Mathematisches Pendel

Untersuchung der Eigenschaften eines Mathematischen Pendels
15. März 2022

Nandor Kovacs & Céline Schuster

Bericht zum Physikpraktikum vom 4. März 2022
Mathematisches Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl

Mathematisches Pendel

Bereits Galileo Galilei beschäftigte sich ausgiebig mit dem mathematischen Pendel. Es gilt als Musterbeispiel dafür, wie man mit systematischen Messungen auf einfache physikalische Gesetzmässigkeiten kommen kann.

Ziele: Lernen Sie an einem einfachen Beispiel, wie man experimentell ein physikalisches Gesetz herleiten und auf dem Weg dahin falsche Hypothesen ausschliessen kann.

Material:

- Stativ mit montierter Winkelscheibe
- verschiedene Pendelmassen
- Stoppuhren und Messband

Vorbereitung: Stoppen Sie zwanzig Mal die Zeit für fünf Schwingungen eines Fadenpendels (kleine Amplitude). Berechnen Sie daraus die mittlere Zeit für eine Schwingung.

Ein vernünftiges Mass für den Fehler der Zeitmessung ist die grösste Abweichung einer Einzelmessung vom Mittelwert.

Messungen:

a Bestimmen Sie die Schwingungsdauer bei konstanter, kleiner Amplitude und konstanter Pendelmasse für zehn verschiedene Pendellängen (Pendellänge = Schnurlänge + halbe Dicke der Pendelmasse). Wählen Sie die Anzahl Schwingungen pro Messung so, dass der Fehler weniger als 1 % beträgt. Um grobe Messfehler zu verhindern, führen Sie jede Messung mindestens zweimal durch.

b Messen Sie die Schwingungsdauer bei konstanter, kleiner Amplitude und konstanter Pendellänge für drei verschiedene Pendelmassen.

c Planen Sie eine Messung, mit der Sie feststellen können, ob die Schwingungsdauer von der Amplitude abhängt, und führen Sie diese durch.

Aufgaben:

1. Diskutieren Sie die Vor- und Nachteile „schöner" Werte für die Schnurlänge bei Ihren Messungen.
2. Zeigen Sie anhand einer geeigneten graphischen Darstellung, dass die Schwingungsdauer für kleine Amplituden proportional zur Wurzel der Pendellänge ist.
3. Bestimmen Sie die Parameter einer geeigneten Regressionsfunktion im vorherigen Diagramm und schreiben Sie diese korrekt mit Einheiten. Berechnen Sie daraus den Wert der Fallbeschleunigung im Praktikumszimmer (mit Fehlerrechnung). Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Literaturwert.
4. Überprüfen Sie mit einem Residuenplot, ob die Regressionsfunktion im Rahmen der Messgenauigkeit mit den Messwerten übereinstimmt.
5. Zeigen Sie, dass die Schwingungsdauer im Rahmen der Messgenauigkeit von der Pendelmasse unabhängig ist.
6. Entscheiden Sie anhand Ihrer Messwerte von c, ob die Schwingungsdauer im Rahmen der Messgenauigkeit von der Amplitude abhängig ist.

Bedingungen: Falls Sie einen Kurzbericht schreiben, bearbeiten Sie mindestens Aufgaben 2 und 3. Für einen vollständigen Bericht bearbeiten Sie alle Aufgaben.

Abgabetermin des Berichts (inkl. Journal) ist **Donnerstag, 23. März 2022.**

1 Einleitung

Wir alle kennen Pendeluhren. Pendeluhren benutzen statt Quartz stückchen, oder Signale von einer Radiouhr eine Pendel um die Zeit zu verfolgen. Das muss heissen, das die Periodenlängen von Pendeln berechenbar sind. Falls die Periode von dem Ausschlagwinkel abhängt, würde das aber recht kompliziert sein zum berechnen, also vermuten wir dass das nicht der Fall ist.

2 Theorie

Eine Pendel hat folgende Parameter:

- l = die Länge der Pendel
- g = das Gewicht des Pendelgewichts. Dies ist gleich zur länge der Schnur plus die halbe Dicke des Gewichts.
- α = die auslenkung beim starten der Pendel in winkelgrad

Die Formel für die länge einer Periode in Sekunden lautet

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

[**FoTa**]

