

# LABORATÓRIO 5: REGRESSÃO LINEAR SIMPLES - ANÁLISE DE RESÍDUOS E TRANSFORMAÇÕES

Fernando Bispo

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>Metodologia</b>	<b>3</b>
<b>Resultados</b>	<b>4</b>
Item a. Ajuste do Modelo . . . . .	4
Significância do Modelo . . . . .	5
Análise de Resíduos . . . . .	6
Testes de Diagnósticos do Modelo . . . . .	7
Transformações dos Dados . . . . .	8
Conclusão . . . . .	12

# Introdução

O laboratório desta semana visa a continuidade da aplicação das técnicas de Regressão Linear Simples com a aplicabilidade das técnicas de análise de resíduos e transformação de variáveis para a condição de quebra dos pressupostos do modelo.

# Metodologia

O conjunto de dados a ser analisado é denominado *trees*, disponível no pacote *datasets*, contém informações de 31 cerejeiras (*Black cherry*) da Floresta Nacional de Allegheny, relativas a três características numéricas contínuas:

- Volume de madeira útil (em metros cúbicos ( $m^3$ ));
- Altura (em metros (m));
- Circunferência (em metros(m)) a 1,37 de altura.

Para esta atividade **serão considerados apenas as informações referentes ao volume e altura das árvores**. Com base nestes dados se desenvolverá:

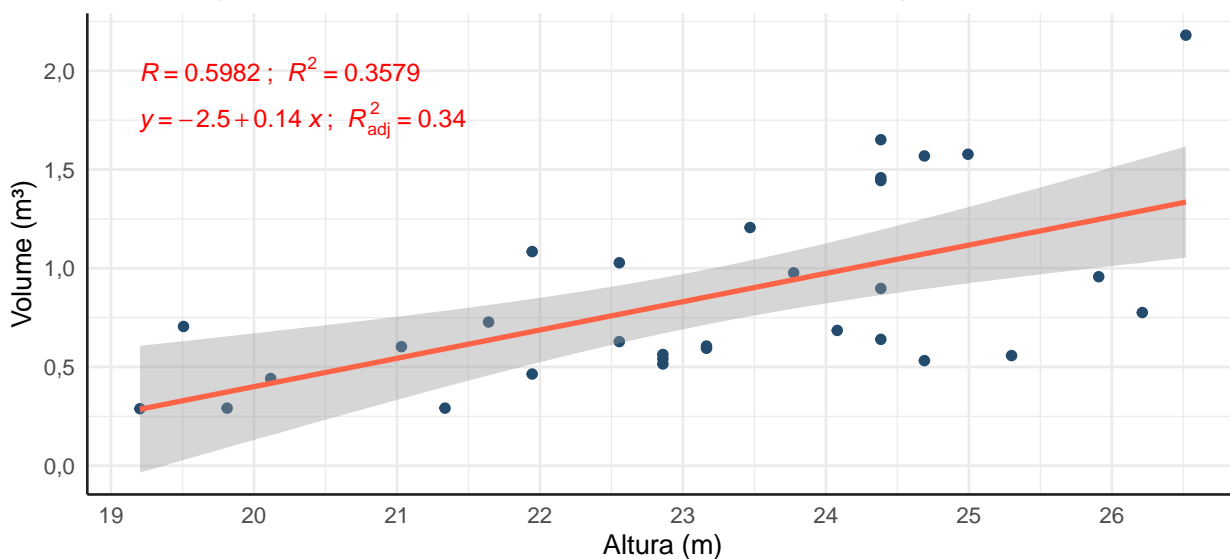
- (a) Ajuste de modelo linear simples para volume como função da altura da árvore;
- (b) Avaliação gráfica dos resíduos Jackknife para diagnóstico do modelo ajustado;
- (c) Transformações da característica utilizada como variável resposta do modelo;
- (d) Avaliação da transformação mais apropriada dentro da família proposta por Box e Cox;
- (e) Indicação da melhor transformação analisada.

