Содержание

Часть 1.

Метод экспертных оценок. Отбор экспертов.

Метод используется, когда отсутсвует формальный математический аппарат решения задачи. Рассмотрим метод на примере построение ранжированного ряда: расположение факторов в порядке важности. То есть $\forall e \in E \rightarrow r(e) \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
def. Число $r(e)$ называется рангом элемента.
def. Расположение элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в порядке не возрастания их рангов - ранжированный ряд: $r(x_{i_1}) \geqslant r(x_{i_2}) \geqslant \ldots \geqslant r(X_{i_n})$.
Метод состоит их 2-х этапов: отбор экспертов и непосредственное построение ранжированного ряда. Рассмотрим этап отбора экспертов.
Пусть есть m экспертов. Каждый из них оценивает компетентность всех остальных, включая себя. Компетентность оценивается с помощью поэффициента $k, k \in [0, 1]$. В результате получим матрицу $K = \{k_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,m}$. k_{ij} - оценка, выставленная i-м экспертов j-му. Формируется показатель $\overline{k}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} k_{ji}$. Для формирования группы устанавливается порог компетентности $\delta \in]0, 1[$. Кандидат с номером i отбирается только и только тогда, когда $\overline{k}_i \geqslant \delta$.
Для оценки единодушия экспертов коэффициенты компетентности рассматриваются как случайные числа. Характеризация совпадения мнений экспертов:

$$D(k) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(k_{ij} - \overline{k}_i)^2$$

Чем ближе к нулю, тем лучше.

Метод непосредственного ранжирования.

Пусть имеется m отобранных экспертов и множество из n элементов. Все эксперты присваивают всем элементам ранги. Получаем матрицу $R = \{r_{ij}\}_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,n}$. Здесь r_{ij} - ранг, присвоенный i-м экспертом j-му элементу. Возможна ситуация, когда эксперт считает элементы равнозначными. В этом случае каждому из них присваивается ранг, равный среднему значению рангов, которые эксперт присвоил бы элементам при их неравнозначности.
При присвоении рангов долженсоблюдаться условие:

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = \frac{n(n+1)}{2}$$

По аналогии с отбором экспертов, вычисляется среднее значение ранга для элемента: $\overline{r}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$. Ранжированный ряд строится по невозрастанию средних рангов. Для определение единодушия, как и ранее, используется дисперсия:

$$D(k) = \frac{m}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(r_{ij} - \overline{r}_i)^2$$

Метод попарных сравнений.

Обозначим отношение предпочтения через $\succ$, отношение эквивалентности - через $\equiv$. Каждый эксперт строит матрицу предпочтений $B^i = \{b^i_{kj}\}$, где $b^i_k j = \begin{cases} 1, e_k \succ e_j \\ 0, e_k \equiv e_j \\ -1, e_j \succ e_k \end{cases}$. Для отношений предпочтения и эквивалентности справедливо свойство транцзитивности. Далее вычисляется средняя матрица предпочтений: $B = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} B^i$. Элементы средней матрицы предпочтений не обязательно $\in \{0, -1, 1\}$. Она должна быть преобразована в матрицу явных предпочтений с помощью порогового правила: $b^i_{kj} = \begin{cases} 1, b_{kj} > \delta, \\ 0, b_{kj} \leqslant |\delta|, \\ -1, b_{kj} < -\delta \end{cases}$. Порог $\delta > 0$ выбирается из соображений минимальности.При этом требуется выполнение правила транзитивности.Для оценки единодушия используется дисперсия:

$$D(B) = \frac{1}{mn^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(b_{kj} - b^i_{kj})^2$$

Задачи теории игр. Общие понятия. Формальное определение игры.

Для формального задания конфликта необходимо указать:

1. Множество коалиций действия $K, |K| \geqslant 2$.

2. Семейство множест $A = \{A_i\}, i \in K$ - стратегии каждой из коалиций действия.

3. Множество ситуаций $X \subseteq \prod_{i \in K} A_i$.

4. Множество коалиций интересов U.

5. Семейство бинарных отношений $\succ_U$ на X, выражающих предполчтения между ситуациями для коалиций интересов.

def. Система $< K, A, X, U >$ назвается игрой. Обычно в теории игр, как коалиции действия, так и коалиции интересов принято атомизировать и считать подмножествами некоторого множества игроков I.
def. Бескоалиционные игры - $I = K = U$. Каждый игрок $i \in I$ имеет в своем распоряжении набор стратегий A_i, отношение предпочтений записывается с помощью функций выигрыша $H_i : X \to \mathbb{R}$, причем $x_1 \succ_i x_2 \leftrightarrow H_i(x_1) > H_i(x_2)$. Таким образом, бескоалиционная игра может быть записана в виде тройки $\Gamma =< I, \{A_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} >$.
def. Если множества стратегий конечны, то игра называется конечной.
def. Конечные бескоалиционные игры с двумя игроками называются биматричными играми.
def. Если в игре есть 2 игрока и $H_1(x) = -H_2(x)\ \forall x \in X$, то игра $\Gamma =< A, B, H >$ назвается антогонистической. A, B -множества стратегий игроков.
def. Конечные антогонистические игры называются матричными играми.
Пусть $\underline{X}$ - множество, элементы которого называются позициями, T - множество, элементы которого имеют смысл моментов времени. $f : X \to 2^{T \times \underline{X}}$. Всякий f-образ является партией. Множество партий обозначим через $\mathcal{V}$. $h_i : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$.
def. Система $\Gamma =< I, \{A_i\}_{i \in I}, T, \underline{X}, f, \mathcal{V}, \{h_i\}_{i \in I} >$ называется общей позиционной игрой. В таком случае выигрыш каждого игрока определяется выбором стратегий всеми игроками. Поэтому такие игры относят к числу бескоалиционных игр.

Антогонистическая конечная игра. Верхнее и нижнее значения игры. Разрешимость в чистых стратегиях.

Рассмотрим антогонистическую конченую игру $\Gamma =< I, A, B >, |A| = n, |B| = m$.
def. Каждая стратегия игрока называется чистой стратегией.
Функция $H(x, y) \to H(i, j)$ указывает выигрыш первого игрока в зависимости от выбранных чистых стратегий первым и вторым игроком.

Функция принимает конечное число значений. Будем считать, что игроки стараются максимизировать свои выигрыши. В силу того, что игра антогонистическая, то есть $H_1(i,j) = -H_2(i,j)$, то стремление второго игрока максимизировать свой выигрыш равносильно стремлению минимизировать выигрыш первого.

Теорема 1. Для матричных игр:

$$\max_i \min_j h_{ij} \leqslant \min_j \max_i h_{ij}$$

Док-во.
Очевидно, что $\min_j h_{ij} \leqslant h_{ij}\ \forall i,j$.

$$\max_i \min_j h_{ij} \leqslant \max_i h_{ij}\ \forall j$$
$$\max_i \min_j h_{ij} \leqslant \min_j \max_i h_{ij}$$

Конец док-ва.Величины $\underline{I} = \max_i \min_j h_{ij}$, $\overline{I} = \min_j \max_i h_{ij}$ называются нижним и верхним значениями игры. Чтобы их найти:

$$\begin{cases} \alpha_i = \min_j h_{ij},\ \alpha = \max_i \alpha_i = \underline{I}, \\ \beta_j = \max_i h_{ij},\ \beta = \min_j \beta_j = \overline{I} \end{cases}$$

В случае $\underline{I} = \overline{I}$ имеем седовую точку, определяемую парой чистых стратегий с номерами i_0, j_0 (максиминная, минимаксная).

$$\begin{cases} i_0 :\ \min_j H(i_0,j) = \underline{I}, \\ j_0 :\ \max_i H(i,j_0) = \overline{I} \end{cases}$$

В качестве ответа к задаче дается седловая точка и цена игры.

Теорема 2. Седловая точка существует тогда и только тогда, когда существует пара чистых стратегий i_0, j_0 :

$$H(i,j_0) \leqslant H(i_0,j_0) \leqslant H(i_0,j) \tag{1.1}$$

. И вообще, если $\exists w = const : H(i,j_0) \leqslant w \leqslant H(i_0,j)$, то $w = H(i_0,j_0)$, а соответствующая пара чистых стратегий дает седловую точку.
Док-во.
Необходимость.
Пусть имеется седловая точка. Для нее

$$\max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij} \tag{1.2}$$

i_0 - максиминная стратегия, т.е. $\underline{I} = \min_j H(i_0, j)$. Отсюда

$$\max_i \min_j h_{ij} = \min_j H(i_0, j) \leqslant H(i_0, j), \ \forall j$$

j_0 - минимаксная стратегия, т.е. $\overline{I} = \max_i H(i, j_0)$. Отсюда

$$\min_j \max_i h_{ij} = \max_i H(i, j_0) \geqslant H(i, j_0), \ \forall i$$

Поскольку имеет место (1.2):

$$H(i, j_0) \leqslant \max_i H(i, j_0) = \min_j \max_i h_{ij} = \max_i \min_j h_{ij} \leqslant H(i_0, j)$$

Поскольку это справедливо $\forall i, j$:

$$\min_j \max_i h_{ij} = H(i_0, j_0)$$

Достаточность.
Справедливо (1.1). Тогда

$$\max_i H(i, j_0) \leqslant H(i_0, j_0) \leqslant \max_i H(i_0, j) = H(i_0, j)$$

$$\min_j H(i, j_0) = H(i, j_0) \leqslant \min_j H(i_0, j)$$

Окончательно имеем:

$$\min_j \max_i H(i, j) \leqslant \max_i H(i, j_0) \leqslant H(i_0, j_0) \leqslant \min_j H(i_0, j) \leqslant \max_i \min_j H(i, j)$$

По теореме 1 справедливо обратное неравенство.
Вторая часть утверждения теоремы доказывается по аналогии. **Конец док-ва.**

Антогонистическая бесконечная игра. Верхнее и нижнее значения игры. Седловая точка и оптимальная стратегия.

Теорема 3. Пусть $H(x, y)$ - вещественная функция 2-х переменных, $x \in A, \ y \in B$ и $\exists$:

$$\underline{I} = \max_x \min_y H(x, y), \ \overline{I} = \min_y \max_x H(x, y)$$

Тогда

$$\underline{I} \leqslant \overline{I}$$

Док-во.Очевидно , что $\min_y H(x,y) \leqslant H(x,y) \leqslant \max_x H(x,y)$. Так как в левой части x - любое:

$$\max_x \min_y H(x,y) \leqslant H(x,y) \leqslant \max_x H(x,y)$$

Так как в правой части y-любое:

$$\max_x \min_y H(x,y) \leqslant H(x,y) \leqslant \min_y \max_x H(x,y)$$

Конец док-ва.

Величины $\max_x \min_y H(x,y), \min_y \max_x H(x,y)$ называются нижним и верхним значениями игры. Пару чистых стратегий (x_0, y_0) называют называют седловой для $H(x,y)$, если:

$$H(x_0, y_0) = \max_x \min_y H(x,y) = \min_y \max_x H(x,y)$$

Теорема 4. Пусть для $\mathbb{R}$ $H(x,y), x \in A, y \in B$ $\exists \underline{I}, \overline{I}$. Тогда необходимым и достаточным условием седловой точки является условие:

$$H(x_0, y) \leqslant H(x_0, y_0) \leqslant H(x, y_0)$$

Док-во смотри в ИСО(Л5).

Матричные игры. Смешанные стратегии. Теорема Фон-Неймана.

Седловая точка может и не существовать. Тогда игра повторяется многократно.
def. Смешанной стратегией называется полный набор вероятностей применения игроком его чистых стратегий.
Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - чистые стратегии первого игрока. Смешанная стратегия: $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n),\ p_i \geqslant 0, \sum p_i = 1$.
Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_m$ - чистые стратегии второго игрока. Смешанная стратегия: $q = (q_1, q_2, \ldots, q_m),\ q_i \geqslant 0, \sum q_i = 1$.
Если количество партий велико, то смешанные стратегии можно интерпретировать как частоты, а средний выигрыш - как МО:

$$M(H,p,q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} H(i,j) p_i q_j = \sum_{i,j=1}^{n,m} h_{ij} p_i q_j$$

Пусть первый игрок использует свою смешанную стратегию p и она становится известна второму игроку. Второй игрок стремится минимизировать выигрыш первого и выберет смешанную стратегию $\overline{q}$, чтобы это сделать:

$$M(H,p,\overline{q}) = \min_q M(H,p,q)$$

С точки зрения первого игрока нужно использовать такую стратегию, которая максимизирует его средний выигрыш:

$$M(H,\overline{p},\overline{q}) = \max_p \min_q \sum H(i,j)p_i q_j$$

Приходим к понятию нижнего значения игры: $\underline{I} = M(H,\overline{p},\overline{q})$.
Аналогично, если первый игрок знает вектор q, он выберет $\tilde{p}$:

$$M(H,\tilde{p},q) = \max_p \sum H(i,j)p_i q_j$$

Наилучшим поведением второго игрока будет:

$$M(H,\tilde{p},\tilde{q}) = \min_q \max_p \sum H(i,j)p_i q_j$$

Данная величина дает верхнее значение игры: $\overline{I} = \min_q \max_p \sum H(i,j)p_i q_j$.
def. Оптимальными смешанными стратегиями игроков называют векторы (p_0,q_0):

$$M(H,p_0,q_0) = \min_q \max_p M(H,p,q) = \max_p \min_q M(H,p,q)$$

def. Оптимальными смешанными стратегиями игроков называют векторы (p_0,q_0), если они образуют седловую точку:

$$M(H,p,q_0) \leqslant M(H,p_0,q_0) \leqslant M(H,p_0,q),\ \forall p,q$$

Лемма 1(проверить). Пусть D - замкнутое выпуклое множество в n-мерном евклидовом пространстве E_n и $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E_n:\ x\notin D$. Тогда $\exists\ \mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n,\mu_{n+1}:$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \mu_{n+1},\ \sum_{i=1}^n \mu_i y_i > \mu_{n+1}\ \forall y\in D$$

Док-во.D замкнуто $\implies\ \exists z\in D:\ \rho(z,D)\to min$.
Положим $\mu_i = z_i - x_i,\ i=1,\ldots,n,\ \mu_{n+1} = \sum_{i=1}^n (z_i x_i - x_i^2)$. Очевидно, что выполняется первое равенство из условия теоремы. Для точки z имеем:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i z_i = \sum_{i=1}^n z_i^2 - \sum_{i=1}^n z_i x_i$$

$\sum_{i=1}^n \mu_i z_i - \mu_{n+1} = \sum_{i=1}^n z_i^2 - \sum_{i=1}^n z_i x_i - \mu_{n+1} = \sum z_i^2 - 2\sum x_i z_i + \sum x_i^2 = \sum (x_i - z_i)^2 >$
$> [x \notin D, z \in D] > 0$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i z_i > \mu_{n+1}$$

Предположим, что $\exists y \in D$: $\sum_{i=1}^n \mu_i y_i \leqslant \mu_{n+1}$. Тогда на основании выпуклости D отрезок $[y, z]$ целиком лежит в D, т.е.

$$u_\lambda = \lambda y + (1-\lambda) z \in D, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

$$\rho^2(x, u_\lambda) = \sum [x_i - \lambda y_i - (1-\lambda) z_i]^2$$

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial \lambda} = \dots = [z_i - x_i = \mu_i] = \dots = 2\sum [\lambda (z_i - y_i)^2 + \mu_i y_i - z_i \mu_i]$$

При $lambda = 0$, т.е. $z = u_\lambda$: $\frac{\partial \rho^2}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} = 2\sum \mu_i [y_i - z_i]$.
По предположению $\frac{\partial \rho^2}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} < 0$. Но при малых λ:

$$\rho(x, u_\lambda) < \rho(x, z)$$

Это противоречит выбору z.
Конец док-ва.

