

# Méthodes mathématiques de la théorie quantique - 2022

## Bases de l'Information quantique - Day 2

Nana Engo

Department of Physics  
Faculty of Science  
University of Yaounde I

<https://github.com/NanaEngo/Memaquan2022>

Porto-Novo - 11 - 15 Juillet 2022



# Sommaire - Day 2

- 1 Opérateur statistique ou opérateur densité
- 2 Opérateur statistique d'un qubit en représentation de Pauli
- 3 Opérateur statistique réduit - Trace partielle
- 4 Non-unicité de la préparation
- 5 Entropie quantique



# Opérateur statistique - Définitions I

- ① Un système est dans un **état pur** lorsqu'il est isolé ou soumis à des contraintes fixes, qui ne sont pas affectées par l'évolution du système
  - ① On dispose alors d'une **information complète** sur le système
  - ② On utilise un **vecteur d'état** pour décrire un tel système
- ② Un système est dans un **état mélange statistique** ou un **état ensemble quantique**, lorsqu'il
  - a interagi avec un autre, puis s'en est séparé
  - n'est qu'une petite partie d'un ensemble plus important
  - présente dans sa préparation ou son évolution, des éléments fluctuants, nécessitant l'utilisation de moyennes statistiques
  - ① **L'information sur le système est dans ce cas incomplète.** On caractérise l'information manquante sur le système ou ignorance par l'**entropie statistique de von Neumann**
  - ② Le système est mathématiquement décrit par l'**opérateur statistique**  $\rho$ , aussi appelé **matrice densité**



# Opérateur statistique - Définitions II

## Definition (Opérateur statistique d'un état pur)

On appelle **opérateur statistique** ou **densité** associé à l'état  $|\psi\rangle$  d'un **système pur**, l'opérateur

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (1)$$

Il est équivalent à l'opérateur projecteur  $P_\psi$  sur l'état  $|\psi\rangle$

## Definition (Opérateur statistique d'un mélange statistique d'états)

Pour un système défini par le **mélange statistique**  $\{|\psi_i\rangle, \mathcal{P}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , l'**opérateur statistique** est

$$\rho = \sum_i \mathcal{P}_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_i \mathcal{P}_i \rho_i \quad \sum_i \mathcal{P}_i = 1 \quad (2)$$

Le mélange statistique d'états est donc décrit par l'opérateur statistique **moyen** des différents opérateurs statistiques possibles du système



# Opérateur statistique - Théorème de Gleason I

- La prémisse du Théorème de Gleason, qui apparaît à l'Eq. (2), est que le but de la théorie quantique est d'assigner des probabilités à toutes les projections orthogonales possibles dans un espace de Hilbert

## Theorem (Gleason)

*La description la plus générale d'un système quantique est donnée par un opérateur statistique, qui constitue la manière la plus générale d'attribuer des probabilités additives à des sous-espaces de l'espace des états*

## Theorem (Non-unicité de la préparation)

*Il est impossible de distinguer physiquement les divers types de mélanges statistiques qui conduisent à un même opérateur statistique*



## Exemple 1.1 – Non-unicité de la préparation

On considère un spin-1/2 dont les vecteurs propres de Z sont  $|\pm\rangle$  et ceux de X,  $|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)$ .

$$\rho_z = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| = \frac{1}{2}\mathbb{I}$$

$$\begin{aligned}\rho_x &= \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+|)_x + \frac{1}{2}(|-\rangle\langle-|)_x \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle)(\langle+| + \langle-|) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(|+\rangle - |-\rangle)(\langle+| - \langle-|) \\ &= \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| = \rho_z\end{aligned}$$



## Propriété 1 : Opérateur hermitien

$$\rho = \rho^\dagger \quad (3)$$

## Propriété 2 : Opérateur positif

$\forall |u\rangle \in \mathcal{H}$ , la probabilité pour que le système soit dans l'état  $|u\rangle$  est

$$\langle u|\rho|u\rangle = \sum_i \mathcal{P}_i \langle u|\psi_i\rangle \langle \psi_i|u\rangle = \sum_i \mathcal{P}_i |\langle \psi_i|u\rangle|^2 \geq 0 \quad (4)$$

$\rho$  diagonalisable et ses valeurs propres  $\lambda_i \geq 0$  et de somme unité