3 Experiment

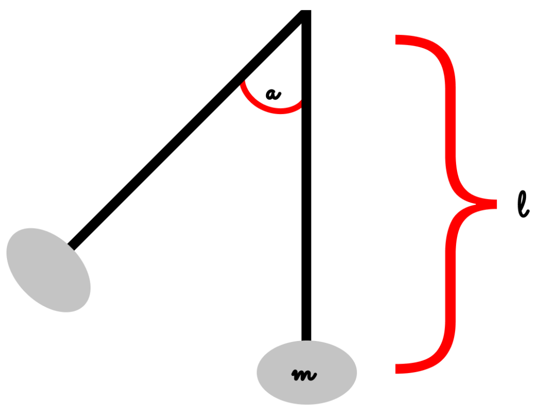


Abbildung 1: Skizze Experimentaufbau

Unser Experiment ist einfach aufgebaut. Es wird ein Gewicht an einem Faden Aufgehängt. Sie wird ausgelenkt, losgelassen, und die Zeit der Perioden werden gemessen wenn das Gewicht die Mitte kreuzt. Wir lassen ausserdem 5mal das Gewicht pendeln bevor wir es messen, damit ungenauigkeiten ausgependelt werden.

Die länge l messen wir mit einem Massband auf 0.5cm genau und α messen wir mit einer Winklerscheibe auf 2°genau. Die Zeit messen wir mit einer Stoppuhr. Damit wir genauere Messungen haben, messen wir immer 5 Perioden.
Um die genauigkeit von den Zeitmessungen zu bestimmen, messen wir 20mal mit dem gleichen α, m, und l. Wir berechnen die maximale Abweichung mit diesen Daten.

Nr.	Periodenlänge T*5 in s
1	8.2
2	8.27
3	8.23
4	8.2
5	8.2
6	8.14
7	8.23
8	8.22
9	8.2
10	8.21
11	8.17
12	8.21
13	8.14
14	8.22
15	8.16
16	8.22
17	8.17
18	8.2
19	8.2
20	8.22

Tabelle 1: Messungen zur Vorbereitung

$$\begin{aligned}\overline{T} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{n}\left(T_1 + \cdots + T_n\right) \\ &= \frac{164.01s}{20} \\ &= 8.2005s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta T &= max(T_{max} - \overline{T}, \overline{T} - T_{min}) \\ &= max(8.27s - 8.2005s, 8.2005s - 8.14) \\ &= max(0.0695s, 0.0605) \\ &= 0.0695s \\ &= 0.07s\end{aligned}$$

Da die Zeitmessung 5 Periodenlängen entspricht, ist die genauigkeit dementsprechend auch 5mal so gut. Das heisst, das T auf 0.014 genau gemessen ist. Die Stoppuhr zeigt 0.01 genau an, was bei 5 Schwingungen einer Genauigkeit von 0.002 entsprechen würde.

4 Messungen

Pendellänge l in cm	Periodenlänge T*5 in s
10	3.2
10	3.26
20	4.53
20	4.54
30	5.51
30	5.51
40	6.38
40	6.41
50	7.13
50	7.11
60	7.81
60	7.8
70	8.38
70	8.41
80	8.95
80	8.93
90	9.58
90	9.52
100	10.01
100	10.01

Tabelle 2: m ist konstant, α ist konstant und klein, l ist variabel

Gewichtsmasse m in g	Periodenlänge T*5 in s
24.8	5.09
24.8	5.06
47.1	5.08
47.1	5.02
359.2	5.09
359.2	5.06

Tabelle 3: l ist konstant, α ist konstant und klein, m ist variabel

Amplitude α in Winkelgrad	Periodenlänge T*5 in s
10	8.46
10	8.5
20	8.5
20	8.47
30	8.51
30	8.49

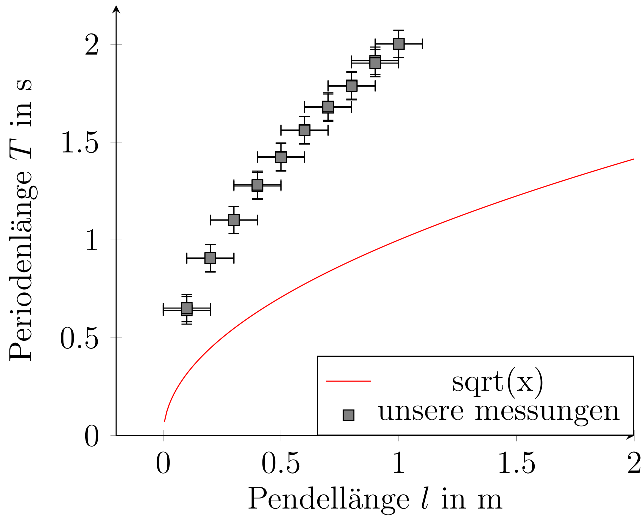
Tabelle 4: l ist konstant, m ist konstant, α ist variabel

5 Aufgaben

5.1 Vor und Nachteile schöner Werte für l

Schöne längen für l sind einfacher zu messen, was ein deutlicher Vorteil ist. Das Problem ist, das wenn l einen schönen Wert hat, dann wird T relativ sicher keinen schönen Wert haben.