Лемма 2. (об альтенативе). Для матричной игры с любой платежной матрицей H справедлива одна из двух альтернатив:

1. $\exists$ смешанная стратегия $p : \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i > 0,\ j = 1, \dots, m$
2. $\exists$ смешанная стратегия $q : \sum_{j=1}^m h_{ij} q_j > 0,\ i = 1, \dots, n$

Док-во.
Пусть e_k -вектор из нулей, кроме 1 на k-й позиции; $c_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}),\ c_{ij} = h_{ij}$ и пусть P - выпуклая оболочка на $n+m$ векторах. Возможны 2 варианта:
а) $0 \notin P$. По Лемме 1 ноль отделим от P некоторой гиперплоскостью. Можно считать, что она проходит через ноль, а P лежит в одном из полупространств. Пусть это полупространство определяется $\sum \mu_i z_i > 0$.

В частности, т.к. $e_k \in P$, то $\mu_i > 0$ и $\sum \mu_i > 0$.
Пусть $(u_1, \ldots, u_n) = (\frac{\mu_1}{\mu}, \ldots, \frac{\mu_n}{\mu}),\ \mu = \sum \mu_i > 0$. Тогда $\sum u_i = 1, u_i > 0$. Отсюда $\sum u_i z_i = \frac{1}{\mu} \sum \mu_i z_i > 0\ \forall z \in P$. В частности, неравенство имеет место и для всех c_j, $\sum u_i c_{ij} > 0$. Взяв в качестве смешанной стратегии p вектор u, получим выполнение альтернативы 1.
б) $0 \in P$. Тогда 0 представим в виде выпуклой комбинации:

$$\sum_{j=1}^{m} t_j c_j + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i = 0 \tag{1.3}$$

$$\sum t_j + \sum \varepsilon_i = 1,\ t_j \geqslant 0,\ \varepsilon_i \geqslant 0 \tag{1.4}$$

Запишем (1.3) покоординатно:

$$\sum_j t_j c_{ij} + \varepsilon_i = 0$$

Так как $e_i \geqslant 0$, то $\sum_j t_j c_{ij} \leqslant 0$. Пусть $t = \sum t_j \geqslant 0$. Если предположить, что $t = 0$, то в силу $t_j \geqslant 0 \implies t_j = 0$. Но тогда (?) $\varepsilon_i = 0$, что противоречит (1.4). Следовательно, $t > 0$. Пусть теперь $h_j = \frac{t_j}{t},\ h = (h_1, \ldots, h_m)$. Имеем $\sum h_j = 1,\ h_j \geqslant 0$. Т.к. $t > 0$, то можно разделить на t и получить вторую альтернативу.
Конец док-ва.

Теорема Фон-Неймана. Для матричной игры с любой платежной матрицей H величины $\underline{I} = \max_p \min_q M(H, p, q); \overline{I} = \min_q \max_p H(H, p, q)$ **существуют** и равны между собой. То есть всегда есть решение в смешанных стратегиях.
Док-во.
Применим к $C = H$ Лемму 2.
Предположим, что выполняется первая альтернатива. $\exists p^0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0),\ \sum p_i = 1,\ p_i \geqslant 0$ и что $\sum_{i=1}^n c_{ij} p_i^0 > 0,\ j = 1, \ldots, m$. Умножим каждое из неравенств на $q_j \geqslant 0,\ \sum q_j = 1$ и сложим. Тогда $\sum_i \sum_j c_{ij} p_i^0 q_j > 0\ \forall q \implies \min_q \sum_{i,j} c_{ij} p_i q_j > 0$ и

$$\max_p \min_q \sum_{i,j} c_{ij} p_i q_i > 0 \tag{1.5}$$

Пусть выполняется вторая альтернатива. $\exists\ q^0$... Тогда $\sum_{i,j} c_{ij} p_i q_j^0 \leqslant 0\ \forall p$...

$$\min_q \max_p \sum_{i,j} c_{ij} p_i q_i <= 0 \tag{1.6}$$

Не может выполняться:

$$maxmin \leqslant 0 < minmax \tag{1.7}$$

Пусть $C(t) = \{c_{ij} - t\}_{i,j}$. Запишем для $C(t)$ (1.7):

$$\max_p \min_q \sum_{i,j} (c_{ij} - t) p_i q_j \leqslant 0 < \min_q \max_p \sum (c_{ij} - t) p_i q_j$$

С учетом того, что $\sum h_{ij} p_i q_j - t \sum p_i \sum p_j = \sum h_{ij} p_i q_j - t$, получим, что $\max_p \min_q \sum h_{ij} p_i q_j \leqslant t < \max_p \min_q \sum h_{ij} p_i q_j,\ \forall t$. Это возможно, только если $\min_q \max_p \leqslant \max_p \min_q$. Но на основании Теоремы 1: $\max_p \min_q \leqslant \min_q \max_p$. Отсюда следует равенство.
Конец док-ва.

Свойства оптимальных смешанных стратегий и значения игры матричных игр.

Теорема 1. Для матричной игры с платежной матрицей H имеют место соотношения:

$$I = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i = \min_q \max_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j$$

причем внешние экстремумы достигаются на оптимальных смешанных стратегиях игроков.
Док-во.По определению занчения игры и Теореме Фон-Неймана:

$$I = \max_p \min_q \sum_{ij} h_{ij} p_i q_j = \min_q \max_p \sum_{i,j} h_{ij} p_i q_j$$

$$\min_q \sum_{i,j} h_{ij} p_i q_j \leqslant \min_j \sum_i h_{ij} p_i = R(p),\ \forall p;\ R(p) \leqslant \sum_i h_{ij} p_i$$

$$R(p) = R(p) * 1 = \sum_{j=1}^{m} R(p) q_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i q_j,\ \forall q$$

Но раз для любого, то и для минимума:

$$\min_q \sum_{ij} h_{ij} p_i q_j \leqslant R(p) = \min_j \sum_i h_{ij} p_i \leqslant \min_q \sum_{ij} h_{ij} p_i q_j$$

Отсюда:

$$\min_q \sum_{i,j} h_{ij} p_i q_j = \min_j \sum_i h_{ij} p_i$$

Взяв максимум от обоих частей:

$$\max_p \min_q \sum_{ij} h_{ij} p_i q_j = \max_p \min_j \sum_i h_{ij} p_i$$

Второе равенство доказывается аналогично.
Конец док-ва.

Теорема 2 (проверить условие теоремы). Для матричной игры с платежной матрицей H имеют место соотношения:

$$\max_i \min_j h_{ij} \leqslant I \leqslant \min_j \max_i h_{ij}$$

Док-во.
По Теореме 1:

$$\max_p \min_j \sum_i h_{ij} p_i = \min_q \max_i \sum_j h_{ij} q_j$$

Тогда

$$\begin{cases} I = \max_p \min_j \sum_i h_{ij} p_i \geqslant (?) \max_i \min_j h_{ij}, \\ I = \min_q \max_i \sum_j h_{ij} q_j \leqslant (?) \min_j \max_i h_{ij} \end{cases}$$

Конец док-ва.

Теорема 3. Если p, q- некоторые смешанные стратегии игроков,v - число, такое, что: $\max_i \sum_j h_{ij} q_j \leqslant v \leqslant \min_j \sum_i h_{ij} p_i$, тогда p, q - оптимальные стратегии игроков и $I = v$.
Док-во.
Используем Теорему 1.

$$I = \min_p \max_i \sum_j h_{ij} q_j \leqslant \max_i \sum_j h_{ij} q_j \leqslant v \leqslant \min_j \sum_i h_{ij} p_i \leqslant \max_p \min_j \sum_i h_{ij} p_i \implies v = I$$

Конец док-ва.

Соедствия:
1) Если p, q - смешанные стратегии игроков и $\sum_j h_{ij} q_j \leqslant v \leqslant \sum_i h_{ij} p_i$, то p, q - оптимальные и $v = I$.
2) Если p, q - смешанные стратегии игроков и $\max_i \sum_j h_{ij} q_j < \min_j \sum_i h_{ij} p_i$, то p, q - оптимальные.

Теорема 4. Всякая пара оптимальных смешанных стратегий p, q матричной игры с платежной матрицей H является парой оптимальных смешанных стратегий для игры с марицей $G = \{h_{ij} + k\}$, где k- некоторая

константа.
Док-во.
Пусть p^*, q^* - пара оптимальных стратегий для игры с платежной матрицей H. По определению значения игры:

$$I_G = \sum_i \sum_j (h_{ij} + k) p_i^* q_j^* = I + k \sum_i \sum_j p_i^* q_j^* = I + k$$

$$\sum_i (h_{ij} + k) p_i^* = \sum_i h_{ij} p_i^* + k$$

$$\sum_j (h_{ij} + k) q_j^* = \sum_j h_{ij} q_j^* + k$$

$$\sum_j (h_{ij} + k) q_j^* = \sum_{i,j} (h_{ij} + k) p_i^* q_j^* \leqslant \sum_i (h_{ij} + k) p_i^*$$

По Следствию 1 стратегии оптимальны для игры с платежной матрицей G.
Конец док-ва.

Матричные игры. Доминирование стратегий.

Смешанная стратегия первого игрока p^1 доминирует p^2, если

$$\sum_i h_{ij} p_i^1 \geqslant \sum_i h_{ij} p_i^2 \ \forall j = 1, \ldots, m$$

Смешанная стратегия второго игрока q^1 доминирует q^2, если

$$\sum_j h_{ij} q_j^1 \leqslant \sum_j h_{ij} q_j^2, \ \forall i = 1, \ldots, n$$

Чистая стратегия A_{i_1} доминирует A_{i_2}, если $h_{i_1,j} \geqslant h_{i_2,j}, \ \forall j$.
Чистая стратегия B_{j_1} доминирует B_{j_2}, если $h_{i,j_1} \leqslant h_{i,j_2}, \ \forall i$.
Теорема 1. Если для 1-го игрока p^1 доминирует p^2 и p^2 оптимальна, то и p^1 оптимальна.
Док-во.
В силу доминирования:

$$\sum_i h_{ij} p_i^1 \geqslant \sum_i h_{ij} p_i^2$$

$$\min_j \sum_i h_{ij} p_i^1 \geqslant \min_j \sum_i h_{ij} p_i^2$$

По Теореме 1:
$$I = \min_j \sum_i h_{ij} p_i^2 \leqslant \min_j \sum_i h_{ij} p_i^1$$
Внешние экстремумы достигаются на оптимальных стратегиях(?)
Конец док-ва.

Лемма 1. Если чистая стратегия A_{i_0} не строго(строго) доминируется его стратегий p, отличной от A_{i_0}, то для A_{i_0} $\exists$ не строго (строго) доминирующая стратегия p^1 с $p^1_{i_0} = 0$.
Док-во.
Если $p \neq A_{i_0}$, то $p_{i_0} < 1$. По вектору p составим новый вектор p^1: $p^1_{i_0} = 0$, $p^1_i = \frac{p_i}{1-p_{i_0}}$, $i \neq i_0$. Из условий строгого доминирования: $\sum_i h_{ij} p_i > \sum_i h_{i_0,j} p_i$, $\forall j$. Разделив обе части на $1 - p_{i_0} > 0$, получим:
$$\sum_{i \neq i_0} h_{ij} \frac{p_i}{1 - p_{i_0}} = \sum_{i \neq i_0} h_{ij} p_i^1 > \sum_i h_{i_0,j} \frac{p_i}{1 - p_{i_0}} = h_{i_0,j}$$
Стратегия p^1 строго доминирует A_{i_0} и при этом $p_{i_0} = 0$.
Конец док-ва.

Теорема 2. Если чистая стратегия A_{i_0} строго(не строго) доминируется стратегией p (отличной от чистой стратегии A_{i_0}), то A_{i_0} входит с нулевой вероятностью в любую оптимальную стратегию.
Док-во.
Рассмотрим случай строгого доминирования. От противного. Предположим, что $\exists$ оптимальная p^* : $p_i^* > 0$. Из Леммы 1 можно считать, что $p_{i_0} = 0$.
В силу строгого доминирования:
$$\sum_i h_{ij} p_i > h_{i_0,j}, \ \forall j$$
Для оптимальной стратегии p^* имеем:
$$I \leqslant \sum_i h_{ij} p_i^* = \sum_{i \neq i_0} h_{ij} p_i^* + h_{i_0,j} p_{i_0}^* < \sum_{i \neq i_0} h_{ij} p_i^* + \sum_{i \neq i_0} h_{ij} p_i p_i^* =$$
$$= \sum_{i \neq i_0} h_{ij} (p_i^* + p_i p_{i_0}^*)$$
Пусть $z_i = p_i^* + p_i p_{i_0}^* \geqslant 0, \ i \neq i_0$.
$$\sum_{i \neq i_0} z_i = \sum_{i \neq i_0} p_i^* + p_{i_0}^* \sum_{i \neq i_0} p_i = 1$$

Взяв $z_{i_0} = 0$, получим, что $\sum_i h_{ij} z_i > I$, а это противоречит отптимальности p^*. Значит, для любойоптимальной стратегии $p^* :\ p^*_{i_0} = 0$.
Конец док-ва.
Следствие. (практ!) Если чистая стратегия A_{i_0} доминируется стратегией p, отличной от A_{i_0} и G - платежная матрица, которая получается из H удалением стратегии A_{i_0}, а p^1 - оптимальная стратегия в игре с такой матрицей, то p^*, полученная из p^1 с помощью $p^*_{i_0} = 0$, является оптимальной для исходной игры.
Док-во.
Пусть q^* - оптимальная стратегия второго игрока для матричной игры с матрицей G. Тогда $\sum_j h_{ij} q^*_j \leqslant I^G \leqslant \sum_{i \neq i_0} h_{ij} p^1_i,\ \forall i \neq i_0,\ \forall j$. С другой стороны, p доминирует A_{i_0}:

$$\sum_j h_{ij} q^*_j \leqslant \sum_j^n (\sum_{i \neq i_0} h_{ij} p_i) q^*_j = \sum -i \neq i_0 p_i \sum_j h_{ij} q^*_j \leqslant I^G,\ \forall i$$

Далее

$$I^G \leqslant \sum_{i \neq i_0} h_{ij} p^1_i = \sum_i h_{ij} p^*_i$$

Следовательно, пара стратегий (p^*, q^*) является оптимальной для игры с платежной матрицей H и значением игры I^G.
Конец док-ва.

Связь матричной игры с задачей ЛП.

Пусть $h_{ij} \geqslant 0$. Если это не так, то преобразуем платежную матрицу H в $G = \{h_{ij} + k\},\ k = \min_{i,j} h_{ij}$. Так сделать можно в силу теоремы, которая была ранее.
Пусть первый игрок применяет стратегию p^*. Получим $I \leqslant \sum_i h_{ij} p^*_i,\ forall j$. Введем обозначения $x_i = \frac{p^*_i}{I}$. Последнее неравенство преобразуется в $\sum_i h_{ij} x_i \geqslant 1$. С учетом нормировки, получаем $\sum_i x_i = \frac{1}{I}$. Поскольку первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш: $\sum_i x_i \to min$. Получаем задачу:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \to min, \\ \sum_{i=1}^n h_{ij} x_i \geqslant 1,\ \forall j = 1, \ldots, m \\ x_i \geqslant 0, \forall i = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{1.8}$$

Аналогично получаем задачу:

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^m y_j \to \max, \\
\sum_{j=1}^m h_{ij} y_j \leqslant 1, \forall i = 1, \ldots, n, \\
y_j \geqslant 0, \forall j = 1, \ldots, m
\end{cases} \tag{1.9}
$$

Задачи двойственные, разрешимы. На решениях функционалы совпадают. В обратную сторону.
Пусть x^*, y^* - оптимальные планы задач, $\sum_i x_i^* = \sum_j y_j^*$. Так как $\sum_i x_i^* > 0$, обозначим $\gamma_i = \frac{1}{\sum_i x_i^*}$. Определим смешанные стратегии через:

$$
\begin{cases}
p_i^* = x_i^* \gamma, \\
q_j^* = y_j^* \gamma
\end{cases}
$$

(Показать неотрицательность и нормировку.) Из ограничений задач:

$$
\begin{cases}
\sum_i h_{ij} x_i^* = \sum_i h_{ij} \frac{p_i^*}{\gamma}\ geq 1, \\
\sum_j h_{ij} y_j^* = \sum_j h_{ij} \frac{q_j^*}{\gamma} \leqslant 1
\end{cases}
$$

Умножим на произвольные p, q:

$$
\sum_j h_{ij} q_j^* \leqslant \gamma \leqslant \sum_i h_{ij} p_i^*
$$

Отсюда p^*, q^* - оптимальные стратеги по Следствию 1, $\gamma = I$.

