



*UFR MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS*

Master 2

Probabilités et Statistiques

Projet de Méthode numériques pour les produits structurés  
en actuariat.

Titre : contrat d'épargne en euros (€) avec participation aux bénéfices (PB) et rachat

---

Mai 2021

Rédigé Par

Fatou Yara SYLL

&

Nango FOFANA

---

Année Universitaire : 2020 - 2021



## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Cadre général du problème</b>	<b>3</b>
2.1	Le taux de revalorisation $r_s(t)$ à la date $t$ . . . . .	3
2.2	Le taux de rachat $\mu(t)$ à la date $t$ . . . . .	3
2.3	Formule du Best Estimate $BE(T, t)$ à la date $t$ . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Détermination de la solutions explicites</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Modélisation du bilan</b>	<b>8</b>
4.1	Dynamiques des facteurs de risque (les actifs) . . . . .	8
4.2	Les passifs . . . . .	9
4.3	Calcul du Solvency Capital Requirement SCR . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Expression et résolution numérique de l'équation aux dérivées partielle ( EDP )</b>	<b>11</b>
5.1	Expression de l'EDP . . . . .	11
5.2	Résolution numérique de l'EDP de façon implicite par la méthodes des différences finies . . . . .	11
5.2.1	Domaines de résolution et conditions aux bords . . . . .	11
5.2.2	Schéma Implicite par différences fines . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Implementation numérique par monte carlo aboutissant à la valeurs du <math>t</math> calcul du SCR</b>	<b>16</b>
6.1	Résultats numériques à la date $t=0$ . . . . .	17
6.2	Graphique . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>18</b>

## 1 Introduction

Dans ce projet notre objectif est de mesurer l'impact du rachat anticipé de contrat d'épargne en € avec participation aux bénéfices et rachat sur le niveau de fonds propre minimum. Ceci dans une optique d'évaluation du **Best Estimate** implicite ou numérique via un modèle d'équations aux dérivées partielles (EDP) en dimension 2. Pour bien mener à bien notre projet nous nous appuyons ici sur le travaux ([2]) où il s'agit d'un contrat d'épargne en € avec versement de prime unique  $P$  à  $t = 0$ , de maturité  $T > 0$  avec participations aux bénéfices (taux de revalorisation), taux minimum garanti ( $TMG$ ) et possibilité de rachat. Nous allons en un premier temps donner l'expression générale du *Best Estimate*. Ensuite adopter un cadre continu en temps qui permettra d'obtenir une formulation EDP et enfin calcul du SCR à un an *i.e*  $t = 1$  avec la formule fermée et EDP.

## 2 Cadre général du problème

### 2.1 Le taux de revalorisation $r_s(t)$ à la date $t$

C'est le taux d'intérêt servi sur un contrat d'assurance-vie pour une année donnée. Dans notre projet le taux de revalorisation  $r_s$  est modélisé à l'aide d'un facteur de risque et d'un taux court qui sont  $(x_t, r_t)$  lié à la politique de participation aux bénéfices où  $x_t$  désigne un facteur de risque et  $r_t$  désigne le taux court. Ici notre taux de revalorisation dépend du taux minimum garanti ( $TMG$ ) défini par la formule suivante:

$$r_s(t) = f(x_t, r_t) = \max(x_t + r_t, TMG) \quad (2.1)$$

Nous savons que à tout instant  $t$ , l'assuré est susceptible d'effectuer un rachat et de recevoir le montant de la prime initiale majorée du taux de servi  $r_s$  c'est-à-dire la valeurs de rachat du contrat noté:

$$VR = VR(0) \times \exp\left(\int_0^t r_s(s) ds\right) = P \times \exp\left(\int_0^t r_s(s) ds\right) \quad (2.2)$$

### 2.2 Le taux de rachat $\mu(t)$ à la date $t$

Le taux de rachat  $\mu$  est interprété ici comme le nombre de sortie par unité de temps. Pour des petites valeurs de  $h$  avec  $\tau$  comme le temps de sortie:

$$\mathbb{P}(t < \tau < t + h | \tau > t) \sim \mu(t)h \quad (2.3)$$

Par définition, la définition d'être encore dans le contrat en  $T$  conditionnement aux facteurs de risque en  $t$  s'exprime à l'aide du taux de rachat  $\mu = \mu(t)$  comme:

$$\mathbb{P}(t > \tau > t, (x_t, r_t)) = S_t(T) = \mathbb{E}(e^{-\int_t^T \mu(s)ds} | (x_t, r_t)) \quad (2.4)$$

Dans notre cas la filtration  $\mathcal{F}_t$  représente le flux d'information disponible au fur et à mesure du temps. On peut la noter de façon formelle par:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t \quad (2.5)$$

Où  $\mathcal{G}_t$  est tribu engendré par  $(x_s, r_s)_{s \leq t}$ ,  $\mathcal{H}_t$  la tribu engendré par  $(\mathbf{1}_{\tau \leq t})_{s \leq t}$ . Aussi on a:  $\mathbb{P}(\tau > | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(e^{-\int_t^T \mu(s)ds} | \mathcal{F}_t)$  qui désigne la densité de  $\tau$   $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$ -conditionnellement et noté  $f_t$ , qui est obtenu en dérivant la fonction de répartition de  $\tau$  conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$ . On a:

$$f_t(s) = \frac{\partial}{\partial s}(\tau \geq s | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu(s)e^{-\int_t^s \mu(u)du} | \mathcal{F}_t) \quad (2.6)$$

### 2.3 Formule du Best Estimate $BE(T, t)$ à la date $t$

Dans notre projet, nous adoptons le point de vue de l'assuré. Le contrat prévoit en cas de sortie qui peut être décès ou rachat avant maturité  $T$  ou bien en cas de survie en  $T$ , le versement de la valeur de rachat capitalisée depuis la signature du contrat ( $t=0$ ) au taux de revalorisation:

$$r_S(t) = f(t, x_t, r_t) = \max(x_t, r_t, TMG) \quad (2.7)$$

Où  $TMG$  désignant le Taux Minimum Guaranti.

