

# Méthodes mathématiques de la théorie quantique - 2022

Bases de l'Information quantique - Day 4

Nana Engo

Department of Physics  
Faculty of Science  
University of Yaounde I

<https://github.com/NanaEngo/Memaquan2022>

Porto-Novo - 11-15 Juillet 2022



- 1 Outils de l'information quantique
- 2 Fax quantique ou téléportation quantique



# Non-clonage quantique I

- L'idée directrice de l'**information quantique** est que l'on peut, en utilisant les spécificités du formalisme quantique, et particulièrement l'**intrication quantique**, concevoir de nouvelles façons de traiter et transmettre l'information

## Theorem (Non-clonage quantique)

*Il n'est pas possible de construire une machine (Quantum Cloning Machine, QCM) qui opère des transformations unitaires et capable de dupliquer (cloner) **parfaitement** un qubit arbitraire*

Comme le principe d'indétermination d'Heisenberg, le **Théorème de non-clonage** définit une **impossibilité intrinsèque**, pas seulement une limitation de laboratoire



# Non-clonage quantique II

- Soit  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  le qubit à dupliquer,  $|R\rangle$  le support vierge et  $|M\rangle$  la machine à dupliquer ou cloner (photocopieuse)
- Est-ce qu'il existe une transformation unitaire  $U$  telle que

$$\begin{aligned} U|\psi\rangle|R\rangle|M\rangle &= |\psi\rangle|\psi\rangle|M(\psi)\rangle \\ &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|M(\psi)\rangle \\ &= (\alpha^2|00\rangle + \alpha\beta(|01\rangle + |10\rangle) + \beta^2|11\rangle)|M(0+1)\rangle \end{aligned} \quad (1)$$

où  $|M(\psi)\rangle$  est l'état final de la machine

- Montrons que  $U$  ne peut exister

$$U|0\rangle|R\rangle|M\rangle = |0\rangle|0\rangle|M(0)\rangle \quad U|1\rangle|R\rangle|M\rangle = |1\rangle|1\rangle|M(1)\rangle$$

En vertu de la linéarité de l'addition dans l'espace de Hilbert,

$$U|\psi\rangle|R\rangle|M\rangle = \alpha|0\rangle|0\rangle|M(0)\rangle + \beta|1\rangle|1\rangle|M(1)\rangle \quad (2)$$

qui est clairement différent de (1) que l'on souhaite obtenir



# Distance de trace et fidélité I

- On dispose de deux instruments pour mesurer la **similarité** ou la **distinguabilité** entre deux états (copie approximative).
  - On considère dans la base  $\{|u_i\rangle\}$   $\rho = \sum_i r_i |u_i\rangle\langle u_i|$  et  $\sigma = \sum_i s_i |u_i\rangle\langle u_i|$
- La **distance de trace** (ou trace distance en anglais) entre  $\rho$  et  $\sigma$  est définie par

$$\delta(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \text{Tr} |\rho - \sigma| \qquad |\rho| = \sqrt{\rho^\dagger \rho}$$

- **Exemple** : Si Alice prépare un système dans l'état  $\rho$  ou  $\sigma$ , chacun avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  et l'envoie à Bob qui doit faire la distinction entre les deux états. Avec une **mesure optimale**, Bob a la probabilité

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{1}{2}(1 + \delta(\rho, \sigma))$$

d'identifier correctement dans quel état Alice a préparé le système

- $\delta(\rho, \sigma)$  est une **métrique dans l'espace de Hilbert**, si :



