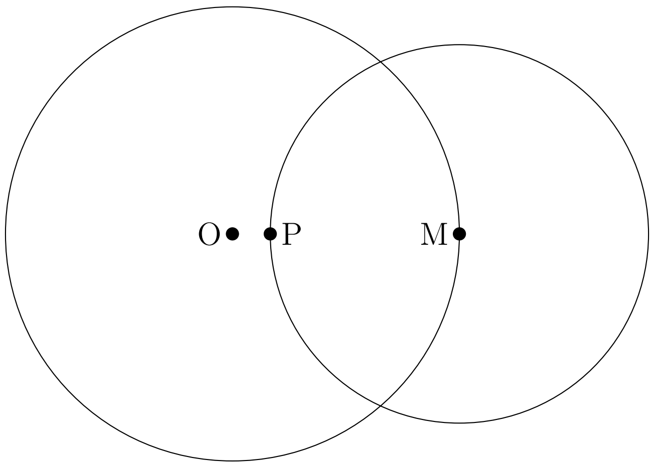
Angewandte Mathematik

Auftrag Kurven

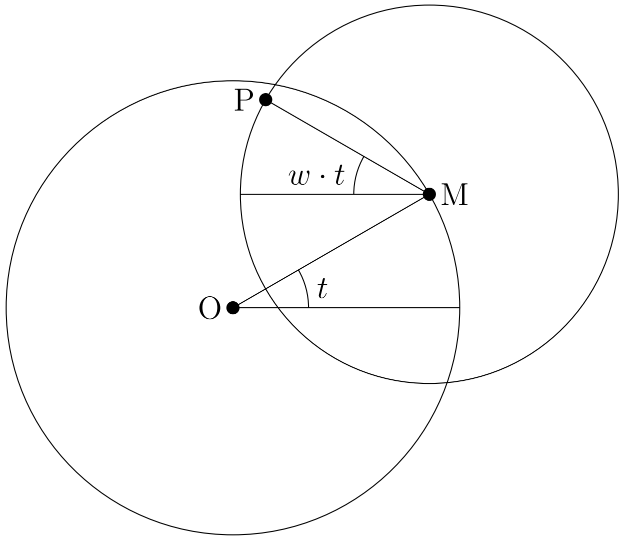
1 Aufgabenbeschreibung

Der Punkt M dreht sich im Abstand von 6 um den Ursprung mit Winkelgeschwindigkeit 1 im Gegenuhrzeigersinn. Der Punkt P dreht um M im Abstand von 4 mit Winkelgeschwindigkeit w um M im Uhrzeigersinn. Die Anfangsposition von P ist (2, 0).

Startposition:



Position nach t Zeit:



2 Parameterdarstellung

Für die Parameterdarstellung suchen wir den Ortsvektor $\vec{P}$.

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{M} + \overrightarrow{MP}$$

Das ist eindeutig weswegen es stimmt. Der Vektor vom Ursprung zu einem beliebigen Vektor $\overrightarrow{V}$, addiert zum Vektor $\overrightarrow{VP}$ wird gleich P sein.

$$\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot 6 \\ \sin(t) \cdot 6 \end{pmatrix}$$

Der Punkt M bewegt sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von 1 auf einem Kreis mit einem Radius von 6. Eine Bewegung mit der Winkelgeschwindigkeit von 1 heisst, dass sich der Punkt in einer Zeiteinheit um 1 Winkelgrad auf der Kreisbahn engtlangbewegt. Die Sinus und Cosinus Funktionen geben die x, respektive die y Koordinaten an für Punkte auf dem Einheitskreis, die mit dem Ursprung und dem Punkt (0, 1) einen bestimmten Winkel einschliessen. Wir können t als Zeit nehmen, und in die Cosinus Funktion einsetzen für die x Koordinate auf dem Einheitskreis, und in die Sinus Funktion einsetzen für die y Koordinate auf dem Einheitskreis. Da wir aber einen Kreis mit Radius 6 möchten, multiplizieren wir diesen Vektor mit 6. Somit werden alle Punkte 6mal so weit vom Ursprung sein wie auf dem Einheitskreis, und unser Kreis nimmt einen Radius von 6 an.