Considérons un flux de trésorerie aléatoire à l'instant  $t \leq T$  définir par:

$$F_t = VR(\tau)\mathbf{1}_{t < \tau < T} + VR(\tau)\mathbf{1}_{\tau > T} \quad (2.8)$$

Où  $\tau$  est l'instant de rachat et  $VR(t) = P \times \exp(\int_0^t r_S(u)du)$ .

Pour obtenir l'expression du *Best Estimate* considérons l'espace de probabilité suivant  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Pour la probabilité, on utilisera  $\mathbb{P}^{nh}$  la probabilité historique qui modélise le risque *non-hedgeable* et  $\mathbb{Q}^h$  la probabilité risque-neutre qui modélise les risques *hedgeable* telles que  $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^{nh}$ . Par décomposition de  $\mathbb{P}^{nh}$  sous forme de deux probabilité c'est-à-dire  $\mathbb{P}^{nh} = \mathbb{P}^a \otimes \mathbb{P}^x$  où  $\mathbb{P}^a$  désigne la probabilité associé aux risques mutualisables,  $\mathbb{P}^x$  désigne la probabilité associée aux risques non mutualisables et non couvrables on a:

$$\mathbb{P} = \mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x \otimes \mathbb{P}^a. \quad (2.9)$$

Par la suite nous n'allons pas tenir compte de la probabilité  $\mathbb{P}^a$  ce qui nous ramène à étendre la probabilité  $\mathbb{P}^x$ . Donc on utilisera la probabilité suivante:  $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x$

Ainsi le Best Estimate à la date  $t \leq T$  est donnée par:

$$BE(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} (e^{-\int_t^\tau r(s)ds} F_t | \mathcal{F}_t) \quad (2.10)$$

$$BE(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} (e^{-\int_t^\tau r(s)ds} (V(\tau) \mathbf{1}_{t < \tau < T} + VR(\tau) \mathbf{1}_{\tau > T}) | \mathcal{F}_t) \quad (2.11)$$

$$BE(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} (e^{-\int_t^\tau r(s)ds} (V(\tau) \mathbf{1}_{t < \tau < T} + VR(\tau) \mathbf{1}_{\tau > T}) | \mathcal{F}_t) \quad (2.12)$$

$$BE(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} (e^{-\int_t^\tau r(s)ds} VR(\tau) \mathbf{1}_{t < \tau < T} | \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} (e^{-\int_t^\tau r(s)ds} VR(\tau) \mathbf{1}_{\tau > T} | \mathcal{F}_t) \quad (2.13)$$

$$BE(t, T) = BE_r(t, T) + BE_s(t, T) \quad (2.14)$$

Grâce à la loi des espérances itérées et aussi la loi  $\tau$  conditionnellement à  $\mathcal{G}$  on a :

$$BE_r(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} [e^{-\int_t^\tau r(s)ds} VR(\tau) \mathbf{1}_{t < \tau < T} | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}]) | \mathcal{F}_t) \quad (2.15)$$

$$BE_r(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} ((\int_t^T e^{-\int_t^s r(s)ds} e^{-\int_t^s \mu(s)ds} VR(s) \mu(s) \mathbf{1}_{\tau > s} ds) | \mathcal{F}_t) \quad (2.16)$$

$$BE_r(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} ((\int_t^T e^{-\int_t^s (r(s) + \mu(s))ds} VR(s) \mu(s) \mathbf{1}_{\tau > s} ds) | \mathcal{F}_t) \quad (2.17)$$

$$BE_r(t, T) = \mathbf{1}_{\tau > t} \int_t^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} ((e^{-\int_t^s (r(s) + \mu(s))ds} VR(s) \mu(s)) | \mathcal{F}_t) ds \quad (2.18)$$

Par le même raisonnement on a :

$$BE_s(t, T) = \mathbf{1}_{\tau > t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} ((e^{-\int_t^T r(s)ds} e^{-\int_t^T \mu(s)ds} VR(T)) | \mathcal{F}_t)$$

$$BE_s(t, T) = \mathbf{1}_{\tau > t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} (e^{-\int_t^T (r(s) + \mu(s))ds} VR(T) | \mathcal{F}_t) \quad (2.19)$$

Par conséquent de 2.3 et 2.4 on obtient à  $\{\tau\}$ :

$$BE(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} [\int_t^T ((e^{-\int_t^s (r(s) + \mu(s))ds} VR(s) \mu(s)) ds + e^{-\int_t^T (r(s) + \mu(s))ds} VR(T)) | \mathcal{F}_t] \quad (2.20)$$

$$BE_s(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} ((e^{-\int_t^T r(s)ds} e^{-\int_t^T \mu(s)ds} VR(T)) | \mathcal{F}_t)$$

Ici nous avons  $\mathcal{F}_t = \sigma((x_\tau), (r_\tau), s \leq t)$ .

La formule du *Best Estimate*  $BE(t, T)$  est vue comme une formule d'évolution risque-neutre d'un actif artificiel qui paierait en  $s$  des dividendes aux taux  $VR(s)\mu(s)$  actualisé a un taux  $r + \mu$

Par la formulation du rapport *Best Estimate* avec les provisions mathématiques  $PM(t)$  à la date  $t$ , c'est à dire la valeur actuelle à l'instant  $t$  de la valeur de

rachat sachant qu'il n'y a pas encore eu de sortie. Grâce à l'expression du *Best Estimate* et l'homogénéité du payoff *i.e*

$$VR(s) = VR(t) \exp\left(\int_t^s r_s(u) du\right) \quad (2.21)$$

$$VR(T) = VR(t) \exp\left(\int_t^T r_s(u) du\right) \quad (2.22)$$

où  $VR(t)$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable. On a:

$$BE(t, T) = VR(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left( \int_t^T (e^{\int_t^s (r_s - r(s) - \mu)(u) du} \mu(s)) ds + e^{\int_t^T (r_s - r(s) - \mu)(u) du} \right) | \mathcal{F}_t \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow BE(t, T) = VR(t) \phi(t, x(t), t(t)) \quad (2.24)$$

