Université Gustave Eiffel

UFR MATHÉMATIQUES

Master 2

Probabilités et Statistiques

Simulation et Copules

Problèmes de Couverture par Ensemble

Janvier 2021

Rédigé Par

Afo Komlan Crépin AKAKPO

&

Nango FOFANA

Année Universitaire : 2020 - 2021

Table des matières

1 Présentation et explication du Problème

Le Problème de Couverture par Ensemble (PCE) ou Set Cover Problem en anglais est l'un des **21 problèmes NP-complets de Karp**. Étant donné un ensemble $\mathcal{E}$ quelconque non vide et une famille de sous-ensemble de $\mathcal{E}$. Le Problème de Couverture par Ensemble consiste à chercher une couverture à $\mathcal{E}$ avec la plus petite sous-famille possible. Ce problème peut se ramener à un problème d'optimisation qui consistera à minimiser le nombre de sous ensemble qui couvre $\mathcal{E}$. Pour rendre le problème plus général, nous allons associer des poids à chaque sous-ensembles de $\mathcal{E}$ (chaque sous ensemble aura un poids qui sera choisi aléatoirement) et après trouver la couverture de poids minimum.

2 Modélisation du problème

Considérons un ensemble $\mathcal{E}$ de m éléments. Considérons une famille $\mathcal{S}$ contenant n sous ensembles de $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{S} = \{S_1, S_2, ...S_n\} \quad et \quad S_i \subseteq \mathcal{E} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Soit a_i le vecteur d'incidence de S_i : $a_{ik} := 1$ si $k \in S_i$.

Notons C_i le poids ou le coût de chaque sous ensemble S_i.
Considérons un entier J ; soit S_{ij}, j=1,..,J un recouvrement de $\mathcal{E}$ tel que

$$\mathcal{E} = \bigcup_{j=1}^{J} S_{ij}. \qquad \forall \ \ i = 1, ..., n$$

- Variables de décisions

$$x_i := \begin{cases} \ \ 1 \quad si \ \ S_i \ \ est \ sélectionné \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad sinon \end{cases}$$

- Fonction objective

$$\min \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$$

- Contraintes

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i \geq 1 \qquad \forall \ k = 1, ..., m$$

$x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\ i = 1, ..., n$

Nous obtenons le programme linéaire suivant :

$$PCE = \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \\ \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i \geq 1 \qquad \forall\ k = 1, ..., m \\ \\ x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\ i = 1, ..., n \end{cases}$$

3 Détermination de la fonction H

La fonction H est par définition :

$$H(C) := \sum_{k \in J} x_k C_k,$$

4 Résultats obtenus

Pour notre problème nous avons utiliser 13 sous ensembles (n=13) d'un ensemble de 13 éléments (m=13). Le poids de chaque sous ensemble est définit aléatoirement et compris entre 10 et 20. Afin d'obtenir nos résultats nous avons tout d'abord utilisé la librairie "sets" pour générer les sous ensembles.

Ensuite la construction de la matrice des sous ensembles formé des valeurs 0 et 1. En effet si un élément de l'ensemble est choisi pour former le sous ensemble alors cet élément est représenté par 1 et 0 sinon. Ainsi nous obtenons une matrice carrée d'ordre 13 représentée ci dessous.

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	s13
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
4	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
6	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
7	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
8	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
9	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
11	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
12	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
13	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1

Pour la fonction transition nous avons tiré aléatoirement 2 sous ensembles que nous avons permuté. En utilisant les algorithmes de recuit simulé et de metropolis, nous obtenons le poids minimal de notre ensemble de couverture. Puisque les poids des sous ensembles sont aléatoires, le poids minimal aussi l'est. Cet poids minimal dépend de l'exécution du programme.

Pour notre simulation nous avons obtenu les valeurs suivantes :