Игры с природой.

У игрока n стратегий, у природы m состояний. h_{ij}- выигрыш игрока при применении i-й стратегии, если природа находится в j-м состоянии.

1. Известны состояния природы. $q_j \geqslant 0, \sum q_j = 1$.
   МО выигрыша: $\max_i \sum_j h_{ij} q_j$. В качестве оптимальной стратегии стоит взять ту, где достигается максимум. Примечательно, что можно обойтись только чистыми стратегиями:

   $$
   \sum_i (\sum_j h_{ij} q_j) p_i \leqslant \max_i \sum_j h_{ij} q_j
   $$

   Для определения вероятностей состояний приприроды используют метод экспертных оценок. Определяются риски $r_{ij} = \max_i h_{ij} - h_{ij}$ - потеря частивыигрыша из-за незнания. Критерий для рисков: $\min_i \sum_j r_{ij} q_j$

2. Критерий Лапласа. Не знаем о состояниях, но считаем равновероятными и используем предыдущий критерий.

3. Максиминный критерий Вальда(Критерий крайнего пессимизма). Выбрать ту стратегию, на которой минимально возможный выигрыш является максимальным:

$$\max_i \min_h h_{ij}, \ \min_i \max_j r_{ij}$$

4. Критерий Сейвиджа. $\min_i \max_j r_{ij}$ - находится минимальный риск.

5. Критерий Гурвица.

$$C = \max_i \{v \min_j h_{ij} + (1-v) \max_j h_{ij}\}, \ 0 \leqslant v \leqslant 1$$

Здесь v - показатель оптимизма. Если $v = 1$ - крайним пессимизм, $v = 0$ - крайний оптимизм.

Конечные бескоалиционные игры. Ситуация равновесия. Теорема Нэша.

Пусть $\Gamma =< I, \{A_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} >$.
A_i - множество чистых стратегий i-го игрока, $|I| = n$. Считаем, что

$$A_i = \{A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^{k_i}\}$$

Значение функции выигрыша $H_i(j_1, \ldots, j_n)$ определяет выигрыш i-го игрока в ситуации $\{A_1^{j_1}, A_2^{j_2}, \ldots, A_n^{j_n}\}$. Наихудшей для игрока является ситуация, когда все остальные игроки стремятся минимизировать его выигрыш:

$$\underline{I}(i) = \min_{j_1} \ldots \min_{j_{i-1}} \max_{j_i} \min_{j_{i+1}} \ldots \min_{j_n} H_i(j_1, \ldots, j_n)$$

Такую ситуацию можно свести к антогонистическим играм. В остальных случаях использовать такую стратегию не целесообразно.
def. Ситуация $\{A_1^{j_1^*}, \ldots, A_n^{j_n^*}\}$ называется ситуацией равновесия по Нэшу, если $\forall i \in I$:

$$H_i(j_1^*, \ldots, j_n^*) \geqslant H_i(j_1^*, \ldots, j_{i-1}^*, j_i, j_{i+1}^*, \ldots, j_n^*), \ \forall A_i^{j_i} \in A_i \setminus A_i^{j_i^*}$$

В нарушении равновесия не зинтересован ни один игрок, поскольку его выигрыш будет меньше, чем мог бы быть. Поэтому стратегию игрока, входящую в ситуацию равновесия, можно считать оптимальной.

def. Ситуации равновесия $\{A_1^{t_1} \dots, A_n^{t_n}\},\ \{A_1^{s_1}, \dots, A_n^{s_n}\}$ называются взаимозаменяемыми, если любая ситуация $\{A_1^{r_1}, \dots, A_n^{r_n}\},\ r_i = t_i$ или $r_i = s_i$ также является ситуацией равновесия.
def. Две ситуации назваются эквивалентными, если выигрыши всех игроков в этих ситуациях совпадают.
По классике, ситуации равновесия в чистых стратегиях может не быть (показано на примере в лекции). Рассматривают смешанные стратегии:

$$p_i = (p_i^1, \dots, p_i^{k_i}),\ p_i^j \geqslant 0, \sum_j p_i^j = 1$$

Выигрыш при применении смешанных стратегий определяется как МО:

$$M_i(p1, \dots, p_n) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} H_i(j_1, \dots, j_n) \prod_{s=1}^{n} p_s^{j_s},\ \forall i \in I$$

def. Ситуация $(p_1^*, \dots, p_n^*)$ называется ситуацией равновесия, если:

$$M_i(p_1^*, \dots, p_n^*) \geqslant M_i(p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \dots, p_n^*),\ \forall p_i \neq p_i^*$$

Теорема 1. Для любой ситуации в смешанных стратегиях $(p_1, \dots, p_n)$ и любого i-го игрока $\exists A_i^j : p_i^j > 0$ и

$$M_i(p_1, \dots, p_n) \geqslant M_i(p_1, \dots, p_{i-1}, e_i^j, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

Док-во.
От проиивного. Предположим, что $\forall A_i^j : p_i^J > 0$ выполняется $M_i(p_1, \dots, p_n) < M_i(p_1, \dots, p_{i-1}, e_i^j, p_{i+1}, \dots, p_n)$.
Умножим обе части на $p_i^j > 0$ и просуммируем по j:

$$\sum_{j=1}^{k_i} M_i(p_1, \dots, p_n) p_i^j < \sum_{j=1}^{k_i} M_i(p_1, \dots, p_{i-1}, e_i^j, p_{i+1}, \dots, p_n) p_i^j$$

Расписав формулу для M_i, недостающая вероятность станет под знак произведения и получим $M_i < M_i$. Противоречие.
Конец док-ва.

Теорема 2. Ситуация $(p_1^*, \dots, p_n^*)$ является ситуацией равновесия тогда и только тогда, когда $\forall i \in I$ и любой его чистой стратегии A_i^j выполняется:

$$M_i(p_1^*, \dots, p_n^*) \geqslant M_i(p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, e_i^j, p_{i+1}^*, \dots, p_n^*)$$

Док-во.
Необходимость следует из определения.
Достаточность. Возьмем $\forall p_i$. Умножим обе части неравенства на p_i^j ипросуммируем по j:

$$\sum_{j=1}^{k_i} M_i(p_1^*, \ldots, p_n^*)p_i^j \geqslant \sum_{j=1}^{k_i} M_i(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, e_i^j, p_{i+1}^*, \ldots, p_n^*)p_i^j$$

$$M_i(p_1^*, \ldots, p_n^*) * 1 \leqslant M_i(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \ldots, p_n^*)$$

Это имеет место для $\forall i \in I$.
Конец док-ва.

Теорема 3(Брауэра). При непрерывном $f : S \to S$, S - выпуклое, компактное, $\exists\ x \in S : f(x) = x$.

Теорема 4 (Нэша). Любая конечная бескоалиционная игра n игроков имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.
Док-во.
Рассмотрим произвольную ситуацию $(p_1, \ldots, p_n)$.
Пусть $c_i^j(p) = \max\{0, M_i(p_1, \ldots, e_i^j, \ldots, p_n) - M_i(p_1, \ldots, p_n)\}, \forall i, j$ и $c_i(p) = (c_i^1(p), \ldots, c_i^{k_i}(p))$. Введем отображение:

$$f(p_1, \ldots, p_n) = (\frac{p_1 + c_1(p)}{1 + \sum_{j=1}^{k_1} c_1^j(p)}, \ldots, \frac{p_n + c_n(p)}{1 + \sum_{j=1}^{k_n} c_n^j(p)}) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

Иначе говоря, $\gamma_i^j = \frac{p_i^j + c_i^j(p)}{1 + \sum_{j=1}^{k_i} c_i^j(p)}$.
Поскольку $p_i^j \in [0, 1];\ 0 \leqslant c_i^j(p) \leqslant \sum_{j=1}^{k_i} c_i^j(p)$, то $\gamma_i \in [0, 1]; \sum_{j=1}^{k_i} \gamma_i^j = 1$. Следовательно, γ_i является смешанной стратегией i-го игрока.
Множество смешанных стратегий i-го игрока является $k_i - 1$-мерным симплексом. Декартово произведение симплексов - замкнуто и выпукло. $\forall \gamma_i^j$ является некпрерывной функцией. Следовательно, f-непрерывное отображение. По Теореме Бауэра имеет неподвижную точку $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*)$.
Запишем покомпонентно:

$$p_i^{j^*} = \frac{p_i^{j^*} + c_i^j(p^*)}{1 + \sum_{j=1}^{k_i} c_i^j(p^*)};\ \forall i, j$$

По Теореме 1 для ситуации p^*: $\exists A_i^j : p_i^{j^*} > 0$ и $c_i^j(p) = 0$. Из записанного выше равенства(перемножив): $p_i^{j^*}(\sum_j c_i^j(p^*)) = 0$. Так как $p_i^j > 0$, то $\sum_{j=1}^{k_i} c_i^j(p^*) = 0$. Отсюда в силу неотрицательности: $c_i^j(p^*) = 0, \forall i, j$. Посмотреть определение $c_i^j(p)$. Это имеет место для всех чистых стратегий

игрока. И для любого игрока. По критерию имеем ситуацию равновесия.
Конец док-ва.Поиск решения на практике осуществляется с помощью системы:

$$\begin{cases} M_i(p_1,\dots,p_n) \geqslant M_i(p_1,\dots,p_{i-1},e_i^j,p_{i+1},\dots,p_n), i\in I, j=1,\dots,k_i, \\ \sum_{j=1}^{k_i} p_i^j = 1, p_i^j \geqslant 0, \forall i \in I, j=1,\dots,k_i \end{cases}$$

Теорема 5. Если стратегия p_i^* входит в равновесную ситуацию p^* и для игрока i и его чистой стратегии A_i^j имеет место строгое неравенство

$$M_i(p_1^*,\dots,p_n^*) > M_i(p_1^*,\dots,e_i^j,\dots,p_n^*)$$

то $p_i^{j^*}=0$.
Док-во.
Предположим, что $p_i^{j^*} > 0$. Умножим на него слева и справа неравенство из условия. Для всех чистых стратегий i-го игрока, отличных от рассмотренной, должно выполняться:

$$M_i(p_1^*,\dots,p_n^*) \geqslant M_i(p_1^*,\dots,e_i^s,\dots,p_n^*)$$

$$p_i^s M_i(p_1^*,\dots,p_n^*) \geqslant p_i^s M_i(p_1^*,\dots,e_i^s,\dots,p_n^*)$$

Суммируя по $s \neq j$, добавим еще то, где раньше умножали на вероятность. Получим:

$$\sum_{s=1,s\neq j}^{k_i} p_i^s M_i(p_1^*,\dots,p_n^*) \geqslant \sum_{s=1,s\neq j} p_i^s M_i(...)$$

Отсюда получаем противоречие (одно из добавленных неравенств - строгое):

$$M_i(p_1^*,\dots,p_n^*) > M_i(p_1^*,\dots,p_n^*)$$

Конец док-ва.

Следствие 1. Для всякой чистой стратегии A_i^j такой, что $p_i^{j^*} > 0$, в ситуации равновесия p^* имеет место:

$$M_i(p_1^*,\dots,p_n^*) = M_i(p_1^*,\dots,e_i^j,\dots,p_n^*)$$

Позиционные игры. Игра с полной информацией.

def. Конечной позиционной игрой назвается $\Gamma =< I, X, R, \{P_x\}_{x\in X_0}, \{R_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I} >$, где:

1. I - множество игроков.

2. X - конечное ориентированное дерево, вершины которого называют позициями, а корень - начальной позицией. Для позицией естественно отношение следования. Позиции, непосредственно следующие за данной позицией, называются альтернативами этой позиции. Позиции, не имеющие альтернатив, называются окончательными. Ведущие в окончательные позиции пути из корня называются партиями. Множество окончательных позиций обозначается X^*.

3. R - разбиение множества $X \setminus X^*$ на $n+1$ множество очередности $X_0, X_1, \ldots, X_n$. В позициях из $X_i, i > 0$ ход осуществляется игроком i, в X_0 - случайно.

4. P_x - вероятностные распределения на множествах альтернатив каждой позиции $x \in X_0$.

5. $R_i = \{U_1^i, U_2^i, \ldots, U_{m_i}^i\}$ - разбиение каждого $X_i, i > 0$. Предполагается, что все позиции x из данного подмножества U_k^i имеют одинаковое число альтернатив и никакие две из них не следуют друг за другом. Множества U_k^i называют информационными. Между альтернативами всех позиций одного информационного множества установлено однозначное соответсвие, и каждый его класс называется альтернативой самого информационного множества.

6. H_i - функция, ставящая в соответствие каждой окончательной позиции выигрыш игрока i в ней.

def. Чистой стратегией игрока $i \in I$ называется функция, ставящая в соответствие каждому информационному множеству некоторую его альтернативу. Набор n чистых стратегий составляет ситуацию.
Дерево позиционной игры обычно размечают:

1. Вершине приписывают метку,совпадающую с индексом множества очередности, которому принадлежит соотв. вершине позиция. То есть метка вершины указывает номер игрока, делающего очередной ход в игре.

2. Дуге приписывают обозначение альтернативы, в которую ведет дуга. То есть метка дуги указывает реализуемую в результате хода альтернативу. На дугах, выходящих из вершин с пометкой «ноль»,

кроме меток альтернатив, указываются вероятности осуществления соответствующей альтернативы.

def. Позиционная игра называется игрой с полной информацией, если информационные множества игроков состоят каждое из ровно одной позиции.
Теорема 1. Всякая конечная позиционная игра с полной информацией имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях.
Док-во.
См. фотки конспекта. **Конец док-ва.**

Кооперативные игры. Характеристическая функция.

Рассмотрим конечную бескоалиционную игру $\Gamma =< I, \{A_i\_i \in I, \{H_i\}_{i\in I} >$. Множество $S \subset I, S \neq \varnothing$ - коалиция, которая действует как один игрок. Множество чистых стратегий коалиции - декартово произведение множеств чистых стратегий входящих в нее игроков.
Пусть $T = I \setminus S$ и $\nu(S)$ - выигрыш.
Свойства:

1. Персональность: $\nu(\varnothing) = 0$.
2. Супераддитивность: $\nu(S \bigcup T) \geqslant \nu(S) + \nu(T),\ S \bigcap T = \varnothing,\ \forall S, T \subset I$.
3. **def.** Бескоалиционную игру называют игрой с постоянной суммой, если $\sum_{i\in I} H_i(j_1, \ldots, j_n) = const$ для всех ситуаций в чистых стратегиях. Для таких игр справедливо свойство дополнительности: $\nu(I) = \nu(S) + \nu(I \setminus S),\ \forall S \subset I$. Тут должно быть доказательство. Можно дать определение как в книге: игра с постоянной суммой, если выполняется свойство дополнительности.

def. Характеристическая функция(ХФ) - любая функция, удовлетворяющая свойствам персональности и супераддитивности.
Теорема 1. Пусть для конченого множества I задана ХФ $\nu(S), S \subset I$. Тогда найдется бескоалиционная игра Γ, у которой ф-я выигрыша(ν_Γ) совпадает с ν.
Док-во.

