

A

清华大学试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计 考试时间：2021 年 6 月 16 日 8: 00—10: 00

姓名_____学号 20_____班级_____.

一 填空题（每空 3 分，共 30 分；答案均写在试卷上，注意标清题号）

1. 18 世纪时，提出了一个关于投针的著名概率问题的学者是_____。

2. 利用快速排序(quick sort)算法对序列“3, 2, 1”进行排序，则平均比较次数为_____。

3. 设随机变量 $X \sim Ge\left(\frac{1}{3}\right)$ ，则 $E\left(\left(\frac{4}{3}\right)^X\right) =$ _____。4. 设随机变量 $X \sim Exp(1)$ ， $Y \sim b\left(2, \frac{1}{3}\right)$ ，则 $P(XY \leq 2 \ln 2) =$ _____。5. 若 Y_1 服从参数为 $(8, 1/2)$ 的负二项分布， Y_2 服从参数为 $(6, 1/2)$ 的负二项分布，且 Y_1 与 Y_2 的相关系数为 $-1/\sqrt{3}$ ，则 $Var(Y_1) =$ _____, $Var(Y_1 + Y_2) =$ _____。6. 从 1, 2 两个数中等可能地随机取 1 个数记为 X ，再从 $1, \dots, X$ 中等可能地随机取 1 个数记为 Y 。则条件期望 $E(X|Y)$ 为_____，条件方差 $Var(Y|X)$ 为_____。7. 设总体 $X \sim N(\mu, 0.5^2)$ ， X_1, X_2, \dots, X_n 为简单随机样本，要使 μ 的置信系数 96% 的双侧置信区间长度不超过 0.4，则样本容量 n 至少要达到_____。8. 对参数 p 进行假设检验， $H_0: 0 < p \leq \frac{1}{2}$ ， $H_1: \frac{1}{2} < p \leq 1$ ，检验统计量 $X \sim b(4, p)$ ，要实现真实水平为 0.05 的检验，拒绝域应为_____。

二. (10 分) 两台车床加工同样的零件，第一台出现不合格品的概率是 0.1，第二台出现不合格品的概率是 0.16，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台车床加工的零件数是第二台加工的零件数的 2 倍。

(1) 求任取一个零件是合格品的概率；(2) 如果取出的零件是合格品，求它是由第二台车床加工的概率。

三. (12 分) 已知随机变量 $X \sim U(0, 2)$ ，(1) 计算 $Var(X)$ ；(2) 计算 $E(\min\{X^2, 1\})$ ；(3) 计算 $Var(\min\{X^2, 1\})$ 四. (12 分) 设 X 、 Y 为相互独立的随机变量，均服从 $Exp(1)$ ， $Z = 2X + Y$ ， $W = \frac{Y}{2X + Y}$ ，(1) 求联合密度 $p_{Z,W}(z, w)$ ；(2) 求边缘密度 $p_W(w)$ ；(3) 求 X 、 Z 的协方差。

五. (12分) 已知 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自于总体 X 的简单随机样本, 总体 X 的概率分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \text{ 其中 } \theta > 0 \text{ 为未知参数,}$$

(1) 求参数 θ 的矩估计量; (2) 求参数 θ 的最大似然估计量.

六. (8分) X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ 的样本, Y_1, Y_2, \dots, Y_m 是来自总体 $Y \sim N(\mu_2, c \cdot \sigma^2)$ 的样本, σ^2 未知. $n=6, m=6, c=0.5$, $\bar{x}=52, \bar{y}=40$, $s_x^2=96, s_y^2=52$. 求参数 $\mu_1 - \mu_2$ 的 90% 置信水平的双侧置信区间.

七. (16分) 设 X_1, \dots, X_{50} 是来自总体 $N(\mu, 2)$ 的样本. 对期望进行假设检验, $H_0: \mu \leq 0, H_1: \mu > 0$,

若取拒绝域为 $\{(x_1, \dots, x_{50}) : \bar{x} > 0.33\}$,

(1) 求此检验犯第一类错误的概率的最大值;

(2) 若 $\mu = -0.27$, 此检验犯错误时是第几类错误, 并求犯此类错误的概率;

(3) 若 $\mu = 0.68$, 此检验犯错误时是第几类错误, 并求犯此类错误的概率;

(4) 求 $\bar{x} = 0.2$ 的 p 值.

备注 1. 本考卷的样本均为简单随机样本, 样本均值 $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$

备注 2. 正态总体的样本均值和样本方差相互独立, 且 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 其中 n 为样本容量

备注 3. 指数分布随机变量 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})I_{x>0}$, $E(X) = 1/\lambda$, $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$

备注 4. 参数为 p 的几何分布随机变量的方差为 $\frac{1-p}{p^2}$

备注 5. 分布函数和分位数 (题目解答要严格按照下面给出数值进行计算)

$$\Phi(1.28) = 0.9, \Phi(1.44) = 0.925, \Phi(1.65) = 0.95, \Phi(1.96) = 0.975,$$

$$\Phi(1) = 0.84, \Phi(1.25) = 0.89, \Phi(1.5) = 0.93, \Phi(1.75) = 0.96, \Phi(2) = 0.98, \Phi(3) = 0.999$$

$$P(t(9) > 1.38) = 0.1, P(t(10) > 1.37) = 0.1, P(t(11) > 1.36) = 0.1, P(t(12) > 1.35) = 0.1$$

$$P(t(9) > 1.83) = 0.05, P(t(10) > 1.80) = 0.05, P(t(11) > 1.79) = 0.05, P(t(12) > 1.78) = 0.05$$