线性代数笔记

南部

2022 年 6 月 18 日

目录

1 前言

本笔记仅用于在短时间内快速掌握大学线性代数课程的主要知识点，旨在帮助读者通过期末考而不是其他 (所以大量定理结论并不给出证明)，如果想要深入学习线性代数，还是推荐 MIT 的开放式课程（网易公开课上有翻译过的视频，OCW 官网上有课程讲义），Strang 老头讲得不错，本人也在深入学习。此外，本文主体内容来自清华大学出版社《线性代数学习指南》(所以结构编排也与其一致)，掺有个人理解，由于本人水平有限，错误和不妥之处肯定在所难免，还望读者批评指正；另外，限于时间与篇幅，笔者只给出了少量典型例题给读者练手以促进理解，更多的练习还请读者从自己所在学校的往年试卷中按题型分类完成 (笔者也是如此复习的，感觉卓有成效)，亦可做一做自己教材的课后复习题。

2 行列式

2.1 基本要求

这一章的主要内容就是**行列式** (当然还有 **Cramer 法则**)，重难点是行列式的展开与计算。

2.2 内容提要

2.2.1 行列式的定义及有关概念

n 阶行列式 $D = |a_{ij}|_1^n$ 的定义为

$$D \overset{def}{=} a_{11}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 称为元素 a_{1j} 的**代数**余子式 (注意：代数余子式是带符号走的！而余子式不带符号！)，M_{1j} 称为余子式，余子式是 D 中去掉第 1 行第 j 列全部元素构成的 $(n-1)$ 阶行列式 (可以理解成原行列式以某个元素为中心划掉其所在行、列的元素坍缩而成)，n 阶行列式 D 记作

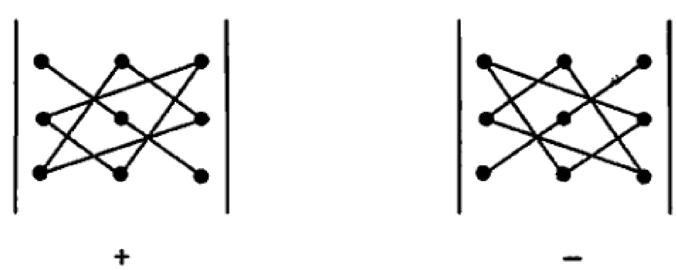
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这里用的是递归定义，不断坍缩最终到一阶时其值就等于原数。对于二阶与三阶行列式而言有具体的计算方法，如下所示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}(\text{主对角元积减去副对角元积})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32})$$

可以凭下图 (这个图是从同济版高数上截下来的，看成两个六芒星连线计算，从这个角度记忆容易一点) 记忆这个长长的展开式。



要时刻注意的是，n 阶行列式始终表示为一个方阵，换言之即行数等于列数，而且它的本质是一个值 (如果元素中含变量的话，就是关于该变量的表达式)，是对其中元素做某种运算得到的值 (可以理解成一种变换)，这应该是我们在利用行列式进行计算时要牢记的一点。

2.2.2 行列式的性质

行列式的性质主要有以下七点：

1. **行列互换，其值不变**。也就是将行列式的元素关于主对角元作对称变换不改变行列式的值，这条性质告诉我们行列式的行与列地位是等同的，也就是说对行成立的性质对列同样成立。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. **对任一行展开，其值均等于行列式的值**。

3. **线性性质（加法与数乘）**。值得注意的是这两种线性运算都是对某一行（或列）进行的，而在矩阵中其对象是所有元素。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. **倍加行运算不改变行列式的值**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. **两行元素完全相同或成比例，其值为零。**

6. **两行对换，其值反号。**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7. **某行元素乘以另一行对应代数余子式的和为零。**

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

2.2.3 特殊行列式的值

以下几条常见结论的重要程度依次递减

1. 上、下三角行列式以及对角行列式的值为主对角元乘积。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

但是要注意

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & \cdots & * & a_n \\ * & * & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ * & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$$

2. Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

其中

$$\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)$$

$$(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(x_n-x_{n-1})$$

3. 分块计算，其中 $|A|$ 与 $|B|$ 分别为 m 阶和 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

但是要注意：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

4.