Avec  $\phi(t, x(t), r(t)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left( \int_t^T (e^{\int_t^s (r_s - r(s) - \mu)(u) du} \mu(s)) ds + e^{\int_t^T (r_s - r(s) - \mu)(u) du} \right) | \mathcal{F}_t$   
Par la formule de *Feymann - Kac*, on montre facilement que  $\phi(t, x_t, r_t)$  donnée ci-dessus est solution de l'EDP avec condition terminale suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x, r) + \mathcal{L} \phi(t, x, r) + (1 - \phi(t, x, r))g(x) + (f(x, r) - r)\phi(t, x, r) = 0, & t < T \\ \phi(T, x, r) = 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $\mathcal{L}$  désigne le générateur infinitésimale associé aux processus markoviens  $(x_t, r_t)$  définir par:

$$\mathcal{L} = m_r \frac{\partial}{\partial r} + m_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma_r^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \sigma_x \sigma_r \frac{\partial^2}{\partial x \partial r} \quad (2.26)$$

L'opérateur  $\mathcal{L}$  est obtenu à partir de la dynamiques de  $(x, r)$ . on retient les processus d'Ornstein-Uhlenbeck définir par:

$$\begin{cases} dx(t) = b_x(t, x(t))dt + \sigma_x(t, x(t))dW^x(t), & x_0 \in \mathbb{R} \\ dr(t) = b_r(t, r(t))dt + \sigma_r(t, r(t))dW^r(t), & r_0 > 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $W^x$  et  $W^r$  sont des mouvements Brownien sous  $\mathbb{P}$  de corrélation  $\rho$ .

### 3 Détermination de la solutions explicites

Dans cette partie nous allons une formule semi explicité pour évaluer le *Best Estimate* avec une modélisation simple du taux de rachat et revalorisation sous la dynamiques des facteurs de risques  $r$  et  $x$ . Pour cela supposons:

$$\begin{cases} r_s(t) = f(x_t, r_t) = r_t + x_t, & x_0 \in \mathbb{R} \\ \mu(t) = g(x_t, r_t) = \mu_i - \eta x_t, & \mu_i, \eta > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  $x_t$  et  $r_t$  sont des processus d'O. U. définir par :

$$\begin{cases} dx(t) = b_x(t, x(t))dt + \sigma_x(t, x(t))dW^x(t), & x_0 \in \mathbb{R} \\ dr(t) = b_r(t, r(t))dt + \sigma_r(t, r(t))dW^r(t), & r_0 > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

D'après la partie précédente on à :

$$\phi(t, x(t), r(t)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left( \int_t^T ((e^{\int_t^s (r_s - r(s) - \mu)(u) du} \mu(s)) ds + e^{\int_t^T (r_s - r(s) - \mu)(u) du}) | \mathcal{F}_t \right) \quad (3.3)$$

Comme  $\mu(t) = g(x_t, r_t) = \mu_i - \eta x_t$  on a:

$$\phi(t, x(t), r(t)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left( \int_t^T ((e^{\int_t^s ((1+\eta)x(u) - \mu_i) du} (\mu_i - \eta x(u))) ds + e^{\int_t^T ((1+\eta)x(u) - \mu_i) du}) | \mathcal{F}_t \right) \quad (3.4)$$

Par la suite posons:

$$\theta_1(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} (e^{\int_t^s (1+\eta)x(u) du})$$

$$\theta_2(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} (-(\eta x) e^{\int_t^s (1+\eta)x(u) du})$$

On a par la propriété de markov sur  $x_t$  on obtient:

$$\phi(t, x(t)) = \int_t^T S_i(s-t)(\mu_i \theta_1(s) - \eta \theta_2(s)) ds + S_i(T-t) \theta_1(T) \quad (3.5)$$

Où  $S_i(t) = e^{-\mu_i t}$ . Compte tenu de l'aspect gaussien  $x_t$  on peut expliciter  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . On sait que:

$$dx(t) = b_x(t, x(t))dt + \sigma_x(t, x(t))dW^x(t), \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

Après résolution on a:

$$x_t = x_0 e^{\mathcal{K}_x t} + x_\infty \frac{1 - e^{-kt}}{k} \sigma_x \int_0^t e^{-\mathcal{K}_x(t-s)} dW_s, \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

en en intégrant  $x_t$  on a:

$$\int_t^s x(r) dr = x_\infty(s-t) + (x - x_\infty) \left( \frac{1 - e^{-k(s-t)}}{k} \right) + \frac{\sigma}{k} \int_t^s (1 - e^{-\mathcal{K}_x(t-s)}) dW_r \quad (3.8)$$

$$\int_t^s x(r) dr = \mathcal{N}(m_1(t, s), v_1(s, t)) \quad (3.9)$$

Où

$$\begin{cases} m_1(t) = x_\infty(s-t) + (x - x_\infty) \left( \frac{1 - e^{-k(s-t)}}{k} \right), & x_0 \in \mathbb{R} \\ v_1(t) = \frac{\sigma}{k} \int_t^s (1 - e^{-\mathcal{K}_x(t-s)}) dr, & r_0 > 0 \end{cases} \quad (3.10)$$



Ainsi

$$\theta_1(t) = e^{(1+\eta)m_1(t)+(1+\eta)^2 \frac{v_1(t)}{2}} \quad (3.11)$$

Pour  $\theta_1$  on remarque que:

$$\frac{d\theta_1}{ds}(s) = (1+\eta)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x}(x(s)e^{(1+\eta)\int_t^s x(u)du}|\mathcal{F}_t) = (1+\eta)\theta_2(s) \quad (3.12)$$

donc on a:

$$\theta_2(t) = (1+\eta)\frac{d\theta_1}{ds}(s) \quad (3.13)$$

Ce qui nous donne l'expression suivante:

$$\theta_2(t) = \theta_1(t)(m_2(t) + \frac{1}{2}v_2(t)) \quad (3.14)$$

Où

$$m_2(s) = \frac{m_2(t)}{dt}(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x}(x(s)e^{(1+\eta)\int_t^s x(u)du}|\mathcal{F}_t) = (1+\eta)\theta_2(s) \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} m_2(s) = \frac{m_2(t)}{dt}(t) \\ v_2(t) = (1+\eta)\frac{v_1}{dt}(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

Pour le cas où  $f$  et  $g$  sont quelconques cela nécessite de faire une simulation de Monte Carlo pour calculer  $\phi(t, x(t), r(t))$  tout en simulant les trajectoires  $x_t$  et  $r_t$  indépendamment. Pour cela on peut approcher  $\phi(t, x_t, r_t)$  par:

$$\frac{1}{M} \sum_1^M \left\{ \int_t^T g(x^i(s), r^i(s)) e^{\int_t^s (f(x^i, r^i) - r^i - g(x^i, r^i)) du} + e^{\int_t^T (f(x^i, r^i) - r^i - g(x^i, r^i)) du} \right\} \quad (3.17)$$

Où  $x^i = x$ ,  $r^i = r$  avec  $0 \leq i \leq M$ ,  $M$  désigne le nombre de simulation.

