Mathematisches Pendel

Untersuchung der Eigenschaften eines Mathematischen Pendels
22. März 2022

Nandor Kovacs & Céline Schuster

Bericht zum Physikpraktikum vom 10. März 2022
Mathematisches Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl

Mathematisches Pendel

Bereits Galileo Galilei beschäftigte sich ausgiebig mit dem mathematischen Pendel. Es gilt als Musterbeispiel dafür, wie man mit systematischen Messungen auf einfache physikalische Gesetzmässigkeiten kommen kann.

Ziele: Lernen Sie an einem einfachen Beispiel, wie man experimentell ein physikalisches Gesetz herleiten und auf dem Weg dahin falsche Hypothesen ausschliessen kann.

Material:

- Stativ mit montierter Winkelscheibe
- verschiedene Pendelmassen
- Stoppuhren und Messband

Vorbereitung: Stoppen Sie zwanzig Mal die Zeit für fünf Schwingungen eines Fadenpendels (kleine Amplitude). Berechnen Sie daraus die mittlere Zeit für eine Schwingung.

Ein vernünftiges Mass für den Fehler der Zeitmessung ist die grösste Abweichung einer Einzelmessung vom Mittelwert.

Messungen:

a Bestimmen Sie die Schwingungsdauer bei konstanter, kleiner Amplitude und konstanter Pendelmasse für zehn verschiedene Pendellängen (Pendellänge = Schnurlänge + halbe Dicke der Pendelmasse). Wählen Sie die Anzahl Schwingungen pro Messung so, dass der Fehler weniger als 1 % beträgt. Um grobe Messfehler zu verhindern, führen Sie jede Messung mindestens zweimal durch.

b Messen Sie die Schwingungsdauer bei konstanter, kleiner Amplitude und konstanter Pendellänge für drei verschiedene Pendelmassen.

c Planen Sie eine Messung, mit der Sie feststellen können, ob die Schwingungsdauer von der Amplitude abhängt, und führen Sie diese durch.

Aufgaben:

1. Diskutieren Sie die Vor- und Nachteile „schöner“ Werte für die Schnurlänge bei Ihren Messungen.
2. Zeigen Sie anhand einer geeigneten graphischen Darstellung, dass die Schwingungsdauer für kleine Amplituden proportional zur Wurzel der Pendellänge ist.
3. Bestimmen Sie die Parameter einer geeigneten Regressionsfunktion im vorherigen Diagramm und schreiben Sie diese korrekt mit Einheiten. Berechnen Sie daraus den Wert der Fallbeschleunigung im Praktikumszimmer (mit Fehlerrechnung). Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Literaturwert.
4. Überprüfen Sie mit einem Residuenplot, ob die Regressionsfunktion im Rahmen der Messgenauigkeit mit den Messwerten übereinstimmt.
5. Zeigen Sie, dass die Schwingungsdauer im Rahmen der Messgenauigkeit von der Pendelmasse unabhängig ist.
6. Entscheiden Sie anhand Ihrer Messwerte von c, ob die Schwingungsdauer im Rahmen der Messgenauigkeit von der Amplitude abhängig ist.

Bedingungen: Falls Sie einen Kurzbericht schreiben, bearbeiten Sie mindestens Aufgaben 2 und 3. Für einen vollständigen Bericht bearbeiten Sie alle Aufgaben.

Abgabetermin des Berichts (inkl. Journal) ist **Donnerstag, 23. März 2022.**

1 Einleitung

Wir alle kennen Pendeluhren. Pendeluhren benutzen statt Quartzstückchen oder Signale von einer Radiouhr eine Pendel, um die Zeit zu verfolgen. Das muss heissen, dass die Periodenlängen von Pendeln berechenbar sind. Falls die Periode von dem Ausschlagwinkel abhängt, würde das aber recht kompliziert sein zum berechnen, also vermuten wir dass beispielsweise das nicht der Fall ist.

2 Theorie

Eine Pendel hat folgende Parameter:

- l = die Länge der Pendel
- g = das Gewicht des Pendelgewichts. Dies ist gleich zu der Länge der Schnur plus die halbe Dicke des Gewichts.
- α = die Auslenkung beim starten der Pendel in Winkelgrade.