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

2.2.4 Cramer 法则

若线性方程组（形式如下）的系数行列式满足 $D=|a_{ij}|_1^n\neq 0$，则方程组有唯一解，即 $x_j=\frac{D_j}{D}\quad(j=1,2,\cdots,n)$，其中 D_j 是用方程右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换 D 中第 j 列的 n 个元素得到的行列式。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Cramer 法则给出了线性方程组在有唯一解的条件下解的结构形式，以此我们能够用来求解低阶线性方程组的解，它更重要的意义是在理论方面，在后面几章我们会给出线性方程组解的情况判别。

2.3 常见题型

本章的题型主要有两类，一类是行列式的展开与计算（包括具体计算和抽象证明或求解），另一类是利用 Cramer 法则解线性方程组，后者比较简单，故仅详细阐述前者。

展开行列式的基本方法主要有三个: 其一是根据性质 2 直接对某一行（或列）展开; 其二是综合利用性质, 将行列式化为上 (下) 三角行列式; 其三是利用性质将某行 (或列) 元素化为只剩一个非零元, 然后对该行 (或列) 展开, 将 n 阶行列式展开化为 $(n-1)$ 阶行列式的展开, 称为降阶展开法。下面给出几个经典的例题，还请读者仔细体会其中的思想方法。

例 1 计算 $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

解 这种低阶具体行列式的计算的一般方法如下，通过倍加行运算（或列变换，哪种简便用那种，通常采取行变换的方法）逐步将其化为上三角行列式（下三角亦可）最终得到结果，简化过程中不要一味拘泥于程序，可以通过观察结构、运用性质等适当简化运算（比如减少分式的出现）。

注意下面的 $r_4 - 3r_1$ 的意思是第四行减去三倍的第一行（列用 c 表示，因为行、列的英文分别为 row 与 column）。

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 3r_1]{\substack{r_3 + 4_1 \\ r_2 + 2r_1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - 5r_1]{r_4 + 2r_1}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + \frac{6}{11}r_3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{32}{11} \end{vmatrix} = -64$$

若观察仔细的话，最后一步也可把第 4 列乘 3 加到第 3 列从而消去 12，并且避免了分式的出现。

例 2 证明下式

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明 对于这种元素为和式结构的行列式，一般考虑利用线性性质（性质 3）对其展开再合并（第二步后一个行列式经过了两次列对换，所以其值就等于前一个行列式）。

$$\begin{aligned} 左边 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0+0+0+0+0+0+ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 右边 \end{aligned}$$

例 3 解下面的方程

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

解 观察结构易知每一行的和都是 $(x+1)$，故不妨把后面几列都加到第一列再提取出 $(x+1)$，这样就得到了元素全为 1 的第一列（结论 4 的

证明与此类同)，有利于之后降阶化简。

$$
\text{方程左边} \xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\c_1+c_3}} (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{c_2-c_1} (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}
$$

$$
= (x+1)(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{c_2-c_1} (x+1)(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-3 & 1 \\ 1 & 0 & x-2 \end{vmatrix}
$$

$$
= (x+1)(x-2)^2(x-3) = 0
$$

所以方程的根为 $x=-1,2,3$。

例 4 计算 n 阶三对角行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}
$$

解 此类抽象行列式的展开一般要靠递推关系式推出结果，若递推关系式不易求解的话（不能用累加或累乘推出)，可以尝试数学归纳法。本

题中先对第一行展开，再将得到的第二个行列式对第一列展开，即

$$\begin{aligned} D_n &= aD_{n-1} + (-1)^{1+2} b \begin{vmatrix} c & b & & & & \\ 0 & a & b & & & \\ 0 & c & a & b & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix} \\ &= aD_{n-1} - bcD_{n-2} \end{aligned}$$