## 4 Modélisation du bilan

Ici nous allons décrire quelques grandeurs nécessaires à l'illustration du SCR.

### 4.1 Dynamiques des facteurs de risque (les actifs)

Ici les actifs notés  $A_t$  sont des valeurs de marché d'une compagnie d'assurance-vie (adossées aux engagements). Nous utilisons le modèle de Vasicek (*cf. planetandal.[2011]*) pour modéliser les actifs de l'assureurs par la dynamique du modèle de black Scholes. Notons  $A_t$  la valeurs des actifs à la date  $t$  On a:

$$dr(t) = k_r \times (r_\infty - r(t))dt + \sigma_r dW^r(t) \quad (4.1)$$

$$dr_A(t) = \mu_A(t)dt + \rho\sigma_A dW^r(t) + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_A dW^A(t) \quad (4.2)$$

$$dx(t) = k_x \times (x_\infty - x(t))dt + \frac{\rho_{s,a}\sigma_x}{\sqrt{1 - \rho^2}} dW^A(t) + \sqrt{\frac{1 - \rho_{s,a}^2 - \rho^2}{1 - \rho^2}} dW^x(t) \quad (4.3)$$

Avec  $\mu_A, k_r, r_\infty, \sigma_x, \sigma_A, x_\infty, k_x > 0$ ,  $\rho$  et  $\rho_{s,a} \in [-1,1]$ .  $W^A, W^r, W^x$  trois mouvements Browniens indépendants. On a :

$$\frac{dr_A(t)}{r_A(t)} = \mu_A(t)dt + \rho\sigma_A dW^r(t) + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_A dW^A(t) \quad (4.4)$$

Après résolution on a :

$$r_A(t) = r_A(0) \exp\left(\left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t + \sigma_A(\rho W_t^r + \sqrt{1 - \rho^2}W_t^A)\right) \quad (4.5)$$

En utilisant les travaux de *Bonnin* et *Planchet* on a :

$$A(t+1) = A(t) \exp\left(\hat{\mu}_A + \sigma_A(\rho(W_{t+1}^r - W_t^r) + \sqrt{1 - \rho^2}(W_{t+1}^A - W_t^A))\right) \quad (4.6)$$

## 4.2 Les passifs

Ici les passifs noté  $E_t$  correspondent au montant des engagements vis-à-vis des actionnaires (fonds propres) et le montant  $L_t$  correspond à la valeur du marché des engagements vis-à-vis des assurés (provisionnement). Celui-ci tient compte des flux des prestations des produits d'assurance. Généralement, nous pouvons calculer la dette vis-à-vis des assurés (provisions) noté  $L_t$  comme somme de la prestations à verser en fin d'années  $F_t$  et le Best Estimate noté  $BE(t,T)$  ayant la formule suivante :

$$L_t = F_t + BE(t,T) = F_t + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{s \geq t+1}^T e^{-\int_t^s r_u du} F_s | \mathcal{F}_t\right) \quad (4.7)$$

Où  $F_s$  désigne le flux de correspondant aux prestations de l'année  $[s-1,s]$  versées en fin d'année  $s$ ,  $BE(t,T)$  est aussi appelé l'espérance actualisée sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$  des flux futurs. A la date  $t$  on a :

$$A_t = E_t + L_t \quad (4.8)$$

Donc on en déduit la formule du passif par :

$$E_t = A_t - F_t - BE(t,T) \quad (4.9)$$

### 4.3 Calcul du Solvency Capital Requirement SCR

Le calcul du SCR est encore un des grands chantiers du monde de l'assurance actuellement. Deux approches sont possible pour effectuer ce calcul.

- L'approximation en  $t = 0$

$$SCR_0 = E_0 - V_{@}R_{0.5\%}(e^{-\int_0^1 r(s)ds} E_1) \quad (4.10)$$

L'expression en  $t=0$  exprimant le bilan des charges actualisées à un an:

$$SCR_0 = V_{@}R_{99.5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1}\right) - L_0 \quad (4.11)$$

Ici le  $F_1$  représente le montant versées en fin d'année 1 et  $R_1$  le taux d'accroissement de l'actif .

La  $V_{@} R$  ( Value at risque) est définie au niveau  $\alpha$  d'une v.a.r X comme:

$$V_{@}R_{\alpha} = \inf\{x \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha) \quad (4.12)$$

On se base sur L'approximation (en  $t=0$ ) pour le calcul du SCR.

Posons :  $L = e^{-\int_0^1 r(s)ds} E_1$ . Alors on a  $SCR_0 = E_0 - V_{@}R_{0.5\%}(L)$ .

Calculer  $SCR_0$  revient à calculer  $V_{@}R_{0.5\%}(L)$ . Pour ce faire on va estimer  $\hat{Var}_{\alpha}(L)$  la valeur at Risk empirique.

Soient  $L_1, \dots, L_N$  des variables aléatoires i.i.d selon la loi de  $L$  et sa statistique d'ordre:

$$(\min_{1 \leq i \leq N} L_i = L_1^{(N)}, L_2^{(N)}, \dots, L_N^{(N)} = \max_{1 \leq i \leq N} L_i^{(N)}) \quad (4.13)$$

Déterminons  $\hat{V}_{@}R_{\alpha}(L)$

On sait que:

$$VaR_{\alpha} = \inf\{x \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = \mathbf{F}_X^{-1}(\alpha) \quad (4.14)$$

Donc

$$\begin{aligned} \hat{Var}_{\alpha}(L) &= \inf\{x \mid \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{(L_k \leq x)} \geq \alpha\} \\ &= \inf\{x \mid \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{(L_k^{(N)} \leq x)} \geq N\alpha\} \\ &= \inf\{x \mid \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{(L_k^{(N)} \leq x)} \geq \lceil N\alpha \rceil\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pour  $l \in 1, \dots, N$ , on a :

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{(L_k^N \leq L_l^N)} = \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{L_k^N \leq L_l^{(N)}} + \sum_{k=l+1}^N \mathbf{1}_{L_k^N \leq L_l^N}$$

Pour  $l = \lceil N\alpha \rceil$ ,

$$\hat{Var}_\alpha(L) = \inf\{x \in [L_{\lceil N\alpha \rceil}^{(N)}, L_N^{(N)}]\} = L_{\lceil N\alpha \rceil}^{(N)} \quad (4.16)$$

Pour calculer le SCR il nous faut résoudre numériquement l'EDP qui nous permettra d'aboutir aux résultats. La section suivante nous permet de faire cette résolution numérique.