Конец док-ва.
def. Дележом игры называется вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющий условиям:

1. индивидуальной рациональности: $\alpha_i \geqslant \nu(\{i\}),\ \forall i$,

2. коллективной рациональности: $\sum_{i\in I}\alpha_i = \nu(I)$

Теорема 1. α является дележом тогда и только тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}\alpha_i = \nu(\{i\}) + \gamma_i, i \in I,\\ \sum_{i\in I}\gamma_i = \nu(I) - \sum_{i\in I}\nu(\{i\}),\\ \gamma_i \geqslant 0, i \in I\end{cases}$$

def. Игра называется существенной, если $\sum_{i\in I}\nu(\{i\}) < \nu(I)$ - выигрыш коалиции заведомо больше, чем сумма выигрышей всех ее участников.
В несущественной игре - только один дележ. В существенной игре более чем с одним игроком множество дележей бесконечно.
def. Эксцессом дележа α для коалиции S называется величина $e_\nu(\alpha, S) = \nu(S) - \alpha(S)$. Здесь $\nu(S) = \sum_{i\in S}\nu(\{i\}),\ \alpha(S) = \sum_{i\in S}\alpha(i)$. Эксцесс - степень нудовлетворенности коалиции дележом. Дележи с неотрицательным эксцессом - осуществимые.
def. α - эффективный для S в условиях ν, если $e_\nu(\alpha, S) > 0$.
Неэффективность дележа означает невозможность его изменения себя коалицией в лучшую для ее сторону. Дележ, не являющийся эффективным ни для какой коалиции, можно считать оптимальным.
def. Дележ α доминирует β по коалиции S, если

$$\begin{cases}e_\nu(\alpha, S) \geqslant 0,\\ \alpha_i > \beta_i,\ \forall i \in S\end{cases}$$

def. α доминирует β, если $\exists S$, по которой α доминирует β.
Утверждение. Доминирование невозможно по одноэлементной коалиции и по I.
Док-во.
Если α доминирует β по $\{i\}$, то по определению $\beta_i < \alpha_i \leqslant \nu(\{i\})$, что нарушает индивидуальную рациональность.
Если α доминирует β по I, то по определению $\beta_i < \alpha_i, \sum_{i\in S}\alpha_i > \sum_{i\in S}\beta_i = \nu(I)$, что нарушает коллективную рациональность.
Конец док-ва.

Кооперативная игра в редуцированной форме.

def. Две игры $< I, \nu >$ и $< I^*, \nu^* >$ называются стратегически эквивалентными и пишут $< I, \nu > \equiv < I^*, \nu^* >$, если $\exists k > 0$ и $\exists c_i, i \in I$:

$$\nu^*(S) = k\nu(S) + \sum_{i\in S} c_i, \forall S \subset I \tag{1.10}$$

Иначе говоря, в стратегически эквивалентных играх ХФ отличаются лишь масштабом измерений выигрышей и начальными вложениями.
Можно показать, что стратегическая эквивалентность игр является отношением эквивалентности на множестве игр, т.е. для него выполнены свойства рефлексивности, симметричности, транзитивности. Получаем не пересекающиеся классы эквивалентных игр.
Теорема Если $< I, \nu > \equiv < I^*, \nu^* >$, то отображение $\alpha \to \alpha^*$, где $\alpha_i^* = k\alpha_i + c_i$ устанавливает биекцию между множествами дележей этих игр: $\alpha >>_S \beta \implies \alpha^* >>_S \beta$.
Док-во.

Конец док-ва.
def. Игра $< I, \nu >$ имеет (0-1)-редуцированную форму, если для ХФ выполнено $\nu(\{i\}) = 0, \forall i \in I$; $\nu(I) = 1$. **def.** Игра нулевая , если все значения ее ХФ являются нулями.
Теорема . Всякая существенная кооперационная игра эквивалентна некоторой игре в (0-1)-редуцированной форме.
Док-во.

$$k = \frac{1}{\nu(I) - \sum_{i \in I} \nu(\{i\})} > 0$$

$$c_i = -\frac{\nu(\{i\})}{\nu(I) - \sum_{i \in I} \nu(\{i\})}$$

Конец док-ва.
Из Теоремы следует, что свойства игр, включая понятие доминирования, можно изучать на играх в (0-1)-редуцированной форме, применяя (0-1)-нормализацию, соотв. ХФ ν.

С-ядро и Н-М-решение кооперативной игры.

def. С-ядро $(C - ker)$ - множество не доминируемых дележей в игре.
Теорема 1. $\alpha \in C - ker$ тогда и только тогда, когда α абсолютно не эффективен, т.е. $e_\nu(\alpha, S) \leqslant 0$, т.е. $\nu(S) \leqslant \alpha(S) = \sum_{i \in S} \alpha_i$.
Док-во.
Можно полагать, что игра является существенной, поскольку для не существенных док-во очевидно(да?). В силу эквивалентности игре в (0-1)-редуцированной форме, доказательство проводится для нее.
Достаточность.
От противного. Пусть дележ не входит в С-ядро. Но тогда найдется дележ β, который его доминирует, т.е. $\alpha(S) < \beta(S) \leqslant \nu(S)$. Что невозмож-

но, т.к. $\alpha(S) \geqslant \nu(S)$.
Необходимость.
От противного. Пусть $\exists S: \ \alpha(S) < \nu(S)$. Положим

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{\nu(S) - \alpha(S)}{|S|}, i \in S$$

$$\beta_i = \frac{1 - \nu(S)}{|I| - |S|}, i \notin S$$

Тогда $\beta(I) = 1, \beta_i \geqslant 0, \beta >>_S \alpha$, т.е. $\alpha \notin C - ker$.
Конец док-ва.

Теорема 2. $\alpha \in C - ker$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i \in S} \alpha_i \leqslant \nu(I) - \nu(I \setminus S), \ \forall S \subset I$.
Док-во.
Т.к. $\sum_{\alpha_i} = \nu(I)$, то $\nu(I \setminus S) \leqslant \sum_{i \in I \setminus S} \alpha_i$. Используем Теорему 1.
Конец док-ва.
На практике записывают Теорему 1 и равенство $\sum_{i \in I} \alpha_i = \nu(I)$(? слайды).
def. Решением по Нейману-Моргенштерну (Н-М-решением) кооперативной игры называется такое множество дележей L, обладающее свойствами:

1. внутренней устойчивости: никакие 2 дележа из L не доминируют друг друга.

2. внешней устойчивости: если $\beta \notin L$, то $\exists \alpha \in L : \alpha >> \beta$.

Между С-ядром и Н-М-решением есть связь:
Теорема 3. Если $C - ker \neq \varnothing$ и $\exists$ Н-М-решение, то $C - ker \subset H - M$.
Док-во.
Если $\alpha \in C - ker$, но $\alpha \notin L$, то по свойству внешней устойчивости найдется дележ из L, доминирующий α, что противоречит определению определению $C - ker$.
Конец док-ва.
Свойства:

1. Н-М-решение не может состоять только из 1 дележа.

2. Существуют игры, где нет Н-М-решения, либо их несколько.

3. Н-М-решение не определяет выигрыши каждого игрока(?????)

Теорема 4. Если для ХФ игры $< I, \nu >$ в (0-1)-редуцированной форме выполняются неравенства

$$\nu(S) \leqslant \frac{1}{|I| + 1 - |S|}, \forall S \subset I$$

то С-ядро не пусто и является ее Н-М-решением (в теореме было строгое включение, ошибка?).
Прим. В конспекте написано «с-ядро содержится в Н-М-решнии».

Часть 2.

Задача о минимальном остовном дереве. Алгоритмы Крускала, Прима, Борувки.

Пусть $w(e)$ - вес ребра. Вес подграфа: $G^* = \sum_{e \in E^*} w(e)$.
Найти остовное дерево с минимальным весом.
Пусть I_j - совокупность ребер, включенных в некоторое дерево на j-й итераци.
Алгоритм Крускала.
$j = 0, \; I_0 = \varnothing$.

Шаг 1. Упорядочить E в порядке неубывания весов: $w(e_1) \leqslant w(e_2) \leqslant \ldots \leqslant w(e_n)$.

Шаг 2. $I_{j+1} = \begin{cases} I_j \cup \{e_j\}, \text{если } I_j \cup \{e_j\} \text{не сод. цикл,} \\ I_j, \text{иначе.} \end{cases}$

Шаг 3. Если $|I_{j+1}| = n - 1$ - закончить. Иначе $++j$, перейти на Шаг 2.

Теорема . Алгоритм Крускала корректен.
Док-во.
От противного. Пусть $K = (V, T)$ - остовное дерево, построенное алгоритмом Крускала, и его вес $w(K)$. Пусть существует остовное дерево с меньшим весом. Среди таких деревьев выберем $K^* = (V, T^*)$, имеющее минимальное число общих ребер с K. Пусть e^* - ребро минимального веса из $T^* \backslash T$. Алгоритм Крускала не добавляет это ребро в решение T. Это означает, что получается цикл в исходном графе. В цикл должно входить ребро e из $T \setminus T^*$, иначе K^* содержит цикл. Добавим к K^* ребро e^* и удалим e. Получим новое остовное дерево $K' = (G, T'), \; w(K') \leqslant W(K)$, причем $|T \cap T'| < |T \cap T^*|$. Что противоречит выбору дерева с минимальным числом общих ребер.
Конец док-ва.
Алгоритм Прима.

Пусть $O_\varepsilon(I_j)$ - множество ребер из $E \setminus I_j$, в котором каждое ребро инцидентно с некоторым ребром из I_j. $O_\varepsilon(I_\varnothing) = E, \; j = 0, \; I_0 = \varnothing$.

Шаг 1. Строим $O_\varepsilon(I_j)$ и упорядочиваем ребра по неубыванию весов.

Шаг 2. $k = 1$

Шаг 3. $I_{j+1} = \begin{cases} I_j \cup \{e_k^j\}, \text{если не образуется цикл,} \\ I_j, \text{иначе} \end{cases}$

Шаг 4. Если $I_{j+1} \neq I_j$, перейти на Шаг 5. Иначе $++k$, перейти на Шаг 3.

Шаг 5. Если $|I_{n+1}| = n - 1$ - стоп. Иначе $++j$, перейти на Шаг 1.

Пусть G^* - подграф G. $O_v(G^*)$ - множество ребер из $E \setminus E^*$, инцидентных ровно с одной вершиной из V^*. $V(I_j)$ - множество вершин G, инцидентных с ребрами из I_j, $V(\varnothing) = V$.
Алгоритм Борувки.
$j = 0, I_0 = \varnothing$.

Шаг 1. Упорядочим E в порядке не убывания весов.

Шаг 2. выделим компоненты связности $K_1^j, \ldots, K_p^j$ подграфа $G^*(V(I_j), I_j)$ - текущее решение.

Шаг 3. $\forall K_i^j$ находим первое в упорядочении ребро e_i^j из $O_v(K_i^j)$. Очевидно, что $w(e_i^j) = \min\{w(e) | e \in O_v(K_i^j)\}$.

Шаг 4. $I_{j+1} = I_j \cup \{c_i^j | i = 1, \ldots, p_j\}$.

Шаг 5. Если $|I_{j+1}| = n - 1$ - стоп. Иначе $++j$, перейти на Шаг 2.

Если требуется найти макс. остовное дерево - поменять сортировку.

Задача о кратчайшем пути. Алгоритм Дейкстры.

Контур - ориентированный цикл. Контуры отрицательной длины.
Алгоритм Дейкстры. $w(e) \geqslant 0, \forall e \in E$.
Пусть $l(u)$ - длина кр. пути из s в u.
Для $p \in V$ $O^+(p) = \{x \in V | \exists (p, x) \in E\}$.

Шаг 1. $s \to (0, s)$ - постоянная. Всем остальным $(\inf, s)$ - временные. $p = s$.

Шаг 2. $\forall u \in O^+(p): \; l(u) = \min\{l(u), l(p) + w(p, u)\}$. Изменять и вторую часть метки, если поменялась первая.

Шаг 3. Среди всех временных меток найти u с $\min l(u)$.

Шаг 4. Метка u - постоянная, $p = u$.

Шаг 5. $(s \to t)$. Если $p = t, l(t)$. Выход.

Шаг 6. $(s \to \forall)$. Если все метки постоянные, выйти. Иначе Шаг 2.

Теорема . Алгоритм Дейкстры корректен.
Док-во.

Конец док-ва.

Задача о кратчайшем пути. Алгоритм Форда-Беллмана.

Дополнительно определяет контуры отрицательного веса.
$V = \{1, 2, \dots, n\}$. $D = \{d_{ij}\}_{n\times n}$ - матрица расстояний для графа. $d_{ij} = \begin{cases} 0, i = j \\ w(x_i, x_j), (x_i, x_j) \in E \\ \infty, (x_i, x_j) \notin E \end{cases}.$
Метки имеют вид $(l_k(x_j), x_k)$. Здесь $l_k(x_j)$ - кратчайшее расстояние от x_1 до x_j по всем путям, содержащим не более k дуг.

Шаг 1 $k = 1, l_1(x_i) = d_{1i}$. Вторая часть x_1.

Шаг 2 $l_{k+1}(x_i) = \min\{l_k(x_i), \min_{1\leqslant j\leqslant n}(l_k(x_j) + d_{ji})\}$. При изменении меняем вторую часть метки.

Шаг 3 Если $l_{k+1}(x_i) \neq l_k(x_i)$ и $k+1 \leqslant n$, то $++k$ и Шаг 2. Если $l_{k+1}(x_i) \neq l_k(x_i)$ и $k+1 = n+1$, то содержится контур отрицательного веса. Если $l_{k+1}(x_i) = l_k(x_i), \forall i$, $k+1 \leqslant n+1$, то метки дают кратчайшие расстояния.

Матричный алгоритм Флойда поиска кратчайших расстояний.

Кратчайшие расстояния между любой парой вершин.
$D = \{d_{ij}\},\ V = \{1, 2, \dots, n\}$.

Шаг 1. $k = 0$. Построить $D^0 = \{d^0_{ij}\}, T^0 = \{t^0_{ij}\}$ по правилу $d^0_{ij} = d_{ij};\ t^0_{ij} = j$.

Шаг 2. $D^{k+1} = \{d^{k+1}_{ij}\}$, $T^{k+1} = \{t^{k+1}_{ij}\}$ по D^k, T^k:

$$d^{k+1}_{ij} = \begin{cases} d^k_{ij}, i = k+1, j = 1, \dots, n \\ d^k_{ij}, j = k+1, i = 1, \dots, n \\ \min\{d^k_{ij}, d^k_{i,k+1} + d^k_{k+1,j}\}, i \neq k+1, j \neq k+1 \end{cases}$$

$$t_{ij}^{k+1} = \begin{cases} t_{ij}^k, d_{ij}^{k+1} = d_{ij}^k, \\ k+1, \text{иначе} \end{cases}$$

Шаг 3. Если $k + 1 \leqslant n$ и для некоторого $i : d_{ii}^{k+1} < 0$, то есть контур отрицательного веса. Если $k+1 < n$ и $d_{ii}^{k+1} \geqslant 0, \forall i$, то $++k$ и Шаг 2. Если $k+1 = n$,$d_{ii}^{k+1} \geqslant 0 \forall i$, то D^n дает кратчайшие расстояния между любой парой вершин.

Путь восстанавливается по $T^n = \{t_{ij}^n\}$. Элемент $t_{ij}^n = m$ указывает промежуточную вершину x_m в кратчашем пути из x_i в x_j. Находим t_{im}^n, t_{mj}^n, которые дают очередные промежуточные вершины. Когда $t_{im}^n = m, t_{mj}^n = j$ - x_m непосредственно предшествует x_j.

Задача о максимальном потоке. Максимальный поток и минимальный разрез.