## Propriété 3 : Conservation de la probabilité totale

$$\text{Tr}(\rho) = 1 \quad (5)$$

## Propriété 4 : Opérateur projecteur

La condition nécessaire et suffisante pour que  $\rho$  décrive un état pur est

$$\rho^2 = \rho \quad (6)$$





## Corollaire 1.1 – Pureté quantique

$\text{Tr}(\rho^2)$  est appelée **pureté quantique** de l'état

*Dans un état pur*

*Dans un mélange statistique*

$$\text{Tr}(\rho^2) = 1 \quad (7)$$

$$\text{Tr}(\rho^2) \leq 1 \quad (8)$$

- (8) indique que  $\rho$  n'est plus nécessairement un projecteur
- La valeur minimale de la pureté quantique est  $\frac{1}{N}$ ,  $N = \dim \mathcal{H}$ . Dans ce cas, on a un **état complètement ou maximalement mélangé**



## Propriété 5 : Valeur moyenne (Théorème de Gleason simplifié)

$$\langle A \rangle_\psi = \text{Tr}(\rho A) \quad (9)$$

## Propriété 6 : Probabilité - Règle de Born

$$\mathcal{P}(a_n) = \text{Tr}(P_n |\psi\rangle\langle\psi|) = \text{Tr}(P_n \rho) \quad P_n = |n\rangle\langle n| \quad (10)$$

Cette Propriété est aussi connue comme étant le **postulat de la mesure au sens de von Neumann**



# Opérateur statistique - Propriétés auxiliaires II

Postulat de Lüders : Etat du système immédiatement après la mesure

$$\frac{P_n \rho P_n}{\text{Tr}(P_n \rho)} \quad (11)$$

Propriété 6 : Évolution temporelle ou équation de von Neumann

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [\mathbb{H}, \rho(t)] \quad (12)$$

Puisque  $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ , la solution de l'équation (12) est

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = U(t)|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|U^\dagger(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t)$$



## Example 1.2 – Statistic operator for a quantum ensemble

Suppose that a system is prepare with

$$75\% \text{ in } |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|-\rangle \quad 25\% \text{ in } |b\rangle = \frac{2}{3}|+\rangle - \frac{\sqrt{5}}{3}|-\rangle$$

- 1 Compute the statistic operator for the quantum ensemble
- 2 A measurement is made. What are the probabilities of finding  $|+\rangle$  and  $|-\rangle$  ?

- 1  $\rho = \frac{3}{4}|a\rangle\langle a| + \frac{1}{4}|b\rangle\langle b|$ , that is

$$\rho = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{2\sqrt{5}}{9} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{5}}{18} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{5}}{18} & \frac{23}{36} \end{pmatrix}$$

- ② If we pull a member of the ensemble, the probabilities that a measurement finds it in the  $|\pm\rangle$  states are

$$\mathcal{P}(+) = \text{Tr}(\rho|+\rangle\langle+|) = \frac{13}{36} \simeq 0.36 \quad (14)$$

$$\mathcal{P}(-) = \text{Tr}(\rho|-\rangle\langle-|) = \frac{23}{36} \simeq 0.64 \quad (15)$$

Notice that  $\mathcal{P}(+) + \mathcal{P}(-) = 1$ , as they should

### Exemple 1.3 – Évolution d'un opérateur statistique et mesure

*A l'instant  $t = 0$ , un système est dans l'état  $\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$*

- ① *Quel est, à l'instant  $t' = 1$  s, l'opérateur statistique  $\rho' = \rho(t')$ , si l'opérateur évolution  $U(t', t) = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ?*
- ② *Si à  $t'$  une mesure est effectuée sur la grandeur associée à  $Z$ ,*

*quelle est la probabilité d'obtenir la valeur propre  $-1$  ?*

- ① En vertu de la relation (13),

$$\rho' = \rho(t') = U\rho U^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (16)$$

- ② Comme l'état propre de  $Z$  associé à la valeur propre  $-1$  est  $|1\rangle$ , en vertu de la relation (10)

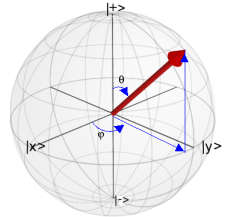
$$\mathcal{P}_{\rho'}(-1) = \text{Tr}(\rho'|1\rangle\langle 1|) = \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \quad (17)$$



# Opérateur statistique d'un qubit en représentation de Pauli I

- Il est souvent commode de décomposer  $\rho$  sur la base des matrices de Pauli  $\{\mathbb{I}, X, Y, Z\}$