上式即为递推关系式，接下来就变成了中学中常见的由递推公式求数列通项的问题了, 不妨假设 D_n、D_{n-1}、D_{n-2} 之间满足 (与 Fibonacci 数列通项的求解如出一辙)

$$D_n - kD_{n-1} = l\left(D_{n-1} - kD_{n-2}\right)$$

再与递推关系式比对系数可得

$$k + l = a, \quad kl = bc \tag{1}$$

易知数列 $\{D_n - kD_{n-1}\}$ 是一个等比数列，不过与标准的等比数列不太一样，它的第一项是$(D_2 - kD_1)$，所以从第一项到第 n 项共有 $(n-1)$ 项，故下式中 l 上的指数是 $(n-2)$ 而不是 $(n-1)$

$$D_n - kD_{n-1} = l^{n-2}(D_2 - kD_1)$$

其中

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 - bc, \quad D_1 = |a| = a$$

再代入（1）式得 $D_2 - kD_1 = l^2$，于是有

$$\begin{aligned}
D_n &= l^n + kD_{n-1} \\
&= l^n + k\left(l^{n-1} + kD_{n-2}\right) \\
&= l^n + kl^{n-1} + k^2 D_{n-2} \\
&= l^n + kl^{n-1} + k^2\left(l^{n-2} + kD_{n-3}\right) \\
&= l^n + kl^{n-1} + k^2 l^{n-2} + k^3 D_{n-3} \\
&= \cdots \\
&= l^n + kl^{n-1} + k^2 l^{n-2} + \cdots + k^{n-2} l^2 + k^{n-1} D_1
\end{aligned}$$

由于 $D_1 = a = k + l$，所以

$$D_n = l^n + kl^{n-1} + k^2 l^{n-2} + \cdots + k^{n-2} l^2 + k^{n-1} l + k^n$$

其中 k、l 满足（1）式。

例 5 已知三次曲线 $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ 满足：$f(1) = f(-1) = f(2) = 6, f(-2) = -6$，试求 a_0, a_1, a_2, a_3 的值。

解 依题意得到一关于 a_0, a_1, a_2, a_3 的非齐次线性方程组

$$\begin{cases}
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6 \\
a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 = 6 \\
a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 + a_3(2)^3 = 6 \\
a_0 + a_1(-2) + a_2(-2)^2 + a_3(-2)^3 = -6
\end{cases}$$

其系数行列式是一个 Vandermonde 行列式（经过转置）

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \end{vmatrix} = 72 \neq 0$$

由 Cramer 法则 $a_j = \frac{D_j}{D}$，$\quad j = 0, 1, 2, 3$，其中

$$D_0 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \\ -6 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 576$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\1&6&1&-1\\1&6&4&8\\1&-6&4&-8\end{vmatrix}=-72$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&6&1\\1&-1&6&-1\\1&2&6&8\\1&-2&-6&-8\end{vmatrix}=-144$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1&6\\1&-1&1&6\\1&2&4&6\\1&-2&4&-6\end{vmatrix}=72$$

所以 $a_0=8,a_1=-1,a_2=-2,a_3=1$。

3 矩阵

3.1 基本要求

1. 矩阵的概念及其运算、各种基本矩阵
2. 高斯消元法求解线性方程组
3. 矩阵的转置与逆以及求逆的方法
4. 初等变换与初等矩阵（分块矩阵在此不做介绍）

3.2 内容提要

3.2.1 矩阵的概念及其运算

矩阵的概念是在解线性方程组时为简化运算（使运算变得更有条理或称之为程式化）提出来的，最简单的理解就是一个**数表**，是一个由 $m\times n$ 个元素 a_{ij} 排成 m 行、n 列并括以括号的数表，记作（有的教材也使用方括

弧）

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

当矩阵只有一行或一列时，可以将其视为行向量或列向量，二者可以通过下面要谈到的转置运算相互转化（注意：我们一般所说向量是列向量，不过考虑到书写习惯的问题才写成行向量的形式）。

矩阵的运算分为两类：线性运算（包括加法和数乘）与乘法。

1. 矩阵的线性运算

   只有**同型矩阵**（即两矩阵行数相等，列数也相等）才能进行加法运算，我们规定加法运算就是使两矩阵对应元素相加得到一个新矩阵，数乘运算就是矩阵中每一个元素都乘以 k 得到新矩阵，我们还可以从这两种运算推出减法运算，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})\in F^{m\times n}$$
$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})\in F^{m\times n}$$
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})\in F^{m\times n}$$

   其中，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in F^{n\times n},k\in F$（数域）。

   矩阵的线性运算（$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 均为同型矩阵）满足以下运算律（与数的运算律无异）：

