第 2 次作业

1. *证明：$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

   （提示：将事件 $A+B+C$ 表示成适当的互斥事件之和）。

2. 假设 $P(B)>0$，证明 $P(\cdot\,|\,B)$ 是概率函数。

3. 判断下列结论是否正确，并简要说明理由：

   （1）$P(A)\ge P(A\,|\,B)$。

   （2）不存在既互斥也相互独立的事件 A,B。

   （3）若 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则 A,B,C 独立。

4. *假设 A_i 表示掷 2 骰子的点数之和为 i 的倍数（$i=2,3,5$），请分别判断 A_2 与 A_3 以及 A_2 与 A_5 的独立性并说明理由。

5. 举例说明条件独立不意味着独立，反之亦然。

6. 假设 A 是小概率事件，$P(A)=\varepsilon$（$0<\varepsilon<1$），不断独立地重复此试验，证明：事件 A 迟早要发生的概率为 1。

7. *假设有 3 张形状相同的卡片，其中一张两面都是黑色，一张两面都是红色，另一张是一面红一面黑，随机取出一张放在桌上，朝上的面为红色，那么另一面是黑色的概率是多少？

8. n 个人按任一顺序依次抓阄（其中只有一个为“中”），请评价以下两种抓阄方式是否公平并说明理由：

   （1）所有人都抓完阄后再同时打开；

   （2）每个人抓完阄后立即打开，当某个人抓到“中”时，整个抓阄过程结束（后面的人就不必抓了）。

9. *有 3 部电梯 5 名乘客，假设乘客选择电梯是随机的，求每部电梯至少有一名乘客的概率。

10. 假设某医生考虑如下诊断方案：若有 80%的可能确定病人患此病就会建议病人手术；否则推荐做进一步的检查，该检查昂贵且痛苦。现在该医生仅仅有 60%的把握认为小明患此病，因此推荐做了进一步的检查，该检查对于确有此病的患者给出阳性结果，而对健康人却不会给出阳性结果。小明的检查结果呈阳性，正当要建议手术时，小明告诉医生他患有糖尿病。 这个消息带来了麻烦，尽管它并不影响医生一开始对小明患病的 60%的把握，但却影响了这个进一步检查项目的效果，该检查对于患有糖尿病却不患有这种疾病的人来说会有 30%的可能给出阳性结果。问：此时医生是否应该仍旧建议手术？

11. *一个人左右口袋里各放一盒火柴，每盒 n 支，每次抽烟时随机选一盒拿出一支用掉，由于习惯的原因，选右面口袋的概率是 $p>\frac{1}{2}$。试求下述两种情形的概率。

    （1） 到某次他发现取出的这一盒已经空了，这时另一盒恰有 m 支火柴。

    （2） 到他用完某一盒时另一盒恰有 m 支火柴。

12. *有一个生物，1 分钟后有三种可能结果：死掉、保持原状或者分裂成两个，出现的概率

都相同，而此后活着的该种生物都将以这种方式相互独立地进行下去，那么这种生物最终灭亡的概率是多少？

13. *根据症状检查，某患者患有病症 A,B,C 中的一种，有 80%可能患有病症 A，患有病症 B,C 的可能都为 10%。现在有甲乙两种药物治疗方案，治愈率如下表所示：

	A	B	C
甲	80%	5%	10%
乙	60%	90%	90%

你会给出哪种治疗方案建议？请说明理由。另外一种方案有没有可以被建议的理由？

14. *某学生参加限时为 1 小时的测验，其在 x（$0 \le x \le 1$）小时内完成的概率是 $0.5x$，已知他在 45 分钟后仍在答题，问他最后用光 1 小时的概率是多少？

15. **假设有两个同样的袋子，分别标记为 1 号和 2 号，1 号袋子中有 4 个黑球和 1 个白球，2 号袋子中有 2 个黑球和 3 个白球。袋子标号不小心掉了，随机选中一个袋子进行取球试验，每次从中取出一个球，事件“第 k 次取出的是黑球”记为 B_k。

（1） 求第 1 次取出的是黑球的概率 $P(B_1)$；

（2） 若取出第 1 个球但不看其颜色，请分别在将第 1 个球放回和不放回袋子两种情形下求 $P(B_2)$，比较 $P(B_2)$ 与 $P(B_1)$ 并尝试解释二者为什么会有这样的关系；

（3） 若取出的第 1 个球是黑球，将其放回袋子，求第 2 次取出的仍是黑球的概率，比较 $P(B_2 | B_1)$ 与 $P(B_2)$ 并尝试给出二者大小关系的直观解释；

（4） 若每次取球后都将球放回，已知前 n 次取出的都是黑球，求第 $n+1$ 次取出的是黑球的概率 $P(B_{n+1} | B_1 B_2 \cdots B_n)$，进一步令 $n \to \infty$，这个概率的极限是多少？怎么直观理解这个极限结果？

（5） 若每次取球后都将球放回，已知前 n 次取出的都是黑球，请问刚开始选的袋子是 1 号的概率为多少？进一步令 $n \to \infty$，这个概率的极限是多少？怎么直观理解这个极限结果？

16. （计算机实验）假设一枚硬币正面朝上的概率为 $p = 0.3$，抛掷 $n = 1000$ 次，每次记录正面朝上的相对频率。

（1） 画出这些相对频率的散点图。

（2） 重复上述试验 100 次画出正面向上次数的直方图

（3） 计算上述 100 次试验正面朝上次数的平均值，并将其与 np 相比较。

（4） 尝试不同的 p 和 n 值。