清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 高等线性代数选讲　　A 卷　　2022 年 6 月 16 日

本试题共 8 道大题，满分 100 分.

1. (10 分) 求下列矩阵的 Jordan 标准型.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (10 分) 求下列矩阵的极小多项式：

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

3. (20 分) (1) 计算 e^A，其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) 计算 $\ln(A)$，其中 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) 计算 $\sin(A)$，其中 $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$;

(4) 计算 e^A，其中 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (10 分) 判定下列函数矩阵是否可逆，如果可逆，计算它的逆.

(1) $\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ x^2+1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x+1 \end{pmatrix}, x \in (-1,1)$;　(2) $\begin{pmatrix} e^x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ x & x^2-1 & x \end{pmatrix}, x \in (1,2)$.

5. (15 分) 设 $\mathcal{A}$ 是自伴变换，即 $\mathcal{A}$ 是自己的伴随映射. 证明：

(1) 证明：$\mathcal{A} - i\mathcal{I}$ 是可逆变换，其中 $\mathcal{I}$ 为恒等变换，$i^2 = -1$;

(2) 证明：$\mathcal{B} = (\mathcal{A} - i\mathcal{I})^{-1}(\mathcal{A} + i\mathcal{I})$ 为酉变换;

(3) 证明：$\mathcal{B} - \mathcal{I}$ 是可逆变换.

6. (10 分) 设 $\mathcal{A}$ 是 2 维欧氏空间上的正规线性变换，且 $\mathcal{A}$ 没有实特征向量. 证明 $\mathcal{A}$ 在任意一组标准正交基下的表示矩阵形如 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

7. (5 分) 证明行列式为 1 的 2 阶酉矩阵相似于一个实正交矩阵.

8. (20 分) 设 V 是复数域上的 3 维向量空间，且 e_1, e_2, e_3 为 V 的一组基，e^1, e^2, e^3 为其对偶基.

    (1) 写出 $T_1^1(V)$ 的一组基.

    (2) 设 $(t_1, t_2, t_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 写出张量 $e^1 \otimes e^2 \otimes (e_1 - e_2)$ 在基 (t_1, t_2, t_3) 下的坐标.

    (3) 设 $T = -e^1 \otimes e^1 + 6e^1 \otimes e^2 + 2e^2 \otimes e^1 - 5e^2 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + 7e^3 \otimes e^1 + 6e^3 \otimes e^3 \in T_2^0(V)$. 求所有的 $w \in V$，使得对任意的 $v \in V$，$T(v, w) = 0$.