngo/Memaquan2022`

Dangbo, Bénin - 11 - 15 Juillet 2022

Sommaire - Day 2 - 12 Juillet 2022

Opérateur statistique - Définitions I

1. Un système est dans un **état pur** lorsqu'il est isolé ou soumis à des contraintes fixes, qui ne sont pas affectées par l'évolution du système
   1. On dispose alors d'une information complète sur le système
   2. On utilise un **vecteur d'état** pour décrire un tel système
2. Un système est dans un **état mélange statistique** ou un **état ensemble quantique**, lorsqu'il
   - a interagi avec un autre, puis s'en est séparé
   - n'est qu'une petite partie d'un ensemble plus important
   - présente dans sa préparation ou son évolution, des éléments fluctuants, nécessitant l'utilisation de moyennes statistiques

   1. L'information sur le système est dans ce cas incomplète. On caractérise l'information manquante sur le système ou ignorance par l'**entropie statistique de von Neumann**
   2. Le système est mathématiquement décrit par l'**opérateur statistique** ρ, aussi appelé **matrice densité**

Opérateur statistique - Définitions II

Definition (Opérateur statistique d'un état pur)

On appelle **opérateur statistique ou densité** associé à l'état $|\psi\rangle$ d'un système pur, l'opérateur

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{1}$$

Il est équivalent à l'opérateur projecteur P_ψ sur l'état $|\psi\rangle$

Definition (Opérateur statistique d'un mélange statistique d'états)

Pour un système défini par le mélange statistique $\{|\psi_i\rangle, \mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, l'**opérateur statistique** est

$$\rho = \sum_i \mathcal{P}_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_i \mathcal{P}_i \rho_i \qquad \sum_i \mathcal{P}_i = 1 \tag{2}$$

Le mélange statistique d'états est donc décrit par l'opérateur statistique *moyen* des différents opérateurs statistiques possibles du système

Opérateur statistique - Théorème de Gleason I

- La prémisse du Théorème de Gleason, qui apparait à l'Eq. (2), est que le but de la théorie quantique est d'assigner des probabilités à toutes les projections orthogonales possibles dans un espace de Hilbert

Theorem (Gleason)

La description la plus générale d'un système quantique est donnée par un opérateur statistique, qui constitue la manière la plus générale d'attribuer des probabilités additives à des sous-espaces de l'espace des états

Theorem (Non-unicité de la préparation)

Il est impossible de distinguer physiquement les divers types de mélanges statistiques qui conduisent à un même opérateur statistique

Opérateur statistique - Théorème de Gleason II

Exemple 1.1 – Non-unicité de la préparation

On considère un spin-1/2 dont les vecteurs propres de $\mathtt{Z}$ *sont* $|\pm\rangle$ *et ceux de* $\mathtt{X}$, $|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} = (|+\rangle \pm |-\rangle)$.

$$
\begin{aligned}
\rho_z &= \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| = \frac{1}{2}\mathbb{I} \\
\rho_x &= \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+|)_x + \frac{1}{2}(|-\rangle\langle-|)_x \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle)(\langle+| + \langle-|) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(|+\rangle - |-\rangle)(\langle+| - \langle-|) \\
&= \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| = \rho_z
\end{aligned}
$$

Opérateur statistique - Propriétés fondamentales I

Propriété 1 : Opérateur hermitien

$$\boxed{\rho = \rho^\dagger} \tag{3}$$

Propriété 2 : Opérateur positif

$\forall |u\rangle \in \mathcal{H}$, la probabilité pour que le système soit dans l'état $|u\rangle$ est

$$\boxed{\langle u|\rho|u\rangle = \sum_i \mathcal{P}_i \langle u|\psi_i\rangle\langle\psi_i|u\rangle = \sum_i \mathcal{P}_i |\langle\psi_i|u\rangle|^2 \geq 0} \tag{4}$$

