2022年清华大学微积分A2期中试题及解析

她的糖
擅长炸显存的AI训练师。

1.设$z=\mathrm{e}^{x-y}\ln(x+y)$，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$______.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x-y}\ln(x+y)+\frac{\mathrm{e}^{x-y}}{x+y}\Rightarrow\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\mathrm{e}$

2.设$z=x\sin(xy)$，则$\left.\mathrm{d}z\right|_{\left(1,\frac{\pi}{2}\right)}=$______.

解：$\mathrm{d}z=[\sin(xy)+xy\cos(xy)]\,\mathrm{d}x+\left[x^2\cos(xy)\right]\mathrm{d}y\Rightarrow\left.\mathrm{d}z\right|_{\left(1,\frac{\pi}{2}\right)}=\mathrm{d}x$

3.$(x+1)^{2y}$在点$(0,0)$处带Peano余项的二阶Taylor展开式为______.

解：$f(x,y)=f(0,0)+f'_x(0,0)\,x+f'_y(0,0)\,y$
$+\frac{1}{2}f''_{xx}(0,0)\,x^2+\frac{1}{2}f''_{yy}(0,0)\,y^2+\frac{1}{2}f''_{xy}(0,0)\,2xy+\mathrm{o}\left(x^2+y^2\right)$
$=1+0+0+0+0+2xy+\mathrm{o}\left(x^2+y^2\right)=1+2xy+\mathrm{o}\left(x^2+y^2\right)$

4.设$f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{t^2+xt}\mathrm{d}t$，则$f'(0)=$________.

解：$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\int_{\sin x}^{\cos x}te^{t^2+xt}\mathrm{d}t-\sin x\,\mathrm{e}^{\cos^2x+x\cos x}-\cos x\,\mathrm{e}^{\sin^2x+x\sin x}$
$f'(0)=\int_0^1te^{t^2}\mathrm{d}t-0-1=\frac{\mathrm{e}-3}{2}$

5.曲面$\mathrm{e}^z=xy+yz+zx$在点$(1,1,0)$处的切平面方程为________.

解：$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,0)}=1\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,0)}=1\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,1,0)}=1$
$1(x-1)+1(y-1)+1(z-0)=0$ 即$x+y+z=2$

6.写出曲面$x=u\cos v,y=u\sin v,z=v$在点(x_0,y_0,z_0)
$=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$处的一个单位法向量________.

解：$\mathrm{d}x=\cos v\mathrm{d}u-u\sin v\mathrm{d}v$ $\mathrm{d}y=\sin v\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v$ $\mathrm{d}z=\mathrm{d}v$

$u=2v=\frac{\pi}{4}$

$\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}u-\sqrt{2}\mathrm{d}v$ $\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}u+\sqrt{2}\mathrm{d}v$ $\mathrm{d}z=\mathrm{d}v$

$\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$ $\mathrm{d}v=\mathrm{d}z$

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mathrm{d}y-\sqrt{2}\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\sqrt{2}\mathrm{d}z\end{cases}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{2}=\frac{\mathrm{d}y}{2}=\sqrt{2}$$

从而法向量为 $\pm\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$，单位法向量为 $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-1,2\sqrt{2})$

7.可微函数$z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿$\vec{u}=(-1,2)$ 的方向导数$\frac{\partial z}{\partial\vec{u}}\Big|_{(0,0)}=0$，沿$\vec{v}=(3,4)$ 的方向导数$\frac{\partial z}{\partial\vec{v}}\Big|_{(0,0)}=2$，则$\mathbf{grad}\ f|_{(0,0)}=$ ________.

解：如果函数在某点可微，那么方向导数$\frac{\partial z}{\partial\vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$

因此：$\frac{\partial z}{\partial\vec{u}}\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{\sqrt{5}}f_x(0,0)+\frac{2}{\sqrt{5}}f_y(0,0)=0$，$\frac{\partial z}{\partial\vec{v}}\Big|_{(0,0)}=\frac{3}{5}f_x(0,0)$

$+\frac{4}{5}f_y(0,0)=2$

由此解得$f_x(0,0)=2$，$f_y(0,0)=1$，故梯度为$(2,1)$

8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{xy}=$ ________.