Die Formel für die länge einer Periode in Sekunden lautet:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

[**FoTa**]

3 Experiment

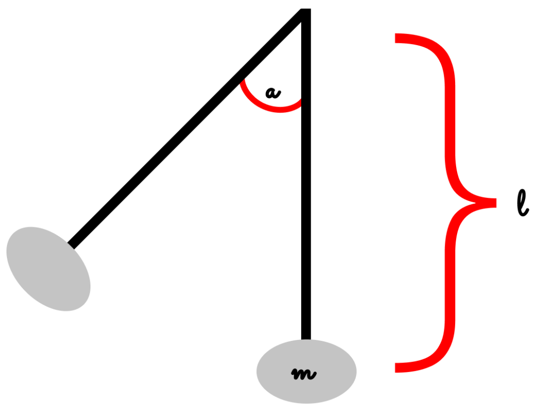


Abbildung 1: Skizze Experimentaufbau

Unser Experiment ist einfach aufgebaut. Es wird ein Gewicht an einem Faden Aufgehängt. Sie wird ausgelenkt, losgelassen, und es wird die Zeit gemessen, die die Pendel für 5 Perioden braucht. Wir starten die Messung wenn die Pendel die Mitte kreuzt, und Enden sie wenn sie 5mal hin und her ist. So werden wir 5mal so prezise sein.

Die Länge l messen wir mit einem Massband auf 0.5cm genau und α messen wir mit einer Winklerscheibe auf 2°genau. Die Masse m messen wir mit einer Waage auf 0.1g genau. Die Zeit messen wir mit einer Stoppuhr. Damit wir genauere Messungen haben, messen wir immer 5 Perioden.
Um die genauigkeit von den Zeitmessungen zu bestimmen, messen wir 20mal mit dem gleichen α, m, und l. Wir berechnen die maximale Abweichung mit diesen Daten.

Nr.	Periodenlänge T*5 in s
1	8.2
2	8.27
3	8.23
4	8.2
5	8.2
6	8.14
7	8.23
8	8.22
9	8.2
10	8.21
11	8.17
12	8.21
13	8.14
14	8.22
15	8.16
16	8.22
17	8.17
18	8.2
19	8.2
20	8.22

Tabelle 1: Messungen zur Vorbereitung

$$\begin{aligned}
\overline{T_5} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{n}\left(T_1 + \cdots + T_n\right) \\
&= \frac{164.01s}{20} \\
&= 8.2005s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta T_5 &= max(T_{max} - \overline{T}, \overline{T} - T_{min}) \\
&= max(8.27s - 8.2005s, 8.2005s - 8.14) \\
&= max(0.0695s, 0.0605) \\
&= 0.0695s \\
&= 0.07s \\
\Delta T &= \Delta T_5/5 \\
&= 0.014
\end{aligned}$$

Da die Zeitmessung 5 Periodenlängen entspricht, ist die genauigkeit dementsprechend auch 5mal so gut. Das heisst, das T auf 0.014 genau gemessen ist. Die Stoppuhr zeigt 0.01 genau an, was bei 5 Schwingungen einer Genauigkeit von 0.002 entsprechen würde. Die Stoppuhr ist also genauer wie unsere Messkünste, und darum nehmen wir den ΔT von unseren Messkünsten als absoluten Fehler.

4 Messungen

Pendellänge l in cm	Periodenlänge T*5 in s
10	3.2
10	3.26
20	4.53
20	4.54
30	5.51
30	5.51
40	6.38
40	6.41
50	7.13
50	7.11
60	7.81
60	7.8
70	8.38
70	8.41
80	8.95
80	8.93
90	9.58
90	9.52
100	10.01
100	10.01

Tabelle 2: m ist konstant, α ist konstant und klein, l ist variabel

Gewichtsmasse m in g	Periodenlänge T*5 in s
24.8	5.09
24.8	5.06
47.1	5.08
47.1	5.02
359.2	5.09
359.2	5.06

Tabelle 3: l ist konstant, α ist konstant und klein, m ist variabel

Amplitude α in Winkelgrad	Periodenlänge T*5 in s
10	8.46
10	8.5
20	8.5
20	8.47
30	8.51
30	8.49

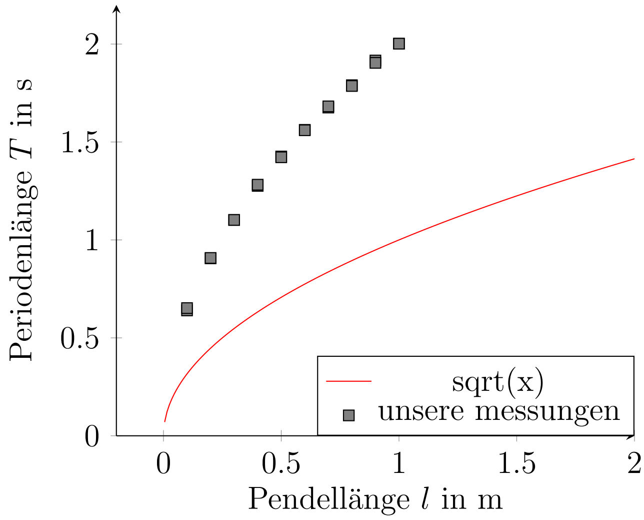
Tabelle 4: l ist konstant, m ist konstant, α ist variabel

5 Aufgaben

5.1 Vor und Nachteile schöner Werte für l

Schöne Längen für l sind einfacher zu messen, was ein deutlicher Vorteil ist. Das Problem ist, das wenn l einen schönen Wert hat, dann wird T relativ sicher keinen schönen Wert haben.