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -\cos(w \cdot t) \cdot 4 \\ \sin(w \cdot t) \cdot 4 \end{pmatrix}$$

Der Punkt P bewegt sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von w auf einem Kreis mit dem Radius von 4. Das heisst, dass hier im Gegensatz zu vorher t nicht einfach als Winkel eingesetzt werden kann, sondern es noch mit w multipliziert werden muss. Ausserdem muss die x Koordinate mit -1 multipliziert werden, da sich der Punkt P im Uhrzeigersinn dreht.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P} &= \overrightarrow{M} + \overrightarrow{MP} \\
\overrightarrow{P} &= \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot 6 \\ \sin(t) \cdot 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos(w \cdot t) \cdot 4 \\ \sin(w \cdot t) \cdot 4 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{P} &= \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot 6 - \cos(w \cdot t) \cdot 4 \\ \sin(t) \cdot 6 + \sin(w \cdot t) \cdot 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Parameterdarstellung von P kann einfach aus dem Ortsvektor bestimmt werden.

$$\begin{cases} \cos(t) \cdot 6 - \cos(w \cdot t) \cdot 4 \\ \sin(t) \cdot 6 + \sin(w \cdot t) \cdot 4 \end{cases}$$

Es fehlt noch der Definitionsbereich. Der Punkt M ist am selben Ort, wenn $t \pmod{2\pi} = 0$. Das ist so, denn M braucht 2π Zeit für eine Runde. P braucht aber $2\pi \cdot w$ Zeit für eine Runde, also ist es am selben Ort relativ zu M wenn $t \pmod{2\pi \cdot w} = 0$ stimmt. Der Definitionsbereich geht also von null, bis zur tiefsten Zahl die beide Gleichungen erfüllt.

$$t \in \{0, \min\{x \in \mathbb{R} | t \pmod{2\pi} = 0 \land t \pmod{2\pi \cdot w} = 0\}\}$$

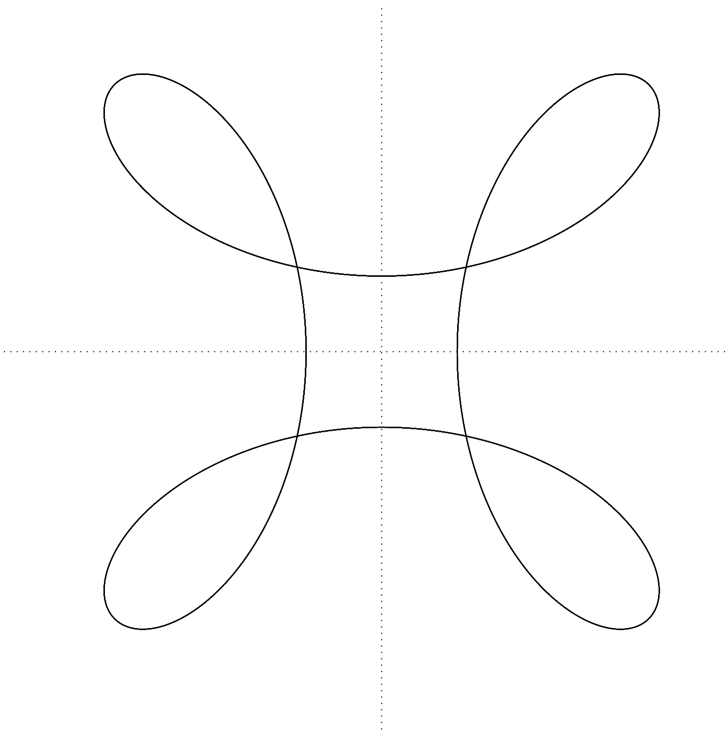
Die ganze Parameterdarstellung:

$$\begin{cases} \cos(t) \cdot 6 - \cos(w \cdot t) \cdot 4 \\ \sin(t) \cdot 6 + \sin(w \cdot t) \cdot 4 \end{cases} \quad t \in \{0, \min\{x \in \mathbb{R} | t \pmod{2\pi} = 0 \land t \pmod{2\pi \cdot w} = 0\}\}$$