5.2 Proportionalität von T zu l



Diese Grafik illustriert gut das T proportional zur Wurzel von l ist.

5.3 Regressionsfunktion & Fallbeschleunigung ausrechnen

5.3.1 Regressionsparameter berechnen

Der Regressionsfaktor R_l ist

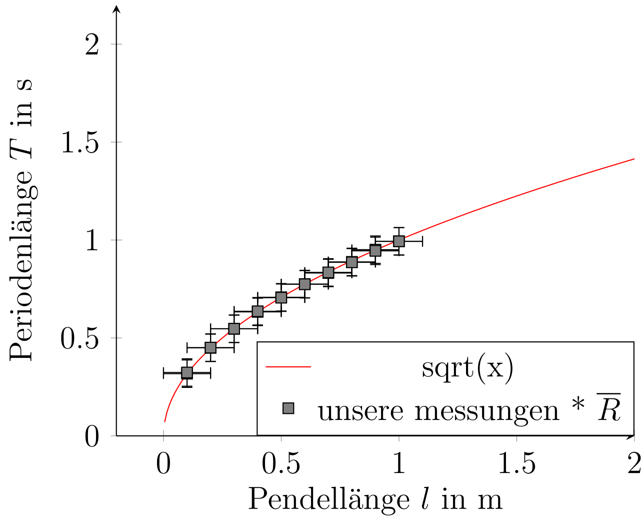
$$R_l = \frac{sqrt(l)}{T_l}$$

Um eine Annäherung an der allgemeinen Regressionsfaktor zu bekommen, nehmen wir den Druchschnitt aller R_l die wir ausrechnen können aus unseren Messresultaten aus Tabelle 2.

$$\overline{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \frac{sqrt(l_i)}{T_i}$$

$$= \frac{9.923360844s}{20\sqrt{m}}$$

$$= 0.496168042\frac{s}{sqrt(m)}$$



Der Literarturwert für R kann man aus dem Literarturwert für T ausrechnen

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$\frac{\sqrt{g}}{2\pi}T = \sqrt{l}$$

$$R = \frac{\sqrt{g}}{2\pi}$$

$$\frac{\sqrt{9.81m/s^2}}{2\pi} = 0.498488\frac{\sqrt{m}}{s}$$

5.3.2 Fallbeschleunigung mit Fehlerrechnung ausrechnen

Nehmen wir an das der Wert für R den wir berechnet haben korrekt ist. Das würde heissen, das $R = 0.496168042\frac{\sqrt{m}}{s}$

$$\frac{\sqrt{g}}{2\pi} = 0.496168042\frac{\sqrt{m}}{s}$$
$$\sqrt{g} = 2\pi \cdot 0.496168042\frac{\sqrt{m}}{s}$$
$$g = (2\pi \cdot 0.496168042)^2\frac{m}{s^2}$$
$$g = 9.7189\frac{m}{s^2}$$

Laut unserem R Wert würde g 9.7182 entsprechen. Fehlerquellen sind die ungenauen Messungen. T ist auf 0.014 genau angegeben, und l auf 0.001 genau angegeben. Das heisst:

$$\Delta T_{absolut} = 0.014$$
$$\Delta l_{absolut} = 0.001$$

Der relative Fehler ändert sich. Hier nehmen wir wieder den Druchschnitt aller relativer Fehler.

$$\begin{aligned}\Delta T_{relativ} &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta T_{absolut}}{T_i}\\ &= \frac{0.22}{20}\\ &= 0.011\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta l_{relativ} &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta l_{absolut}}{l_i}\\ &= \frac{0.059}{20}\\ &= 0.0295\end{aligned}$$

Jetzt wo wir alle relative und absolute Messfehler kennen, können wir die restlichen Fehler berechnen

$$\begin{aligned}R &= \frac{sqrt(l)}{T}\\ \Delta R_{absolut} &= \Delta l_{absolut}\\ &= 0.001\\ \Delta R_{relativ} &= \Delta l_{relativ}\frac{1}{2} + \Delta T_{relativ}\\ &= 0.0295\frac{1}{2} + 0.011\\ &= 0.02572\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g &= (2\pi \cdot R)^2\\ \Delta g_{absolut} &=\\ \Delta g_{relativ} &= 2\Delta R\\ &= 0.05144\end{aligned}$$

Das heisst, das $g = 9.7189 \pm 0.05155\%$

6 Fazit

7 Reflektion

8 Referenzen

9 Anhang

Versuchsanleitung und Originalprotokoll vom 4. März 2022