第 10 次作业

1. *李雷和韩梅梅开始约会，但是韩梅梅在任何约会中都可能迟到，迟到时间服从区间$\left[0,\theta\right]$上的均匀分布，参数θ是未知的，是随机变量Θ的一个值。已知Θ在 0 和 1 小时之间均匀分布。假设韩梅梅在第一次约会中迟到了x小时，那么李雷如何利用这个信息去更新Θ的分布？
2. 考虑课上硬币的例子，计算硬币正面朝上的概率θ的后验众数估计（也称最大后验估计），并给出其当$n=20$，$x=13$时的具体值，所得结果在直观上是否与极大似然的思想相符合？
3. *假设总体服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，参数σ^2已知，$X_1,\cdots,X_n$为其随机样本，μ的先验分布为$N(\mu_0,\sigma_0^2)$，μ_0,σ_0^2为已知常数。

   （1） 求μ的最大后验估计。

   （2） 求μ的后验均值估计。
4. （简单随机抽样）设总体的大小为N，总体均值和方差分别为μ,σ^2，X_i（$i=1,\cdots,n$）为简单随机样本（无放回抽取），$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$。

   （1） *证明：$E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{N}{N-1}$。

   （2） 给出$Var(\bar{X})$的一个无偏估计。
5. *设X来自 Poisson 总体$P(\lambda)$的一个样本。

   （1） 证明：$g(\lambda)=e^{-2\lambda}$的唯一无偏估计为$\hat{\theta}(X)=\begin{cases}1, & 当X为偶数\\ -1, & 当X为奇数\end{cases}$。

   （2） 上述估计是否合理？如不合理，请尝试给出一个合理的估计。
6. 设随机样本X_i（$i=1,\cdots,n$）来自总体$U(0,\theta)$。

   （1） 证明：$\hat{\theta}_1=\max(X_1,\cdots,X_n)+\min(X_1,\cdots,X_n)$是$\theta$的无偏估计。

（2） 证明：可以适当选择常数c_n使得$\hat{\theta}_2 = c_n \min(X_1, \cdots, X_n)$是$\theta$的无偏估计。

（3） **比较四个无偏估计$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$，$\hat{\theta}_3 = 2\bar{X}$，$\hat{\theta}_4 = \frac{n+1}{n}\max(X_1, \cdots, X_n)$的方差大小。

7. 设随机样本X_i（$i = 1, \cdots, n$）来自某一个均值为θ且方差有限的总体。

（1） 设$c_1, \cdots, c_n$为常数，证明：$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$是θ的无偏估计当且仅当$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$。

（2） 在上述形式的估计类中，只有在$c_1 = \cdots = c_n$（$= \frac{1}{n}$）时方差达到最小。

8. *设随机样本X_i（$i = 1, \cdots, n$）来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$，m_2和S^2可以作为σ^2的估计，试比较两个估计的均方误差。

9. （计算机实验）设随机样本X_i（$i = 1, \cdots, n$）来自正态总体$N(\mu, 1)$，$\theta = e^{\mu}$，考虑θ的估计$\hat{\theta} = T(X_1, \cdots, X_n) = e^{\bar{X}}$。

（1） 创建一个包含n个观测的数据集，数据记为$x_1, \cdots, x_n$（取$\mu = 5$，$n = 100$）。（其确定的经验分布记为$F_n(x)$）

（2） 从（1）中数据集中有放回地抽取$n = 100$个观测，记为$x_1^*, \cdots, x_n^*$。（等同于从分布$F_n(x)$中抽取容量依旧为n的随机样本）

（3） 计算$\hat{\theta}^* = T(x_1^*, \cdots, x_n^*)$。

（4） 重复步骤（2）和（3）m 次，得到 $\hat{\theta}_1^*,\cdots,\hat{\theta}_m^*$。（取 $m=1000$ ）

（5） 画出 $\hat{\theta}_1^*,\cdots,\hat{\theta}_m^*$ 的直方图，并与 $\hat{\theta}$ 的分布相比较，你能得到什么结论？

（6） 令 $V_{boot}=\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\left(\hat{\theta}_r^*-\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\hat{\theta}_r^*\right)^2$，求 V_{boot}。 是否可以用 V_{boot} 来近似 $Var(\hat{\theta})$？