$\forall (x, y) \in E \to c(x, y)$ - пропускная способность. $s, t \in V$ - источник и сток.
def. Стационарным потоком величины γ из s в t называется функция $f(x, y)$, заданная на всех дугах и $0 \leqslant f(x, y) \leqslant c(x, y)$,

$$\forall x : \sum_{y \in O^+(x)} f(x, y) - \sum_{y \in O^-(x)} f(y, x) = \begin{cases} \gamma, x = s \\ 0, x \neq s, t \\ -\gamma, x = t \end{cases}$$

Решение задачи есть всегда (нулевой поток).
Задача о максимальном потоке.
def. Цепь из s в t - увеличивающая поток,если на всех дугах, совпадающих по направлению от s к t(прямых) выполняется $f < c$, а на обратных дугах $f > 0$.
Утверждение. Поток f - максимальный тогда и только тогда, когда в сети не существует ни одной цепи, увеличивающей поток.
def. Разрез сети, отделяющий источник s от стока t - множество дуг $(X_1, \overline{X_1})$: $\forall$ дуга начинается в X_1 и оканчивается в $\overline{X_1}$. Кроме того, $s \in X_1, t \in \overline{X_1}, X_1 \cup \overline{X_1} = X, X_1 \cap \overline{X_1} = \varnothing$.
def. Величина разреза - суммарная пропускная способность дуг, входящих в него.
def. Разрез, отделяющий источник от стока, с минимальной пропускной способностью называют минимальным разрезом.
Лемма 1. Всякий путь из s в t содерджит, по крайней мере, одну дугу произвольного разреза, отдеяющего s от t.

Док-во.
Конец док-ва.Введем обозначения:

$$g(X_1, X_2) = \sum_{x \in X_1, y \in X_2} g(x, y)$$

$$h(X_1) = \sum_{x \in X_1} h(x)$$

$$\begin{cases} g(X_1, X_2 \cup X_3) = g(X_1, X_2) + g(X_1, X_3) - g(X_1, X_2 \cap X_3) \\ g(X_1 \cup X_2, X_3) = g(X_1, X_3) + g(X_2, X_3) - g(X_1 \cap X_2, X_3) \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть f - произвольный поток величины γ и $(X_1, \overline{X_1})$ - разрез. Тогда

$$\gamma = f(X_1, \overline{X_1}) - f(\overline{X_1}, X_1) \leqslant C(X_1, \overline{X_1})$$

Док-во.

Конец док-ва.
Теорема Форда-Фалкерсона. В любой сети с s, t максимальная величина потока равна минимальной пропусконой способности разреза, отделяющего источник от стока.
Док-во.
Пусть F задает максимальный поток в сети. Построим по нему разрез.
Если $x \in X_1$ и $\exists (x, y) \in E,\ F(x, y) < C(x, y)$, то $y \in X_1$.
Если $x \in X_1$ и $\exists (y, x) \in E, F(x, y) > 0$, то $y \in X_1$.
Предположим, что $t \in X_1$, то есть между источником и стоком существует последовательность дуг $L(s, t)$.
Для всех прямых дуг этого пути : $\varepsilon_1 = \min_{(x,y) \in L(s,t)}\{c(x, y) - f(x, y)\}$.
Для всех обратных дуг этого пути: $\varepsilon_2 = \min_{(y,x) \in L(s,t)}\{f(y, x)\}$.
В силу построения $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.
Изменим поток в сети с помощью изменения потока на дугах $L(s, t)$. На прямых: $f(x, y) + \varepsilon$, на обратных: $f(y, x) - \varepsilon$. При этом $\gamma + \varepsilon$ - величина потока. Это противоречит максимальности потока. Значит, $t \notin X_1$. По построению:

$$f(x, y) = c(x, y) : (x, y) \in (X_1, \overline{X_1}), f(x, y) = 0 : (x, y) \in (\overline{X_1}, X_1)$$

$$\gamma = F(X_1, \overline{X_1}) - F(\overline{X_1}, X_1) = C(X_1, \overline{X_1})$$

Пропускная способность любого разреза не превышает максимальный поток (?)
Конец док-ва.

Алгоритм Форда-Фалкерсона поиска максимального потока.

Шаг 1 Ищем цепь, увеличивающую поток. Все вершины не помечены. $s \leftarrow (-, \infty)$. s - помечена и не просмотрена. Пусть $\exists$ несколько помеченных и не просмотренных вершин. Берем x. Рассматриваем не помеченные $y \in O^+(x)$ с проверкой $f(x,y) < c(x,y)$. Если для дуги (x,y) выполняется, то $y \leftarrow (x^+, \varepsilon(y))$, где

$$\varepsilon(y) = \min\{\varepsilon(x), c(x,y) - f(x,y)\}$$

Затем просматриваем не помеченные вершины $y \in O^-(x)$ с проверкой $f(y,x) > 0$. Если для дуги (y,x) выполняется, то $y \leftarrow (x^-, \varepsilon(y))$, где

$$\varepsilon(y) = \min\{\varepsilon(x), f(y,x)\}$$

После этого x переходит в состояние «помеченная и просмотренная». Далее по правилу «первый помечен - первый просмотрен». Продолжать, пока не достигли t или не смогли (максимальный поток получен на прошлой итерации).

Шаг 2 t получает одну из меток: $(x^+, \varepsilon(t))$; $(x^-, \varepsilon(t))$. Переходим к x, уменьшая или увеличивая поток на величину $\varepsilon(t)$.

Обобщения алгоритма.

1. $c(x) > 0$ - на вершинах.$\forall x \to (x^1, x^2)$. Поменять вход и выход.
2. $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_r$. Фиктивный истоник и сток. Добавляем дуги (s, s_i) : $c(s, s_i) = \sum_{x \in O^+(s_i)} c(s_i, x)$ и $(t_j, t) : c(t_j, t) = \sum_{x \in O^-(t_j)} c(x, t_j)$.
3. $h(x,y) \leqslant c(x,y)$. Внести изменения в алгоритм.

Многополюсная задача о максимальном потоке. Алгоритм Гомори-Ху.

Найти максимальный поток между любой парой вершин.

Алгоритм Гомори-Ху.(n-1 Ф-Ф).

Пусть $S \subseteq V$.

def. Конденсацией множества S назовем замену S одной вершиной $\{S\}$ с сохранением всех ребер $(x,y) \in E :\ x, y \in V \setminus S$ и замещением $\forall y \in V \setminus S$ всех ребер $(x,y) \in E$, для которых $x \in S$, одним ребром (s,y), с пропускной способностью равной сумме пропускных способностей замещаемых

ребер.
Строим на множестве V полный граф $G^* = (V, E^*)$ и положим вес ребра $(x, y) \in E^*$ равным $\nu(x, y)$ пропускной способности минимального разреза, отд. x от y в исходной сети. Пусть $G' = (V, E')$ - максимальное остовное дерево для G^*. Если $x, u_1, u_2, \ldots, u_k, y$ - единственный путь в G' от x к y, то в силу максимального остовного дерева

$$\nu(x, y) \leqslant \min\{\nu(x, u_1), \nu(u_1, u_2), \ldots, \nu(u_k, y)\}$$

Из свойств минимального разреза:

$$\nu(x, y) \geqslant \min\{...\}$$

Значит

$$\nu(x, y) = \min\{\nu(x, u_1), \nu(u_1, u_2), \ldots, \nu(u_k, y)\}$$

Алгоритм итеративно строит максимальное остовное дерево G'. Если требуется определить величину максимального потока между двумя вершинами, то надо в дереве найти путь, соединяющий эти две вершины, выбрать в этом пути дугу с минимальным весом. Вес этой дуги равен величине максимального потока между вершинами.

Шаг 1 В качестве ребер дерева E' выбрать пустое множество. Объединить все вершины в одну вершину $\{U\} = \{V\}$

Шаг 2 $k = 1$. Выбрать произвольную пару вершин (s, t).

Шаг 3 Определить максимальный поток $s \to t$.

Шаг 4 Найти минмиальный разрез $(S, \overline{S})$, отделающий источник от стока. Разбить $\{U\}, s, t \in U$ на два множества $\{U_1\} = \{s | s \in S\}, \{U_2\} = \{s | s \notin S\}$. Разрез представить ребром $(\{U_1\}, \{U_2\})$ и поместить в дерево. Вес ребра - пропускная способность минимального разреза. Ребро $(\{X\}, \{U\}) \in E'$ заменяется ребром $(\{X\}, \{U_1\})$, если $X \subseteq S$, и ребром $(\{U_2\}, \{X\})$, если $X \subseteq \overline{S}$.

Шаг 5 Если $k = n - 1$, то закончить работу алгоритма. Иначе перейти в Шагу 6.

Шаг 6 Выбрать произволную пару узлов x, y из одной вершины дерева. $s = x, t = y$.

Шаг 7 Сконденсировать в одну вершину каждую связную ветвь дерева, соединенную с $\{U\}$. Перейти к Шагу 3.

Задача о многополюсной цепи с максимальной пропускной способностью.

Дана ориентированная сеть $G = (V, E)$, $c(x, y) \geqslant 0$. Необходимо $\forall (x, y) : x, y \in V$ найти путь с максимальной пропускной способностью.
$C = \{c_{ij}\}$:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, i = j \\ c(x_i, x_j), (x_i, x_j) \in E \\ -\infty, i \neq j, (x_i, x_j) \notin E \end{cases}$$

$T = \{t_{ij}\},\ t_{ij} = j$.

Шаг 1 $k = 0$. $C^0 = \{c^0_{ij}\},\ T^0 = \{t^0_{ij}\}$.

Шаг 2 Построить C^{k+1}, T^{k+1} по матрицам T^k, C^k:

$$c^{k+1}_{ij} = \begin{cases} c^*_{ij}, i = k+1, j = 1, \ldots, n \\ c^k_{ij}, j = k+1, i = 1, \ldots, n \\ \max\{c^k_{ij}, \min\{c^k_{i,k+1}, c^k_{k+1,j}\}\}, i \neq k+1,\ j \neq k+1 \end{cases}$$

$$t^{k+1}_{ij} = \begin{cases} t^k_{ij}, c^{k+1}_{ij} = c^k_{ij} \\ j, c^k_{ij} \neq c^{k+1}_{ij} \end{cases}$$

Шаг 3 Если $k + 1 < n$, то $++k$ и перейти на Шаг 2. Если $k + 1 = n$, то C^n задает искомые пропускные способности для пар вершин сети. Путь $x_i \to x_j$ строится по T^n как в алгоритме Флойда.

Задача о назначении. Общие свойства. Алгоритм решения.

Пусть $x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если i-й на j-ю работу} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$.

$$\begin{cases} \sum\sum c_{ij} x_i \to \min \\ \sum_i x_{ij} = 1, \sum_j x_{ij} = 1, x_{ij} \in \mathbb{B} = \{0, 1\} \end{cases}$$

Другой вариант постановки - на графе. Строится полный двудольный граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$. На нем нужно найти совершенное паросочетание минмального веса.

Шаг 1 Найти в каждой строке матрицы $C = \{c_{ij}\}$ минимальный элемент ν_i и вычесть его из всех элементов этой строки. То же самое проделать для стробцов (u_i). C' - приведенная матрица. Решения на этих матрицах совпадают (показывается из первой постановки). Нулевые элементы приведенной матрицы - допустимые. Задача выбора допустимых клеток:

Шаг 2 Для приведенной матрицы строим сеть с $2n + 2$ вершинами: источник s, множество вершин $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ (строки), сток t, $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ (столбцы).Добавить дуги $(s, s_i); (t_j, t)$. Дуга (s_i, t_j) добавляется, если соотв. ей клетка допустима. Пропускные способности всех дуг единичные.

Шаг 3 Найти макимальный поток $s \to t$. Если $\gamma = n$, то решение получено. Если $\gamma < n$, то Шаг 4.

Шаг 4 Преобразуем сеть. Следует добавлять такую дугу, которая бы увеличила поток, а c'_{ij} был бы наименьшим. Пусть на предыдущем шаге веришны $S' \subset S$ были помечены, а вершины $T' \subset T$ - нет. Пусть $S^*(T^*)$ - номера вершин, входящих в $S'(T')$. Находим $\bar{c} = \min_{i \in S^*, j \in T^*}$.

Шаг 5 Вычитаем $\bar{c}$ в строках, соотв. вершинам из S' и добавляем в столбцах, соотв. вершинам из $T \setminus T'$.

Шаг 6 Переходим к шагу 2 с новой матрицей.

Задачу можно решать, если исполнителей больше, чем работ, добив нулями до квадратной матрицы.
Если задача решается на максимум, то вводят фиктивные работы. $c_0 = \max_{i,j} c_{ij}$, переходят к матрице $\{c_0 - c_{ij}\}$ и решают обычным способом.

Задача коммивояжера. Алгоритм Литтла.

Гамильтонов цикл минимального веса. $C = \{c_{ij}\}$ - матрица расстояний. $c_{ii} = \infty$ - нет петель.
$x_e = \begin{cases} 1, \text{идет по ребру} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sum_{e \in E} c_e x_e \to \min \\ \sum_{e \in V} x_e = n, \forall V \\ \sum_{e \in V} x_e \leqslant |V| - 1, \forall ! V \end{cases}$$

Здесь V - гамильтонов цикл. Последнее неравенство нужно, чтобы запретить использовать все ребра из не гамильтонова цикла в графе(?).
Метод ветвей и границ.
Ω - множество допустимых решений.
f - задана на Ω. $\min_{x\in\Omega} f(x)$.
$\gamma \leqslant \min_{x\in\Omega} f(x)$. γ - нижняя граница.
$\Omega = \bigcup_{i=1}^{l} \Omega_i,\ \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$, если $i \neq j$.
Рассмотрим k задач $\min_{x\in\Omega_i} f(x)$. Тогда:

$$\min_{\Omega} f(x) = \min_{i}\{\min_{x\in\Omega_i} f(x)\}$$

$$\min_{\Omega} f(x) \leqslant \min_{\Omega_i} f(x), \forall i$$

Находим $\gamma_i \geqslant \gamma$ - на каждом множестве свою. $\min_{1\leqslant i\leqslant k}\gamma_i$ - уточняем нижнюю границу, т.к. $\gamma \leqslant \gamma_i$. Далее множество ветвится по некотрому правилу.
Сокращать варианты через оценки:
Пусть $f^* = f(x^*)$ - значение функции на множестве, состоящем из одного элемента. f^* - рекорд. Если нижняя оценка $\gamma_i \geqslant f^*$, то это множество можно выкинуть. Если нижние границы для всех висячих вершин дерева поиска не меньше рекорда, то решение найдено $f^* = \min_{x\in\Omega} f(x)$. Если получили лучший рекорд - обновить.
Алгоритм Литтла.

Шаг 1 Привести матрицу C. α_i - коэфф. приведения по строкам, β_j - по столбцам.

Шаг 2 $\gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j$. γ - нижняя граница для Ω - корня дерева поиска.

Шаг 3 $\forall c'_{ij} = 0$ найдем штраф за неиспользование: $\theta_{ij} = \min_{k\neq j} c'_{ik} + \min_{s\neq i} c_{sj}$.

Шаг 4 Выбираем нулевой элемент с максимальным штрафом. $\Omega \to \Omega_1, \Omega_2$. $\Omega_1 =$ «дуга (i, j) не включается», Ω_2 - включается.

Шаг 5 Вычисляем $\gamma_1 = \gamma + \theta_{ij}$ для Ω_1. Строим новую матрицу расстояний C_1 заменой c'_{ij} на ∞ и приводим ее.

Шаг 6 Вычисляем γ_2 для Ω_2. Вычеркнем из матрицы i-ю строку и j-й столбец. Запретим возврат: $c_{ji} = \infty$ в новой матрице. Приводим полученную матрицу C_2, для получения γ_2 прибавляем к γ сумму приводящих констант.

Шаг 7 Если получена матрица 2×2 и ее нижняя граница не превышает границ висячих вершин дерева, то решение найдено. Переходим к шагу (11). Иначе дальше.

Шаг 8 Среди всех висячих вершин дерева выбираем вершину с наименьшей границей.

Шаг 9 Если выбранная вершина соотв. свойству «включение дуги (i, j)», то матрицу расстояний берем за новую матрицу и переходим к шагу 3.

Шаг 10 Если выбранная вершина соотв. свойству «не вкл дугу», то матрицу расстояний берем за новую и переходим к шагу 3.

Шаг 11 Строим гамильтонов цикл минимальной длины. Для этого используем путь в дереве поиска. Также включаем дуги, соотв. нулевым элементам в матрице 2×2.