   (1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

   (2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$

   (3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$（$\boldsymbol{0}$ 是零矩阵）

   (4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$

   (5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

   (6) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$

   (7) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$

   (8) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

2. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in F^{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in F^{n\times s}$，规定有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})\in F^{m\times s}$$

其中，c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列对应元素的乘积**之和**（前行乘后列再求和）亦即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\quad(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,s)$$

由此定义可见，矩阵的乘法必须满足**前一个矩阵的列数等于后一个矩阵的行数**才能成立（即可乘性）；矩阵的乘积得到的仍然是一个矩阵，它的行数、列数分别为前一个矩阵的行数和后一个矩阵的列数（此定义基于线性方程组的求解以及 n 维向量空间的线性变换的需要，限于篇幅不作详述）。矩阵的乘法满足以下运算律：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

(2) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$，其中 k 为任意数

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$（这一点与数的运算不同，矩阵的乘法有左乘、右乘之分）

但是要注意以下三点：

(1) 矩阵乘法不满足交换律，即一般来说 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$（如果满足则称两者可交换）

(2) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}\nRightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，即存在 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$且$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$

(3) 矩阵乘法不满足消去律，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\nRightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，但如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆（下面会讲），则可以得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

矩阵的行列式与幂

关于矩阵的行列式要注意的只有两点：第一，只有方阵才有行列式（因为行列式就是一个方阵）；第二，方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的乘积的行列式等于两者行列式的乘积，即 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$（也记作 $\det(\boldsymbol{AB})=\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}$）。关于矩阵的幂，我们规定**方阵** $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂为

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}(k\text{ 个 }\boldsymbol{A}\text{ 连乘})$$

由此定义可推知：$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l};\left(\boldsymbol{A}^k\right)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$，但是一般而言有 $(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$，而当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时（即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换时），有 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{A}^k$（将 $\boldsymbol{AB}$ 视为整体取 k 次幂易推知）。

3.2.2 高斯消元法

这一小节的主要目的就是理解什么是高斯消元法，怎样用高斯消元法判断线性方程组解的情况以及求出有解情况下的解的形式。

高斯消元法的思想其实每个人应该在中学就遇到过，不过很少有人会把它抽象出来成为程序性的做法，高斯消元的核心就是**逐步减元**将原方程化成同解的易于求解的线性方程组（即阶梯型线性方程组），怎么减呢？用三种初等行变换（下面第四点会讲，现在不过是在解线性方程组过程中的具体处理，第四点讲的就是矩阵形式的一般变换）——即**数乘**、**倍加行和对换**，这其实也是我们在解方程组时常用的手段，下面我们以一道题目为例具体讲解高斯消元法的步骤：

例 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$$

解 我们先把它的增广矩阵（由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 再加上右边的常数一列 $\boldsymbol{b}$ 组成，另：当方程组右边的常数全为零时称之为齐次线性方程组，反之即不全为零时称为非齐次线性方程组）写出来

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

下面用三种初等行变换将其化为**阶梯型矩阵**进而化成**行简化型阶梯矩阵**（如下），操作方法与行列式的计算有点类似，但是要注意，这里是（方程组的）同解变换（更深入地讲应该是系数行列式的**保秩变换**，我们会在下一章进一步分析），而求解行列式是等值变换，所以前者用箭头，后者用等

号连结变换前后的式子:

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-3r_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3-2r_2\\ r_4-2r_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{r_4\times(-\frac{1}{3})\\ r_3\leftrightarrow r_4}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

经过上述变换，原方程的增广矩阵已经化成了阶梯型矩阵, 它所表示的线性方程组与原方程组是同解的，显而易见，此方程组是有无穷多组解的，我们可以假定 x_2, x_5（称之为自由未知量）为已知量自下而上分别解出 x_4, x_3, x_1，这样已经算是解决了方程组，但是我们还不满足，觉得这样回代求解还是太麻烦了，于是就可以进一步把阶梯型矩阵中的每行第一个元素所在列的其他元素全化为零（为什么这样简化?)，所以我们得到了最简的行简化型阶梯矩阵，求解方程组可以直接在这个矩阵上完成