# Resultados

## Item a. Ajuste do Modelo

Figura 1: Modelo Ajustado entre Volume e Altura

Diagrama de dispersão com equação da reta de regressão ajustada, Coeficiente de Correlação de Pearson, Coeficiente de Determinação, Coeficiente de Determinação Ajustado, Reta de Regressão e Intervalo de Confiança



Com base na Figura 1 é possível sugerir uma relação positiva entre as variáveis **Volume** e **Altura**, fato confirmado pelo Coeficiente de Correlação de Pearson ( $R = 0,598$ ) que após o teste de hipótese para avaliar a significância da correlação estimada, demonstrou **possuir correlação não nula**. A reta de regressão ajustada segue a seguinte equação:

$$\hat{Y}_i = -2,5 + 0,14X_i$$

A Tabela 2 traz os resultados do teste de hipóteses para correlação e o Intervalo de Confiança para o verdadeiro valor da correlação, podendo concluir, com base no p-valor menor que o nível de significância ( $\alpha = 5\%$ ), que a hipótese nula ( $H_0$ ) foi rejeitada, assumindo-se a hipótese alternativa ( $H_1$ ) que afirma que  $\rho \neq 0$ .

Tabela 1: Teste de Hipótese para Correlação entre Volume e Altura

	t	p-valor	LI	LS
<b>Altura</b>	4,02051	0,00038	0,30952	0,78598

*Nota:* Teste realizado com 5% de significância

O Coeficiente de Determinação ( $R^2$ ) apresenta um valor baixo, podendo afirmar que apenas aproximadamente 36% da variabilidade dos dados está sendo explicada pelo modelo de regressão calculado.

### Significância do Modelo

Após o ajuste do modelo existe a necessidade de se avaliar a significância do mesmo, o teste de hipótese para tal situação será realizado, contendo as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \hat{\beta}_1 = 0$$

$$H_1 : \hat{\beta}_1 \neq 0.$$

As Tabelas 3 e 4 trazem os principais resultados da tabela ANOVA e do Intervalo de Confiança para os parâmetros, possibilitando assim inferir sobre o modelo ajustado.

Tabela 2: Análise de Variância (ANOVA)

	$GL^1$	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	Estatística F-Snedecor	p-valor
<b>Regressão</b>	1	2,326	2,326	16,1645	0,0004
<b>Resíduos</b>	29	4,174	0,144		

*Legenda:*

<sup>1</sup> GL: Graus de Liberdade

Tabela 3: Intervalos de Confiança para os parâmetros estimados no MRLS.

	$LI^1$	$LS^2$
$\hat{\beta}_0$	-4,162	-0,772
$\hat{\beta}_1$	0,070	0,216

*Legenda:*

<sup>1</sup> LI: Limite Inferior (2,5%)

<sup>2</sup> LS: Limite Superior (97,5%)