5.2 Proportionalität von T zu l



Diese Grafik illustriert gut das T proportional zur Wurzel von l ist. Die Fehlerbalken sind so klein, dass sie nicht sichtbar sind.

5.3 Regressionsfunktion & Fallbeschleunigung ausrechnen

5.3.1 Regressionsparameter berechnen

Mit Excel können wir einfach die Regressionsfunktion ausrechen. Die ist:

$$f(x) = 2.003x^{0.4922}$$

Der Exponent ist nahe genug zu $\frac{1}{2}$, so dass wir $1/2.003 = 0.49925112331$ als Regressionsfaktor R nehmen können. Das heisst, dass wenn wir alle unsere Datenpünkte mit R multiplizieren, alle unsere Punkte auf die Wurzelfunktion liegen sollten.
Den Literarturwert für R kann man aus dem Literarturwert für T ausrechnen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$\frac{\sqrt{g}}{2\pi}T = \sqrt{l}$$

$$R = \frac{\sqrt{g}}{2\pi}$$

$$\frac{\sqrt{9.81m/s^2}}{2\pi} = 0.498488\frac{\sqrt{m}}{s}$$

5.3.2 Fallbeschleunigung mit Fehlerrechnung ausrechnen

Nehmen wir an das der Wert für R den wir berechnet haben korrekt ist. Das würde heissen, das $R = 0.496168042\frac{\sqrt{m}}{s}$

$$\frac{\sqrt{g}}{2\pi} = 0.496168042\frac{\sqrt{m}}{s}$$
$$\sqrt{g} = 2\pi \cdot 0.496168042\frac{\sqrt{m}}{s}$$
$$g = (2\pi \cdot 0.496168042)^2\frac{m}{s^2}$$
$$g = 9.7189\frac{m}{s^2}$$

Laut unserem R Wert würde g 9.7182 entsprechen. Fehlerquellen sind die ungenauen Messungen. T ist auf 0.014 genau angegeben, und l auf 0.001 genau angegeben. Das heisst:

$$\Delta T = 0.014s$$
$$\Delta l = 0.001m$$

Der relative Fehler ändert sich. Hier nehmen wir wieder den Druchschnitt aller relativer Fehler.

$$\begin{aligned}\Delta r_T &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta r_T}{T_i}\\ &= \frac{0.22}{20}\\ &= 0.011\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta r_l &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta r_l}{l_i}\\ &= \frac{0.059}{20}\\ &= 0.0295\end{aligned}$$

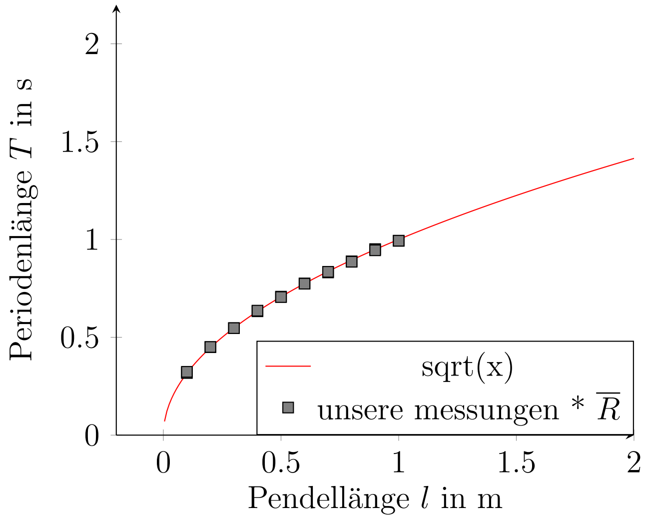
Jetzt wo wir alle relative und absolute Messfehler kennen, können wir die restlichen Fehler berechnen:

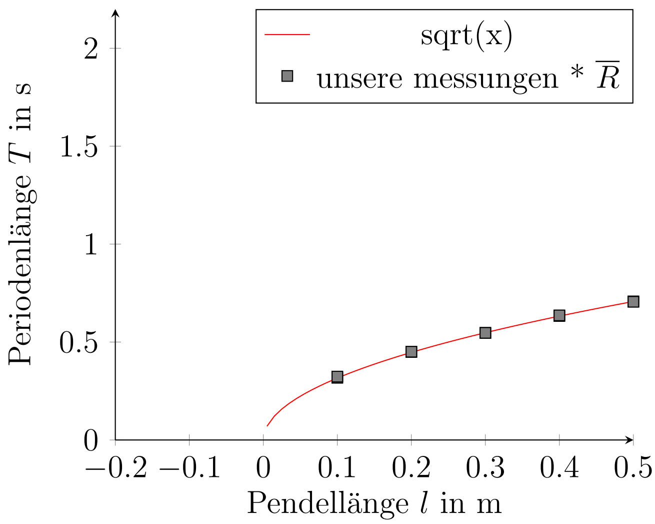
$$\begin{aligned}R &= \frac{sqrt(l)}{T}\\ \Delta r_R &= \Delta r_l\frac{1}{2} + \Delta r_T\\ &= 0.0295\frac{1}{2} + 0.011\\ &= 0.02572\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g &= (2\pi \cdot R)^2\\ \Delta r_g &= 2\Delta R\\ &= 0.05144\\ \Delta g &= g * \Delta r_g\\ &= 9.7189\frac{m}{s^2} * 0.05144\\ &= 0.49994\frac{m}{s^2} \approx 0.5\frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

Das heisst, das $g = 9.7189\frac{m}{s^2} \pm 0.5\frac{m}{s^2}$

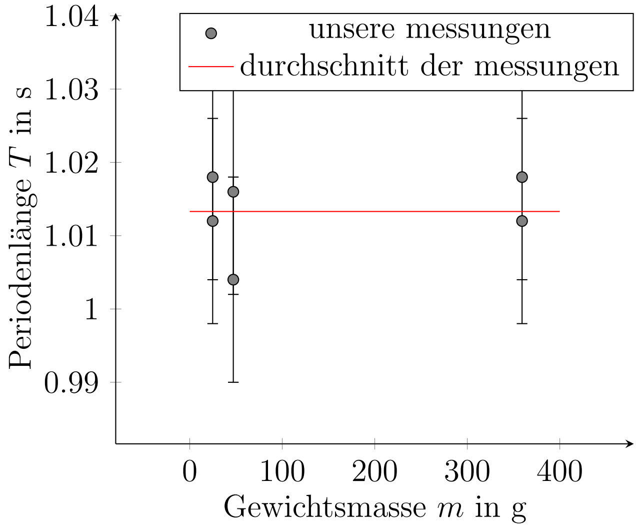
5.4 Residuenplot





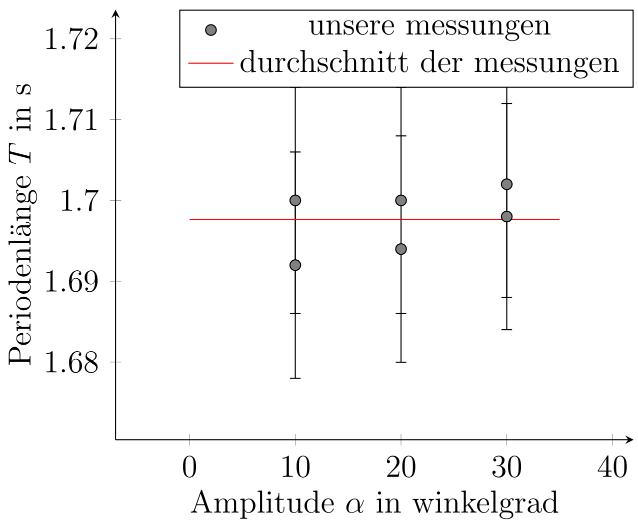
Anhand von diesen Residuenplots sehen wir, dass unser Wert für R der sehr gut der Messgenauigkeit entspricht. Die Fehlerbalken sind so klein, dass man sie nicht einmal sieht beim vergrösserten Plot.

5.5 Einfluss der Pendelmasse



Alle Messwerte sind innerhalb von den Fehlerbalken von allen anderen Messwerten. T ist unabhängig von m innerhalb von der Messgenauigkeit.

5.6 Einfluss der Amplitude



Alle Messwerte sind innerhalb von den Fehlerbalken von allen anderen Messwerten. T ist unabhängig von α innerhalb von der Messgenauigkeit.

6 Fazit

Wir können innerhalb von unserer Messgenauigkeit bestätigen das nur die Länge der Pendel die Periodenlänge beeinflusst hier auf der Erde.
Ausserdem konnte ($\Delta g_{relativ} = 0.05144$) g mit einer relativ grossen Genauigkeit ausgerechnet werden.

7 Reflektion

Wir haben in diesem Physikpraktikum gelernt wie man Messungen macht, und dessen Fehlerquoten dokumentiert und berrechnet. Ausserdem haben gelernt wie man einen Bericht über Messwerte schreibt.
Wir hatten eine kleine Fehlkomunikation was die Messtechnik anging, was dazu führte das alle unsere Werte halb so gross waren. Unsere Fehlerrechnung scheint gut zu sein, aber der Fehler den wir Bekommen haben ist etwas zu klein.

8 Anhang

Versuchsanleitung und Originalprotokoll vom 10. März 2022