Combinatorics

Permutation

$P_n^m = A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},\ m \le n$

Binomial

$\binom{n}{m} = \frac{P_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!},\ \binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-m+1)}{m!},\ m \le n$

有重复的排列

从N个元素中取出M个元素(有放回)的排列方案数为N^M

有重复的组合

从N个元素中取出M个元素(有放回)的组合方案数为$\binom{n+m-1}{m}$

隔板法

m个球，放到n个盒子里面(允许空盒子)的方案数

x_i表示第i个盒子中球的个数. $\sum_{i=1}^{n} x_i = m, x_i \ge 0$.相当于求左式中方程解的个数

这个问题等价于m个球中间插入$n-1$个板, 板与板之间允许为空

等价于$m+n-1$个位置中选择$n-1$个位置放板子, 方案数为$\binom{m+n-1}{n-1} = \binom{m+n-1}{m}$

如果问题改为$x_i > 0$

可以看作$x_i\prime = x_i - 1, x_i\prime \ge 0, \sum_{i=1}^{n} x_i\prime = m - n$

答案为$\binom{m-n+n-1}{n-1} = \binom{m-1}{n-1}$

也可以直接看有$m-1$个位置, 有$n-1$种选法, 那么答案就是$\binom{m-1}{n-1}$

有相同类型元素的排列数

比如3个红球, 2个绿球, 2个🏀的不同排列数

$$\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

推广：有n个位置, 要填a_i个$i, 1 \le i \le m$

$$答案：\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\binom{n-a_1-a_2}{a_3}\dots\binom{n-\sum_{i=1}^{k-1} a_i}{a_k}\dots\binom{a_m}{a_m} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m}(a_i!)}$$

二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

组合意义上:

有n个$(x+y)$相乘,每次都从$(x+y)$中选择一个x或者选择一个y,那么多项式某一项的形式形如x^ky^{n-k}(n个式子中选了k个x,$n-k$个y)多项式的系数为$\binom{n}{k}$表示为从n种选择中选了k个x的方案数

特别的:

$$(x+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$$

一些恒等式

基本恒等式

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k}\binom{m}{k}=\binom{m}{n}\binom{m-n}{m-k}(\text{要求}:m-k<m-n)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$$

特别的:

$$\sum_{\substack{i=0\\i\equiv 0 \pmod 2}}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{\substack{i=1\\i\equiv 1 \pmod 2}}^{n}\binom{n}{i}=2^{n-1}$$

$(1+x)^n$二项式展开

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

杨辉三角推广

固定选的元素个数求和,可以优化速度

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}=\binom{n+m+1}{m+1}=\binom{n+m+1}{n}$$

求幂和

$$\sum_{i=1}^{n}i=\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{1}=\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

高次写成下降幂:

$$i^2=i(i-1)+i=2\binom{i}{2}+\binom{i}{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\sum_{i=1}^{n}i(i-1)+i=2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$i^3=(i+1)i(i-1)+i=6\binom{i+1}{3}+\binom{i}{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{n}(i+1)i(i-1)+i = 6\binom{n+2}{4}+\binom{n+1}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \binom{n+1}{2}^2$$

整数划分

把一个正整数N写作多个大于等于1且小于等于其本身的整数的和, 则其中各个加数所构成的集合为N的一个划分

看作一个多重背包, 背包的体积为N, 有N种物品, 体积分别为$1\dots N$, 恰好把这个多重背包填满的方案数

增长的没有想象的那么快

第二类斯特林数(集合拆分)

把N个元素划分到K个非空集合中, 有多少种做法

$S(n,m)$为方案数

$$\begin{gathered} S(n,0)=0,\ (k=0) \\ S(n,1)=1,\ (k=1) \\ S(n,n)=1 \\ S(n,k)=0,\ (k>n) \\ S(n,k)=kS(n-1,k)+S(n-1,k-1),\ (1<k<n) \end{gathered}$$

前四个是初值和边界情况

最后一个是枚举当前第n个元素是否放到新的集合第k个集合中

$S(n-1,k-1)$是把n单独划分集合的情况, 即把$n-1$个元素划分到前$k-1$个集合中, 第n个元素划分到第k个集合中的情况

$kS(n-1,k)$是把第n个元素放到前面k个中的集合中的某一个的情况, 有k种不同放法, 所以前面系数要乘k

卡特兰数

一个数列: $\{C_n\} = 1,1,2,5,14,42,132,\dots$

1. 有一个大小为$N*N$的方格图左下角$(0,0)$为右上角为(n,n)，从左下角开始每次都只能向右或者向上走一单位，不走到对角线$y=x$上方(但可以触碰)的情况下到达右上角有多少可能的路径
2. 在圆上选择 $2*N$ 个点，将这些点成对连接起来使得所得到的 N 条线段不相交的方法数
3. 对角线不相交的情况下，将一个凸多边形区域分成三角形区域的方法数
4. 一个栈（无穷大）的进栈序列为$1,2,3,\dots,n$有多少个不同的出栈序列?
5. N个结点可构造多少个不同的二叉树?

满足如下公式的

$$\begin{gathered} C_0=C_1=1 \\ C_i=\sum_{i=0}^{n-1} C_iC_{n-1-i},\ i\geq 2 \end{gathered}$$

其他公式

$$\begin{gathered} C_n=\frac{(4n-2)C_{n-1}}{n+1} \\ C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1} \end{gathered}$$