Teoria dos Grafos

Edson Prestes

Teoria dos Grafos

Referências

- P. O. Boaventura Netto, "Grafos: Teoria, Modelos e Algoritmos", São Paulo, E. Blucher 2001;
- R. J. Trudeau, "Introduction to Graph Theory", New York, Dover Publications, 1993;
- Kaufmann, Arnold. "Exercices de combinatorique avec solutions". Paris: Dunod, 1969-1972 3v.
- Harary, Frank. "Graph theory". Reading, Mass.: Addison-Wesley, c1969. 274 p. : il.
- West, Douglas B.. "Introduction to graph theory". 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, c2001. 588 p.

Teoria dos Grafos

Introdução

- A teoria dos Grafos surgiu com os trabalhos de L. Euler, G. Kirchhoff e A. Cayley.
- Esta teoria tem sido utilizada largamente em diferentes áreas da biologia, química e na matemática aplicada.
- O problema das pontes de Königsberg é o primeiro e mais famoso problema em teoria dos grafos resolvido por Euler em 1736.

Teoria dos Grafos

Introdução

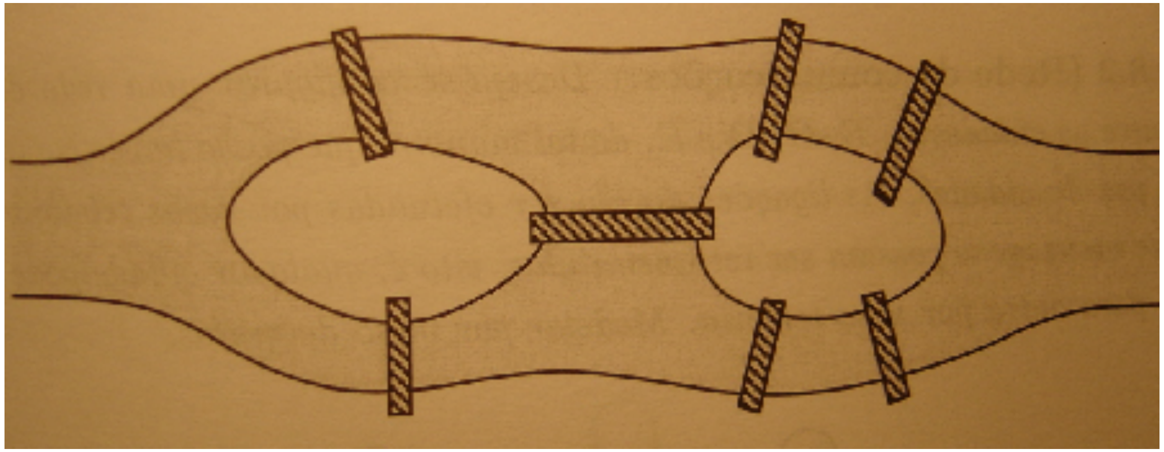
O problema das pontes de Königsberg

- **Na cidade de Königsberg existiam sete pontes que cruzavam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio.**

- **O problema consiste em determinar se é possível ou não fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma única vez.**