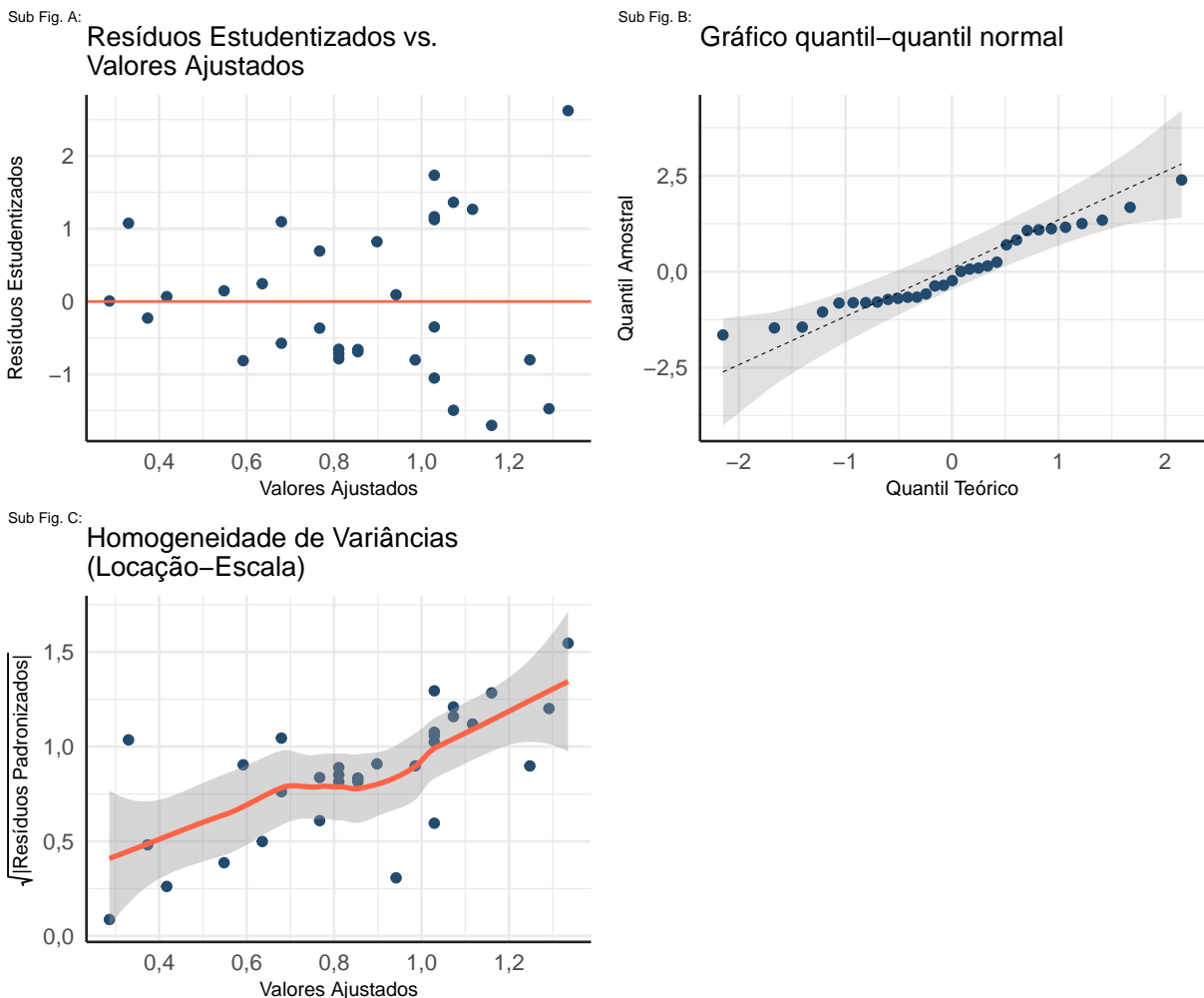
\* Nível de Significância de 5%.

Com base na Tabela 4, avaliando o p-valor é possível afirmar que o modelo é significativo rejeitando assim  $H_0$  que tem como pressuposto  $\hat{\beta}_1 = 0$ .

Através dos Intervalos de Confiança calculados (Tabela 3) é possível afirmar **com 95% de confiança que o verdadeiro valor de  $\beta_0$  está entre (-4,1624; -0,7717) e que o verdadeiro valor de  $\beta_1$  está entre (0,0704; 0,2163).**

## Análise de Resíduos

Figura 4: Análise de resíduos do modelo ajustado



A Figura 4 Sub.Fig A apresenta um comportamento assimétrico dos resíduos, podendo ser constatado uma pequena variabilidade inicial e um aumento desta à medida que os valores ajustados aumentam, caracterizando uma heterocedasticidade. A Sub.Fig C, que trata da Homogeneidade de Variâncias (Locação-Escala) ressalta que há um problema na variabilidade dos dados, corroborando com a interpretação feita na análise da Sub.Fig. A, de que há uma mudança na variabilidade dos dados, caracterizando Heterocedasticidade dos dados. A Sub.Fig. B que traz

o gráfico para avaliação da normalidade dos dados, mostra que apesar dos dados não estarem precisamente sobre a reta de referência, os mesmos estão contidos na região pertencente ao Intervalo de Confiança - IC, podendo assumir que há normalidade, contudo tal avaliação será confirmada após os Testes de Diagnóstico.

## Testes de Diagnósticos do Modelo

Para avaliar se o modelo atende aos pressupostos, além da análise gráfica podem ser realizados testes de diagnósticos, que são testes de hipóteses para avaliação dos pressupostos que são:

- Normalidade;  
 $H_0$  : Os resíduos possuem normalidade.  
 $H_1$  : Os resíduos **não** possuem normalidade.
- Homoscedasticidade (Homogeneidade de Variância);  
 $H_0$  : Os resíduos possuem variância constante.  
 $H_1$  : Os resíduos **não** possuem variância constante.
- Linearidade;
- Independência.  
 $H_0$ : Existe correlação serial entre os resíduos.  
 $H_1$ : **Não** existe correlação serial entre os resíduos.

