

応用微分方程式

Nanase Takahashi

2026年1月8日

1 問題

$$\frac{d^2}{dz^2}w(z) - zw(z) = 0 \quad (1)$$

の $z = 0$ 周りの任意の複素数 z に対する解を $w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ と仮定し、与えられた微分方程式に代入することにより一般解を求めよ。

2 解答

仮定より、

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad w''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} z^m.$$

これを (1) 式に代入すると、

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} z^m - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} = 0.$$

後者の総和を添字 $m = n + 1$ で書き直すと

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1} z^m,$$

したがって

$$(m+2)(m+1) c_{m+2} - c_{m-1} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots), \quad 2 \cdot 1 c_2 = 0.$$

よって

$$c_2 = 0, \quad c_{m+2} = \frac{c_{m-1}}{(m+2)(m+1)} \quad (m \geq 1).$$

初期係数として c_0 および c_1 は任意定数となる。漸化式を見ると、係数は 3 つ飛びで定まるため、

$$c_3 = \frac{c_0}{3 \cdot 2}, \quad c_6 = \frac{c_3}{6 \cdot 5} = \frac{c_0}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6)}, \dots$$

一方、

$$c_4 = \frac{c_1}{4 \cdot 3}, \quad c_7 = \frac{c_4}{7 \cdot 6} = \frac{c_1}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7)}, \dots$$

となる。したがって、

$$w(z) = A\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3}z^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}z^6 + \dots\right) + B\left(z + \frac{1}{3 \cdot 4}z^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}z^7 + \dots\right) \quad (2)$$

ここで A, B は任意定数である。