## 5 Expression et résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles ( EDP )

### 5.1 Expression de l'EDP

Ici on veut résoudre l'EDP en 2D par la méthode des différences finies en utilisant le schéma implicite. L'EDP est de la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\phi(t, x, r) + \mathcal{L}\phi(t, x, r) + (1 - \phi(t, x, r))g(x) + (f(x, r) - r)\phi(t, x, r) = 0, & t < T \\ \phi(T, x, r) = 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $\mathcal{L}$  désigne le générateur infinitésimal associé aux processus markoviens  $(x_t, r_t)$  défini par:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}_r(r_\infty - r)\frac{\partial}{\partial r} + \mathcal{K}_x(x_\infty - x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma_r^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sigma_x^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho\sigma_x\sigma_r\frac{\partial^2}{\partial x\partial r} \quad (5.2)$$

Pour retrouver la condition initiale on effectue un changement de variable. Pour ce faire posons:  $\Phi(t, x, r) = \phi(T - t, x, r)$ .

Et par linéarité et unicité, l'EDP est équivalent à l'EDP suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, x, r) - \mathcal{L}\Phi(t, x, r) - (f(x, r) - r - g(x))\phi(t, x, r) = g(x) \\ \Phi(0, x, r) = \phi(T, x, r) \end{cases} \quad (5.3)$$

### 5.2 Résolution numérique de l'EDP de façon implicite par la méthode des différences finies

#### 5.2.1 Domaines de résolution et conditions aux bords

Pour mener à bien notre résolution il nous faut réduire notre domaine de résolution de  $\Phi$  à trois écart-types autour de la moyenne asymptotique c'est-à-dire *i.e* une étude asymptotique des lois marginales  $x_t$  et  $r_t$ . D'après le cours on a:

$$\begin{cases} x_t \sim \mathcal{N}(x_0e^{-\mathcal{K}_x t} + x_\infty(1 - e^{-\mathcal{K}_x t}), \sigma_x^2 \frac{(1 - e^{-2\mathcal{K}_x t})}{2\mathcal{K}_x}) \\ r_t \sim \mathcal{N}(r_0e^{-\mathcal{K}_r t} + r_\infty(1 - e^{-\mathcal{K}_r t}), \sigma_r^2 \frac{(1 - e^{-2\mathcal{K}_r t})}{2\mathcal{K}_r}) \end{cases} \quad (5.4)$$

en faisant tendre  $t$  vers  $\infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ) on a:

$$\begin{cases} x_t \sim \mathcal{N}(x_\infty, \frac{\sigma_x^2}{2\mathcal{K}_x}) \\ r_t \sim \mathcal{N}(r_\infty, \frac{\sigma_r^2}{2\mathcal{K}_r}) \end{cases} \quad (5.5)$$

Par conséquent notre domaine de résolution devient:

$[x_\infty - 3\frac{\sigma_x}{\sqrt{2k_x}}, x_\infty + 3\frac{\sigma_x}{\sqrt{2k_x}}] \times [x_\infty - 3\frac{\sigma_r}{\sqrt{2k_r}}, x_\infty + 3\frac{\sigma_r}{\sqrt{2k_r}}]$ . Pour les conditions aux bords on fera le choix des conditions aux bords du domaine adéquates celle de Dirichlet homogène qui est la suivante:

$$\forall (t, x, r) \in ]0, T] \times \{x_\infty - \frac{3\sigma_x^2}{2\mathcal{K}_x}, x_\infty + \frac{3\sigma_x^2}{2\mathcal{K}_x}\} \times \{r_\infty - \frac{3\sigma_r^2}{2\mathcal{K}_r}, r_\infty + \frac{3\sigma_r^2}{2\mathcal{K}_r}\}$$

### 5.2.2 Schéma Implicite par différences fines

Avant d'appliquer la méthodes des différences finies nous allons faire une discrétisations de notre espace. On a:

$$t_n = n\Delta t, \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad \text{on a } \Delta t = \frac{T}{N} \quad (5.6)$$

Pour le temps nous avons  $N + 1$  point.

$$x_i = x_\infty - L_1 + i\Delta x, \quad \forall i \in \{0, \dots, M_1\}, \quad \text{où } L_1 = 3\frac{\sigma_x}{\sqrt{2k_x}} \text{ et } \Delta x = \frac{2L_1}{M_1} \quad (5.7)$$

$$r_j = r_\infty - L_2 + j\Delta r, \quad \forall j \in \{0, \dots, M_2\}, \quad \text{où } L_2 = 3\frac{\sigma_r}{\sqrt{2k_r}} \text{ et } \Delta r = \frac{2L_2}{M_2} \quad (5.8)$$

pour  $x_i$  et  $r_j$  nous avons respectivement  $M_1 + 1$  et  $M_2 + 1$  points. Maintenant nous allons faire une approximation notre fonction  $\Phi$  en  $(t_n, x_i, r_j)$  par une solution approcher c'est-à-dire  $\Phi_{i,j}^n \approx \Phi(t_n, x_i, r_j)$  grâce à la méthode des différences finies.