Задача о максимальном паросочетании в двудольном графе. Алгоритм Кёнига-Эгервари.

Макисмальное (по числу дуг) паросочетание. Двудольный граф. Задачу для графа можно свести к табличной интепретации. Пусть имеем множества $S = \{x_1, \dots, x_n\}, T = \{y_1, \dots, y_m\}$. Таблица состоит из n строк, помеченных x_i, и m столбцов, помеченных y_j.
def. Клетка (x_i, y_j) называется допустимой тогда и только тогда, когда в исходном графе есть ребро (x_i, y_j). Остальные клетки - недопустимые.
def. Ряды - строки и столбцы матрицы.
def. Множество рядов покрывает таблицу, если каждая допустимая клетка принадлежит хотя бы одному ряду.
def. Множество допустимых клеток называется независимым, если среди них 2-х клеток, стоящих в одной строке или одном столбце.
Теорема (Кенига-Эгервари). Максимальное число независимых допутимых клеток равно минимальному числу рядов, покрывающих все допустимые клетки таблицы.

Алгоритм.

Шаг 1 Строится произвольное множество независимых допустимых клеток. Помечаются «1». Помечаем любую свободную допустимую клетку и вычеркиваем соотв. ей ряды. Если все клетки недопустимы, то граф пустой.

Шаг 2 Находим в таблице строки без «1» и помечаем их символом «-», переходим к следующему шагу. Если в каждой строке есть единица, то получили наибольшее паросочетание.

Шаг 3 Просматриваем помеченные строки: в строке находим допустимые клетки. Столбец, в котором нашлась клетка, помечается $(+p)$, p - номер текущей строки. Строки просматриваются по возрастанию номеров. Если столбец уже помечен, новая метка не присваивается. Если в результате ни один из не имевших метку столбцов не будет помечен, то это означает, что уже имеющееся паросочетание является искомым наибольшим(макс? из методички) и все действия прекращаются

Шаг 4 Просматриваем помеченные столбцы по возрастанию номеров. Отыскиваются клетки с символом «1» и строка помечается $(-h)$, h - номер столбца. Если строка уже помечена - метка не обновляется.
Если в текущем столбце нет «1», то следующий шаг.
Если просмотрены все помеченные столбцы , и возникнет набор новых помеченных строк, вернуться к Шагу 3.
Если не возникло новых помеченных строк, то ответ найден.

Шаг 5 Рассматриваем помеченный столбец , не содержащий «1». В нем поставим «1» в строку, номером которой помечен столбец. В этой строке ищем старый символ «1» и перемещаем его по столбцу в строку, номер которой равен метке на этом столбце. В строке, куда попал последний символ «1», ищем старый «1» и для него все заново. В итоге «1» окажется в строке, где таких символов больше нет. Все метки уничтожаются и переходим к Шагу 2.

Сетевые графики и способы их построения.

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ - работы. Для них задана технологичская матрица(время, предшествование, ресурсы).
def. P_i предшествует P_j, если P_j не может быть начата, пока не выполнится P_i. Обозначается $P_i \to P_j$. Справедливо свойство транзитивности.
def. P_i непосредственно предшествует P_j, если $P_i \to P_j$ и не найдется работы $P_k : P_i \to P_k \to P_j$. Иначе говоря, если нет транзитивной цепочки.
def. Событие - факт начала или завершения какой-либо работы. Для событий вводятся те же определения, что и для работ.

def. Сетевой график - это сеть $G = (V, E)$, построенная по данным о работах и их взаимосвязям («$\rightarrow$»).
Требования к сетевому графику:

1. Нет параллельных дуг.

2. Нет контуров.

3. Одна начальная вершина с полустепенью захода 0; одна завершающая вершина с полустепенью исхода 0

4. Допускается введение фиктивных работ с нулевым временем выполнения.

Есть 2 способа построения сетевого графика:

1. Вершина - событие, дуга - работа.

2. Вершина - работа, дуга отражает отношение предшествования.

Вершины сетевого графика нужно правильно нумеровать. Это означает, что если от вершины с номером i существует путь в вершину с номером j, то $i < j$.
Алгоритм ранжирования вершин.

Шаг 1 Начальная вершина получает ранг $k = 0$.

Шаг 2 Удалим все дуги, выходящие из вершин ранга k.

Шаг 3 К множеству вершин ранга $k+1$ отнесем те вершины, не имеющие входных дуг.

Шаг 4 Если ранг присвоен завершающей вершине, то прекращаем работу. Иначе $++k$ и переходим на Шаг 2.

Начальная вершина получает метку 0. Далее нумеруются вершины ранга 1. Внутри этой группы метки раздаются произвольно, метка после присваивания увеличивается на 1. Когда помечены все вершины ранга 1, переходят к рангу 2 и так далее. Последняя присвоенная метка сохраняется при переходе между множествами вершин «соседних» рангов.

Сетевой график «дуга-работа». Определение временных характеристик сетевых графиков.

Путь сетевой график построен по принципу «вершина-событие», имеет $n+1$ вершину, t_{ij} - время выполнения с начальным i-м и завершающим j-м событиями.
def. Ранний срок наступления события T_i^P - момент времени, раньше которого событие не может произойти.

$$T_i^P = \begin{cases} 0, i = 0, \\ \max_{j \in O^-(i)}\{T_j^P + t_{ji}\}, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

def. $T_n^P - T_{cr}$ - критическое время. Это минимальное время, за которое можно завершить проект.
def. Критический путь - путь из начальной вершины в завершающую, имеющий длительность T_{cr}. Путь, соединяющий начальную и конечную вершины является критическим тогда и только тогда, когда $T_i^P = T_j^P + t_{ji}$.
def. T_i^n - поздний срок наступления события. Это время, превышение которого для события приводит к увеличению критического времени. $T_n^n = T_{cr} = T_n^P$.
Для вычисления позднего срока наступления движемся от n-й вершины в порядке убывания номеров вершин:

$$T_i^n = \begin{cases} T_n^P, i = n \\ \min_{j \in O^+(i)}\{T_j^n - t_{ij}\}, i = n-1, \dots, 0 \end{cases}$$

Заметим, что $T_i^n = T_i^P$ для всех событий, входящих в критический путь.
def. Резервом времени R_i называется максимальное время, на которое можно задержать наступление события без увеличения критического времени. $R_i = T_i^n - T_i^P$. События с нулевым резервом времени находятся на критическом пути.

def. Ранний срок $T_{\text{н}}^P(i,j)$ начала работы (i,j) - минимальное время начала работы при условии, что все предшествующие работы завершены как можно раньше. Поскольку работа не может начаться раньше своего начального события, $T_{\text{н}}^P(i,j) = T_i^P$. ОТсюда следует, что ранний срок завершения работы (i,j): $T_{\text{з}}^P(i,j) = T_i^P + t_{ij} = T_{\text{н}}^P + t_{ij}$.
def. Поздний срок $T_{\text{з}}^{\text{п}}(i,j)$ - максимальное время завершения работы без увеличения критического времени. $T_{\text{з}}^{\text{п}}(i,j) = T_j^n$. Для позднего срока начала работы имеем: $T_{\text{н}}^{\text{п}}(i,j) = T_j^n - t_{ij} = T_{\text{з}}^{\text{п}}(i,j) - t_{ij}$.

def. Суммарный резерв времени $R_C(i,j)$ - максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность выполнения работы (i,j) без превышения критического времени.
$R_C(i,j) = T_j^n - T_i^P - t_{ij} = T_j^P - T_з^P(i,j) = T_з^п(i,j) - T_з^P(i,j) = T_н^п(i,j) - T_н^P(i,j)$.
def. Свободный резерв времени $R_{св}(i,j)$ - время, на которое можно продлить работу без изменения ранних сроков начала последующих работ при условии завершения предшествующих работ в ранние сроки. $R_{св}(i,j) = T_j^P - T_i^P - t_{ij} = T_j^P - T_з^P(i,j)$.

def. Независимый резерв времени $R_н(i,j)$ указывает время, на которое можно продлить работу без изменения ранних сроков начала последующих работ при условии завершения предшествующих работ в поздние сроки.$R_н(i,j) = \max\{0, T_j^P - T_i^n - t_{ij}\}$.

def. Гарантированный резерв времени $R_г(i,j)$ - максимально возможное увеличение продолжительности работы, не влекущее увеличение критического времени для проекта, при условии завершения всех предшествующих работ в поздние сроки. $R_г(i,j) = T_j^n - T_i^n - t_{ij} = T_з^п(i,j) - T_i^n - t_{ij}$.

Сетевой график «вершина-работа». Определение временных характеристик сетевых графиков.

Пусть t_j - время выполнения работы.

$$T_н^P(i) = \begin{cases} 0, i = 0 \\ \max_{j \in O^-(i)}\{T_н^P(j) + t_j\}, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$T_з^P(i) = T_н^P + t_i$$

$$T_з^п = \begin{cases} T_з^P, i = n \\ \min_{j \in O^+(i)}\{T_з^п(j) - t_j\}, i = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

$$T_з^п = T_з^п - t_i$$

$$R_C(i) = T_н^п(i) - T_н^P(i) = T_з^п(i) - T_з^P(i)$$

$$R_{св}(i) = \min_{j \in O^+(i)}\{T_н^P(j) - T_з^P(j)\}$$

$$R_{\text{н}}(i) = \max\{0, \min_{j\in O^+(i)} T_{\text{н}}^P(j) - \max_{z\in O^-(i)} T_{\text{з}}^{\text{п}}(z) + t_i\}$$

$$R_{\text{г}}(i) = T_{\text{з}}^{\text{п}}(i) - \max_{j\in O^-(i)} \{T_{\text{з}}^{\text{п}}(j) + t_i\}$$

Линейные диаграммы. Задача управления проектами при наличии ограниченных ресурсов.

Строится по сетевому графику «вершина-событие».

1. Какие работы выполняются в момент времени t?

2. Ресурсы с ограничениями.

Выполнение работы - отрезок, с момента начала до конца выполнения этой работы. Дает возможность ответить на 1) и оценить интенсивность потребления ресурсов.
Раз присутствуют ограничения по ресурсам, то нужно менять очередность работ с помощью задержки работы. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots$ - проекции точек на ось Ot. На $\forall[\tau_i, \tau_{i+1}]$ определяется суммарное потребление ресурса и сравнивается с границей. Внутри этих отрезков интенсивность потребления одинакова. Если вылетели - некотрую работу нужно отложить. **Эвристики:**

1. Сдвигается работа с наименьшей интенсивностью потребления ресурса. При равенстве сдвигается работа с наименьшей продолжительностью выполнения. Если опять совпало - с меньшим номером. Могут допускаться прерывания. Тогда отрезок делится на 2 части. Также сдвигаются все работы, связанные предшествованием с данной. И т.д.

Часть 3.

СП. Граф состояний. МСП. У-я Колмогорова. Финальные вер-ти. П-с гибели и размножения.

def. СМО - случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем.
def. СП - марковский, если в любой момент времени вероятность перехода в любое состояние в будущем зависит только от текущего состояния.
def. Марковский процесс с дискретными состояниями называется цепью Маркова.

Цепь маркова удобно представлять в виде орграфа $G = (V, E)$, где $V = \{\text{состояния}\},\ E = \{\text{переходы}\}$.
Пусть $p_{ij}(t+\tau)$ - вероятность перехода: находимся в момент времени t в состоянии S_i, в момент τ - в S_j. Если $\forall S_i, S_j\ p_{ij}$ зависит только от τ, то цепь однородна.
def. Плотность вероятности перехода называется величина

$$\lambda_{ij} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\delta t)}{\delta t} - \text{для достоточно малых } \delta t$$

$$p_{ij}(\delta t) = \lambda_{ij}\delta t + O(\delta t) \approx \lambda_{ij}\delta t$$

Пусть в ЦМ $n+1$ состояние S_i, $p_i(t)$ - вероятность нахождения в S_i в момент времени t. $(p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$ - спектр вероятностей, $\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1$. Для поиска спектра вероятностей составляют систему Колмогорова (3.11) с известными начальными условиями для $t = 0 : p_i(0) = 1,\ p_j(0) = 0,\ j \neq i$.

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j \in O^-(i)} \lambda_{ji} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j \in O^+(i)} \lambda_{ij},\ i = 0, \ldots, n \tag{3.11}$$

Док-во.

$$p_i(t+\delta t) = \sum_{j \in O^-(i)} p_j(t) p_{ji}(\delta t) + p_i(t)(1 - \sum_{j \in O^+(i)} p_{ij}(\delta t))$$

$$p_i(t+\delta t) = \delta t \sum_{j \in O^-(i)} p_j(t)\lambda_{ji} + p_i(t)(1 - \sum_{j \in O^+(i)} \lambda_{ij}\delta t) = \delta t \sum_{j \in O^-(i)} p_j(t)\lambda_{ji} + p_i(t) - \delta t \sum_{j \in O^+(i)} \lambda_{ij} p_i(t)$$

$$\frac{p_i(t+\delta t) - p_i(t)}{\delta t} = \sum_{j \in O^-(i)} p_j(t)\lambda_{ji} - \sum_{j \in O^+(i)} \lambda_{ij} p_i(t)$$

Переход к пределу, начальные условия?
Конец док-ва.
По истечении определенного времени в СМО устанавливается стационарный режим, где вероятность переходов не зависит от времени. Если $\exists \lim_{t\to\infty} p_i(t) = p_i,\ i = 0, \ldots, n$, то это финальные вероятности состояний. Для их нахождения в системе Колмогорова (3.11) достаточно положить левые части равными нулю. Финальные вероятности можно интерпретировать как (...)
Существует свециальный класс - **процессы гибели и размножения**. В таких процессах переход осуществляется только в соседние состояния. Пусть λ_i - интенсивность размножения, μ_i - интенсивность гибели. Запишем систему уравнений Колмогорова для процессов гибели - размножения найдем финальные вероятности:

$$\begin{cases} \lambda_{10}p_1 = \lambda_{01}p_0, \\ \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2 = p_1(\lambda_{10} + \lambda_{12}), \\ \ldots, \\ \lambda_{k-1,k}p_{k-1} + \lambda_{k+1,k}p_{k+1} = p_k(\lambda_{k,k-1} + \lambda_{k,k+1}) \end{cases}$$

Перейдя к введенным обозначениям, получаем:

$$\begin{cases} \mu_0 p_1 = \lambda_0 p_0, \lambda_0 p_0 + \mu_1 p_2 = \mu_0 p_1 + \lambda_1 p_1, \\ \ldots, \\ \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_k p_{k+1} = \mu_{k-1}p_k + \lambda_k p_k \end{cases}$$

Отсюда получаем (ММИ), что:

$$\begin{cases} p_1 = \rho_0 p_0, \\ p_2 = \rho_1 p_0, \\ \ldots \\ p_k = \rho_{k-1} p_0 \end{cases}$$

Здесь $\rho_k = \prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_i}$. Финальные вероятности существуют, если $\sum_{k=0}^{\infty} < +\infty$

Поток событий.

def. Случайный поток событий - последоватеьность событий, происходящих одно за другим в случайные моменты времени. Для простоты события однородны.

def. Случайный однородный ПС - ординарный, если вероятность появления 2-х и более событий в течении элементарного δt бесконечно мала в сравнении с вероятностью появления 1 события в тот же δt.
def. ПС без последействия - $\forall$ не пересекающихся интервалов времени число событий, попадающих на одни из них, не зависит отчисла событий, попадающих на другой.
def. Ординарный ПС без последействия называется пуассоновским. $\mathbb{P}$(на $(t, t+\tau)k$событий) $\sim Poisson(a)$, где $a = \int_t^{t+\tau} \lambda(\xi) d\xi$. λ - мгновенная плотность потока событий.

$$\lambda = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\mathbb{E} \text{ числа событий на } [\xi, \xi + \delta t]}{\delta t}$$

$$\mathbb{P}_k(\tau) - \frac{a^k e^{-a}}{k!}$$

def. ПС стационарен, если $\mathbb{P}_k$ зависит только от длины интервала. Стационарный пуассоновский поток - простейший. У простейшего потока $a = \lambda\tau$. Параметр λ здесь можно интерпретировать как среднее число событий на единицу времени.
Пусть T - интервал между двумя соседними событиями простейшего потока событий. Найдем вероятность того, что на участке длиной t не произошло ни одного события:

$$\mathbb{P}(T \geqslant t) = \mathbb{P}_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\mathbb{F}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Отсюда получаем, что $T \sim Exp(\lambda)$

Формула Литтла.

