Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Harald Upmeier
M.Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2015/2016

Übungen zur Mathematik I

– Blatt 2 –

Abgabe: Donnerstag, den 29.10.2015, 10:00 - 10:10 Uhr, HG Hörsaal +1/0010

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimme, ob die folgenden Funktionen injektiv und/oder surjektiv sind. Gib, falls die Funktion bijektiv ist, auch die Umkehrabbildung an.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 + y^2, y)$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, g(x) = (3x - 4, 2x)$

c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, h(x, y) = (x + y, x - y)$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien X und Y beliebige Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige:

a) f injektiv $\Longleftrightarrow f(X \setminus M) \subset Y \setminus f(M)$ für alle $M \subset X$.

b) f surjektiv $\Longleftrightarrow Y \setminus f(M) \subset f(X \setminus M)$ für alle $M \subset X$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien X, Y, Z Mengen mit Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Beweise:

a) Ist $g \circ f : X \to Z$ injektiv, dann ist auch f injektiv.

b) Ist $g \circ f : X \to Z$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv.

c) Gebe ein Beispiel an, so dass $g \circ f$ injektiv ist, aber g nicht injektiv ist.

d) Gebe ein Beispiel an, so dass $g \circ f$ surjektiv ist, aber f nicht surjektiv ist.

Hinweis: Für die Gegenbeispiele können endliche Mengen benutzt werden, wobei f und g durch eine Wertetafel oder ein Pfeildiagramm beschrieben werden.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $M = Y^X$ die Menge aller Abbildungen $f : X \to Y$. Definiere eine Relation $\sim$ auf M durch

$$f \sim g :\Longleftrightarrow \text{ Es existieren bijektive Abbildungen } \varphi : X \to X \text{ und } \psi : Y \to Y \text{ mit } g \circ \varphi = \psi \circ f.$$

Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf M definiert.