解：$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{xy}=\exp\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\ln\left(x^2+y^2\right)\right)$

$\left|xy\ln\left(x^2+y^2\right)\right|\leqslant\left|\frac{x^2+y^2}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right|$ 令$x^2+y^2=t$

$\lim_{t\to0}\left|\frac{t}{2}\ln(t)\right|=0$，因此$\exp\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\ln\left(x^2+y^2\right)\right)=\mathrm{e}^0=1$

9.已知$\begin{cases}x=\mathrm{e}^v+u^3\\ y=\mathrm{e}^u-v^3\end{cases}$，将点$(u_0,v_0)=(1,0)$ 映为(x_0,y_0) $=(2,\mathrm{e})$，则其逆映射$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$

在点$(x_0,y_0)=(2,\mathrm{e})$ 处的jacobi矩阵的行列式 $\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Big|_{(x,y)=(2,\mathrm{e})}=$ ________.

解：$\begin{cases}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^v\mathrm{d}v+3u^2\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}y=\mathrm{e}^u\mathrm{d}u-3v^2\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\left\{\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{e}^u\mathrm{d}x-3u^2\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{u+v}+9u^2v^2}\ \ \mathrm{d}u=\frac{3v^2\mathrm{d}x+\mathrm{e}^v\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{u+v}+9u^2v^2}\right.$

$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(u_0,v_0)=(1,0)}=0$

$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(u_0,v_0)=(1,0)}=\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(u_0,v_0)=(1,0)}=1$

$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{(u_0,v_0)=(1,0)}=-\frac{3}{\mathrm{e}}$

$$\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Big|_{(x,y)=(2,\mathrm{e})}=\begin{vmatrix}0&\frac{1}{\mathrm{e}}\\1&-\frac{3}{\mathrm{e}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

10.已知函数$f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处可微，且$f(1,1)=1$，$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2$，$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=3$，设$g(x)=f(x,f(x,x))$，则$g'(1)=$ ________.

解：$g'(x)=f_1'+f_2'\cdot\left[f_1'+f_2'\right]=2+3\times(2+3)=17$

11.证明方程$1+xy=\arctan(x+y)$在点$(x_0,y_0)=(-1,1)$的邻域中，
确定了一个任意次连续可微的隐函数$y=y(x)$，并求$y'(-1)$和$y''(-1)$.

解：证明方程$1+xy=\arctan(x+y)$在点$(x_0,y_0)=(-1,1)$的邻域中，
确定了一个任意次连续可微的隐函数$y=y(x)$，并求$y'(-1)$和$y''(-1)$.
令$F(x,y)=1+xy-\arctan(x+y)$，$F(x,y)$在点$(-1,1)$的邻域中无穷次连续可微
且隐函数$y=y(x)$在点$x=-1$的邻域中任意次连续可微
$1+xy=\arctan(x+y)$两边对x求一阶导和二阶导，将$(x,y)=(-1,-1)$代入
得$y'(-1)=0$，$y''(-1)=0$

12.已知$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$试回答以下问题，并说明理由.
（1）函数$f(x,y)$在原点处是否连续？
（2）偏导数$f'_x(0,0)$和$f'_y(0,0)$是否存在？如果存在，求出它们.
（3）函数$f(x,y)$在原点处是否可微？如果可微，求出微分.

解：（1）$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x|+|y|$，因此连续

（2）$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{x^2}-0}{x}=1$，故$f'_x(0,0)$存在且为$1$

$\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{y^3}{y^2}-0}{y}=-1$，故$f'_x(0,0)$存在且为$-1$

（3）$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k(1-k)}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$，与$k$有关，故不可微

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^py^q}{x^m+y^n}$，$m,n$为正整数，$p,q$为非负实数

1.m,n不全为偶数，极限一定不存在；

2.m,n全为偶数，若$\frac{p}{m}+\frac{q}{n}>1$，那么极限为0；若$\leqslant1$，那么极限不存在

选择路径$y=kx^{\frac{m-p}{q}}$

丢个小结论

13.请用Lagrange乘子法求函数$f(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)$在曲线$x^2+y^2=1$上的最大值和最小值.