Para tanto serão utilizados os seguintes testes:

- Shapiro-Wilk, para avaliar a Normalidade;
- Breush-Pagan, para avaliar a Homoscedasticidade;
- Durbin-Watson, para avaliar a Independência.

Tabela 4: Testes de Diagnósticos dos Resíduos

	Estatística de teste	p-valor
<b>Shapiro-Wilk</b>	0.9508	0.164
<b>Breush-Pagan</b>	7.4901	0.0062
<b>Durbin-Watson</b>	0.5009	<0,0001

A Tabela 5 traz os testes de diagnósticos realizados para avaliar o modelo de regressão ajustado, conforme análise gráfica dos resíduos há a confirmação da heterocedasticidade de variância conforme o p-valor obtido pelo teste de Breush-Pagan (0,006) bem como a dependência entre as características confirmado pelo p-valor do teste de Durbin-Watson (<0,0001), em ambos os testes a hipótese nula ( $H_0$ ) foi rejeitada com base p-valor, como tentativa de contornar a quebra dos pressupostos se faz necessária a transformação da variável resposta.



## Transformações dos Dados

Para esta análise a característica em estudo (Volume) será muitas vezes representada pela letra Y para melhor representação.

Tendo em vista que o modelo não atendeu aos pressupostos se faz necessário a utilização de técnicas para buscar uma melhora de performance do modelo antes da possibilidade de descarte e para tanto algumas transformações são sugeridas, sendo estas:

- $T_1 = \sqrt{Y}$ ;
- $T_2 = \log(Y)$ ;
- $T_3 = Y^2$ .

Sendo Y a variável resposta do modelo representada pelo Volume.

Tabela 5: Medidas Resumo da característica Volume com e sem transformações.

	Mín	Q1	Med	Média	Q3	Máx	Desv.padrão	CV
<b>1. Volume</b>	0,289	0,541	0,685	0,854	1,085	2,180	0,465	0,545
<b>2. <math>\sqrt{\text{Volume}}</math></b>	0,537	0,735	0,828	0,894	1,041	1,477	0,239	0,267
<b>3. <math>\log(\text{Volume})</math></b>	-1,242	-0,615	-0,378	-0,292	0,081	0,780	0,526	-1,805
<b>4. <math>\text{Volume}^2</math></b>	0,083	0,293	0,470	0,940	1,176	4,754	1,051	1,119

A Tabela 6 traz a sumarização da característica em análise em sua forma natural juntamente com as formas transformadas para tentar identificar o comportamento destas transformações, podendo constatar um aumento na variabilidade dos dados, com base no valor do Coeficiente de Variação, com exceção da variável sob a transformação  $Y^2$ . Seguem as equações das retas ajustadas após a transformação.

$$\sqrt{\hat{Y}_i} = -0,89 + 0,077X_i$$

$$\log(\hat{Y}_i) = -4,4 + 0,18X_i$$

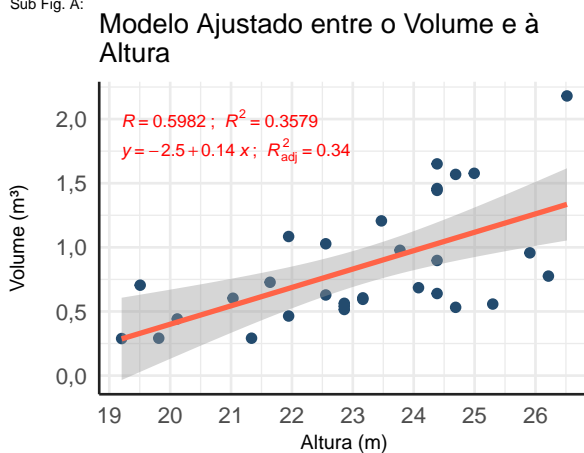
$$\hat{Y}_i^2 = -5,9 + 0,3X_i$$

A Figura 5 traz os diagramas de dispersão com a reta ajustada para o modelo sem transformação e para cada transformação realizada, a fim de possibilitar a identificação das diferenças entre cada modelo.