# Distance de trace et fidélité II

$\delta(\rho, \sigma) \geq 0$	Non négative
$\delta(\rho, \sigma) = \delta(\sigma, \rho)$	Symétrique
$\delta(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = \delta(\rho, \sigma)$	Invariante sous les transfo unitaires
$\delta(\rho, \sigma) \leq \delta(\rho, \mu) + \delta(\mu, \sigma)$	Vérifie l'inégalité triangulaire
$\delta(\rho, \sigma) = \sqrt{1 - \langle \psi   \sigma   \psi \rangle}$	Si $\rho =  \psi\rangle\langle\psi $ est un état pur
$\delta(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \text{Tr}   \sum_i (r_i - s_i)   u_i \rangle \langle u_i  $	Si $[\rho, \sigma] = 0$
$\delta(\rho, \sigma) = \frac{1}{2}  r - s $	r et s vecteurs de Bloch de $\rho$ et $\sigma$



# Distance de trace et fidélité III

- La **fidélité** mesure le recouvrement entre l'état d'entrée  $\rho$  et l'état de sortie  $\sigma$  et est définie par

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr} \left( \sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \right)$$

- Si  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  et  $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$  sont des états purs, alors  $\rho^2 = \rho$  et  $\sigma^2 = \sigma$ , i.e.,  $\rho = \sqrt{\rho}$  et  $\sigma = \sqrt{\sigma}$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} F(\rho, \sigma) &= \text{Tr} \left( \sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \right) = \text{Tr} \sqrt{(|\psi\rangle\langle\psi|)(|\phi\rangle\langle\phi|)(|\psi\rangle\langle\psi|)} \\ &= \text{Tr} \sqrt{(|\langle\phi|\psi\rangle|^2)(|\psi\rangle\langle\psi|)} = |\langle\phi|\psi\rangle| \sqrt{(\langle\psi|\psi\rangle)} = |\langle\phi|\psi\rangle| \end{aligned}$$

- $F(\rho, \sigma)$  est une **pseudo-métrique dans l'espace de Hilbert** si :



# Distance de trace et fidélité IV

$0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$	$F(\rho, \rho) = 1$ et $F(\rho, \sigma) = 0$ s'il n'y a aucun recouvrement entre les deux états
$F(\rho, \sigma) = F(\sigma, \rho)$	Symétrique
$F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = F(\rho, \sigma)$	Invariante sous les transformations unitaires
$F(\rho, \sigma) = \sum_i \sqrt{r_i s_i}$	Si $[\rho, \sigma] = 0$
$\mathcal{P}(\sigma \leftarrow \rho) = (F(\rho, \sigma))^2$	Probabilité de transition de $\rho$ vers $\sigma$





# Concurrence et intrication de formation I

- La **concurrence** mesure le recouvrement entre les états  $|\psi\rangle$  et  $|\bar{\psi}\rangle$  et est définie par

$$C(\psi) = |\langle\psi|\bar{\psi}\rangle|, \quad |\bar{\psi}\rangle = Y \otimes Y |\psi^*\rangle$$

- En fonction de l'opérateur statistique,

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$$

$\lambda_i \equiv$  valeurs propres dans l'ordre décroissant de la matrice Hermitienne

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$$

$$\tilde{\rho} = Y \otimes Y \rho^* Y \otimes Y$$



# Concurrence et intrication de formation II

- L'intrication de formation est la caractérisation mathématique des ressources nécessaires pour créer l'intrication

$$E(\rho) = H\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right) \quad \underbrace{H(x) = -x \log_2(x) - (1 - x) \log_2(1 - x)}_{\text{entropie de Shannon}}$$

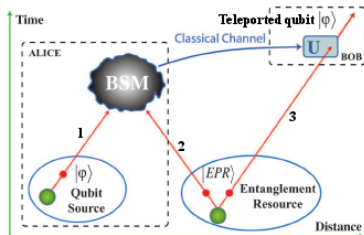
- On note que  $0 \leq E(\rho) \leq 1$  avec  $E(\rho) = 1$  dans le cas d'un état maximalement intriqué et  $E(\rho) = 0$  dans le cas d'un état séparable



# Fax quantique ou téléportation quantique I

## Definition (Téléportation quantique)

La **téléportation quantique** est un protocole de communications quantiques consistant à **transférer l'état quantique** d'un système vers un autre système similaire et séparé spatialement du premier en mettant à profit l'intrication quantique