Un **état pur** d'un 1-qubit générique est représenté par un point sur la sphère de rayon unité appelée **sphère de Bloch**



$$|\psi\rangle = e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

$$\begin{aligned} \rho(\theta, \varphi) &= |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{I} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\sigma}) \end{aligned} \quad (18)$$

avec  $\hat{\mathbf{b}} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ ,  $\hat{\sigma}(X, Y, Z)$



# Opérateur statistique d'un qubit en représentation de Pauli II

- On vérifie que  $\text{Tr}(\rho(\theta, \varphi)) = 1$  et  $\rho^2(\theta, \varphi) = \rho(\theta, \varphi)$  (**état pur**)
- Compte tenu du fait que dans la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ,

$$\mathbb{I} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \quad \mathbf{x} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|, \quad \mathbf{y} = i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|), \quad \mathbf{z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

pour  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , avec  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , en **coordonnées cartésiennes**

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle\langle\psi| = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \beta\alpha^*|1\rangle\langle 0| \\ &= |\alpha|^2\frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{z}) + |\beta|^2\frac{1}{2}(\mathbb{I} - \mathbf{z}) + \alpha\beta^*\frac{1}{2}(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) + \beta\alpha^*\frac{1}{2}(\mathbf{x} - i\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2}[ (|\alpha|^2 + |\beta|^2)\mathbb{I} + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)\mathbf{z} + (\alpha\beta^* + \beta\alpha^*)\mathbf{x} + i(\alpha\beta^* - \beta\alpha^*)\mathbf{y} ] \\ &= \frac{1}{2}[\mathbb{I} + b_z\mathbf{z} + b_x\mathbf{x} + b_y\mathbf{y}] \end{aligned} \tag{19a}$$

$$\rho(\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + b_z & b_x - ib_y \\ b_x + ib_y & 1 - b_z \end{pmatrix}$$





# Opérateur statistique d'un qubit en représentation de Pauli

## III

- Pour interpréter physiquement  $b = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$ , on calcule

$$b_x = \langle X \rangle = \text{Tr}(\rho X) \quad b_y = \langle Y \rangle = \text{Tr}(\rho Y) \quad b_z = \langle Z \rangle = \text{Tr}(\rho Z) \quad (20)$$

On détermine l'état en effectuant des moyennes : **le concept d'état quantique est statistique**

- $\rho$  non-négatif  $\Rightarrow$  les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow \det \rho = \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$ ,

$$\stackrel{(19)}{\Rightarrow} \det \rho = \frac{1}{2}(1 - |b|^2) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq |b| \leq 1 \quad (21)$$



# Opérateur statistique d'un qubit en représentation de Pauli

## IV

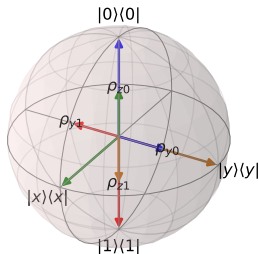
L'état quantique d'un qubit est entièrement défini par son vecteur de Bloch  $\mathbf{b}$  tel que  $0 \leq |\mathbf{b}| \leq 1$  i.e., le rayon du vecteur est à l'intérieur de la sphère de Bloch ou sur sa surface

### Vecteur de Bloch et état de polarisation

- Pour un état pur,  $\rho$  a pour valeurs propres  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = 1$  et donc  $\det \rho = 0$  ou  $|\mathbf{b}| = 1$ , l'extrémité du vecteur est sur la surface de la sphère de Bloch. On dit que le système est **complètement polarisé**
- Le cas  $|\mathbf{b}| = 0$ , **non polarisé** ou de polarisation nulle
- Le cas  $0 < |\mathbf{b}| < 1$ , **partiellement polarisé** ou mélange statistique



# Opérateur statistique d'un qubit en représentation de Pauli



- **États purs**,  $|0\rangle\langle 0|$ ,  $|1\rangle\langle 1|$ ,  $|x\rangle\langle x| = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + X)$ ,  $|y\rangle\langle y| = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + Y)$
- **États mélanges statistiques**  $\rho_{z0} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \frac{1}{2}Z)$ ,  $\rho_{z1} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \frac{1}{2}Z)$ ,  $\rho_{y0} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \frac{1}{2}Y)$ ,  $\rho_{y1} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \frac{1}{2}Y)$