Teoria dos Grafos

Introdução

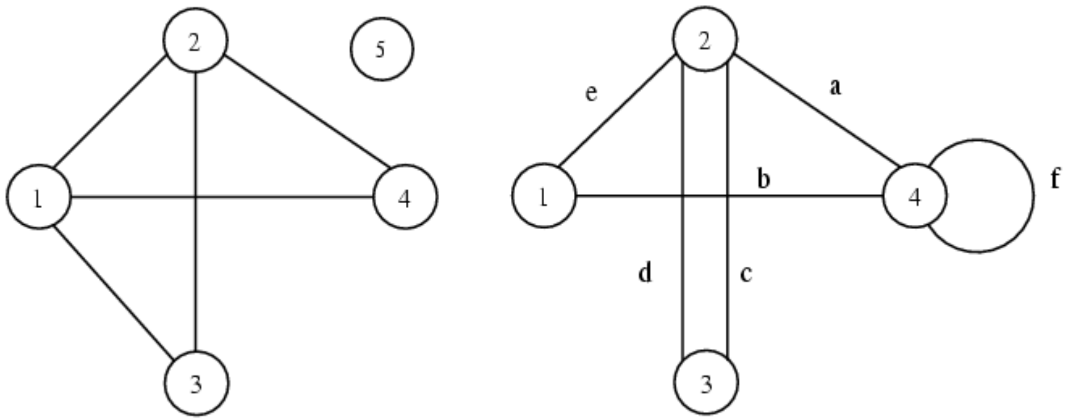


pontes de Königsberg

Teoria dos Grafos

Introdução

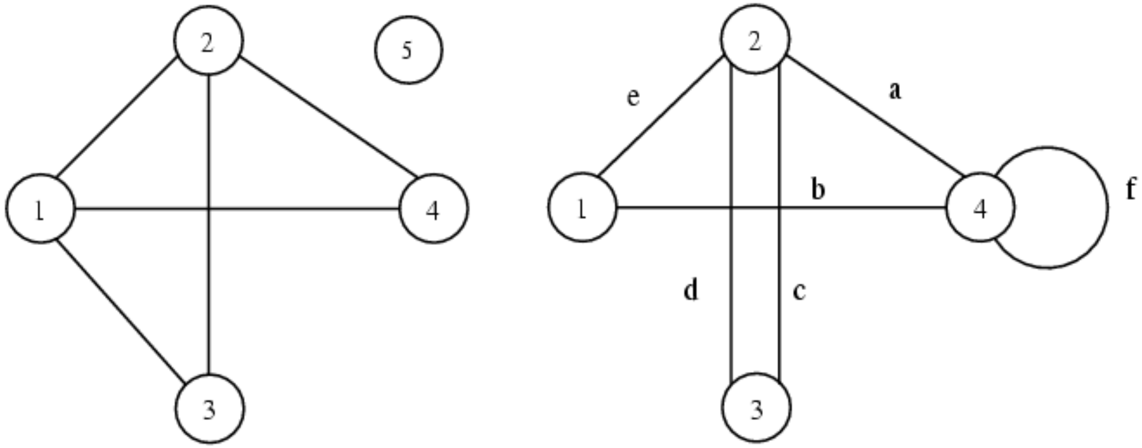
- **Um grafo G consiste de um conjunto finito e não vazio de n nós, denotado por, V(G) e m arestas, denotado por, A(G).**
- **O termo grafo foi criado pelo químico E. Frankland e adotado em 1884. Ele vem da contração de *notação gráfica*.**
- **Cada aresta corresponde a um par não ordenado de nós.**



Teoria dos Grafos

Introdução

- Os nós constituintes de uma aresta podem ser diferentes ou não.
- Se não forem diferentes então a aresta forma um laço.



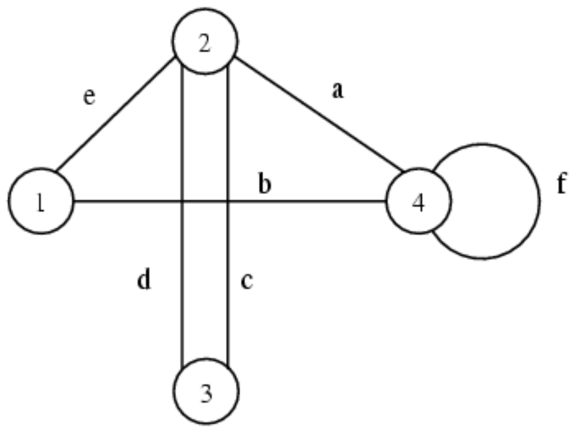
Teoria dos Grafos

Introdução

- **Harary define um *multigrafo* como aquele grafo que possui mais de uma aresta conectando dois vértices, mas que *não possui loops*.**

- **Se o grafo possui loop e múltiplas linhas conectando dois vértices então ele é chamado *pseudografo*.**