- Alice et Bob utilisent un canal EPR composé de  $|B_{00}\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23})$ , le qubit 2 est pris par Alice et le qubit 3 est pris par Bob
- Alice souhaite transmettre à Bob l'information sur l'état du qubit  $|\varphi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1$  qui lui est *a priori* inconnu, sans lui transmettre directement ce qubit



# Fax quantique ou téléportation quantique II

- Alice mesure l'état quantique de la nouvelle paire de qubits 1 et 2 (non intriqués) en utilisant la **base de Bell** constituée des états intriqués

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad |B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \quad (3)$$

$$|B_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \quad |B_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (4)$$

- Dans la base de Bell, l'état des trois qubits est

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{123} &= |\varphi\rangle_1 \otimes |B_{00}\rangle_{23} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_1 \otimes |B_{00}\rangle_{23} \\ &= \frac{1}{2} [ |B_{00}\rangle_{12} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_3 + |B_{10}\rangle_{12} (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)_3 \\ &\quad + |B_{01}\rangle_{12} (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)_3 + |B_{11}\rangle_{12} (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)_3 ] \end{aligned} \quad (5)$$

$$|\psi\rangle_{123} = \frac{1}{2} \sum_{xy} |B_{xy}\rangle_{12} |\varphi_{xy}\rangle_3 \quad |\varphi_{xy}\rangle_3 = \alpha|y\rangle_3 + \beta(-1)^x|1-y\rangle_3 \quad (6)$$

La mesure par Alice de l'état intriqués  $|B_{xy}\rangle_{12}$  projette  $|\psi\rangle_{123}$  sur l'un des quatre états de Bell avec le  $|\varphi_{xy}\rangle_3$  correspondant dans (5)



# Fax quantique ou téléportation quantique III

Résultat de la mesure de 12	État préparé en 3	probabilité	$U_{xy} = Z^x X^y$
$ B_{00}\rangle$	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	$\frac{1}{4}$	$Z^0 X^0 = \mathbb{I}$
$ B_{10}\rangle$	$\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$	$\frac{1}{4}$	$Z^1 X^0 = Z$
$ B_{01}\rangle$	$\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$	$\frac{1}{4}$	$Z^0 X^1 = X$
$ B_{11}\rangle$	$\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle$	$\frac{1}{4}$	$Z^1 X^1 = ZX$

L'état du qubit d'Alice  $|\varphi\rangle_1$  est téléporté sur le qubit de Bob  $|\varphi\rangle_3$  avec une probabilité de 25%

- Alice transmet à Bob par un canal classique le résultat de sa mesure (mesure de Bell), et Bob sait que le qubit 3 lui arrive dans l'état inconnu de départ  $|\varphi\rangle_1$ , mais qui reste tout aussi inconnu ! L'état du qubit 1 a été téléporté, mais il n'y a jamais eu une mesure de cet état
- Si le résultat de la mesure d'Alice n'est pas  $|B_{00}\rangle_{12}$ , Bob en sait assez pour faire la correction en appliquant la transformation unitaire  $U$  convenable qui permet de ramener le qubit 3 dans l'état  $|\varphi\rangle_1$ .



# Fax quantique ou téléportation quantique IV

- 1 A aucun moment, les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont mesurés, et l'état  $|\varphi\rangle_1$  est détruit au cours de la mesure effectuée par Alice. Il n'y a pas contradiction avec le Théorème de non-clonage
- 2 Bob ne connaît l'état  $|\varphi\rangle_3$  que lorsqu'il a reçu le résultat de la mesure d'Alice. La transmission de cette information doit se faire par un canal classique, à une vitesse au plus égale à la vitesse de la lumière. Il n'a donc pas transfère instantanée de l'information à distance
- 3 Il y a jamais transport de la matière dans la téléportation