## Exemple 2.1 – Représentation de Pauli d'un 1-qubit

*Donnons la représentation de Pauli de l'opérateur statistique*

$$\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \quad (22)$$

En utilisant (20), on trouve

$$\left. \begin{aligned} b_x &= \text{Tr}(\rho X) = \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0, \\ b_y &= \text{Tr}(\rho Y) = \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] = 0, \\ b_z &= \text{Tr}(\rho Z) = \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \frac{1}{2}Z) \quad (23)$$

Il s'agit d'un état **mélange statistique** puisque

$$|b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = b_z = \frac{1}{2} < 1 \quad (24)$$



## Exemple 2.2 – Représentation de Pauli d'un 2-qubit

*Donner, dans la base standard, la forme matricielle de l'opérateur statistique dont la représentation de Pauli est*

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 b_{ij}(\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{x}_j) = 4\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2\mathbb{I} \otimes \mathbf{X} + 4\mathbb{I} \otimes \mathbf{Z} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X} + 5\mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y} + 2\mathbf{Z} \otimes \mathbf{X}.$$

Compte tenu de la forme matricielle des opérateurs de Pauli dans la



base standard, on a

$$\begin{aligned}\rho &= 4 \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} X & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & X \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} Z & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{O} & X \\ X & \mathbb{O} \end{pmatrix} \\ &+ 5 \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -iY \\ iY & \mathbb{O} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} X & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\mathbb{I} + 2X + 4Z & -X - 5iY \\ -X + 5iY & 4\mathbb{I} + 4Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -6 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$



# Opérateur statistique réduit - Trace partielle I

- On considère un système quantique bipartite ((A), (B)) tels que l'on peut faire des mesures sur (A) sans affecter (B) (ou inversement), décrit par  $\rho$  agissant dans  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$
- Soit  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) une propriété physique du sous-syst. (A) (resp. (B))
- L'opérateur statistique réduit  $\rho_A$  (resp.  $\rho_B$ ) agissant dans  $\mathcal{H}_A$  (resp.  $\mathcal{H}_B$ ) est tel que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A} \rangle &= \text{Tr}(\rho_A \mathcal{A}) & \rho_A &= \text{Tr}_B \rho = \sum_m (\langle m | \otimes \mathbb{I}_A) \rho (\mathbb{I}_A \otimes | m \rangle) = \sum_m \langle m | \rho | m \rangle \\ \langle \mathcal{B} \rangle &= \text{Tr}(\rho_B \mathcal{B}) & \rho_B &= \text{Tr}_A \rho = \sum_n (\mathbb{I}_B \otimes \langle n |) \rho (| n \rangle \otimes \mathbb{I}_B) = \sum_n \langle n | \rho | n \rangle\end{aligned}$$

(25a)

(25b)

- $\text{Tr}_B$  (resp.  $\text{Tr}_A$ ) est la trace partielle de  $\rho$  dans  $\mathcal{H}_B$  (resp.  $\mathcal{H}_A$ )



## Exemple 3.1 – Trace partielle - Approche vectorielle

Alice et Bob se partagent  $|B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ , s'envolent dans des directions opposées et n'ont plus accès au système complet

- L'opérateur statistique global est

$$\rho = |B_{10}\rangle\langle B_{10}| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| - |00\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \quad (26)$$

- $\rho = \rho^\dagger$  et  $\rho > 0$ ,  $\text{Tr}(\rho) = 1$ ,  $\rho^2 = \rho \Rightarrow \rho$  est un projecteur ou un état pur
- Ce que Bob voit du système est donné par

$$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho) = \langle 0_A|\rho|0_A\rangle + \langle 1_A|\rho|1_A\rangle = \frac{1}{2}(|0_B\rangle\langle 0_B| + |1_B\rangle\langle 1_B|) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_B \quad (27)$$

- Bob (resp. Alice) a un état complètement mélangé puisque  $|b| = 0$  et

$$\text{Tr}(\rho_B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{Tr}(\rho_B^2) = \frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbb{I}_B) = \frac{1}{2} < 1 \quad (28)$$



### Exemple 3.2 – Trace partielle - Approche matricielle

On considère, dans l'espace  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \equiv \mathbb{C}^4$ , avec  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$ , l'opérateur statistique

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

❶ Calculons  $\rho_2 = \text{Tr}_1(\rho)$  dans la base  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_2$ .