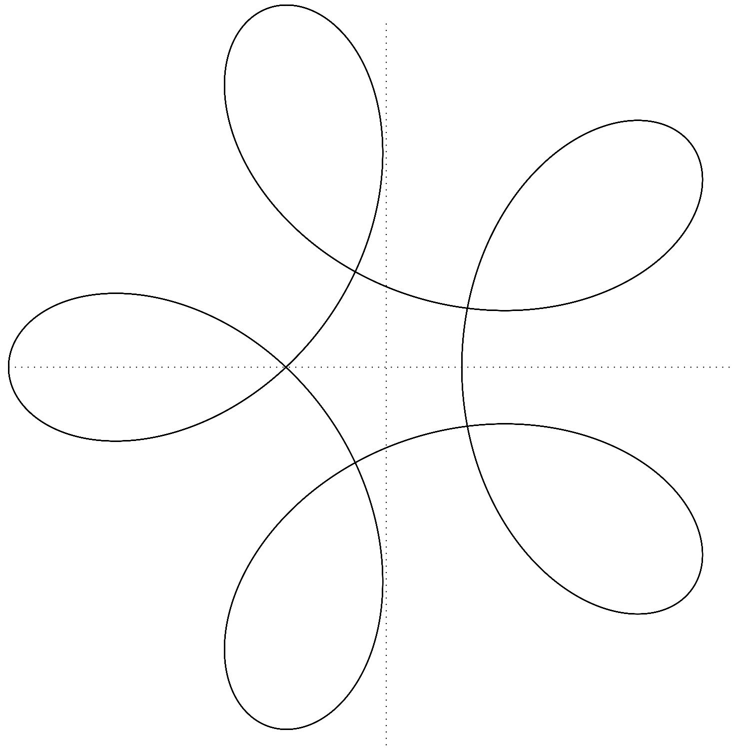
3 Beispiele

Mithilfe von Visualisationstools wie GeoGebra oder tikz in LaTeX können wir Kurven dieser Parameterdarstellung mit gegebenen w Werten visualisieren.

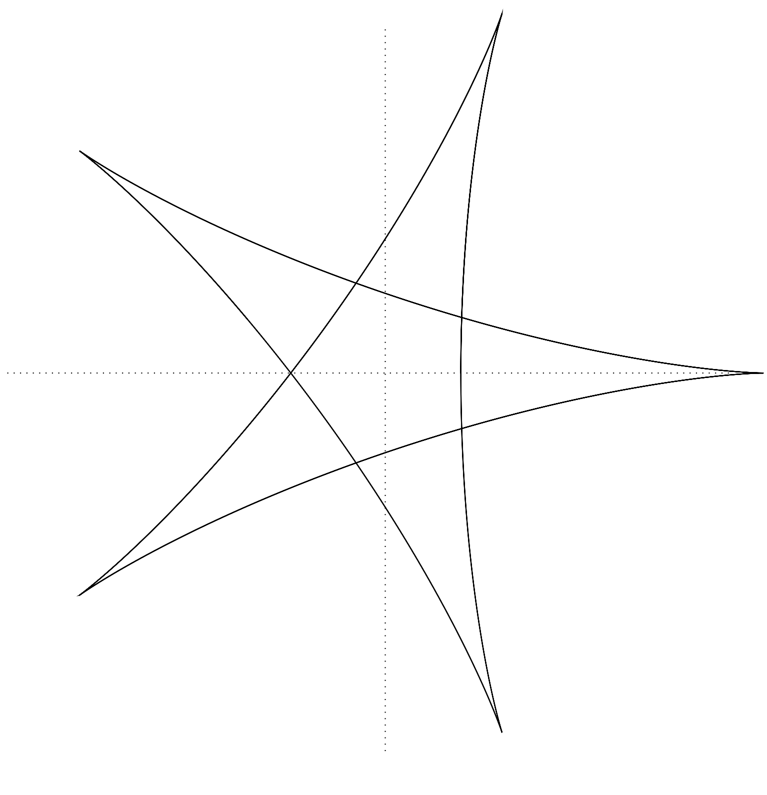
$w = 3$:



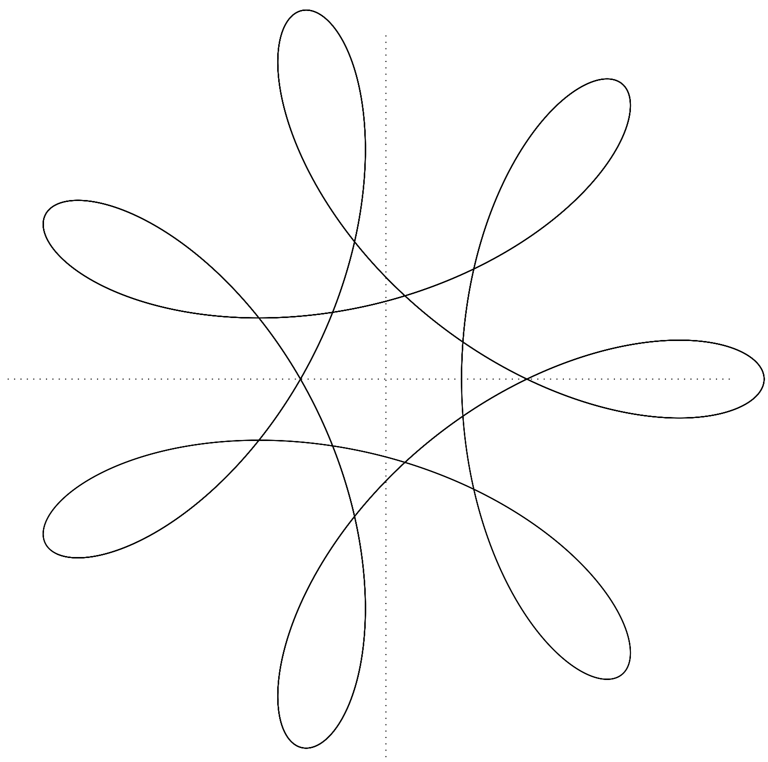
$w = 4$:



$w = 1.5$:



$w = 2.5$:



4 Anfangsgeschwindigkeit und Anfangswinkel

Die Anfangsgeschwindigkeit ist die Länge vom Tangentialvektor $\overrightarrow{r}'(t)$ bei $t = 0$. Der Anfangswinkel ist der Winkel von diesem Vektor.

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot 6 - \cos(w \cdot t) \cdot 4 \\ \sin(t) \cdot 6 + \sin(w \cdot t) \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{r}'(t) = \begin{pmatrix} \sin(w \cdot t) \cdot w \cdot 4 - \sin(t) \cdot 6 \\ \cos(w \cdot t) \cdot w \cdot 4 + \cos(t) \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{r}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ w \cdot 4 + 6 \end{pmatrix}$$

Die Länge von $\overrightarrow{r}'(0)$ ist $w \cdot 4 + 6$, und der Winkel senkrecht. Somit ist die Anfangsgeschwindigkeit $w \cdot 4 + 6$, und der Anfangswinkel 90°, angenommen dass w nicht negativ ist, in welchem fall der Anfangswinkel 270°wäre.