解：连续函数在有界闭集上有最大值和最小值，因此条件极值问题

$$\min/\max f(x,y)$$
$$s.t.\quad x^2+y^2=1$$

存在最大值和最小值。

令

$$L(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)+\lambda(x^2+y^2-1).$$

求解方程组

$$\begin{cases} L_x'(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\left(y\sin(x+y)+\cos(x+y)\right)+2\lambda x=0 & (1)\\ L_y'(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\left(x\sin(x+y)+\cos(x+y)\right)+2\lambda y=0 & (2)\\ L_\lambda'(x,y)=x^2+y^2-1=0 & (3)\end{cases}$$

$(2)x-(1)y$: $\qquad (x-y)\left((x+y)\sin(x+y)+\cos(x+y)\right)=0.$

由（3）式知 $|x+y|\le\sqrt{2(x^2+y^2)}=\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$, 此时 $(x+y)\sin(x+y)\ge 0,\cos(x+y)\ge 0$, 且

$(x+y)\sin(x+y)$ 与 $\cos(x+y)$ 不能同时为 0. 因此

$$(x+y)\sin(x+y)+\cos(x+y)\ne 0,\quad x-y=0.$$

将 $x=y$ 代入（3）式得 $(x,y)=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, 或 $(x,y)=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$,

14.已知$(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$为某一函数$f(x,y)$的全微分，求$a,b$的值及$f(x,y)$.

解：由于函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$，

又当 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 存在且连续时，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=by\cos x+6xy^2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=3axy^2-2y\cos x$，

所以 $a=2,b=-2$.

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}z=(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y\\&=y^3\mathrm{d}x^2-y^2\mathrm{d}\sin x+\mathrm{d}y-\sin x\mathrm{d}y^2+x^2\mathrm{d}y^3\\&=\mathrm{d}(x^2y^3)-\mathrm{d}(y^2\sin x)+\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}(x^2y^3-y^2\sin x+y)\end{aligned}$$

$$f(x,y)=x^2y^3-y^2\sin x+y+c,c\in\mathbb{R}.$$

解法 2：

$f(x,y)=\int(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x=x^2y^3-y^2\sin x+A(y)$，

对 y 求导得到 $3x^2y^3-2y\sin x+A'(y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$，所以 $A(y)=y+c$。

所以 $f(x,y)=c+y-y^2\sin x+x^2y^3$。

解法 3：

$f(x,y)=\int(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}x^2y^3-y^2\sin x+A(y)$，

对 y 求导得到 $\frac{3a}{2}x^2y^2-2y\sin x+A'(y)=1+by\sin x+3x^2y^2$，

取 $x=0$，得到 $A(y)=y+c$。上式再对 y 求导后令 $y=0$，得到 $b=-2$。再由上式得到 $a=2$。所以 $f(x,y)=c+y-y^2\sin x+x^2y^3$。

解法 4：

$f(x,y)=f(0,0)+(f(x,0)-f(0,0))+(f(x,y)-f(x,0))$

应用牛顿莱布尼兹公式有

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(0,0)+\int_0^x f_x'(t,0)\mathrm{d}t+\int_0^y f_y'(x,s)\mathrm{d}s\\&=f(0,0)+\int_0^x 0\mathrm{d}t+\int_0^y(1-2s\sin x+3x^2s^2)\mathrm{d}s\\&=c+y-y^2\sin x+x^2y^3\end{aligned}$$

15. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x+y)$ 的极值和值域.