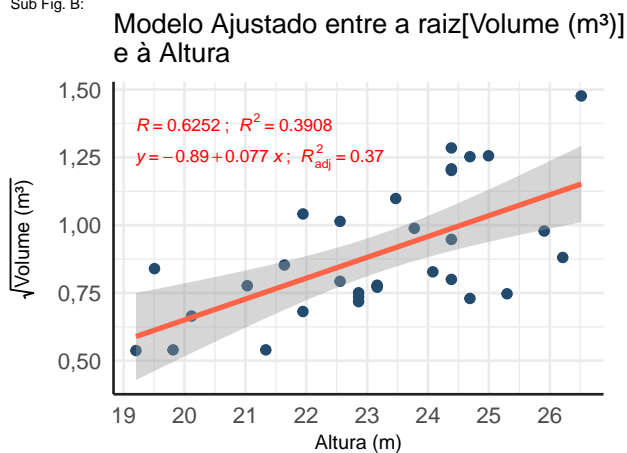
## Figura 5: Modelo ajustado e suas transformações

Comparativo entre o modelo ajustado sem transformação com os modelos após a transformações da variável resposta.

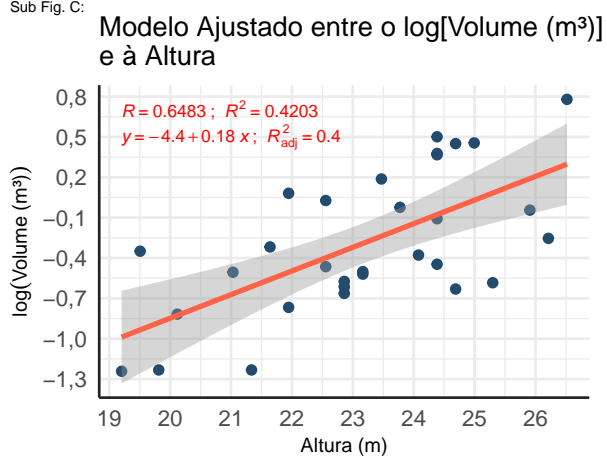
Sub Fig. A:



Sub Fig. B:



Sub Fig. C:



Sub Fig. D:

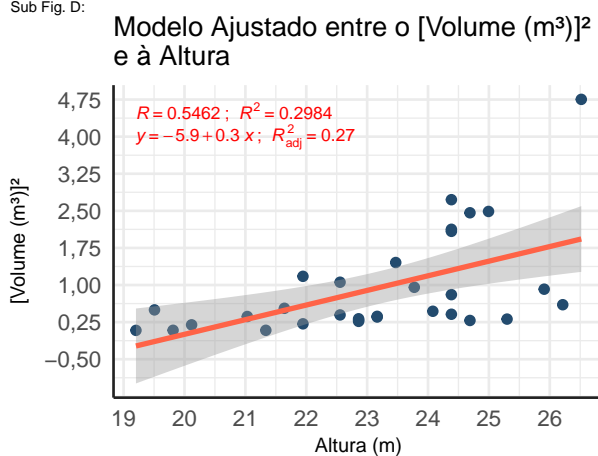
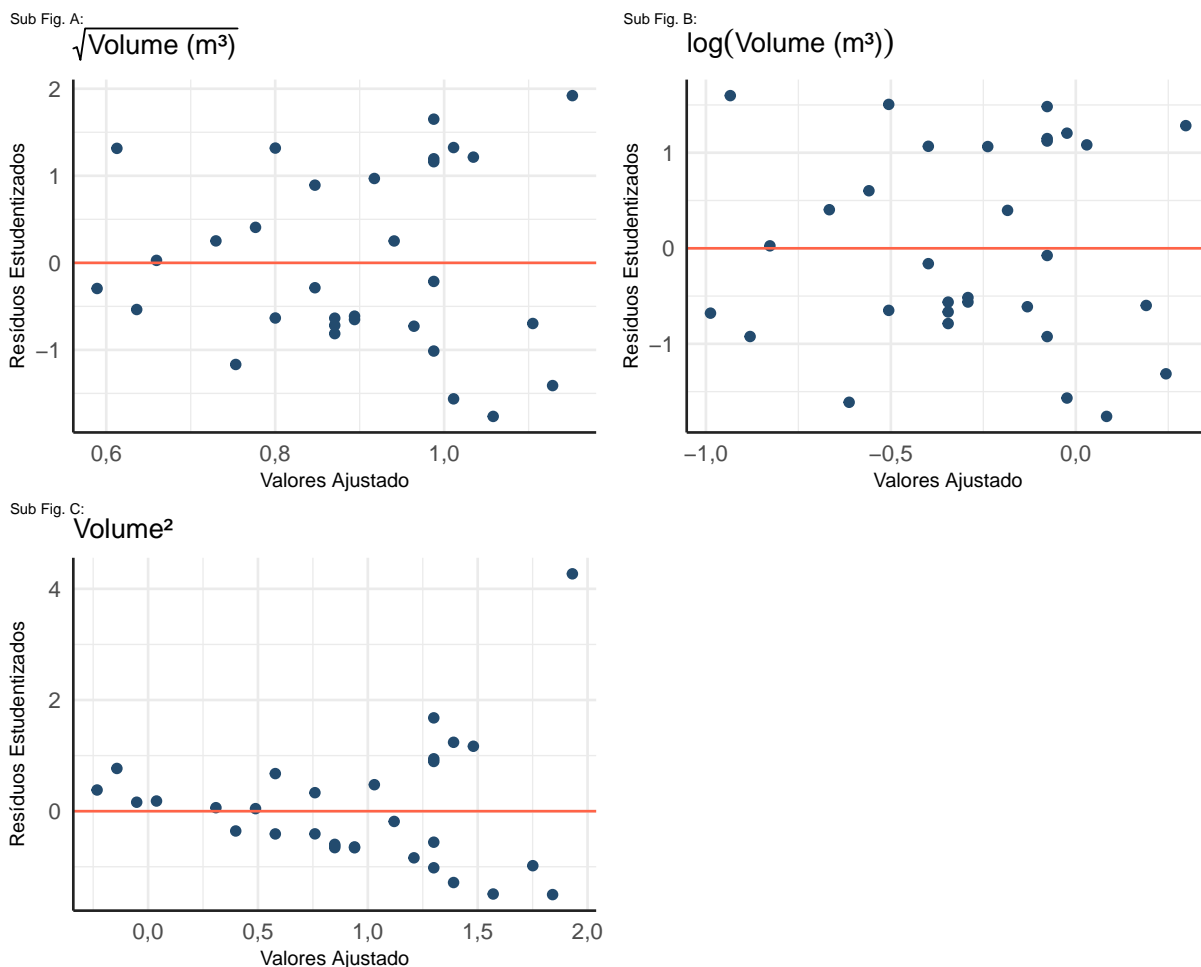


Figura 6: Gráficos dos Resíduos Estudentizados vs. Valores Ajustados das características transformadas.



A Figura 6 traz os gráficos comparativos dos resíduos estudentizados (*Jackknife*) versus os valores ajustados das variáveis transformadas, sendo possível constatar que houve uma aparente melhora na variabilidade nas Sub.Figs. A e B, contudo houve uma maior evidência do ponto atípico na Sub.Fig C, sendo este influente o suficiente para interferir a variabilidade total deste modelo, sendo descartado este modelo transformado pela quebra do pressuposto da homogeneidade de variâncias. Dentre os modelos sob a transformação  $\sqrt{Y}$  e  $\log(Y)$ , a figura que traz o comparativo dos resíduos sob a transformação  $\log(Y)$  (Sub.Fig. B) apresenta uma maior homogeneidade de variância, sendo o modelo mais adequado dentre os modelos transformados.

Como forma de confirmar a avaliação feita sobre a análise gráfica, foi construída a Tabela 6 com os testes de diagnósticos dos resíduos do modelo sob a transformação  $\log(Y)$ .

Tabela 6: Testes de Diagnósticos dos Resíduos após transformação  $\log(Y)$

	Estatística de teste	p-valor
<b>Shapiro-Wilks</b>	0.9131	0.0155
<b>Breush-Pagan</b>	0.4757	0.4904
<b>Durbin-Watson</b>	0.5066	<0,0001

A Tabela 7 traz os testes de diagnóstico para a o modelo após a transformação da variável resposta, sendo possível constatar que após a transformação o novo modelo não rejeita a hipótese nula ( $H_0$ ) para o teste de homogeneidade de variância, corroborando com a análise gráfica, contudo, os demais testes não foram bem sucedidos.