Méthode de recuit simulé : $H_{min} = 55$

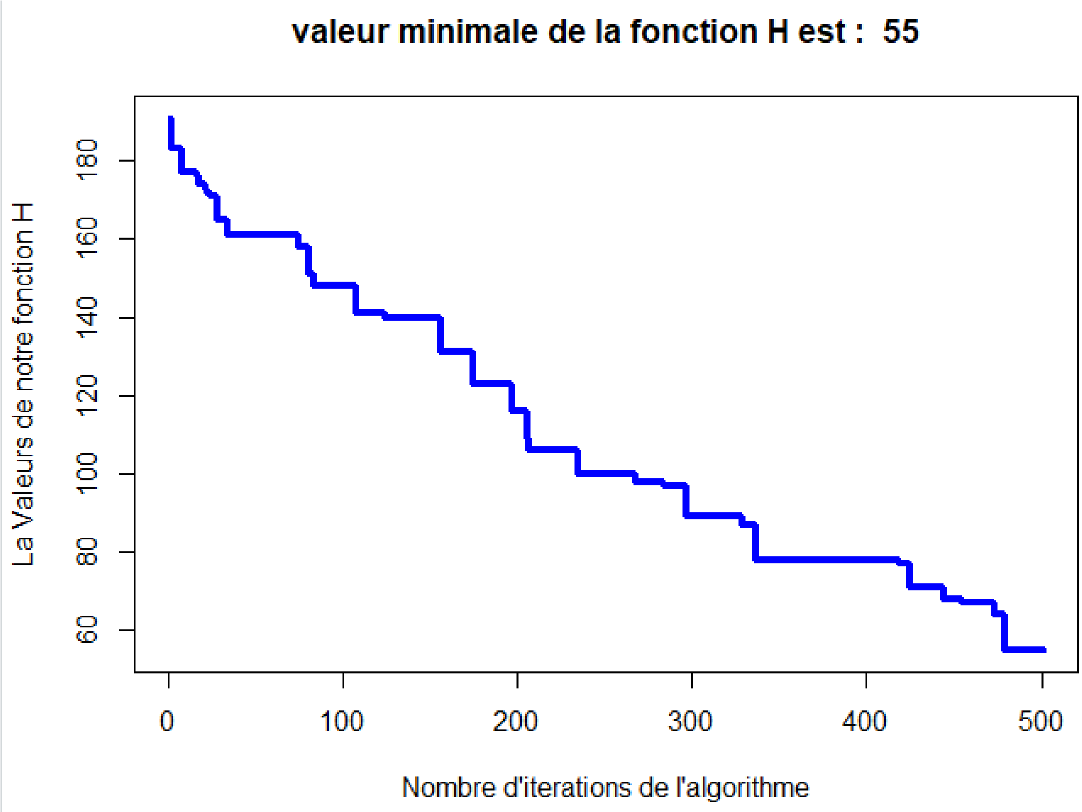

figure 1 : Méthode de recuit simulé

Méthode de Metropolis : $H_{min} = 72$

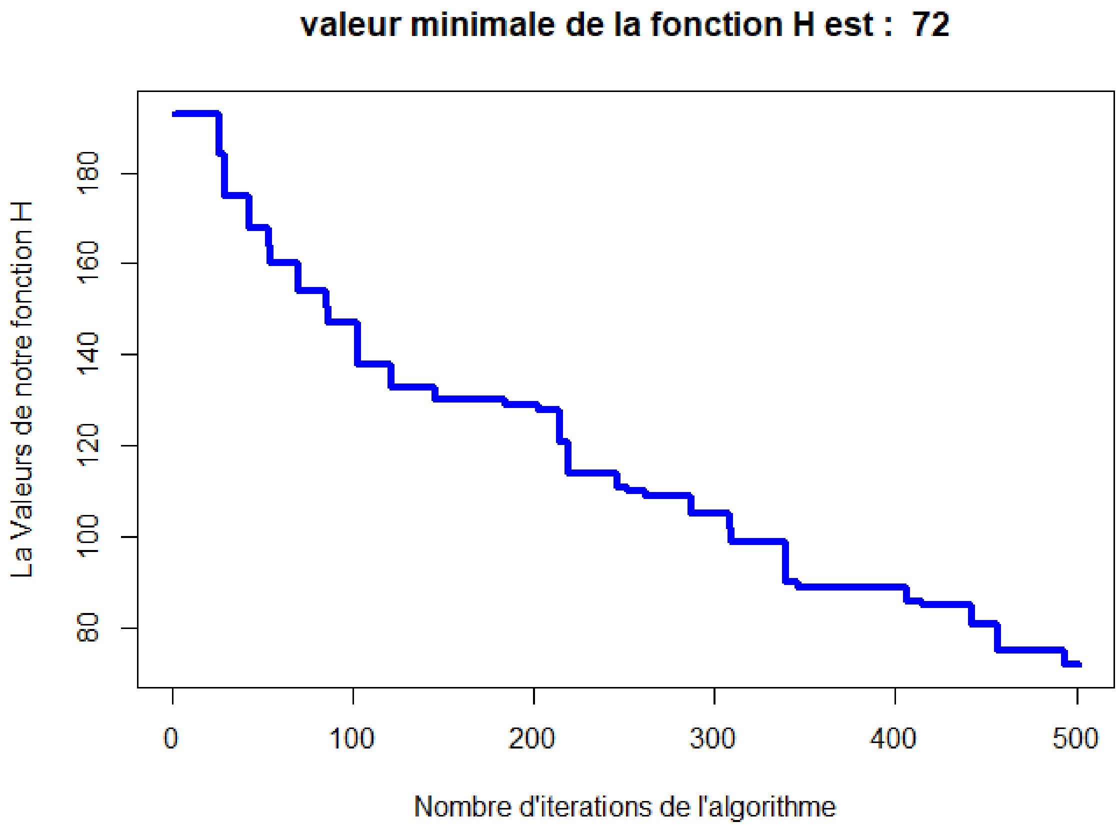

figure 2 : Méthode de Metropolis