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_2-2r_3\\ r_1+r_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

写成方程组的形式就是

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_5 = 1 \\ x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

再取 $x_2 = k_1, x_5 = k_2$（取这两个变量是很自然的，请读者自行思考为什么取两个变量以及是否还存在其他取法，我们在下一章讲秩时会进一步

深入讨论），回代到上述方程中就可以解得满足原方程组的所有解：$x_1 = 1 + k_1 - 7k_2, x_2 = k_1, x_3 = 2 - 4k_2, x_4 = -1 + 3k_2, x_5 = k_2$，我们将最终结果写作（有时也写成列向量的形式）：

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 + k_1 - 7k_2, k_1, 2 - 4k_2, -1 + 3k_2, k_2)$$

$$\text{或}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2\text{为任意常量}$$

还请读者仔细品读此例理解高斯消元法。最后我们再来梳理一下高斯消元法的基本步骤：先用初等行变换（能用初等列变换，但**仅限于**两列对换，而且还应注意相应的未知量也要对换）按照固定的“程序”一列一列依次消元，将线性方程组的增广矩阵化成阶梯型矩阵，求解时应把每一行第一个非零元对应的未知量（例题中是 $x_1, x_3\ x_4$）取为基本未知量，其他的取为自由未知量（例题中是 x_2, x_5）并依次取任意常数 $k_1, k_2, \ldots$ 将其代入方程组求出基本未知量，为了使求基本未知量更加方便，可以尽可能地把增广矩阵化成行简化型矩阵。

3.2.3 矩阵的转置与逆、各种基本矩阵

把一个矩阵的行列互换的操作称之为转置，所得到的新矩阵称为转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$，即

$$\text{若}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{则}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的转置运算满足以下运算律（第四点要特别注意）：

(1) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$

(2) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$（$k$ 为任意数）

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，更一般的有

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$$

类比倒数，我们可以得到逆矩阵的定义：若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$（此式有两层含义：一是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换，二是两者的积等于单位阵），则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$。可逆矩阵的逆矩阵是惟一的。矩阵 **$\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件为** $|\boldsymbol{A}|\neq 0$。求可逆矩阵的逆矩阵方法会在下面依次讲到。

可逆矩阵满足以下运算律：

(1) $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$

(2) $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$

(3) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$（这一点与转置是类似的，需要特别注意）

(4) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$（即转置运算与取逆运算是可交换的）

(5) $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$

常见的各种基本矩阵：

(1) **系数矩阵与增广矩阵**

系数矩阵就是线性方程组（需预先排列成标准形式）的系数依次排列组成的矩阵，增广矩阵则是由系数矩阵再加上线性方程组右端的常数列组成。

(2) **零矩阵、单位矩阵**和 k **阶数量矩阵**

元素全为零的矩阵叫做零矩阵，用 $\mathbf{0}$ 表示；主对角元全为 1，其余元素均为 0 的 n 阶方阵称为 n 阶单位矩阵 (类似于数量运算中的 1)，常写作 $\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$，单位矩阵乘以一个非零常数 k 后就得到了 k 阶数量矩阵，即

$$\boldsymbol{I}_n=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}_{n\times n},k\boldsymbol{I}_n=\begin{pmatrix}k&&&\\&k&&\\&&\ddots&\\&&&k\end{pmatrix}_{n\times n}\quad(k\neq 0)$$

(3) **对角矩阵**与上、**下矩阵**

这与之前的对角行列式和上、下三角行列式是类似的。非主对角元全为零的 n 阶矩阵称为 n 阶对角矩阵（简称对角阵），记作 $\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

或记作 $\operatorname{diag}(a_1,a_2,\dots,a_n)$。对角阵有一个很有意思的性质：$\boldsymbol{\Lambda}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 等于 $a_i(i=1,2,\dots,n)$ 乘 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行的每个元素；$\boldsymbol{\Lambda}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ 等于 $a_i(i=1,2,\dots,n)$ 乘 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 列的每个元素，即

$$\boldsymbol{\Lambda}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_{11} & a_1a_{12} & \cdots & a_1a_{1s} \\ a_2a_{21} & a_2a_{22} & \cdots & a_2a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_{n1} & a_na_{n2} & \cdots & a_na_{ns} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} a_1a_{11} & a_2a_{12} & \cdots & a_na_{1n} \\ a_1a_{21} & a_2a_{22} & \cdots & a_na_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1a_{m1} & a_2a_{m2} & \cdots & a_na_{mn} \end{pmatrix}$$