Comme  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$  et



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

$$\begin{aligned} \rho_2 = \text{Tr}_1(\rho) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{33} & \rho_{12} + \rho_{34} \\ \rho_{21} + \rho_{43} & \rho_{22} + \rho_{44} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{30}$$



2 De la même façon, on trouve que dans la base

$$\mathbb{I}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbb{I}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

$$\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho) = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{13} + \rho_{24} \\ \rho_{31} + \rho_{42} & \rho_{33} + \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

On remarquera que  $\det(\text{Tr}_1(\rho)) = \det(\text{Tr}_2(\rho))$



# Non-unicité de la préparation

- Les systèmes bipartites présentent un intérêt pour la physique quantique
  - Interactions des uns avec les autres et avec l'environnement
  - Incidence sur les informations codées dans l'état quantique
- Un système quantique ( $A$ ) à l'état pur peut interagir avec l'environnement ( $B$ ) et, à la suite de cette interaction, l'état de ( $A$ ) peut devenir un état mixte et faire partir d'un système bipartite ( $A+B$ )
- Le formalisme pour décrire les systèmes bipartites est basé sur la décomposition de Schmidt
- Le Théorème de la décomposition de Schmidt permet d'exprimer un vecteur d'état intriqué comme produit tensoriel des états orthogonaux appartenant respectivement aux différents sous-systèmes



# Théorème de la décomposition de Schmidt I

## Theorem (Décomposition de Schmidt)

- Soit  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  un *état bipartite pur*

La *décomposition de Schmidt* de  $|\psi\rangle$  est

$$|\psi\rangle = \sum_i^{N_s} \sqrt{p_i} |\alpha_i \beta_i\rangle \quad (32)$$

- $|\alpha_i\rangle \in \mathcal{H}_A$  et  $|\beta_i\rangle \in \mathcal{H}_B$  sont orthogonaux et sont les *bases de Schmidt* des sous-systèmes (A) et (B)
- Les  $\sqrt{p_i}$  sont les *coefficients de Schmidt* et sont tels que

$$p_i \geq 0, \quad \sum_i^{N_s} p_i = 1, \quad p_i \text{ valeurs propres de } \rho_A = \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \quad (33)$$



# Théorème de la décomposition de Schmidt II

## Algorithme de la décomposition de Schmidt

- ① Trouver la matrice réduite  $\rho_A$
  - ② Diagonaliser  $\rho_A$ ,  $\rho_A = \sum_i p_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$
  - ③ Calculer  $|\beta_i\rangle = \frac{(\mathbb{I} \otimes \langle\alpha_i|) |\psi\rangle}{\sqrt{p_i}}$  ou diagonaliser  $\rho_B$ ,  $\rho_B = \sum_i p_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i|$
  - ④ Construire  $|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\alpha_i \beta_i\rangle$
- Ainsi, tout état d'un système bipartite correspond à des opérateurs statistiques réduits ayant le **même spectre de valeurs propres non-nulles**
  - Le nombre des  $p_i \neq 0$  est le **nombre de Schmidt**  $N_S$  de l'état  $|\psi\rangle$ 
    - L'état  $|\psi\rangle$  est **intriqué** lorsque  $N_S > 1$
    - l'état  $|\psi\rangle$  est **factorisable ou séparable** lorsque  $N_S = 1$
    - $N_S$  est un **critère d'intrication** et pas une mesure du degré d'intrication car il ne prend pas en compte le poids de chaque terme



## Exemple 4.1 – Décomposition de Schmidt

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \quad (34)$$

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)(\langle 00| - \langle 01| - \langle 10| + \langle 11|) \quad (35)$$

- *L'opérateur statistique réduit d'Alice est*

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = {}_B\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle_B + {}_B\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle_B \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

- *Ces valeurs propres sont  $p_1 = 0$  et  $p_2 = 1$  et donc  $N_s = 1$  et par suite l'état est factorisable. Le vecteur propre associé à  $p_2 = 1$  est  $|\alpha_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |\beta_2\rangle$ . Et donc*

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_2}|\alpha_2\rangle|\beta_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (37)$$



# Entropie quantique - Définition I

## Définition (Entropie quantique)

- L'entropie statistique de von Neumann

$$S(\rho) = - \sum_i \mathcal{P}_i \ln \mathcal{P}_i = - \text{Tr } \rho \ln \rho = - \sum_i \lambda_i \ln \lambda_i \quad (38)$$

caractérise l'information manquante ou ignorance dans l'état décrit par  $\rho$ ; les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\rho$

- $S(\rho)$  fournit aussi une réponse sur la quantité d'informations acquises lors d'une mesure
- En électronique numérique, on utilise l'entropie de Shannon,  $H = - \sum_i \mathcal{P}_i \ln \mathcal{P}_i$ , pour numériser une source en utilisant le minimum possible de bits sans perte d'informations