ρ diagonalisable et ses valeurs propres $\lambda_i \geq 0$ et de somme unité

Opérateur statistique - Propriétés fondamentales II

Propriété 3 : Conservation de la probabilité totale

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\rho) = 1} \tag{5}$$

Propriété 4 : Opérateur projecteur

La condition nécessaire et suffisante pour que ρ décrive un état pur est

$$\boxed{\rho^2 = \rho} \tag{6}$$

Opérateur statistique - Propriétés fondamentales III

Corollaire 1.1 – Pureté quantique

$\mathrm{Tr}(\rho^2)$ *est appelée* ***pureté quantique*** *de l'état*

Dans un état pur

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1} \tag{7}$$

Dans un mélange statistique

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\rho^2) \leq 1} \tag{8}$$

- (8) indique que ρ n'est plus nécessairement un projecteur
- La valeur minimale de la pureté quantique est $\frac{1}{N}$, $N = \dim \mathcal{H}$. Dans ce cas, on a un **état complètement ou maximalement mélangé**

Opérateur statistique - Propriétés auxiliaires I

Propriété 5 : Valeur moyenne (Théorème de Gleason simplifié)

$$\boxed{\langle \mathtt{A} \rangle_\psi = \mathrm{Tr}(\rho \mathtt{A})} \qquad (9)$$

Propriété 6 : Probabilité - Règle de Born

$$\boxed{\mathcal{P}(a_n) = \mathrm{Tr}(P_n |\psi\rangle\langle\psi|) = \mathrm{Tr}(P_n \rho) \qquad P_n = |n\rangle\langle n|} \qquad (10)$$

Cette Propriété est aussi connue comme étant le postulat de la mesure au sens de von Neumann

Opérateur statistique - Propriétés auxiliaires II

Postulat de Lüders : Etat du système immédiatement après la mesure

$$\boxed{\frac{P_n \rho P_n}{\mathrm{Tr}(P_n \rho)}} \tag{11}$$

Propriété 6 : Évolution temporelle ou équation de von Neumann

$$\boxed{i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [\mathtt{H}, \rho(t)]} \tag{12}$$

Puisque $|\psi(t)\rangle = \mathtt{U}(t)|\psi(0)\rangle$, la solution de l'équation (12) est

$$\boxed{\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \mathtt{U}(t)|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|\mathtt{U}^\dagger(t) = \mathtt{U}(t)\rho(0)\mathtt{U}^\dagger(t)} \tag{13}$$

Exemple 1.2 – Statistic operator for a quantum ensemble

Suppose that a system is prepare with

$$75\% \text{ in } |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle \quad 25\% \text{ in } |b\rangle = \frac{2}{3}|+\rangle - \frac{\sqrt{5}}{3}|-\rangle$$

1. *Compute the statistic operator for the quantum ensemble*
2. *A measurement is made. What are the probabilities of finding $|+\rangle$ and $|-\rangle$?*

1. $\rho = \frac{3}{4}|a\rangle\langle a| + \frac{1}{4}|b\rangle\langle b|$, that is

$$\rho = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{2\sqrt{5}}{9} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{5}}{18} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{5}}{18} & \frac{23}{36} \end{pmatrix}$$

2. If we pull a member of the ensemble, the probabilities that a measurement finds it in the $|\pm\rangle$ states are

$$\mathcal{P}(+) = \mathrm{Tr}(\rho|+\rangle\langle+|) = \frac{13}{36} \simeq 0.36 \tag{14}$$

$$\mathcal{P}(-) = \mathrm{Tr}(\rho|-\rangle\langle-|) = \frac{23}{36} \simeq 0.64 \tag{15}$$

Notice that $\mathcal{P}(+) + \mathcal{P}(-) = 1$, as they should

Exemple 1.3 – Évolution d'un opérateur statistique et mesure

A l'instant $t = 0$, un système est dans l'état $\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

1. *Quel est, à l'instant $t' = 1\,\mathrm{s}$, l'opérateur statistique $\rho' = \rho(t')$, si l'opérateur évolution $\mathtt{U}(t', t) = \mathtt{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?*
2. *Si à t' une mesure est effectuée sur la grandeur associée à $\mathtt{Z}$,*

quelle est la probabilité d'obtenir la valeur propre -1 ?

