第 11 次作业

1. 有一大批糖果，现从中随机取 16 袋称得重量（克）为

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

假设袋装糖果重量服从正态分布，求总体均值的 95%置信的区间估计。如果用这 16 袋样品的平均重量作为总体均值的估计，误差的范围为多少？这个范围是在什么意义下？

2. 从一大批灯泡中随机地取 5 只作寿命试验，测得寿命（小时）为

1050　　1100　　1120　　1250　　1280

假设灯泡寿命服从正态分布，求这批灯泡寿命平均值 95%置信的单侧置信下限（即求 $\hat{\mu}(X_1,\cdots,X_n)$ 使得 $P(\mu > \hat{\mu}) \geq 0.95$）。

3. *为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂。为慎重起见，先进行试验。采用原催化剂 20 次试验的得率均值为 91.73，样本方差为 3.89；采用新催化剂 30 次试验的得率均值为 93.75，样本方差为 4.02。假设两总体都服从正态分布，且两样本独立。
   （1） 假设两总体方差相等，求两总体均值差的 95%置信的区间估计。
   （2） 不假设两总体方差相等，求两总体均值差的 95%置信的区间估计。
   （3） 两种催化剂有显著差别吗？请尝试说明你的理由。

4. *设随机样本 X_i（$i=1,\cdots,n$）来自总体 $U(0,\theta)$。证明：对于任意给定常数 $0<\alpha<1$，可以找到常数 c_n，使 $(\max\{X_1,\cdots,X_n\}, c_n\max\{X_1,\cdots,X_n\})$ 为 θ 的一个 $(1-\alpha)$ 置信区间。

5. *假设总体服从参数为 λ 的 Poisson 分布，$X_1,\cdots,X_n$ 为随机样本，常数 $0<\alpha<1$，求 λ 的 $1-\alpha$ 置信的区间估计。

6. 从一批次产品随机地取 100 个样品进行检测，发现 40 个不合格，求这批产品合格率 p 的 95%置信的区间估计。

7. *假设总体服从 $N(\mu,\sigma^2)$，参数 μ 已知，σ^2 未知，$X_1,\cdots,X_n$ 为其独立随机样本，常数 $0<\alpha<1$。
   （1） 求 σ 的极大似然估计 σ^*。
   （2） 利用 Fisher 信息量给出 σ^* 的标准误差的估计。

（3） 利用σ^*给出$\log\sigma$的$1-\alpha$置信的区间估计。

8. *（Bayes 区间估计）假设总体服从$N(\mu,\sigma^2)$，参数σ^2已知，$X_1,\cdots,X_n$为其独立随机样本，μ的先验分布为$N(\mu_0,\sigma_0^2)$，μ_0,σ_0^2为已知常数，$0<\alpha<1$为常数。

（1） 求a,b使得在μ的后验分布下$P(a<\mu<b)\geq 1-\alpha$。选取a,b使得区间长度最小。

（2） 令$\sigma_0\to\infty$，给出（1）中估计区间(a,b)的极限情况，将其与经典方法所求置信区间相比较，并尝试给予直观解释。

9. （计算机实验）作业 10-9 续。

（1） 利用作业 10-9 的结果给出$\theta=e^{\mu}$的 95%置信的区间估计。

（2） 注意到$\overline{X}$是μ的极大似然估计，你还能据此给出其他建立置信区间的方法吗？对于方法的合理性进行简要说明。