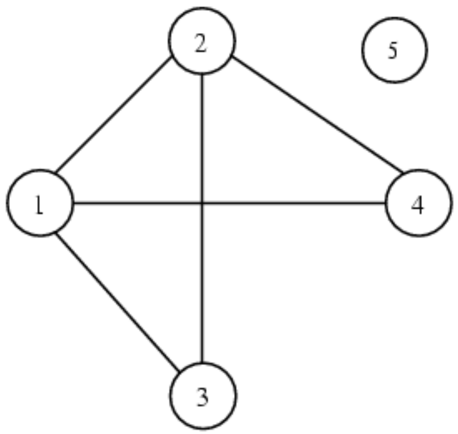
- **Em multigrafos/pseudografos, convém rotular as arestas para distingui-las entre si, devido a multiplicidade de conexões entre os vértices.**



Teoria dos Grafos

Introdução

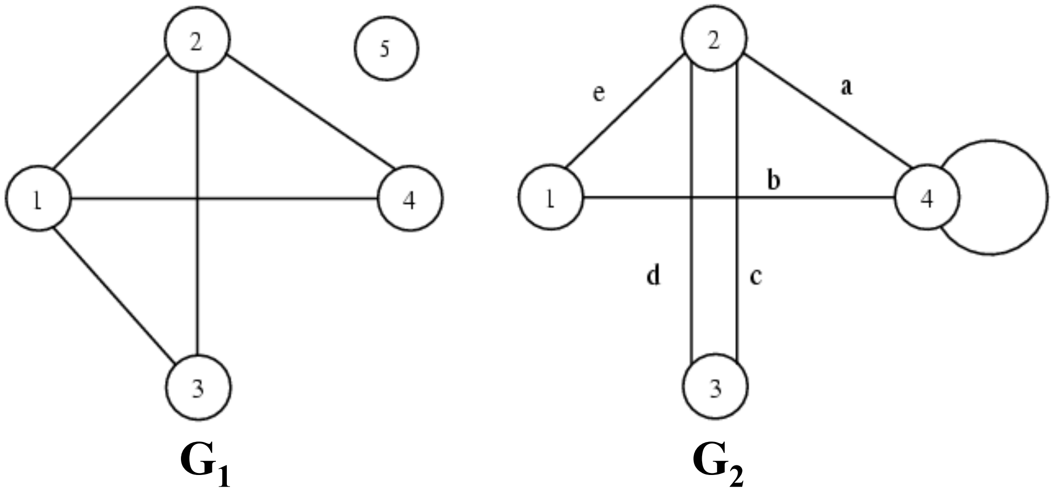
- Dizemos que uma aresta é *incidente* aos nós aos quais está associada.
- *Arestas incidentes* em um mesmo nó são chamadas arestas adjacentes.
- *Nós incidentes* em uma mesma aresta são chamados nós adjacentes.
- Um nó pode estar *isolado* dos demais, caso ele não esteja ligado através de uma aresta aos restantes.



Teoria dos Grafos

Introdução

Dados os grafos abaixo



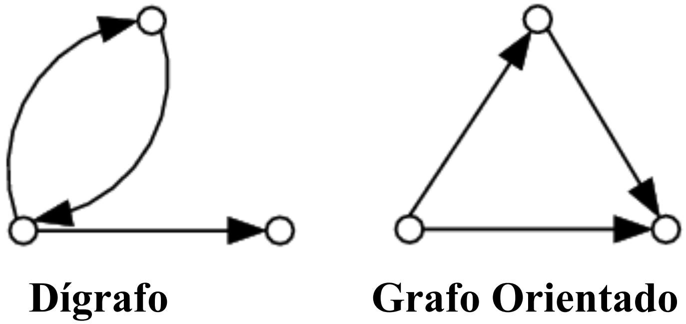
- **O grafo G_1 é descrito por $V(G_1)=\{1,2,3,4,5\}$ e $A(G_1)=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$.**
- **O grafo G_2 é descrito por $V(G_2)=\{1,2,3,4\}$ e $A(G_1)=\{a,b,c,d,e,f\}$.**

Teoria dos Grafos

Introdução

- **Um grafo dirigido, ou *dígrafo*, é um grafo cujas arestas são *pares ordenados,* comumente chamados de arcos ou arestas direcionadas.**

