第 3 次作业

1. 给出 5 个不同的随机变量的例子，并指明随机变量的类型和相关的样本空间。
2. **已知 $F(x)=P(X\le x)$ 是随机变量 X 的分布函数。

 （1） 证明：$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$。

 （2） 证明：$F(x)$ 右连续。

 （3） 求 $P(a\le X\le b)$。

3. 设样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$，$P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)$，定义 X,Y 如下：

$$X(\omega_1)=1, X(\omega_2)=2, X(\omega_3)=3，Y(\omega_1)=2, Y(\omega_2)=3, Y(\omega_3)=1。$$

 （1） 试证明 X,Y 这两个随机变量分布相同；

 （2） 求 $X+Y$，$Y-X$ 的概率分布。

4. *已知 X 为离散型随机变量，证明：$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E^2(X)$；你中学学到的方差是否与课上的定义相一致？请简要说明理由。
5. 假设袋中有 a 个黑球，b 个白球。每次取出一个球，取到白球则停止，记 X 为此时已取出球的个数。
 （1） 每次取球后不放回，求 X 的分布；
 （2） 每次取球后放回，求 X 的分布和期望。
6. 是否存在离散随机变量 X,Y，满足 $E(X)>100E(Y)$，但 Y 以至少 0.99 的概率大于 X？（需说明理由）
7. 假设一个 Bernoulli 试验成功的概率为 $p\in(0,1)$，不断独立地重复该试验，令 X 表示出现第一次试验成功所需要的试验次数。
 （1） 求 X 的分布。
 （2） 求 X 的期望和方差。
8. 某项调查表明，60%的消费者曾通过某电商平台购买商品。假定随机抽取 25 名消费者，并对他们的购买习惯进行调查。
 （1） 至少 15 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少？
 （2） 大于 20 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少？
 （3） 不足 10 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少？
9. 利用定义计算二项分布 $B(n,p)$ 的期望与方差。
10. 掷 6 颗均匀骰子，求恰有两个一点出现的概率及其 Poisson 近似值（保留小数点后 4 位）。
11. 每天约有一百万人自主决定是否访问某学会网站，访问的概率为 $p=2\times10^{-6}$，求在某特定的一天中至少有 3 人访问该网站的概率及其 Poisson 近似（结果保留 4 位小数）。
12. *一只昆虫产卵概率服从参数为 λ 的 Poisson 分布，而虫卵能发育成虫的概率为 p

（$0 < p < 1$），又设每个虫卵是否发育成虫是彼此独立的。证明：有 k 个后代的概率是服从参数为 λp 的 Poisson 分布。

13. 假设湖中有 N 条鱼，捕获 M 条做了记号后放回，充分混合后再捕获 n 条上来，记 X 为其中带有记号的鱼的数量。

（1） 求 $P(X = m)$；

（2） 若 N 的具体值未知，而再捕获上来的当中有 m 条带有记号，给出你对湖中鱼总数 N 的估计值；

（3） 求使得 $P(X = m)$ 值最大的 N 的值（M, n, m 的值固定），并比较与（2）中的估计值作比较。

（4） 这个例子体现的极大似然估计的思想你能够理解吗？试着将这一思想做简要说明。

14. （计算机实验）绘制第 8 题的二项分布图。

（1） x 为何值时有最大概率？

（2） 计算该分布的期望值（记为 μ），并比较期望值和最大概率对应的 x 值的大小。

（3） 计算该分布的方差（记为 σ^2）。

（4） 通过该电商平台购买商品的消费者人数介于 $\mu \pm 2\sigma$ 的概率有多大？