Utilisons le schéma implicite.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_{n+1}, x_i, r_j) &= \frac{\Phi(t_{n+1}, x_i, r_j) - \Phi(t_n, x_i, r_j)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_{n+1}, x_i, r_j) &\approx \frac{\Phi(t_{n+1}, x_i, r_j) - \Phi(t_n, x_i, r_j)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_{n+1}, x_i, r_j) \approx \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (5.9) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t_{n+1}, x_i, r_j) &= \frac{\Phi(t_{n+1}, x_{i+1}, r_j) - \Phi(t_{n+1}, x_i, r_j)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t_{n+1}, x_i, r_j) &\approx \frac{\Phi(t_{n+1}, x_{i+1}, r_j) - \Phi(t_{n+1}, x_i, r_j)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t_{n+1}, x_{i+1}, r_j) \approx \frac{\Phi_{i+1,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r}(t_{n+1}, x_i, r_j) &= \frac{\Phi(t_{n+1}, x_i, r_{j+1}) - \Phi(t_{n+1}, x_i, r_j)}{\Delta r} + \mathcal{O}(\Delta r) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r}(t_{n+1}, x_i, r_j) &\approx \frac{\Phi(t_{n+1}, x_i, r_{j+1}) - \Phi(t_{n+1}, x_i, r_j)}{\Delta r} \\ &\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r}(t_{n+1}, x_i, r_j) \approx \frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} - \Phi_{i,j}^{n+1}}{\Delta r} \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}(t_{n+1}, x_i, r_j) &= \frac{\Phi(t_{n+1}, x_i, r_{j+1}) - 2\Phi(t_{n+1}, x_i, r_j) + \Phi(t_{n+1}, x_i, r_{j-1}))}{(\Delta r)^2} + \mathcal{O}((\Delta r)^2) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}(t_{n+1}, x_i, r_j) &\approx \frac{\Phi(t_{n+1}, x_i, r_{j+1}) - 2\Phi(t_{n+1}, x_i, r_j) + \Phi(t_{n+1}, x_i, r_{j-1}))}{(\Delta r)^2} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}(t_{n+1}, x_i, r_j) \approx \frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta r)^2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t_{n+1}, x_i, r_j) &= \frac{\Phi(t_{n+1}, x_{i+1}, r_j) - 2\Phi(t_{n+1}, x_i, r_j) + \Phi(t_{n+1}, x_{i-1}, r_j))}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t_{n+1}, x_i, r_j) &\approx \frac{\Phi(t_{n+1}, x_{i+1}, r_j) - 2\Phi(t_{n+1}, x_i, r_j) + \Phi(t_{n+1}, x_{i-1}, r_j))}{(\Delta x)^2} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t_{n+1}, x_i, r_j) \approx \frac{\Phi_{i+1,j}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t_{n+1}, x_i, r_j) &= \frac{\Phi(t_{n+1}, x_{i+1}, r_{j+1}) - \Phi(t_{n+1}, x_{i+1}, r_j) - \Phi(t_{n+1}, x_i, r_{j+1}) + \Phi(t_{n+1}, x_i, r_j))}{(\Delta x)^2} \\ &\quad + \mathcal{O}((\Delta r)^2 + (\Delta x)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t_{n+1}, x_i, r_j) &\approx \frac{\Phi(t_{n+1}, x_{i+1}, r_{j+1}) - \Phi(t_{n+1}, x_{i+1}, r_j) - \Phi(t_{n+1}, x_i, r_{j+1}) + \Phi(t_{n+1}, x_i, r_j))}{\Delta x \Delta r} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t_{n+1}, x_i, r_j) \approx \frac{\Phi_{i+1,j+1}^{n+1} - \Phi_{i+1,j}^{n+1} - \Phi_{i,j+1}^{n+1} + \Phi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x \Delta r} \end{aligned} \quad (5.14)$$

De (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), on obtient:

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta t} - \mathcal{K}_r(r_\infty - r_j) \frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} - \Phi_{i,j}^{n+1}}{\Delta r} - \mathcal{K}_x(x_\infty - x_i) \frac{\Phi_{i+1,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \\ &\quad - \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\Phi_{i+1,j}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - \frac{\sigma_r^2}{2} \frac{\Phi_{i+1,j}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta r)^2} \\ &\quad - \rho \sigma_x \sigma_r \frac{\Phi_{i+1,j+1}^{n+1} - \Phi_{i+1,j}^{n+1} - \Phi_{i,j+1}^{n+1} + \Phi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x \Delta r} - \Phi_{i,j}^{n+1} (f(x_i, r_j) - r_j - g(x_i)) = g(x_i) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$\Rightarrow :$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{\mathcal{K}_r(r_\infty - r_j)}{\Delta r} + \frac{\mathcal{K}_x(x_\infty - x_i)}{\Delta x} + \frac{\sigma_x^2}{(\Delta x)^2} + \frac{\sigma_r^2}{(\Delta r)^2} - \frac{\rho\sigma_x\sigma_r}{\Delta x\Delta r} - (f(x_i, r_j) - r_j - g(x_i)) \right) \Phi_{i,j}^{n+1} \\ & - \frac{\rho\sigma_x\sigma_r}{\Delta x\Delta r} \Phi_{i+1,j+1}^{n+1} - \frac{\sigma_x^2}{2(\Delta x)^2} \Phi_{i-1,j}^{n+1} - \frac{\sigma_r^2}{2(\Delta x)^2} \Phi_{i,j-1}^{n+1} - \left( \frac{\mathcal{K}_x(x_\infty - x_i)}{\Delta x} + \frac{\sigma_x^2}{2(\Delta x)^2} - \frac{\rho\sigma_x\sigma_r}{\Delta x\Delta r} \right) \Phi_{i+1,j}^{n+1} \\ & - \left( \frac{\mathcal{K}_r(r_\infty - r_j)}{\Delta x} + \frac{\sigma_r^2}{2(\Delta r)^2} - \frac{\rho\sigma_x\sigma_r}{\Delta x\Delta r} \right) \Phi_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \Phi_{i,j}^n + g(x_i) \end{aligned} \quad (5.16)$$