两个对角阵的乘积仍为对角阵：

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_nb_n \end{pmatrix}$$

由此易推知：$\boldsymbol{\Lambda}^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$。

(4) **转置矩阵、逆矩阵**（上文已述，此处略去）

(5) **对称矩阵与反对称矩阵**

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个 n 阶矩阵（即方阵），若 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\ldots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，反之当 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\ldots,n)$ 时，称其为反对称矩阵（反对称矩阵有一个对称矩阵没有的特点，就是主对角元上的元素全为零，请读者自行思考原因）。容易知道，$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$。

(6) **奇异矩阵与非奇异矩阵**

当 $\det\boldsymbol{A}=0$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵（此时 $\boldsymbol{A}$ 不一定为零矩阵），反之则称为非奇异矩阵。至于为何会有奇异与非奇异之分，是因为奇异矩阵会出现在谈矩阵乘法时要注意的（2）、（3）两点不同于数的乘法的奇异现象。另外，由矩阵可逆的充要条件知，非奇异矩阵必定可逆。

(7) **伴随矩阵**

A_{ij} 是行列式 $\det\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 我们称

$$\operatorname{cof}\boldsymbol{A}=(A_{ij})_{n\times n}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式矩阵，其转置矩阵就是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^*$ 或 $\operatorname{adj}\boldsymbol{A}$，即

$$\boldsymbol{A}^*=(\operatorname{cof}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

有关伴随矩阵一个重要的等式是：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$，用行列式性质易于证明，此处略去。由此式我们可以求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，有

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$$

由逆矩阵定义即得：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

3.2.4 初等变换与初等矩阵

对矩阵的行和列的 3 种初等变换为：

(1) **倍乘**：对第 i 行 (或列) 乘非零常数 c；

(2) **倍加**：将第 i 行 (或列) 乘 c 加到第 j 行 (或列)；

(3) **对换**：将第 i 行 (或列) 与第 j 行 (或列) 对换。

相应于 3 种初等变换的初等矩阵分别为：

(1) 倍乘初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(c)$ 是将单位矩阵第 i 行 (或列) 乘 c 得到的矩阵；

(2) 倍加初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(c)$ 是将单位矩阵第 i 行 (或第 j 列) 乘 c 再加到第 j 行 (或第 i 列) 得到的矩阵；

(3) 对换初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是将单位矩阵的第 i 行（列）和第 j 行 (或列) 对换得到的矩阵。

初等矩阵的作用就是把初等变换操作同矩阵的乘法运算联系起来，使我们对矩阵的变换操作代数化。初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，即对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换；对应的，初等矩阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换，但是要注意：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}(c)$ 是表示将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列乘 c 加到第 i 列。

初等变换可以用来求逆矩阵，这基于初等矩阵的可逆性，下面简单阐释利用初等变换法求逆矩阵的理论依据。初等矩阵都是可逆矩阵（其行列式均不等于零），其逆矩阵与原初等矩阵是同类型的（由可逆矩阵定义易推知），即

$$\boldsymbol{E}_i^{-1}(c) = \boldsymbol{E}(\frac{1}{c}), \quad \boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(c) = \boldsymbol{E}_{ij}(-c), \quad \boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$$

对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只做若干次初等行 (或列) 变换，$\boldsymbol{A}$ 可化为单位矩阵，从而可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干初等矩阵的乘积，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_s$，使 $\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{I}$。这样我们就得到了一种求可逆矩阵的常用方法：

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1})$$

$$或\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

3.3 常见题型

本章介绍了线性代数中最基础的概念——矩阵，并给出了各种常见矩阵的定义，着重强调了利用增广矩阵求解线性方程组的高斯消元法、可逆矩阵与转置矩阵的概念（其应用会在后面几章依次讲到）。第一类题型是利用高斯消元法判断并求解线性方程组，下面给出两个典例。