1. En vertu de la relation (13),

$$\rho' = \rho(t') = \mathtt{U}\rho\mathtt{U}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (16)$$

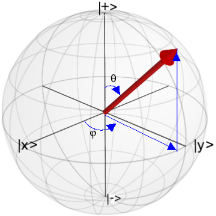
2. Comme l'état propre de $\mathtt{Z}$ associé à la valeur propre -1 est $|1\rangle$, en vertu de la relation (10)

$$\mathcal{P}_{\rho'}(-1) = \mathrm{Tr}(\rho'|1\rangle\langle 1|) = \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4} \quad (17)$$

Opérateur statistique d'un qubit en représentation de Pauli I

- Il est souvent commode de décomposer ρ sur la base des matrices de Pauli $\{\mathbb{I}, \mathtt{X}, \mathtt{Y}, \mathtt{Z}\}$

Un état pur d'un 1-qubit générique est représenté par un point sur la sphère de rayon unité appelée **sphère de Bloch**



$$|\psi\rangle = e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$\begin{aligned}\rho(\theta,\varphi) = |\psi\rangle\langle\psi| &= \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \hat{\mathfrak{b}}\cdot\hat{\sigma})\end{aligned} \tag{18}$$

avec $\hat{\mathfrak{b}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, $\hat{\sigma}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}, \mathtt{Z})$

Opérateur statistique d'un qubit en représentation de Pauli II

- On vérifie que $\mathrm{Tr}(\rho(\theta,\varphi)) = 1$ et $\rho^2(\theta,\varphi) = \rho(\theta,\varphi)$ (état pur)
- Compte tenu du fait que dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$,

$$\mathbb{I} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \quad \mathtt{X} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|, \quad \mathtt{Y} = i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|), \quad \mathtt{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

pour $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}\rho = |\psi\rangle\langle\psi| &= |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \beta\alpha^*|1\rangle\langle 0| \\ &= |\alpha|^2\frac{1}{2}(\mathbb{I}+\mathtt{Z}) + |\beta|^2\frac{1}{2}(\mathbb{I}-\mathtt{Z}) + \alpha\beta^*\frac{1}{2}(\mathtt{X}+i\mathtt{Y}) + \beta\alpha^*\frac{1}{2}(\mathtt{X}-i\mathtt{Y}) \\ &= \frac{1}{2}[(|\alpha|^2+|\beta|^2)\mathbb{I} + (|\alpha|^2-|\beta|^2)\mathtt{Z} + (\alpha\beta^*+\beta\alpha^*)\mathtt{X} + i(\alpha\beta^*-\beta\alpha^*)\mathtt{Y}] \\ &= \frac{1}{2}[\mathbb{I} + b_z\mathtt{Z} + b_x\mathtt{X} + b_y\mathtt{Y}]\end{aligned} \tag{19a}$$

$$\boxed{\rho(\mathrm{b}) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathrm{b}\cdot\hat{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+b_z & b_x - i b_y \\ b_x + i b_y & 1 - b_z \end{pmatrix}} \tag{19b}$$

Opérateur statistique d'un qubit en représentation de Pauli III

- Pour interpréter physiquement $\mathrm{b} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_z\hat{z}$, on calcule

$$b_x = \langle \mathtt{X} \rangle = \mathrm{Tr}(\rho \mathtt{X}) \quad b_y = \langle \mathtt{Y} \rangle = \mathrm{Tr}(\rho \mathtt{Y}) \quad b_z = \langle \mathtt{Z} \rangle = \mathrm{Tr}(\rho \mathtt{Z}) \tag{20}$$

> On détermine l'état en effectuant des moyennes : le concept d'état quantique est statistique