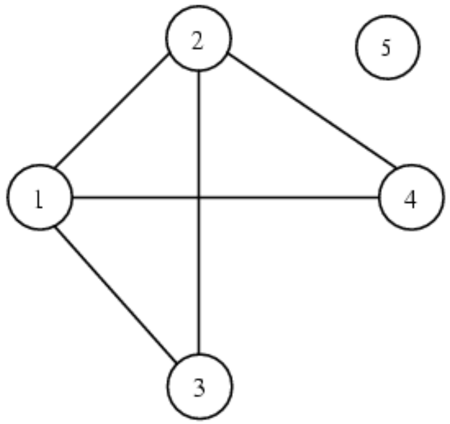
- **Os dígrafos diferem dos grafos orientados por possuírem pares simétricos de arestas direcionadas.**

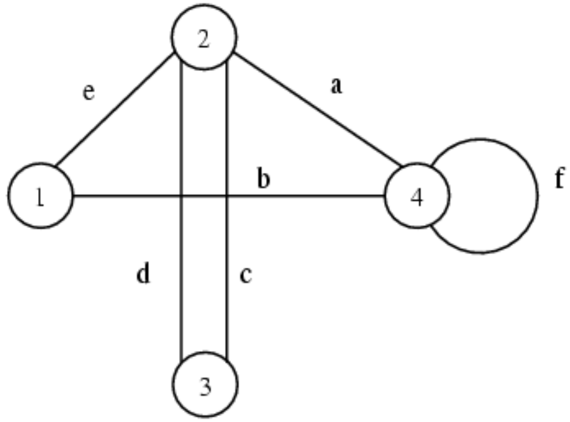


Teoria dos Grafos

Introdução

- **O grau de um nó corresponde ao número de arestas incidentes a ele.**
- **Cada laço conta como duas arestas.**
- **O menor grau presente em um grafo G é denotado por** $\delta(G)$
- **O maior grau presente em um grafo G é denotado por** $\Delta(G)$





Teoria dos Grafos

Introdução

A soma total dos graus de todos os vértices de um grafo é sempre par

Prova por indução no número de arestas

B.I. : Suponha um grafo sem arcos. Todos os seus vértices têm grau zero e portanto a soma geral dos graus dos vértices é zero (par)

H.I. : Suponha que para todo grafo de n arestas a soma dos graus de todos os vértices é par.

P.I. : Suponha um grafo G de n+1 arestas. Seja G' um grafo igual a G exceto com menos uma aresta. Portanto G' tem n arestas e pela H.I. tem como soma total dos graus de seus vértices um número par.

A inclusão da aresta removida faz com a soma dos graus seja incrementada de 2 (é incrementado de 1 o grau dos vértices constituintes da aresta), portanto a soma dos graus dos vértices de G é um número par.

Teoria dos Grafos

Introdução

Em um grafo qualquer, o número de vértices com grau ímpar tem que ser par

Prova por indução no número de arestas

B. I. Suponha um grafo sem arestas, neste caso temos a soma dos graus de todos os vértices sendo par.

Como a quantidade de vértices com grau impar é igual a zero. Então temos uma quantidade par de vértices de grau ímpar.

H. I. Suponha um grafo com n arestas e um número par de vértices com grau impar

Teoria dos Grafos

Introdução

P. I. Seja G um grafo com n+1 arestas. Seja G', o grafo resultante da retirada de uma aresta (v,w). Pela H.I. G' tem um número par de vértices com grau impar

Vamos analisar o grafo G, baseado nas seguintes situações dos vértices v e w em G':

- ✓ **v tem grau impar e w tem grau impar**
- ✓ **v tem grau impar e w tem grau par**
- ✓ **v tem grau par e w tem grau par**

A adição da aresta (v,w) em G' pode resultar nas seguintes situações:

• ***v tem grau impar e w tem grau impar em G'*.**

A adição da aresta (v,w) faz com que v passe a ter grau par assim como w. Como a quantidade de vértices de grau impar é par e como transformamos 2 vértices de grau impar em vértices de grau par, G tem uma quantidade par de vértices de grau impar.

Teoria dos Grafos

Introdução

- ***v tem grau impar e w tem grau par em G'.***

A adição da aresta (v,w) faz com que v passe a ter grau par e w passe a ter grau impar. Logo, G tem uma quantidade par de vértices com grau ímpar.

