

#### 第 4 次作业

1. 若  $X$  的概率密度函数为：

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

如果  $E(X) = \frac{2}{3}$ ，求  $a, b$ 。

2. 科技馆上午 9 点钟开馆，从 10 点开始每隔半小时有一次同样的科普实验展示，如果某个参观者到馆的时间服从 10 点至 11 点的均匀分布，求以下事件的概率：

- (1) 他等待科普实验展示的时间不超过 10 分钟；
- (2) 他等待科普实验展示的时间超过 20 分钟。

3. 某人被指控为一个新生儿的父亲。此案鉴定人作证时指出：母亲的怀孕期（即从受孕到婴儿出生的时间）的天数近似地服从正态分布，其参数为  $\mu = 270$ ，

$\sigma^2 = 100$ 。被告提供的证词表明，他在孩子出生前 290 天出国，而于出生前 240 天才回来。如果被告事实上是这个孩子的父亲，试问那位母亲确有与证词相符的过长或过短的怀孕期的概率是多少？

4. \*某人计划要开始一个 1 万公里的自驾旅行，他的汽车已经跑了 1.5 万公里，假设该品牌汽车在电池报废之前跑的公里数服从均值为 3 万公里的指数分布，那么他不用更换电池就能跑完全程的概率是多大？如果该品牌汽车在电池报废之前跑的公里数不服从指数分布（但是知道其分布函数  $F$ ）呢？
5. 涉及犯罪嫌疑人的证据可看成一个随机变量  $X$  的值， $X$  服从指数分布，其均值为  $\mu$ 。若该人无罪，则  $\mu = 1$ ，否则  $\mu = 2$ 。法官按以下方式判罪：当  $X > c$  时判其有罪，否则判其无罪。

(1) 法官希望以 95% 的把握不冤枉一个无罪的人， $c$  应该取何值？

(2) 利用 (1) 中得到的  $c$  值，计算将一个确实有罪的被告判为有罪的概率。

6. \*\* “各个年龄段吸烟者的死亡率是非吸烟者死亡率的 2 倍” 这个说法的意思是什么？是不是说对于同年龄的非吸烟者和吸烟者来说，前者活到一个给定时间的概率是后者的 2 倍？假设仅仅知道 50 到 60 岁之间的非吸烟者死亡率是  $\frac{1}{30}$ ，分别求一个 50 岁非吸烟者和吸烟者活到 60 岁的概率（结果保留 4 位小数）。

7. 令  $X$  为连续型随机变量，其概率密度函数为  $f(x)$ ，假设  $g(x)$  为严格单调可微函数，求  $g(X)$  的概率密度函数。
8. （通过查参考资料）给出参数为  $a, b$  的  $\beta$  分布并计算其期望和方差。
9. \*将线段  $[0,1]$  随机断开，求包含固定点  $p_0 \in (0,1)$  的那一段的长度的期望值。
10. \*假设按如下方式生成随机变量  $X$ ：首先抛一枚均匀的硬币，如果出现正面，令  $X$  服从  $(0,1)$  上的均匀分布；如果出现反面，令  $X$  服从  $(3,4)$  的均匀分布。求  $X$  的期望和方差。
11. 令随机变量  $X$  服从  $(0,1)$  上的均匀分布，求  $Y = \frac{1}{X}$  的分布。
12. 将区间  $(0,1)$  分成长度分别为  $p_1, p_2, \dots, p_n$  的  $n$  部分 ( $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ )，分别记为子区间  $I_1, I_2, \dots, I_n$ ，令  $X \sim U(0,1)$ ，如果  $X$  落入子区间  $I_i$  那么定义随机变量  $Y = i$ 。
  - (1) 求  $Y$  的分布。
  - (2) 可否利用上述方法构造一般的离散型随机变量？
13. 设随机变量  $Y > 0$ ， $\log Y$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，求  $Y$  的概率密度函数。
14. （计算机实验）从正态分布  $N(100, 100)$  中随机产生 1000 个随机数。
  - (1) 作出这 1000 个正态随机数的直方图；
  - (2) 从这 1000 个随机数中随机有放回地抽取 1000 个，作出其直方图；
  - (3) 比较它们的均值与方差。