- ρ non-négatif $\Rightarrow$ les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \det\rho = \lambda_1\lambda_2 \geq 0$,

$$\stackrel{(19)}{\Rightarrow} \det\rho = \frac{1}{2}(1 - |\mathrm{b}|^2) \geq 0 \Rightarrow \boxed{0 \leq |\mathrm{b}| \leq 1} \tag{21}$$

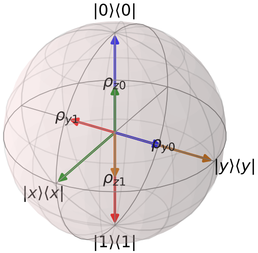
Opérateur statistique d'un qubit en représentation de Pauli IV

L'état quantique d'un qubit est entièrement défini par son vecteur de Bloch b tel que $0 \leq |\mathrm{b}| \leq 1$ i.e., le rayon du vecteur est à l'intérieur de la sphère de Bloch ou sur sa surface

Vecteur de Bloch et état de polarisation

- Pour un état pur, ρ a pour valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ et donc $\det \rho = 0$ ou $|\mathrm{b}| = 1$, l'extrémité du vecteur est sur la surface de la sphère de Bloch. On dit que le système est **complètement polarisé**
- Le cas $|\mathrm{b}| = 0$, **non polarisé** ou de polarisation nulle
- Le cas $0 < |\mathrm{b}| < 1$, **partiellement polarisé** ou mélange statistique

Opérateur statistique d'un qubit en représentation de Pauli V



- **États purs**, $|0\rangle\langle 0|$, $|1\rangle\langle 1|$, $|x\rangle\langle x| = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathtt{X})$, $|y\rangle\langle y| = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathtt{Y})$
- **États mélanges statistiques** $\rho_{z_0} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \frac{1}{2}\mathtt{Z})$, $\rho_{z_1} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \frac{1}{2}\mathtt{Z})$, $\rho_{y_0} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \frac{1}{2}\mathtt{Y})$, $\rho_{y_1} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \frac{1}{2}\mathtt{Y})$

Exemple 2.1 – Représentation de Pauli d'un 1-qubit

Donnons la représentation de Pauli de l'opérateur statistique

$$\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \tag{22}$$

En utilisant (20), on trouve

$$\left.\begin{aligned} b_x &= \mathrm{Tr}(\rho \mathtt{X}) = \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0, \\ b_y &= \mathrm{Tr}(\rho \mathtt{Y}) = \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right] = 0, \\ b_z &= \mathrm{Tr}(\rho \mathtt{Z}) = \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}, \end{aligned}\right\} \implies \rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \frac{1}{2}\mathtt{Z}) \tag{23}$$

Il s'agit d'un état mélange statistique puisque

$$|\mathrm{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = b_z = \frac{1}{2} < 1 \tag{24}$$

Exemple 2.2 – Représentation de Pauli d'un 2-qubit

Donner, dans la base standard, la forme matricielle de l'opérateur statistique dont la représentation de Pauli est

$$\rho = \frac{1}{4}\sum_{i,j=0}^{3} b_{ij}(\mathtt{X}_i \otimes \mathtt{X}_j) = 4\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + 2\mathbb{I}\otimes\mathtt{X} + 4\mathbb{I}\otimes\mathtt{Z} - \mathtt{X}\otimes\mathtt{X} + 5\mathtt{Y}\otimes\mathtt{Y} + 2\mathtt{Z}\otimes\mathtt{X}.$$

Compte tenu de la forme matricielle des opérateurs de Pauli dans la base standard, on a

$$\rho = 4\begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \mathtt{X} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathtt{X} \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \mathtt{Z} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathtt{Z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathtt{X} \\ \mathtt{X} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$
$$+ 5\begin{pmatrix} \mathbb{O} & -i\mathtt{Y} \\ i\mathtt{Y} & \mathbb{O} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \mathtt{X} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathtt{X} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4\mathbb{I} + 2\mathtt{X} + 4\mathtt{Z} & -\mathtt{X} - 5i\mathtt{Y} \\ -\mathtt{X} + 5i\mathtt{Y} & 4\mathbb{I} + 4\mathtt{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -6 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opérateur statistique réduit - Trace partielle I