解：

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(-2x^2-2xy+1)\\\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(-2xy-2y^2+1)\end{cases}$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ 解得临界点 $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 或 $(x,y)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(2x^3+2x^2y-3x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(2y^3+2xy^2-x-3y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x+y)(2xy-1)$$

$H_f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-1/2}\begin{pmatrix}-3&-1\\-1&-3\end{pmatrix}$, $H_f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-1/2}\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$

所以 $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 是极大值，$f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 是极小值。

因为 $\left|\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x+y)\right|\le\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\left(|x|+|y|\right)\le\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$，

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x+y)=0$，

$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，$f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$。

所以 f 有（正的）最大值和（负的）最小值，

从而 $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 是最大值，$f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 是最小值，定义域道路连通，

所以 f 的值域为 $\left[\frac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right]$.

16. （15分）已知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}, I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-tx^2}}{x^2}dx, t\in[0,+\infty)$.

(1) 证明：$f(t,x)=\begin{cases}\frac{1-e^{-tx^2}}{x^2}, & x\neq 0, t\in\mathbb{R}\\ t, & x=0, t\in\mathbb{R}\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

(2) 证明 $I(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

(3) 证明 $I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导并计算 $I'(t)$.

(4) 求 $I(t), t\in[0,+\infty)$.

解答：(1) $\varphi(u)=\begin{cases}\frac{1-e^{-u}}{u}, & u\neq 0\\ 1 & u=0\end{cases}$ 在 $u\in\mathbb{R}$ 上连续，因此 $f(t,x)=t\varphi(tx^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

(或按定义证明)

（2）$I(t)=\int_0^1 f(t,x)dx+\int_1^{+\infty} f(t,x)dx \triangleq I_1(t)+I_2(t), \forall t\in[0,+\infty)$.

由 $f(t,x)$ 的连续性可得 $I_1(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

又因为 $|f(t,x)|\le\frac{1}{x^2}, \forall t\ge 0, x\ge 1$, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$I_2(t)=\int_1^{+\infty} f(t,x)dx$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛，因此 $I_2(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

综上，$I(t)=I_1(t)+I_2(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

（3）任取 $a>0$, 有 $f_t'(t,x)=e^{-tx^2}\le e^{-ax^2}, \forall t\in[a,+\infty)$,

而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\int_0^{+\infty} f_t'(t,x)dx$ 在 $t\in[a,+\infty)$ 上一致收敛，因此 $I(t)$ 在 $t\in[a,+\infty)$ 可导,由 a 的任意性可知 $I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导且

$$I'(t)=\int_0^{+\infty} f_t'(t,x)dx=\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}, \forall t\in(0,+\infty).$$

(4) 由 $I'(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$，得 $I(t)=\sqrt{\pi t}+c, \quad \forall t\in(0,+\infty)$.

而(2)中已证明 $I(t)$在$[0,+\infty)$上连续, 注意到 $I(0)=0$, 可得 $c=0$. 于是

$$I(t)=\sqrt{\pi t}, \forall t\in[0,+\infty).$$

17. 已知函数 $f(x,y)$ 对每个变量 x,y 分别连续；且对每个固定的 x，函数 $f(x,y)$ 对变量 y 单调. 求证：$f(x,y)$ 作为二元函数是连续函数。

证明：不妨设 $f(x,y)$ 对 y 单调递增。任意给定 (x_0,y_0)，任意给定 $\varepsilon>0$。

因为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对变量 y 连续，所以存在 $y_1<y_0<y_2$ 使得

$$f(x_0,y_2)-\frac{\varepsilon}{2}\le f(x_0,y_1)\le f(x_0,y_0)\le f(x_0,y_2)<f(x_0,y_0)+\frac{\varepsilon}{2}。$$

又因为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_1) 和点 (x_0,y_2) 处对变量 x 连续，所以

$$\exists\delta_2>0, \forall x:|x-x_0|<\delta_2, |f(x,y_i)-f(x_0,y_i)|<\frac{\varepsilon}{2}, i=1,2。$$

$$\forall x:|x-x_0|<\delta_2,\ f(x_0,y_1)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x,y_1),\ f(x,y_2)<f(x_0,y_2)+\frac{\varepsilon}{2}。$$