Введем обозначения. Пусть L_c - среднее число заявок в СМО, W_c - среднее время пребывания заявки в системе. Рассмотрим 2 потока событий: входящий и выходящий. Если в системе установился предельный режим, то $\lambda_1 = \lambda_2$.
Пусть также $X(t)$ - число заявок,прибывших в СМО до момента времени t,$Y(t)$ - число заявок, покинувших СМО до момента t. Понятно, что $X(t), Y(t)$ - ступенчатые функции, изменяющие свои значения в момент появления или ухода заявки.
$Z(t) = X(t) - Y(t)$ - число заявок в системе в момент времени t. Тогда среднее число заявок в сети:

$$L_c = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt$$

(см. комментарии в методичке)

$$L_c = \frac{1}{T}\sum_i t_i = \frac{\lambda}{\lambda T}\sum_i t_i$$

Так как величина λT - среднее число заявок за T, то

$$W_c = \frac{1}{\lambda T}\sum_i t_i$$

Отсюда получаем формулу Литтла (3.12):

$$L_c = \lambda W_c \tag{3.12}$$

Аналогично для L_o - среднего числа заявок в очереди:

$$L_o = \lambda W_o$$

n-канальная СМО с отказами (задача Эрланга)

Все потоки являются простейшими. μ - параметр времени обслуживания , $\mu = \frac{1}{\underbrace{t}_{\text{обслуж}}}$.

Есть n каналов и поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживания имеет интенсивность μ. Накопитель в системе не предусмотрен.
Требуется найти финальные вероятности СМО и:

1. Q - относительную пропускную способность (средняя доля пришедщих заявок, обслуженных системой)
2. A - абсолютную пропускную способность (среднее число обслуживаемых в единицу времени заявок)
3. $\mathbb{P}_{rej}$ - вероятность отказа (все каналы заняты)
4. $\overline{k}$ - среднее число занятых каналов

Расммотрим процесс гибели и размножения со следующими состояниями: S_0 - нет ни одной заявки, S_1 - одна заявка,..., S_n - все каналы заняты. Пусть $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ - приведенная интенсивность потока (среднее число заявок, поступивших в систему за среднее время обслуживания одной заявки). С учетом того, что в формуле Колмогорова для финальных вероятностей $\mu_k = k\mu$, получаем:

$$\begin{cases} p_1 = \rho p_0, \\ p_2 = \frac{\rho^2}{2} p_0, \\ \dots \\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} \end{cases}$$

Вероятность p_0 получается из условия нормировки вектора финальных вероятностей:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1;\ p_0(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho^i}{i!}) = 1;\ p_0 = (\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!})^{-1}$$

Полученные формулы называются формулами Эрланга. Из них легко получить ответы на вопросы:
$\mathbb{P}_{rej} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$, $Q = 1 - \mathbb{P}_{rej}$, $A = \lambda Q$, $\overline{k} = 1p_1 + 2p_2 + \dots + np_n = \sum_{k=1}^{n} kp_k = \frac{A}{\mu}$.

n-канальная СМО с ограниченной очередью.

n-канальная СМО с неограниченной очередью.

Рассмотрим процесс гибели и размножения со следующими состояниями: S_0 - все каналы свободны,..., S_n - все каналы заняты, S_{n+i} - все каналы заняты и в очереди находится i заявок, $i \in \mathbb{N}$.
В формулах Колмогорова $\lambda_i = \lambda$, так как входной поток не изменяется, а поток обслуживания ограничен числом каналов: $\mu_i = i\mu, i \leqslant n$ и $\mu_{n+i} = n\mu, i \geqslant 0$. Тогда:

$$\begin{cases} p_1 = \rho p_0, \\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \\ \dots, \\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\ p_{n+i} = \frac{\rho^{n+i}}{n^i n!} p_0, \\ p_0 = (\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^{n+i}}{n^i n!})^{-1} \end{cases}$$

Если выполняется условие $\frac{\rho}{n} < 1$, то формулу для p_0 можно упростить:

$$p_0 = (\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-q)})^{-1}$$

Найдем характеристики СМО:
$Q = 1 \implies A = \lambda$. $\overline{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$.

$$L_o = 1p_{n+1} + 2p_{n+2} + \dots = [\text{если } \frac{\rho}{n} < 1] = p_0 \frac{\rho^{n+1}}{nn!(1-\frac{\rho}{n})^2},\ W_o = \frac{L_o}{\lambda}$$

$$L_c = L_o + \overline{k} = L_o + \rho,\ W_c = \frac{L_c}{\lambda}$$

Многоканальная замкнутая СМО.

В этой задаче заявки после обслуживания не покидают систему. Интенсивность потока зависит от состояния системы. Входящий поток порождается ограниченным числом m внешних заявок, которые могут потребовать обслуживания. При занятости всех каналов заявка помещается в очередь. Интенсивность входящего потока λ, порожд. одной заявкой, равна $\frac{1}{\overline{t}_{\text{необх. обслуж. - завершение обслуж.}}}$. $\mu = \frac{1}{\overline{t}_.}$.
Рассмотрим процесс гибели и размножения с состоянием: S_0 - все n каналов свободны, очередь пуста; $\dots$, S_n - все каналы заняты, очередь пуста; S_{n+i} - все каналы заняты, в очереди i заявок, $i = 1, \dots, m-n$.
Для параметров процесса справедливы соотношения: $\lambda_i = (m-i)\lambda, i = 0, \dots, m-1,\ \ \mu_i = i\mu, i = 1, \dots, n; \mu_i = n\mu, i = n+1, \dots, m$. Тогда для финальных состояний:

$$\begin{cases} p_1 = m\rho p_0, \\ p_2 = \rho_1 p_0 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_1} p_0 = \frac{m(m-1)}{1*2}\rho^2 p_0, \\ \dots, \\ p_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}\rho^n p_0, \\ p_{n+1} = \frac{m\dots(m-n)}{nn!}\rho^{n+1} p_0, \\ \dots, \\ p_m = \frac{m!}{n!n^{m-n}}\rho^m p_0 \end{cases}$$

Найдем характеристики СМО:
$\mathbb{P}_{rej} = 0 \implies Q = 1$. $\overline{k} = 1p_1 + 2p_2 + \dots + n - 1p_{n-1} + n(p_n + \dots + p_m)$. $A = \overline{k}\mu$.
Заметим, что формулу Литтла применить нельзя. Найдем среднее число заявок в очереди L_o:

$$L_o = 1p_{n+1} + 2p_{n+2} + \dots + (m-n)p_m$$

Очевидно, что $L_c = L_o + \overline{k}$. Для L_c можно получить альтенативную формулу. Если в системе есть L_c заявок, то оставшиеся заявки формируют

поток интенсивностью $\lambda(m - L_c)$. Так как система находится в предельном режиме, то $\lambda(m - L_c) = \mu\overline{k}$. Отсюда $L_c = m - \frac{\mu}{\lambda}\overline{k}$.
Найдем среднее время W_o нахождения заявки в очереди. Если СМО находится в состояниях $S_0, \ldots, S_{n-1}, S_m$, то $W_o = 0$. В состоянии S_n время ожидания составляет $\frac{1}{n\mu}$, для S_{n+1} : $\frac{2}{n\mu}$ и так далее. Таким образом, $W_o = \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{m-n} ip_{n+i-1}$. Для $W_c = W_o + \frac{1}{\mu}$ - среднее время ожидание плюс время обслуживания заявки.

Однопродуктовая детерминированная задача управления ресурсами.

Модель Уилсона - однопродуктовая, с мгновенной поставкой и потреблением, многопериодная. Поставка осуществляется при достижении нулевого уровня запаса. Обозначения: T - планируемый период, Q - необходимо единиц ресурса, интенсивность потребления $\mu = \frac{Q}{T}$, C_P - стоимость единицы ресурса, C_X - стоимость хранения единицы ресурса, C_D- стоимость доставки партии, S - величина партии, $C_D = C + C_1 S$.
Требуется определить размер партии S и интервал времени τ между поставками с тем, чтобы минимизировать суммарные затраты. Дополнительные обозначения: Y_X - затраты на хранение одной партии ресурса, Y_D - затраты на доставку одной партии ресурса, Y_C - стоимость одной партии ресурса.
Число доставок $n = \frac{Q}{S} = \frac{T}{\tau}$. Первое - очевидно, второе - из графика. Потребление идет с постоянной интенсивностью, следовательно, средний уровень запаса за время τ составляет $\frac{S}{2}$. Тогда хранение запаса из одной партии обойдется в $Y_X = C_x\tau\frac{S}{2}$. Затраты на доставку одной партии даны: $Y_D = C + C_1 S$. $Y_C = C_P S$. Тогда суммарные расходы:

$$Y = Y_C n + Y_D n + Y_x n = QC_P + \frac{CQ}{S} + C_1 Q + \frac{C_X ST}{2}$$

Отсюда можно найти размер партии S. Требуется минимизировать суммарные затраты:

$$\frac{dY}{dS} = -\frac{CQ}{S^2} + \frac{C_X T}{2} = 0$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2CQ}{C_X T}} = \sqrt{\frac{2C\mu}{T}}$$

Хорошо бы показать, что это минимум. Оптимальный интервал между поставками возьмем из соотношения $\frac{Q}{S} = \frac{T}{\tau}$:

$$\mu^* = \frac{S^* T}{Q} = \sqrt{\frac{2CT}{C_X Q}} = \frac{2C}{C_X \mu}$$

Подставляя полученные значения S^*, μ^* в формулу общих затрат, можно получить величину затрат в лучшем случае.
На практике объем партии может отличаться от оптимального объема. Разложим затраты $Y(S)$ в ряд в окрестности оптимального размера партии:

$$Y(S) = Y(S^*) + Y'(S^*)\Delta S + \frac{Y''(S^*)}{2!}(\Delta S)^2 + \dots$$

$$Y''(S) = \frac{d}{dS}(-\frac{CQ}{S^2} + \frac{C_X T}{2}) = 2\frac{CQ}{S^3}$$

Из условий стационарности $Y'(S^*) = 0$. Подставляя эти значения в разложение ,получим:

$$Y(S) = Y(S^*) + (\Delta S)^2 \frac{CQ}{(S^*)^3}$$

Отсюда

$$\frac{Y(S) - Y(S^*)}{Y(S^*)} = \frac{(\Delta S)^2 CQ}{(S^*)^3 Y(S^*)} = \bullet$$

Покажем, что $CQ \leqslant S^* Y(S^*)$. От противного. Пусть $CQ > S^* Y(S^*)$

$$S^* Y(S^*) = \sqrt{\frac{2CQ}{C_X T}}(Q(C_P + C_1) + \sqrt{2CC_X QT}) = Q(C_P + C_1)\sqrt{\frac{2CQ}{C_X T}} + 2CQ$$

Тогда

$$-CQ > Q(C_P + C_1)\sqrt{\frac{2CQ}{C_X T}}$$

Получаем противоречие, так как величины положительны (?). Таким образом,

$$\bullet = (\frac{\Delta S}{S^*})^2 \frac{SQ}{S^* Y(S^*)} \leqslant (\frac{\Delta S}{S^*})^2$$

Это выражение свидетельствует об определенной устройчивости суммарных затрат по отношению к наиболее экономичному объему партии. При малых ΔS относительное изменение затрат по крайней мере на порядок меньше относительного изменения объема партии.

Управление запасами с учетом убытков из-за неудовлетворенного спроса.

В модели будет предполагаться возможность дефицита. Это означает, что при отсутствии ресурса спрос сохраняется с интенсивностью μ,

но потребление запаса отсутствует, вследствие чего накапливается дефицит. Поступление ресурса мгновенное.
Интервал τ между поставками ресурса разобьем на два интервала: τ_1 и τ_2. На первом интервале производится потребление запаса, на втором - накапливается дефицит, который покрывается мгновенно в момент поступления ресурса.
Необходимость покрытия дефицита приводит к тому, что максимальный объем запаса ресурса на складе не совпадает с объемом партии. Пусть C_H - убытки из-за отсутствия единицы ресурса в единицу времени.
Требуется определить объем запаса V и размер партии S, минимизировать затраты.
Затраты на хранение одной партии ресурса: $Y_X = \frac{C_X V \tau_1}{2}$, из-за отсутствия ресурса: $Y_H = \frac{\tau_2 (S-V) C_H}{2}$. Тогда суммарные затраты складываются из затрат на хранение, поставку, отсутсвия, покупки:

$$Y = Y_C n + Y_X n + Y_D n + Y_H n = C_P Q + \frac{\tau_1 C_X V T}{2\tau} + C_D \frac{Q}{S} + \frac{\tau_2 (S-V) C_H T}{2\tau}$$

Из подобия треугольников: $\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{V}{S}$, $\frac{\tau_2}{\tau} = \frac{S-V}{S}$. Упростим общие затраты:

$$Y = C_P Q + \frac{C_X V^2 T}{2S} + \frac{(S-V)^2 C_H T}{2S} + C_D \frac{Q}{S}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial V} = \frac{C_X V T}{S} - \frac{(S-V) C_H T}{S} = 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial S} = -\frac{C_X V^2 T}{2S^2} + \frac{C_H T}{2} - \frac{C_H T V^2}{2S^2} - \frac{C_D Q}{S^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_X V T - (S-V) C_H T = 0, \\ -C_X V^2 T + C_H T S^2 - C_H T V^2 - 2 C_D Q = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $V = \frac{C_H}{C_H + C_X} S = \rho S$.
Подставив во второе, получим:

$$S = \sqrt{\frac{2 C_D Q (C_X + C_H)}{C_X C_H T}} = \sqrt{\frac{2 C_D \mu (C_X + C_H)}{C_X C_H}}$$

$$V = \sqrt{\frac{2 C_D Q C_H}{C_X (C_X + C_H T)}} = \sqrt{\frac{2 C_D C_H \mu}{C_X (C_X + C_H)}}$$

Заметим, что $H \geqslant 0$, следовательно, это точка локального минимума.
Отсюда $\tau = \frac{S}{\mu}, Y$.
Коэффициент ρ называется плотностью убытков из-за неудовлетворенного спроса, $0 < \rho < 1$. Про значение коэффициента читать в методичке (стр. 52)

Обобщенная статическая модель.

Общая детерминированная многопериодичная задача управления ресурсами

Ресурс **поставляется** равномерно с интенсивностью λ до достижения определенного уровня запаса, и равномерно **потребляется** с интенсивностью $\mu = \frac{Q}{T}$ до достижения определенного уровня дефицита. Дополнительно задаются затраты из-за отсутствия единицы ресурса в единицу времени.
Требуется определить оптимальные объемы поставляемых партий ресурса и при этом максимальный запас и максимальный уровень дефицита ресурса.
Пусть V - максимальный объем запаса, Z - максимальный объем дефицита. (см. рисунок в методичке).

1. τ_1: осуществляется поставка и потребление. Значит, интенсивность роста запаса есть $\lambda - \mu$.

2. τ_2: поставка завершена, идет только потребление с интенсивностью μ.

3. τ_3: ресурс закончился, потребление все еще идет, нарастает дефицит с интенсивностью потребления μ.

4. τ_4: начинается новая поставка, покрывается дефицит. Пополнение запасов происходит с интенсивностью $\lambda - \mu$.