- On considère un système quantique bipartite ((A), (B)) tels que l'on peut faire des mesures sur (A) sans affecter (B) (ou inversement), décrit par ρ agissant dans $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$
- Soit $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) une propriété physique du sous-syst. (A) (resp. (B))
- L'**opérateur statistique réduit** ρ_A (resp. ρ_B) agissant dans $\mathcal{H}_A$ (resp. $\mathcal{H}_B$) est tel que

$$\langle \mathtt{A} \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_A \mathtt{A}) \qquad \rho_A = \mathrm{Tr}_B\rho = \sum_m (\langle m| \otimes \mathbb{I}_A)\rho(\mathbb{I}_A \otimes |m\rangle) = \sum_m \langle m|\rho|m\rangle \tag{25a}$$

$$\langle \mathtt{B} \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_B \mathtt{B}) \qquad \rho_B = \mathrm{Tr}_A\rho = \sum_n (\mathbb{I}_B \otimes \langle n|)\rho(|n\rangle \otimes \mathbb{I}_B) = \sum_n \langle n|\rho|n\rangle \tag{25b}$$

- Tr_B (resp. Tr_A) est la **trace partielle** de ρ dans $\mathcal{H}_B$ (resp. $\mathcal{H}_A$)

Exemple 3.1 – Trace partielle - Approche vectorielle

Alice et Bob se partagent $|B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$, *s'envolent dans des directions opposées et n'ont plus accès au système complet*

- *L'opérateur statistique global est*

$$\rho = |B_{10}\rangle\langle B_{10}| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| - |00\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \tag{26}$$

- $\rho = \rho^\dagger$ *et* $\rho > 0$, $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$, $\rho^2 = \rho \Rightarrow \rho$ *est un projecteur ou un état pur*
- *Ce que Bob voit du système est donné par*

$$\rho_B = \mathrm{Tr}_A(\rho) = \langle 0_A|\rho|0_A\rangle + \langle 1_A|\rho|1_A\rangle = \frac{1}{2}(|0_B\rangle\langle 0_B| + |1_B\rangle\langle 1_B|) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_A \tag{27}$$

- *Bob (resp. Alice) a un état complètement mélangé puisque* $|\mathrm{b}| = 0$ *et*

$$\mathrm{Tr}(\rho_B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad \mathrm{Tr}(\rho_B^2) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(\mathbb{I}_B) = \frac{1}{2} < 1 \tag{28}$$

Exemple 3.2 – Trace partielle - Approche matricielle

On considère, dans l'espace $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \equiv \mathbb{C}^4$, avec $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$, l'opérateur statistique

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

1. *Calculons* $\rho_2 = \mathrm{Tr}_1(\rho)$ *dans la base* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_2$.

   Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ *et*

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T,$$

$$\begin{aligned}
\rho_2 = \mathrm{Tr}_1(\rho) &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34}\\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{34}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&+ \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34}\\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\rho_{33} & \rho_{34}\\ \rho_{43} & \rho_{44}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\rho_{11} + \rho_{33} & \rho_{12} + \rho_{34}\\ \rho_{21} + \rho_{43} & \rho_{22} + \rho_{44}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{30}$$

2. *De la même façon, on trouve que dans la base* $\mathbb{I}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\mathbb{I}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$,

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_2(\rho) = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{13} + \rho_{24} \\ \rho_{31} + \rho_{42} & \rho_{33} + \rho_{44} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

On remarquera que $\det(\mathrm{Tr}_1(\rho)) = \det(\mathrm{Tr}_2(\rho))$

Non-unicité de la préparation

- Les systèmes bipartites présentent un intérêt pour la physique quantique
  - Interactions des uns avec les autres et avec l'environnement
  - Incidence sur les informations codées dans l'état quantique
- Un système quantique (A) à l'état pur peut interagir avec l'environnement (B) et, à la suite de cette interaction, l'état de (A) peut devenir un état mixte et faire partir d'un système bipartite (A+B)
- Le formalisme pour décrire les systèmes bipartites est basé sur la décomposition de Schmidt
- Le Théorème de la décomposition de Schmidt permet d'exprimer un vecteur d'état intriqué comme produit tensoriel des états orthogonaux appartenant respectivement aux différents sous-systèmes