On a:  $\forall i \in \{1, \dots, M_1 - 1\}, \forall i \in \{1, \dots, M_2 - 1\}, \forall n \in \{1, \dots, N - 1\}$

$$A\Phi_{i-1,j}^{n+1} + B\Phi_{i,j-1}^{n+1} + C\Phi_{i+1,j+1}^{n+1} + D_{i,j}\Phi_{i,j}^{n+1} + E_i\Phi_{i+1,j}^{n+1} + F_j\Phi_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \Phi_{i,j}^n + g(x_i) \quad (5.17)$$

$$A\Phi_{i-1,j}^{n+1} + B\Phi_{i,j-1}^{n+1} + D_{i,j}\Phi_{i,j}^{n+1} + E_i\Phi_{i+1,j}^{n+1} + F_j\Phi_{i,j+1}^{n+1} + C\Phi_{i+1,j+1}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \Phi_{i,j}^n + g(x_i) \quad (5.18)$$

$$\text{Où } A = -\frac{\sigma_x^2}{2(\Delta x)^2}, B = -\frac{\sigma_r^2}{2(\Delta r)^2}, C = -\frac{\rho\sigma_x\sigma_r}{\Delta x\Delta x},$$

$$E_i = -\left( \frac{\mathcal{K}_x(x_\infty - x_i)}{\Delta x} - A + C \right), \quad \forall i \in \{1, \dots, M_1\}$$

$$F_j = -\left( \frac{\mathcal{K}_r(r_\infty - r_j)}{\Delta x} - B + C \right), \quad \forall j \in \{1, \dots, M_2\}$$

$$F_j = -\left( \frac{\mathcal{K}_r(r_\infty - r_j)}{\Delta x} - B + C \right), \quad \forall j \in \{1, \dots, M_2\},$$

$$D_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{\mathcal{K}_r(r_\infty - r_j)}{\Delta r} + \frac{\mathcal{K}_x(x_\infty - x_i)}{\Delta x} + \frac{\sigma_x^2}{(\Delta x)^2} + \frac{\sigma_r^2}{(\Delta r)^2} - \frac{\rho\sigma_x\sigma_r}{\Delta x\Delta r} - (f(x_i, r_j) - r_j - g(x_i)),$$

$$\forall i \in \{1, \dots, M_1\}, \forall j \in \{1, \dots, M_2\}$$

Par conséquent on obtient l'EDP sous une forme matricielle:

$$M\Phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \Phi^n + H, \quad \forall n \in \{0, \dots, N - 1\}$$

Où M est une matrice creuse carrée de dimension  $(M_1 - 1)(M_2 - 1) \times (M_1 - 1)(M_2 - 1)$  car nous sommes en 2D contenant les coefficients des vecteurs  $\Phi^{n+1}$ .

Pour la suite posons  $P = (M_1 - 1)(M_2 - 1) \times (M_1 - 1)(M_2 - 1)$ . On a:

$$\forall, \quad 1 \leq i \leq P, \quad M_{i,i} = D_{(i \bmod M_1), (i/M_1)} \quad (5.19)$$

$$\forall, \quad 2 \leq i \leq P, \quad M_{i,i-1} = A \quad (5.20)$$

$$\forall, \quad M_1 \leq i \leq P, \quad M_{i,i-(M_1-1)} = B \quad (5.21)$$

$$\forall, \quad 1 \leq i \leq P-1, \quad M_{i,i+1} = E_{(i \bmod M_1)} \quad (5.22)$$

$$\forall, \quad 1 \leq i \leq (M_1-2)(M_2-1), \quad M_{i,i+(M_1-1)} = F_{(i/M_1)} \quad (5.23)$$

$$\forall, \quad 1 \leq i \leq (M_1-2)(M_2-1)-1, \quad M_{i,i+M_1} = C \quad (5.24)$$

Où  $H$  est un vecteur colonne de dimension  $(M_1-1)(M_2-1)$  de la forme suivante:

$$H = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{M_1-1}) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{M_1-1}) \\ \vdots \\ \vdots \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{M_1-1}) \end{pmatrix}$$

Aussi  $\Phi^n = (\Phi_{i,j}^n)_{(1 \leq i \leq M_1-1, \quad 1 \leq j \leq M_2-1)}$  est un vecteur colonne de dimension



$(M_1 - 1)(M_2 - 1)$  ayant la forme suivante:

$$\Phi^n = \begin{pmatrix} \Phi_{1,1}^n \\ \Phi_{2,1}^n \\ \vdots \\ \Phi_{M_1-1,1}^n \\ \Phi_{1,2}^n \\ \vdots \\ \Phi_{M_1-1,2}^n \\ \Phi_{1,M_2-1}^n \\ \vdots \\ \Phi_{M_1-1,M_2-1}^n \end{pmatrix}$$

## 6 Implementation numérique par monte carlo aboutissant à la valeurs du t calcul du SCR

D'abord on calcule  $\phi(1, x, r) = \Phi(T - 1, x, r)$  solution de l'EDP ce qui nous permettra de calculer les autres valeurs et d'aboutir à la valeurs du SCR.

Ensuite on calcule la value at Risk  $VaR$  empirique  $\hat{VaR}_{0.995}(L)$  en les étapes suivantes:

Pour  $1 \leq i \leq M$

$$\begin{cases} r_1^{(i)} = r_0 e^{-\mathcal{K}_r} + r_\infty (1 - e^{-\mathcal{K}_r}) + \sqrt{\sigma_r^2 \frac{(1 - e^{-2\mathcal{K}_r})}{2\mathcal{K}_r}} Z_r^i \\ x_1^{(i)} = 0_0 e^{-\mathcal{K}_x} + x_\infty (1 - e^{-\mathcal{K}_x}) + \sqrt{\sigma_x^2 \frac{(1 - e^{-2\mathcal{K}_x})}{2\mathcal{K}_x}} \left( \frac{\rho_{x,A}}{1 - \rho_{A,r}^2} + \sqrt{\frac{1 - \rho_{A,r} - \rho_{x,r}^2}{1 - \rho_{A,r}^2}} Z_x^{(i)} \right) \\ r_A^{(i)} = \mu_A + \sigma_A (\rho_{A,r} Z_r^{(i)} + \sqrt{1 - \rho_{A,r}^2} Z_A^{(i)}) \end{cases}$$

$$(i) \quad F_1 = PM_0 g(x_0) \Delta t$$

$$(ii) \quad PM_1 = PM_0 g(x_0) \Delta t$$

$$(iii) \quad BE_1^{(i)} = PM_0 \Phi(1, x_1^{(i)}, r_1^{(i)})$$

$$(iv) \quad A_1^{(i)} = PM_1^{(i)} e^{\Delta t(f(x_0, r_0) - g(x_0))}$$

$$(v) \quad E_1 = A_1^{(i)} - BE_1^{(i)} - F_1$$

Enfin ont calcul le  $SCR_0$  qui est de la forme suivante:

$$SCR_0 = E_0 - L_{[0.5\%]}^{(N)} \quad (6.1)$$

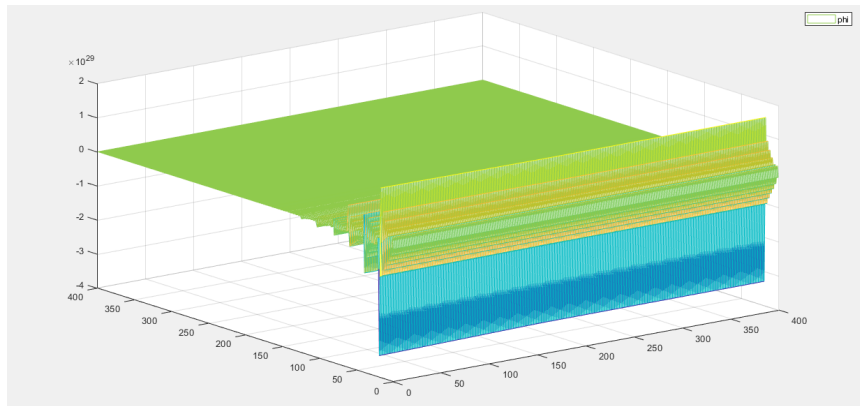
ce qui redevient

$$SCR_0 = E_0 - V_{@R_{0,5\%}}(e^{-r_0} E_1) \quad (6.2)$$

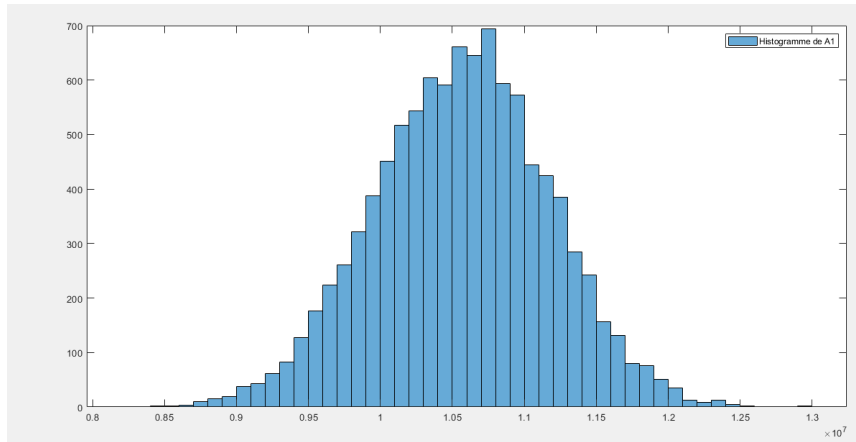
### 6.1 Résultats numériques à la date $t=0$

A0	10147920
Moyenne A1	1.0557e+07
Ecart type A1	6.0895e+05
PM0	36000000
E0	1.1247e+28
F1	6.8571e+05
PM1 (Provision Mathématiques)	1.0039e+05
Moyenne Best estimate	-5.6906e+35
Ecart type best estimate	3.4544e+36
VaRE1	-1.1839e+37
SCR0 (Solvency capital requiement)	-1.1671e+37
Taux de couverture en 0 (E0/SCR0)	-9.6367e-10

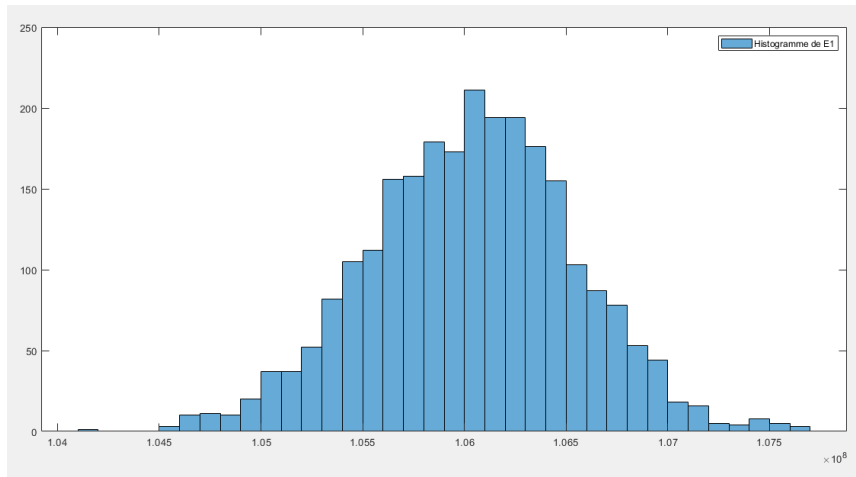
### 6.2 Graphique



(a) Courbe de  $\phi$  en 2D.



(a) Histogramme de A1.



(a) Histogramme de E1.

## 7 Conclusion

Les points abordés dans ce projet ouvrent les voies à autres piste de recherche intéressantes qui méritent d'être considérées. Après avoir fait la résolution numériques de l'EDP nous avons décrit comment calculer le Solvency Capital Requirement(SCR) dans le cadre de la réglementation Sovency II. Nous avons donné la description de taux de revalorisation, de taux de rachat ainsi la formule de Best Estimate  $BE(T,t)$ . Des amélioration possible pourraient concerner la résolution de l'EDP. Serait intéressant de voir autre méthode de calcul de SCR comme les méthodes paramétrique.

## Références

- [1] *Méthodes numérique d'edp dans le cadre d'évaluation d'engagements de contrats d'épargne*. Mémoire d'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de L'ISFA, page 91. Jacques Printemps
- [2] *D. Bauer, D. Bergmann, A. Reuss, Solvency II and Nested Simulations - a Least-Squares Monte Carlo Approach, Rapport Technique 2009-05, Université d'Ulm (2009)*. .
- [3] *Charles R. Nelson, Andrew F. Siegel, Journal of Business, 60(4), 473-489 (1987)*.
- [4] *Projet de Méthodes numériques et produits structurés en actuariat*. "Impact du rachat de contrats d'assurance avec participation aux bénéfices", Réalisé par Linda Chamakh et Hervé Azevedo Chaves.