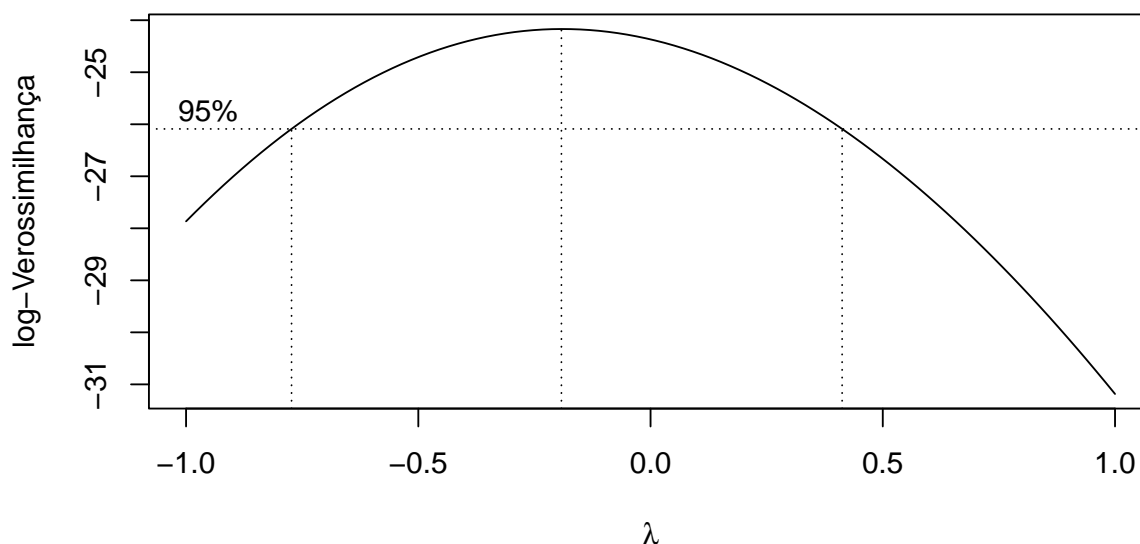
Tendo em vista não ser a tarefa mais simples a aplicação de diversas transformações e os devidos testes para avaliar o melhor possível modelo a ser utilizado, que minimize a variância residual, a opção mais adequada é a escolha do modelo baseado na família de transformações de Box-Cox, definida por:

$$Y(\lambda) = \begin{cases} \frac{Y^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \log(Y), & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

sendo  $\lambda$  o parâmetro da transformação.

Para tanto a Figura 7 foi construída com base na função de  $\lambda$  para a escolha da transformação apropriada.

Figura 7: Transformação Box-Cox



Analisando o gráfico das **famílias de transformações Box-Cox** é possível identificar que  $-0,5 < \lambda_{max} < 0$  ( $\lambda_{max} \approx -0,192$ ), partindo do princípio que o valor zero está incluso no intervalo de valores possíveis de  $\lambda$  que minimizam a variância residual, mesmo o zero não sendo o máximo valor assumido, ainda assim, visando a escolha de uma transformação que possibilite uma interpretação facilitada, **a escolha da transformação  $\log(Y)$  torna-se a escolha mais assertiva**, conforme conclusão anteriormente feita baseado na análise gráfica.

## Conclusão

Após as análises realizadas sobre modelo ajustado foi possível constatar uma melhora no desempenho do modelo, quanto a variabilidade dos dados, após a transformação da variável resposta para a transformação  $\log(Y)$ , fato constatado através da Figura 3 por meio do valor do Coeficiente de Determinação  $R^2$  bem como através da análise da Figura 4, por meio dos resíduos.

Apesar de não se ter conseguido um modelo que preenchesse todos os pressupostos, ainda assim, na possibilidade desse modelo ter sido satisfatório, poder-se-ia interpretar a sua utilização da seguinte forma: Para cada aumento de um metro na altura da árvore, há uma redução média de  $\exp(-4,4)$  m<sup>3</sup> no volume ou aproximadamente 0,012 m<sup>3</sup>.