Théorème de la décomposition de Schmidt I

Theorem (Décomposition de Schmidt)

- *Soit $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un état bipartite pur*

  *La **décomposition de Schmidt** de $|\psi\rangle$ est*

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_i^{N_s} \sqrt{p_i}|\alpha_i\beta_i\rangle} \tag{32}$$

- *$|\alpha_i\rangle \in \mathcal{H}_A$ et $|\beta_i\rangle \in \mathcal{H}_B$ sont orthogonaux et sont **les bases de Schmidt** des sous-systèmes (A) et (B)*
- *Les $\sqrt{p_i}$ sont les **coefficients de Schmidt** et sont tels que*

$$p_i \geq 0, \quad \sum_i^{N_s} p_i = 1, \quad p_i \text{ valeurs propres de } \rho_A = \mathrm{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \tag{33}$$

Théorème de la décomposition de Schmidt II

Algorithme de la décomposition de Schmidt

1. Trouver la matrice réduite ρ_A
2. Diagonaliser ρ_A, $\rho_A = \sum_i p_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$
3. Calculer $|\beta_i\rangle = \frac{(\mathbb{I}\otimes\langle\alpha_i|)|\psi\rangle}{\sqrt{p_i}}$ ou diagonaliser ρ_B, $\rho_B = \sum_i p_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i|$
4. Construire $|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}|\alpha_i\beta_i\rangle$

- Ainsi, tout état d'un système bipartite correspond à des opérateurs statistiques réduits ayant le même spectre de valeurs propres non-nulles
- Le nombre des $p_i \neq 0$ est le **nombre de Schmidt** N_S de l'état $|\psi\rangle$
  - L'état $|\psi\rangle$ est intriqué lorsque $N_S > 1$
  - l'état $|\psi\rangle$ est factorisable ou séparable lorsque $N_S = 1$
  - N_S est un critère d'intrication et pas une mesure du degré d'intrication car il ne prend pas en compte le poids de chaque terme

Exemple 4.1 – Décomposition de Schmidt

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \tag{34}$$

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)(\langle 00| - \langle 10| - \langle 01| + \langle 11|) \tag{35}$$

- *L'opérateur statistique réduit d'Alice est*

$$\begin{aligned}\rho_A = \mathrm{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) &= {}_B\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle_B + {}_B\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle_B \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{36}$$

- *Ces valeurs propres sont $p_1 = 0$ et $p_2 = 1$ et donc $N_s = 1$ et par suite l'état est factorisable. Le vecteur propre associé à $p_2 = 1$ est $|\alpha_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |\beta_2\rangle$. Et donc*

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_2}|\alpha_2\rangle|\beta_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \tag{37}$$

Definition (Entropie quantique)

- L'entropie statistique de von Neumann

$$\boxed{S(\rho) = -\sum_i \mathcal{P}_i \ln \mathcal{P}_i = -\operatorname{Tr} \rho \ln \rho = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i} \tag{38}$$

caractérise l'information manquante ou ignorance dans l'état décrit par ρ ; les λ_i sont les valeurs propres de ρ

  - $S(\rho)$ fournit aussi une réponse sur la quantité d'informations acquises lors d'une mesure

- En électronique numérique, on utilise l'entropie de Shannon, $H = -\sum_i \mathcal{P}_i \ln \mathcal{P}_i$, pour numériser une source en utilisant le minimum possible de bits sans perte d'informations

