第 5 次作业

1. 袋中有 3 个红球，4 个白球，5 个黑球。
   （1） 每次随机取出一个球记录颜色然后放回，那么 6 次取球出现红球 2 次，白球 3 次，黑球 1 次的概率是多少？
   （2） 随机从中一次性取出 3 个球，令 X,Y 分别表示取出的红球数和白球数，请给出随机向量 (X,Y) 的分布表。
   （3） 求 $P(X=1)$。
2. 设随机变量 X,Y 的联合分布函数为 $F(x,y)$，证明：

$$P(a<X\le b,c<Y\le d)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)。$$

3. 随机从以原点为圆心的单位圆盘内取一点，假设该点在圆盘内服从均匀分布，令 (X,Y) 表示该点的坐标。
   （1） 求 (X,Y) 的概率密度函数；
   （2） 计算 X 和 Y 的边际分布的概率密度函数；
   （3） 记该点与圆心的距离为 R，求 $P(R\le r)$，这里 $0<r<1$ 为常数；
   （4） 计算 R 的期望 $E(R)$。
4. 完成课上二元正态分布的边际密度的计算。
5. 完成课上二元正态分布的条件密度的计算。
6. 直角坐标系中一个三角形区域的顶点坐标为 $(0,0)$、$(0,1)$ 和 $(1,0)$，在该区域中随机取一点，其坐标记为 (X,Y)。
   （1） 确定 X 和 Y 的联合分布；
   （2） 计算 Y 的边际密度；
   （3） 计算 X 的在给定 Y 值条件下的概率密度函数。
7. （Farlie-Morgenstein 族）如果 $F(x)$ 和 $G(y)$ 是一维随机变量的累积分布函数，

可以证明以下结果：对任意的$\alpha \in [-1,1]$，

$$H(x,y) = F(x)G(y)\{1+\alpha[1-F(x)][1-G(y)]\}$$

是一个二元（随机变量的）累积分布函数。

（1） 求其边际分布；

（2） 分别取$\alpha = -1, 1$，构造两个不同的二元分布，使得其边际分布都是区间$[0,1]$上的均匀分布。

8. *（Copula 函数）边际分布为区间$[0,1]$上均匀分布的联合累积分布函数称为连接（Copula）函数。设$C(u,v)$是一个二元 Copula 函数，X 和Y 为连续随机变量，其累积分布函数分别为$F(x)$和$G(y)$，请利用 Copula 函数构造一个二元分布使其边际分布分别为$F(x)$和$G(y)$。

9. 甲乙两人约定在某个地点见面，如果两人到达的时间是独立的，且在下午 1 点至 2 点之间均匀分布，请给出甲乙到达时间联合分布的概率密度函数求先到的人需要等待 10 分钟以上的概率。

10. 设(X,Y)有密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{1+x^2+y^2}, & 当 x^2+y^2 \le 1 \\ 0, & 当 x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

（1） 求出常数c；

（2） 计算X,Y的边际密度，并证明X,Y不独立。

11. 设X,Y独立，且都服从标准正态分布$N(0,1)$，以$f(x,y)$记(X,Y)的联合密度函数。

（1）证明：函数

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y)+\dfrac{xy}{100}, & \text{当} x^2+y^2\le 1 \\ f(x,y), & \text{当} x^2+y^2>1 \end{cases}$$

是一个二维概率密度函数。

（2） 若随机向量(U,V)有密度函数$g(x,y)$，证明：U,V 都服从标准正态分布，但(U,V)不服从二元正态分布。

12. 给出当随机变量 X,Y 离散或者连续（共计四种情形）的全概率公式和 Bayes 公式。（提示：课上给出了 X,Y 都是连续随机变量的情形）

13. （计算机实验）随机生成 10000 个由标准正态分布产生的随机数，记为 x_i（$i=1,\cdots,10000$），令 $y_i=e^{x_i}$，绘出 y_i（$i=1,\cdots,10000$）的直方图，并与 $Y=e^X$（X 服从标准正态分布）的概率密度函数图形相比较。