

第9次作业

1. 尝试以简要框架形式给出概率部分知识的总结，并指出自己掌握起来相对困难的知识点。
2. 给出一个抽样调查实例，试指出你认为的其可能的不当之处。
3. （简单随机抽样）设总体的大小为 N ，总体均值和方差分别为 μ, σ^2 ， X_i

（ $i=1, \dots, n$ ）为简单随机样本（无放回抽取）。

（1） *证明： $E(X_i) = \mu$ ， $Var(X_i) = \sigma^2$ 。

（2） **证明： $E(\bar{X}) = \mu$ ， $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$ 。

4. 设随机样本 X_i （ $i=1, \dots, n$ ）来自二项总体 $B(k, p)$ 。

（1） 给出参数 k 和 p 的矩估计；

（2） 尝试讨论上述估计的不足之处。

5. 设随机样本 X_i （ $i=1, \dots, n$ ）来自均匀分布 $U(\theta, 2\theta)$ ，求 θ 的矩估计和极大似然估计。

6. 设函数 $f(x, a, \sigma) = (\sqrt{2\pi}\sigma^3)^{-1}(x-a)^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right)$ ， $x \in R$ ，其中 $a \in R$ ， $\sigma > 0$ 为参数。

（1） 证明： $f(x; a, \sigma)$ 作为 x 的函数是一个概率密度。

（2） 设随机样本 X_i （ $i=1, \dots, n$ ）来自此总体，求 a 和 σ^2 的矩估计。

（3） 列出 a, σ^2 的极大似然估计所满足的方程，并指出一种迭代求解的方法。

7. 设随机样本 X_i （ $i=1, \dots, n$ ）来自 Bernoulli 总体 $B(p)$ ，请给出参数 p 的矩估计和极大似然估计。

8. 设总体是总数为 n ，单元概率分别为 p_1, \dots, p_m ($p_1 + \dots + p_m = 1$) 的多项分布， X_i ($i = 1, \dots, m$) 分别为第 m 个单元的观测频数 ($X_1 + \dots + X_m = n$)。求参数 p_i ($i = 1, \dots, m$) 的极大似然估计。

9. 设总体 X 具有以下分布表

X 取值	1	2	3
概率	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $0 < \theta < 1$ 是未知参数。已取得了样本值 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ ，请据此求 θ 的矩估计值和极大似然估计值。

10. 设随机样本 X_1, \dots, X_n 来自具有概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

的分布，其中 $\theta > 0$ 是未知参数。

(1) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ 。

(2) 求 θ 的极大似然估计 θ^* 。

11. (计算机实验) 考虑第 4 题，分别尝试 $k = 10$, $p = 0.3, 0.5$, $n = 100, 1000$,

生成服从 $B(k, p)$ 容量为 n 的随机样本，利用样本给出 k, p 的矩估计值。多尝试几次，观察你的实验结果，当中是否有明显不合理的？