例 1 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 3 \\ x_2 + ax_3 + tx_4 = t - 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + (t-2)x_4 = t + 3 \end{cases}$$

中的 a, t 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多组解？并给出其有解时解的情况。

解 先写出方程组的增广矩阵

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & a & t & t-3 \\ 1 & 1 & 2 & t-2 & t+3 \end{array}\right)$$

接下来通过初等行变换将其化为阶梯型矩阵

$$
(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & a & t & t-3 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t+2 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a & t & t-3 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t+2 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & t-3 & t-2 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t+2 \end{array}\right)
$$

接下来就是分类讨论 a, t 的取值对方程组解的影响：
(i) 当 $t = 1$ 时，第四个方程为 $0 \cdot x_4 = 3$，此时方程组显然无解；
(ii) 当 $a = 2$ 时，设第三、四个方程对应系数成比例，即

$$
\frac{t-3}{t-1} = \frac{t-2}{t+2}
$$

解得 $t = 4$，代入到阶梯型矩阵并进一步简化成行简化型矩阵有

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

取 $x_3 = k$ 解得

$$
(x_1, x_2, x_3, x_4) = (10, -7-2k, k, 2)，\ k \text{ 为任意常数}
$$

(iii) 当 $a=2$ 但 $t\neq 4$ 时，第三、四两方程矛盾，故方程组无解；
(iiii) 当 $a\neq 2, t\neq 1$ 时，方程组有唯一解，自下而上依次可求得

$$\begin{aligned}
x_4 &= \frac{t+2}{t-1}\\
x_3 &= \frac{2}{2-a}\cdot\frac{t-4}{t-1}\\
x_2 &= -1-\frac{4(t-4)}{(2-a)(t-1)}+3(t+2)\\
x_1 &= \frac{6(t+1)}{t-1}
\end{aligned}$$

例 2 齐次线性方程组的系数矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 2 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

其中的 a 取何值时，方程组有非零解？并给出其解的情况。

解 不论是先对第一行乘以 $\frac{1}{a}$ 再用第二、三行分别减去第一行的 2、3 倍，还是直接用第二行减去 $\frac{2}{a}$ 倍第一行、第三行减去 $\frac{3}{a}$ 倍第一行，这两种做法都会引入更多的含 a 变量从而使计算更麻烦，而且还默认了 $a\neq 0$ 并仍需对 $a=0$ 的情况进行讨论，为简化计算不妨先把第一列和第三列对换（要注意 x_1, x_3 交换了位置），再对换第一行和第三行，即

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & a\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3\\ 0 & -5 & -4\\ 0 & 5 & a+3\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3\\ 0 & -5 & -4\\ 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

至此易知方程组有非零解的充要条件是 $a-1=0$（更深入的，由 Cramer 法则可推知其实质就是**系数行列式等于零**），即 $a=1$，此时不妨假设 $x_1=k$，

可解得 $x_2=-\frac{4}{5}k, x_3=-\frac{3}{5}k$（要注意第 1、3 列对应的分别是 x_3，x_1），所以方程组的解为

$$(x_1,x_2,x_3)=k(1,-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}),\ k \text{ 为任意常数}$$

有关矩阵的概念和基本运算，在此仅给出两道小题。

例 3 设 n 阶矩阵 (n 为奇数)$\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，且 $|\boldsymbol{A}|>0$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|$。

解 此类题型一般是采用分析法解决，需要仔细分析并运用已知条件。

由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，所以 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{I}|=1$，又 $|\boldsymbol{A}|>0$，故 $|\boldsymbol{A}|=1$，又 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{A}=-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，所以 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=|-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}||\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}||\boldsymbol{A}|$，得

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=-|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|,\ \text{于是}\ |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=0$$

例 4 已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=(1,-1,1)$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

解 求矩阵的幂一般是将其分解再利用定义求算，直接算的话不太容易，此题中矩阵为已知的两向量乘积，故直接利用定义求解。

易知 $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}=2$ 而 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=$ 矩阵$\boldsymbol{A}$（这一点值得注意：行向量乘以列向量等于数，列向量乘以行向量则是一个矩阵），故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})\\&=\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}\\&=2^{n-1}\boldsymbol{A}\\&=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&-3&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