Exemple 5.1 – Entropie quantique

L'entropie des états

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -\frac{3}{4}\ln(\frac{3}{4}) - \frac{1}{4}\ln(\frac{1}{4}) = 0.56 \\ S(\sigma) &= -\frac{9}{10}\ln(\frac{9}{10}) - \frac{1}{10}\ln(\frac{1}{10}) = 0.325 \end{aligned} \tag{40}$$

montre qu'on a plus d'informations sur l'état σ avant qu'une mesure ne soit effectuée parce qu'il est plus certain que le résultat soit $|0\rangle$

Pr 1 Pour un état état pur, $S(\rho) = 0$, i.e., que le désordre est minimal. En effet, dans ce cas, seule une des valeurs propres de ρ est non nulle, supposons $\lambda_1 = 1$, de sorte que $-\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i = -\lambda_1 \ln \lambda_1 = 0$

Pr 2 Si $\dim \mathcal{H} = N$, ρ correspondant au désordre maximal est $\rho = \frac{\mathbb{I}_n}{N}$, i,e., un état mélange statistique complet, et l'entropie de von Neumann $S(\rho) = \ln N$ est maximale (l'ignorance *à priori* des résultats des mesures est maximale) : $S(\rho)$ fournit une mesure d'informations en unités de qubits

Pr 3 L'entropie n'est pas modifiée par une transformation unitaire de la base, i.e., $S(\mathtt{U}\rho\mathtt{U}^\dagger) = S(\rho)$. $S(\rho)$ dépend seulement des valeurs propres de ρ, qui sont base-indépendantes : l'entropie de von Neumann est invariante sous une évolution temporelle unitaire

Propriétés de l'entropie quantique II

Pr 4 *Additivité* des produits des états

$$S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) \tag{41}$$

Si ρ_A et ρ_B sont les matrices réduites du système composite ρ_{AB}, on a l'*inégalité sub-additive*

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B) \tag{42}$$

Pour avoir le plus d'informations (moins d'ignorance) sur un système intriqué, il faut considérer le système dans son ensemble

Pr 5 L'entropie relative entre les états ρ et σ est

$$S(\rho \parallel \sigma) = \mathrm{Tr}(\rho \ln \rho) - \mathrm{Tr}(\sigma \ln \sigma) = S(\sigma) - S(\rho) \tag{43}$$

Entropie quantique comme mesure d'intrication

Definition (Degré d'intrication d'un système (A+B))

Le degré d'intrication ou la pureté quantique d'un système (A+B) est

$$d_{int} = S(\rho_A) = S(\rho_B) \tag{44}$$

- $d_{int} = 0$ pour un système séparable ou factorisable (compression totale de l'information locale)
- $d_{int} = \ln N$ pour un système totalement intriqué (pas de compression d'information locale possible)

Le degré d'intrication d_{int} apparaît comme la mesure de l'augmentation de notre ignorance lorsque nous perdons la possibilité de faire des mesures sur le système dans son ensemble et que nous n'avons accès localement qu'à l'un des deux sous-systèmes

Exemple 5.2 – Entropie état de Bell

Alice et Bob partagent une partie de l'état de Bell $|B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^t$

1. *Déterminer l'entropie* $S(\rho)$ *du système entier.*
2. *Évaluer l'entropie telle que vue par Alice individuellement, i.e.,* $-\mathrm{Tr}(\rho_A \ln \rho_A)$

1. $\rho = |B_{10}\rangle\langle B_{10}| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{45}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_i = 1, 0, 0, 0$ et donc

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i = -\lambda_1 \ln \lambda_1 = 0 \tag{46}$$

$S(\rho)$ étant minimale, le gain d'informations est maximal

2. Pour Alice, dans la base $\{\mathbb{I}_A \otimes \binom{1}{0}, \mathbb{I}_A \otimes \binom{0}{1}\}$,
   1. $\rho_A = \left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\rho\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^t\right] +$
   $\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rho\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^t\right]$ soit

$$\rho_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbb{I}_B \tag{47}$$

   2. Comme ρ_A est diagonale,

$$-\operatorname{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \ln 2 \tag{48}$$

$S(\rho_A)$ étant maximale, le système est maximalement intriqué