Обозначения V, Z на графике очевидны. S - максимальный объем партии. Из-за того, что на τ_1 поставка идет одновременно с потреблением, максимальный объем запаса «не достает» до объема поставляемой партии. Аналогичный процесс происходти на участке τ_4. Поэтому $S = V + Z + (\tau_1 + \tau_4)\mu$, поскольку «не достали» именно из-за потребления. С учетом того, что по определению $\tau_1 = \frac{V}{\lambda-\mu}, \tau_4 = \frac{Z}{\lambda-\mu}$, получаем $S = V + Z + (\tau_1 + \tau_4)\mu = V + Z + \frac{\mu V + \mu Z}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda-\mu}[V + Z]$.
Средний уровень запаса(пока он есть, т.е. на интервалах τ_1, τ_2) составляет $\frac{V}{2}$, средний уровень дефицита за τ_3, τ_4 - $\frac{Z}{2}$. Отсюда получаем затраты на хранение ресурса и затраты из-за отсутсвия ресурса:$Y_X = (\tau_1 + \tau_2)C_X\frac{V}{2}$, $Y_H = (\tau_3 + \tau_4)C_H\frac{S-V}{2}$. Тогда общие расходы:

$$Y = Y_C n + Y_X n + Y_D n + Y_H n = [n = \frac{Q}{S} = \frac{T}{\tau}] = C_P Q + \frac{TC_X V(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau} + C_D\frac{Q}{S} +$$

$$+\frac{T(S-V)C_H(\tau_4+\tau_3)}{2\tau}$$

Из подобия треугольников на графике: $\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau} = \frac{V}{V+Z}$; $\frac{\tau_3+\tau_4}{\tau} = \frac{Z}{V+Z}$. Подставляя в предыдущую формулу, получим:

$$Y = C_PQ+\frac{TC_XV(\tau_1+\tau_2)}{2\tau}+C_D\frac{Q}{S}+\frac{T(S-V)C_H(\tau_4+\tau_3)}{2\tau} = C_PQ+\frac{C_XTV^2}{2(V+Z)}+\frac{C_DQ}{S}+\frac{ZT(S-V)C_H}{2(V+Z)} = \bullet$$

$$S-V = Z+\mu(\tau_1+\tau_4) = \frac{\lambda Z+\mu V}{\lambda-\mu}$$

$$S = V+Z+\frac{\mu}{\lambda-\mu}[V+Z] = (V+Z)\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$$

$$\bullet = C_PQ+\frac{C_XTV^2}{2(V+Z)}+\frac{C_DQ(\lambda-\mu)}{(V+Z)\lambda}+\frac{ZTC_H(\lambda Z+\mu V)}{2(\lambda-\mu)(V+Z)}$$

$$\begin{cases} C_XV^2+2ZVC_X-N-Z^2C_H = 0 \\ -C_XV^2-N+\rho C_H(V+Z)^2-V^2C_H = 0 \end{cases}$$

Здесь $N = \frac{2C_DQ}{\rho T}$, $\rho = \frac{\lambda}{\lambda-\mu}$.
Вычитая из первого второе, получим

$$V = Z\frac{C_H(1+\rho)}{2C_X+C_H(1-\rho)}$$

Многопродуктовая детерминированная задача при наличии связи между ресурсами

Используется n видов ресурсов. Необходимо обеспечить на протяжении времени T Q_i единиц i-го ресурса. $\mu_i = \frac{Q_i}{T}$ - интенсивность потребления i-го ресурса. C_{p_i} - стоимость единицы i-го ресурса, $C_{D_i} = C_i + C_{1i}S_i$ - стоимость поставки i-го ресурса. Поставка осуществляется мгновенно в момент времени, когда запас нулевой.
Если взаимодейсвтие между ресурсами отсутствует, то можно применять модель Уилсона и суммировать. При наличии взаимодействий составляется система ограничений.
В качестве примера взаимодейсвтия между ресурсами рассматривается ситуация,когда складская площадь ограничена величиной P. Для хранения единицы i-го ресурса используется площадь $p_i, i = 1,\ldots,n$. Тогда ограничения имеют вид:

$$h\sum_{i=1}^{n} p_iS_i \leqslant P$$

Здесь h - нормировочный множитель, отражающий независимость поступления ресурсов во времени, $0.5 \leqslant h \leqslant 1$. Если $h = 1$, то ресурсы поступают одновременно, если $h = 0.5$ - в разное время. Для общих издержек получаем формулу (закупка, доставка, хранение)(откуда двойка?):

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_{p_i} Q_i + \sum_{i=1}^{n} [\frac{C_{D_i} Q_i}{S_i} + \frac{C_{X_i} T S_i}{2}]$$

Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} C_{p_i} Q_i + \sum_{i=1}^{n} [\frac{C_{D_i} Q_i}{S_i} + \frac{C_{X_i} T S_i}{2}] + \gamma (h \sum_{i=1}^{n} p_i S_i - P)$$

Запишем условия стационарности и дополняющей нежесткости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_i} = -\frac{C_{D_i} Q_i}{S_i^2} + \frac{C_{X_i} T}{2} + \gamma h p_i = 0, i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} h \sum_{i=1}^{n} p_i S_i = P \end{cases}$$

Из первых n уравнений:

$$S_i = \sqrt{\frac{2 C_i Q_i}{C_{X_i} T + 2 \gamma h p_i}}$$

Они зависят от параметра h. Подставим выражения для S_i в последнее уравнение системы и получим уравнение относительно h. Решив его численно, можно получить h^*. Подставив его в формулы для S_i получаем приближенное решение S_i^*.

Задача управления ресурсами при случайном спросе.

Пусть спрос Q ресурса за интервал T является СВ. Известно, что $Q \sim \mathbb{F}$. Для удовлетворения спроса создается запас S ресурса.Если $Q < S$, то избыток порождает дополнительные затраты H - на единицу ресурса. Если $Q > S$, то возникает дефицит B ресурса - за единицу. В качестве функции затрат рассматривается МО суммарных затрат.

1. Пусть Q имеет дискретное распределение. Тогда функция затрат имеет вид: $Y(S) = \sum_{i=0}^{S} H(S-i)\mathbb{P}(Q = i) + \sum_{i=S+1}^{\infty} B(i - S)\mathbb{P}(Q = i)$.

2. Пусть Q имеет абсолютно непрерывное распределение. Тогда функция затрат имеет вид: $Y(S) = H \int_0^S (S - \xi) f(\xi) d\xi + B \int_S^{+\infty} (\xi - S) p(\xi) d\xi$.

Требуется найти такой размер запаса S^*, при котором функция затрат минимизируется.
Пусть Q имеет дискретное распределение. Дифф. нельзя, поскольку число слагаемых случайно. Рассмотрим выражения $Y(S-1), Y(S+1)$.

$$Y(S-1) = H\sum_{i=0}^{S-1}(S-1-i)\mathbb{P}(Q=i) + B\sum_{i=S}^{\infty}(i-S+1)\mathbb{P}(Q=i) =$$

$$H\sum_{i=0}^{S}(S-i)\mathbb{P}(Q=i) - H\sum_{i=0}^{S-1}\mathbb{P}(Q=i) + B\sum_{i=S+1}^{\infty}(i-S)\mathbb{P}(Q=i) + B\sum_{i=S}^{+\infty}\mathbb{P}(Q=i) =$$

$$H\sum_{i=0}^{S}(S-i)\mathbb{P}(Q=i) - H\sum_{i=0}^{S-1}\mathbb{P}(Q=i) + B\sum_{i=S+1}^{\infty}(i-S)\mathbb{P}(Q=i) + B(1-\sum_{i=0}^{S-1}\mathbb{P}(Q=i)) =$$

$$= Y(S) - (H+B)\sum_{i=0}^{S-1}\mathbb{P}(Q=i) + B$$

Аналогично получим:

$$Y(S+1) = Y(S) + (H+B)\sum_{i=0}^{S}\mathbb{P}(Q=i) - B$$

Затраты будут минимальны, если $Y(S-1) > Y(S) < Y(S+1)$:

$$\begin{cases} Y(S) - (H+B)\mathbb{F}(S-1) + B > Y(S) \\ , Y(S) < Y(S) + (H+B)\mathbb{F}(S) - B \end{cases}$$

$$\begin{cases} (H+B)\mathbb{F}(S-1) - B < 0 \\ , 0 < (H+B)\mathbb{F}(S) - B \end{cases}$$

$$(H+B)\mathbb{F}(S-1) - B < 0 < (H+B)\mathbb{F}(S) - B$$

$$(H+B)\mathbb{F}(S-1) < B < (H+B)\mathbb{F}(S)$$

$$\mathbb{F}(S-1) < \frac{B}{H+B} < \mathbb{F}(S)$$

Здесь подбираем такое S^*, чтобы неравенство выполнилось. Если $\mathbb{F}(S^*-1) = \frac{B}{H+B} < \mathbb{F}(S^*)$, то оптимальными являются объемы S^*, S^*-1 (почему?).
В непрерывном случае следует решить уравнение $\mathbb{F}(S) = \frac{B}{H+B}$. Если ФР обратима, то $S^* = \mathbb{F}^{-1}(\frac{B}{H+B})$ Величина в правой части называется плотностью убытков.

Задачи теории расписаний.

def. Теория расписаний - раздел ИСО, изучающий эффективность выполнения операций в зависимости от порядка их следования. Этот порядок называется расписанием.
def. Машина - любое устройство,способное выполнять операции.
def. Множество машин, выполняющих некоторые операции, называется системой обслуживания.
Операции назанчаются на машины согласно некоторой дисциплине.
def. Процесс обслуживания - множество операций, машин и дисциплин.
Процесс обслуживания называется простым, если:

1. Каждая машина может быть назначена на выполнение операций в любой момент времени.
2. Работа представляет собой строго упорядоченную систему операций.
3. Каждая операция выполняется только одной машиной.
4. Имеется только по одной машине каждого вида.
5. Запрещено прерывание операций.
6. Одновременно не может реализовываться более 1 операции одной и той же работы.
7. В каждый момент времени машина может выполнять не более одной операции.

def. Будем говорить, что задана задача ТР, если заданы:

1. совокупность работ $P_1, \ldots, P_n$, совокупность операций o_{ij};
2. совокупность машин, выполняющих операции, и их характеристики по отношению к операциям: M_1, M_k;
3. дисциплина обслуживания (случайная, конвейерная, произвольная).

Данные для задачи ТР:

1. количество машин k;
2. количество работ n;

3. моменты появления работ в системе $r_j, j = 1, \ldots, n$;

4. допустимые поздние сроки завершения выполнения работ t_j;

5. плановые(директивные) сроки завершения работ d_j;

6. $l_j - d_j - r_j$ - длительность нахождения в системе;

7. K_j - число операций в работе P_j;

8. t_{jk} - вреся выполнения j-й работы на k-й машине;

9. $t_j = \sum_{k=1}^{K_j} t_{jk}$ - чистое время выполнения работы.

Отсюда искомые:
w_{ij} -время ожидания j-й работы между выполнением операций $k-1, k$.
$w_j = \sum_{k=1}^{K_j} w_{jk}$ - общее время ожидания. F_j - длительность нахождения в системе: $F_j = t_j + w_j = \tau_j - r_j$. L_j - врменное смещение выполнения работы P_j относительно директивного срока: $L_j = \tau_j - d_j = F_j + r_j - d_j = F_j - l_j$.
def. Два расписания тождественны, если их множества w_{jk} совпадают.
Критерий нахождения оптимального расписания:

1. Среднее или максимальное время окончания

2. Длительность нахождения работ в системе

3. Среднее или максимальное значение временного смещения: $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} L_j$.

Утверждение. Любое расписание, которое минимизирует среднее время окончания работы, минимизирует также среднее время ожидания.
Док-во.
$\overline{\tau} = \overline{r} + \overline{t} + \overline{w}$. $\overline{r}, \overline{t}$ постоянны и получаются из входных данных.
Конец док-ва.

Задача теории расписаний с одной машиной.

$r_j = 0$. t_j - времся выполнения P_j на машине M_1.
Критерий $\frac{1}{n}\sum_{w_i} \rightarrow min$ или $\frac{1}{n}w_i + \underbrace{\frac{1}{n}\sum t_i}_{=cosnt} = \frac{1}{n}\sum F_i \rightarrow min$. Найти оптимальную перестановку $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$, задающую расписание.
Тогда очевидно, что:

$$w_{\pi(1)} = 0,\ w_{\pi(2)} = t_{\pi(1)}, \ldots, w_{\pi(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} t_{\pi(k)}$$

$$F_j = w_{\pi(j)} + t_{\pi(j)} = \sum_{i=1}^{j} t_{\pi(i)}$$

$$\overline{F} = \frac{1}{n}[nt_{\pi(1)} + (n-1)t_{\pi(2)} + \dots + t_{\pi(n)}] \to min$$

Лемма . Пусть $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ и $s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\pi(i)}$, где π - произвольная перестановка.
Тогда

$$\begin{cases} \min_\pi s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}, \\ \max_\pi s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \end{cases}$$

Теорема . Оптимальное расписание определяется перестановкой π : $t_{\pi(1)} \leqslant t_{\pi(2)} \leqslant \ldots \leqslant t_{\pi(n)}$.
Можно рассматривать время нахождения в системе с приоритетами λ_j:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j F_j \to min$$

Или

$$\frac{\sum \lambda_i F_i}{\sum \lambda_i} = \dots = \sum_{i} \lambda_{\pi(i)} t_{\pi(1)} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_{\pi(i)} t_{\pi(2)} + \dots + \lambda_{\pi(n)} t_{\pi(n)}$$

Лемму применять нельзя, т.к. разные коэффициенты при разных перестановках.
Теорема . Оптимальное расписание:

$$\frac{t_{\pi(1)}}{\lambda_{\pi(1)}} \leqslant \frac{t_{\pi(2)}}{\lambda_{\pi(2)}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{t_{\pi(n)}}{\lambda_{\pi(n)}}$$

Дополнительные темы.

Вероятностные сетевые графики.

Считаются известными оценки работ P_i:

1. a_i - минимальная продолжительность
2. b_i - максимальная продолжительность
3. m_i - наиболее вероятная продолжительность

Типовое распределение продолжительности - бета-распределение. Если $\xi \sim Be(a, b)$, то ее плотность:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

Носитель вероятности: $x \in [0, 1]$.
В методичке волшебным образом получается:

$$f_i(t) = c(t - a_i)^{p_i}(b_i - t)^{q_i}\mathbb{I}(t \in [a_i, b_i])$$

Здесь c - нормировочный множитель, p_i, q_i - параметры распределения. Посчитаем МО:

$$\mathbb{E}_i = \overline{t_i} = \int_{a_i}^{b_i} xf(x)dx = [???] = \frac{(p_i + q_i)m_i + (a_i + b_i)}{p_i + q_i + 2}$$

$$\sigma_i^2 = \int_{a_i}^{b_i} x^2 f_i(x)dx - \overline{t}^2$$

Обычно $p_i + q_i \approx 4$. Тогда

$$\begin{cases} \mathbb{E}_i \approx \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6} \\ \sigma_i^2 \approx (\frac{b_i - a_i}{6})^2 \end{cases}$$

По этим параметрам определяют параметры сетевого графика. Пусть времена работ i.i.d. и $\mathbb{L}_{\text{кр}}$. Рассмотрим его как МО T_{cr}.

$$\mathbb{L}_{\text{кр}} = \mathbb{E}T_{cr} = \sum_{i \in \mathbb{L}_{\text{кр}}} \mathbb{E}_i$$

$$\sigma_{\text{кр}}^2 = \sum_{i \in \mathbb{L}_{\text{кр}}} \sigma_i^2$$

В силу ЦТП для достаточно большой длины критического пути:

$$T_{cr} \sim N(\mathbb{L}_{\text{кр}}, \mathbb{D}_{\text{кр}})$$

Вероятность того, что фактическое $T_{cr} \leqslant T_{pl}$ (меньше директивного срока) можно вытащить из функции Лапласа:

$$\mathbb{P}(T_{cr} \leqslant T_{pl}) = \Phi(u) + \frac{1}{2},\ \Phi(u) = \int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Алгоритм Клейна.

Задача о назначении на узкие места. Алгоритм Гросса.