有关矩阵的转置，需要注意的就是其各种性质，尤其是多个矩阵乘积的转置与单个矩阵转置的乘积之间的关系。

例 5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 n 阶对称矩阵和反对称矩阵。问：正整数 k,m 取何值时，$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m-\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k$ 必为对称矩阵或反对称矩阵。

解 由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 n 阶对称矩阵和反对称矩阵知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=$

$-\boldsymbol{B}$，所以

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m-\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k\right)^{\mathrm{T}}&=\left(\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m\right)^{\mathrm{T}}-\left(\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k\right)^{\mathrm{T}}\\&=\left(\boldsymbol{B}^m\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^k\right)^{\mathrm{T}}-\left(\boldsymbol{A}^k\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}^m\right)^{\mathrm{T}}\\&=\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)^m\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^k-\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^k\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)^m\\&=(-1)^m\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k-(-1)^m\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m\\&=(-1)^m(\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k-\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m)\end{aligned}$$

显而易见，当 m 为偶数、k 为任意正整数时，$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m-\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k$ 是反对称矩阵；当 m 为奇数、k 为任意正整数时，$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m-\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k$ 是对称矩阵。

下面通过几个例子介绍求逆矩阵的三种方法：

例 6 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$，证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 均可逆, 并求其逆。

证明 由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$ 知 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=0$，于是 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^2-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆，且其逆矩阵为其本身。

又 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})+8\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 所以 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\cdot[-\frac{1}{8}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})]=\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 可逆，其逆矩阵为 $-\frac{1}{8}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})$。

对于抽象类的非具体矩阵而言，通常是利用定义直接求其逆矩阵，上面这种题型一般是利用一元二次方程根与系数的关系凑出定义式即可。

例 7 判断以下矩阵是否可逆，如可逆求其逆。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

解 先求其行列式判断是否可逆，再通过伴随矩阵求其逆矩阵（这种方法对具体矩阵稍微有点繁琐，但在一些抽象矩阵的题目里是一个隐藏的可用条件）。

显而易见，$|\boldsymbol{A}|=-4\neq 0$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，其各个元素的代数余子式可分别求得

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\0&-2\end{vmatrix}=-4,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}0&1\\0&-2\end{vmatrix}=0,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&2\\0&-2\end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&2\\0&-2\end{vmatrix}=-2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4&2&-3\\0&-2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

例 8 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&5&5\\2&4&3\\-2&-2&-3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\\1&3\end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$。

解 这里用第三种方法——初等变换法求逆矩阵(这种方法是求具体矩阵的逆矩阵的最常用方法)。

显然 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$（$|\boldsymbol{A}|=2\neq 0$)，所以先求得 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 再将其与 $\boldsymbol{B}$ 相乘即可得到 $\boldsymbol{X}$（请读者自行求解)。

此题还有另外一种解法，其实也是初等变换法（不过省去了求逆矩阵的过程，与上面的方法没有本质区别)：由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以存在若干初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\ldots,\boldsymbol{P}_s$，使 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，于是 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}$，所以

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{X})$$

这同样交给读者自行解决，最后可求得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-\frac{21}{2}&-11\\-\frac{1}{2}&2\\7&5\end{pmatrix}$$

最后有关可逆矩阵的性质，再给出一题供参考。

例 9 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵且 $|\boldsymbol{A}|>0$，$\boldsymbol{A}^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$，且有 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$，求 $|\boldsymbol{A}|$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$。

解 由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$，两边取行列式有 $|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^3$，所以 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}^*|=4$，故 $|\boldsymbol{A}|=2$。

再由 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$ 得 $\boldsymbol{ABA}^{-1} - \boldsymbol{BA}^{-1} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^{-1} = 3\boldsymbol{I}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= 3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A} = 3[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})]^{-1} \\ &= 3\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = 3\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)^{-1} \\ &= 3\,\mathrm{diag}(\frac{1}{2},\frac{3}{2},3)^{-1} = \mathrm{diag}(6,2,1)\end{aligned}$$

4 线性方程组

4.1 基本要求

4.2 内容提要

4.2.1

4.3 常见题型

5 向量空间与线性变换

6 特征值与特征向量和矩阵的对角化

7 二次型