## Exemple 5.1 – Entropie quantique

*L'entropie des états*

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$S(\rho) = -\frac{3}{4} \ln\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 0.56 \quad (40)$$

$$S(\sigma) = -\frac{9}{10} \ln\left(\frac{9}{10}\right) - \frac{1}{10} \ln\left(\frac{1}{10}\right) = 0.325$$

*montre qu'on a plus d'informations sur l'état  $\sigma$  avant qu'une mesure ne soit effectuée parce qu'il est plus certain que le résultat soit  $|0\rangle$*



# Propriétés de l'entropie quantique I

- Pr 1 Pour un état pur,  $S(\rho) = 0$ , i.e., que le **désordre est minimal**. En effet, dans ce cas, seule une des valeurs propres de  $\rho$  est non nulle, supposons  $\lambda_1 = 1$ , de sorte que  $-\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i = -\lambda_1 \ln \lambda_1 = 0$
- Pr 2 Si  $\dim \mathcal{H} = N$ ,  $\rho$  correspondant au **désordre maximal** est  $\rho = \frac{\mathbb{I}_N}{N}$ , i.e., un état mélange statistique complet, et l'entropie de von Neumann  $S(\rho) = \ln N$  est maximale (l'ignorance *à priori* des résultats des mesures est maximale) :  $S(\rho)$  fournit une mesure d'informations en unités de qubits
- Pr 3 L'entropie n'est pas modifiée par une transformation unitaire de la base, i.e.,  $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$ .  $S(\rho)$  dépend seulement des valeurs propres de  $\rho$ , qui sont base-indépendantes : l'entropie de von Neumann est invariante sous une évolution temporelle unitaire



# Propriétés de l'entropie quantique II

## Pr 4 Additivité des produits des états

$$S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) \quad (41)$$

Si  $\rho_A$  et  $\rho_B$  sont les matrices réduites du système composite  $\rho_{AB}$ , on a l'*inégalité sub-additive*

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B) \quad (42)$$

Pour avoir le plus d'informations (moins d'ignorance) sur un système intriqué, il faut considérer le système dans son ensemble

## Pr 5 L'entropie relative entre les états $\rho$ et $\sigma$ est

$$S(\rho \parallel \sigma) = \text{Tr}(\rho \ln \rho) - \text{Tr}(\rho \ln \sigma) = S(\sigma) - S(\rho) \quad (43)$$



# Entropie quantique comme mesure d'intrication

## Definition (Degré d'intrication d'un système (A+B))

Le degré d'intrication ou la pureté quantique d'un système (A+B) est

$$d_{int} = S(\rho_A) = S(\rho_B) \quad (44)$$

- $d_{int} = 0$  pour un système séparable ou factorisable (**compression totale de l'information locale**)
- $d_{int} = \ln N$  pour un système totalement intriqué (**pas de compression d'information locale possible**)

Le degré d'intrication  $d_{int}$  apparaît comme la mesure de l'augmentation de notre ignorance lorsque nous perdons la possibilité de faire des mesures sur le système dans son ensemble et que nous n'avons accès **localement** qu'à l'un des deux sous-systèmes

## Exemple 5.2 – Entropie état de Bell

Alice et Bob partagent une partie de l'état de Bell  $|B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ 0 \ -1)^t$

- 1 Déterminer l'entropie  $S(\rho)$  du système entier.
- 2 Évaluer l'entropie telle que vue par Alice individuellement, i.e.,  $-\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A)$

1  $\rho = |B_{10}\rangle\langle B_{10}| = \frac{1}{2} (1 \ 0 \ 0 \ -1)^t (1 \ 0 \ 0 \ -1)$

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Les valeurs propres de cette matrice sont  $\lambda_i = 1, 0, 0, 0$  et donc

$$S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \ln \lambda_i = -\lambda_1 \ln \lambda_1 = 0 \quad (46)$$

$S(\rho)$  étant minimale, le gain d'informations est maximal

② Pour Alice, dans la base  $\{\mathbb{I}_A \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{I}_A \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ,

$$\textcircled{1} \rho_A = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \right] + \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rho \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \right] \text{ soit}$$

$$\rho_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathbb{I}_B \quad (47)$$

② Comme  $\rho_A$  est diagonale,

$$-\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \ln 2 \quad (48)$$

$S(\rho_A)$  étant maximale, le système est maximalement intriqué