于是，当 $|x-x_0|<\delta_2, y\in[y_1,y_2]$ 时，由单调性和前面的不等式

$$f(x_0,y_0)-\varepsilon < f(x,y_1) \le f(x,y) \le f(x,y_2) < f(x_0,y_0)+\varepsilon,$$

所以 $f(x,y)$ 作为二元函数在 (x_0,y_0) 点连续。

编辑于 2022-04-22 03:04

清华大学 微积分 高等数学

评论千万条，友善第一条

67 条评论 默认 最新

log而非对数
捏mm的，怎么让我这个65分不到平均的菜狗刷到这条了举办了
2022-04-22 回复 55

Fuyuki 我关注的人 ‣ **Murasame**
71
2022-04-22 回复 2

西湖春晓
拟态baby辣
2022-04-26 回复 2

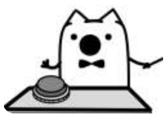
展开其他 3 条回复 >

Specialized14
隔壁居然还有填空题
2022-04-22 回复 44

微光
求一份PukingU的期中题
2022-04-22 回复 2

心虚的内森
反应真实（
2022-04-27 回复 1

何妨吟啸且独行
我只是来知乎休息，别再让我看到这些。



2022-04-22 回复 27

姝妍
＿人人人人人人人人人＿
＞ 已经开始头疼了...... ＜
￣Y Y Y Y Y Y Y Y Y Y￣
2022-04-21 回复 10

拱了某白菜的猪
附加题的证明似乎有点问题？”不妨设f对y单调递增“，或许对于某些y，f是递增的；对另一些y，f是递减的~
2022-04-21 回复 9

tyujhghj
思路是一样的，就是不等号的方向反一下
回复 1

拱了某白菜的猪 ‣ **tyujhghj**
然而我想表达的不是你理解的这个意思捏~
2022-04-23 回复 赞

sayend
我认为母猪产后护理首先要从产前做起，母猪产前四五天要逐渐减少饲喂量，其目的是减少腹部压力，产前吃得少，产后才能吃得多。若产前吃得多，会使产程过长
2022-04-25 回复 8

未命名
第9题解法可以简单些，求出(x, y)对(u, v)的Jacobi行列式再取倒数即可
2022-04-22 回复 8

她的糖 作者
2022-04-22 回复 赞

我不知道
知乎是不是高看我了
2022-04-22 回复 7

规光者
体量有点大 难度还好
2022-04-22 回复 5

锅巴
高一刷到了
2022-04-26 回复 2

她的糖 作者
哈哈哈加油，日后上个清华
2022-04-26 回复 赞

nowahala
好像年级最高96吧?
2022-05-27 回复 2

北小慕慕慕慕慕
只写埋土的试卷
2022-04-22 回复 2

刀导
我是双非的，17题是我们微积分一个B班的作业题
2022-04-22 回复 2

MizukiCry
为什么不早一星期发
2022-04-22 回复 2

Friedrich II
为什么要考期末了刷到期中
2022-06-09 回复 1

我是丫丫
??干嘛推给我，还有5天高考，慌死了
2022-06-02 回复 1

我是丫丫 ‣ **她的糖**
考崩了
2022-06-09 回复 赞

她的糖 作者
祝你上清华
2022-06-02 回复 赞

大了

2022-04-22 回复 1

陷入深深深的沉思
眼熟，感觉像是上周六刚刚做过
2022-04-22 回复 1

wangzexi21
均分路过
2022-04-21 回复 1

止战之殇
你是THU的吗
2022-04-22 回复 赞

求醉的奔波儿灞
刚考完高数期中我裂开了
2022-05-18 回复 赞

点击查看全部评论 >

评论千万条，友善第一条

推荐阅读

复旦大学插班生数学——考点总结与刷题推荐
科兴插班生 发表于上海插班生

华中科技大学微积分（上）
考试模拟考试
微积分学习成绩水平并不代表你
习水平，这门课只是培养了你学
的思路和解决问题的逻辑性能，
万不可认为自己成绩高就是微积
学习好了，这门课可能是很多人
魔咒，这门课成绩想要取得好...
电子