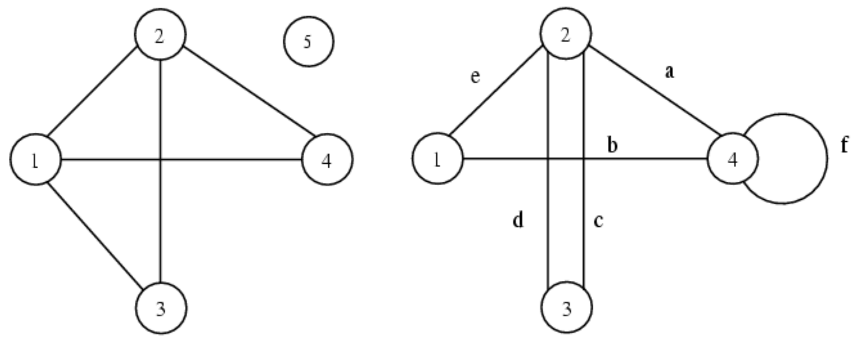
- ***v tem grau par e w tem grau par em G'.***

A adição da aresta (v,w) faz com que tanto v quanto w passem a ter grau impar. Como tínhamos em G' uma quantidade par de vértices de grau impar, e como aumentou em 2 esta quantidade, temos que a quantidade de vértices de grau ímpar em G é par.

Teoria dos Grafos

Introdução

Um passeio entre os nós i e j é uma seqüência alternada de nós e arestas que começa no nó i e termina no nó j.



G_1 G_2

Um exemplo de passeio entre os nós 1 e 4 do grafo G_1 é

(1,(1,3),3,(2,3),2,(1,2),1,(1,4),4).

Poderíamos pensar que apenas a ordem dos nós é importante. Entretanto, podemos ter passeios diferentes com a mesma seqüência de nós.

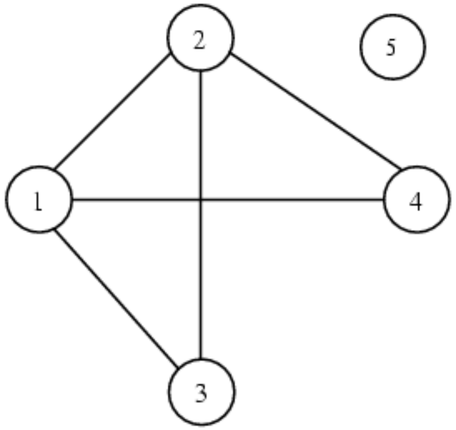
Por exemplo, no grafo G_2 temos os seguintes passeios entre os nós 3 e 4:

(3,d,2,a,4) , (3,c,2,a,4)

Teoria dos Grafos

Introdução

Um caminho é um passeio que não contém nós repetidos. Entre os nós 1 e 4 do grafo G_1 temos os seguintes caminhos (1,4),(1,2,4),(1,3,2,4).



G_1

O *comprimento* de um caminho entre os vértices u e v é a quantidade de arestas presentes no caminho.

Se existirem mais de um caminho de u a v, então o comprimento do caminho de u a v será igual ao menor comprimento dentre todos os caminhos de u a v.

Teoria dos Grafos

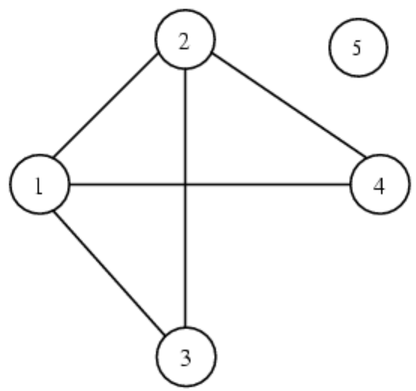
Introdução

Um *circuito* é um passeio fechado, ou seja, o nó de partida é igual ao nó de chegada.

Um *ciclo* é um caminho fechado, isto é , um passeio que contém exatamente dois nós iguais: o primeiro e o último.

Ciclos de comprimento 1 são laços(*loops)*.

Uma característica interessante de um ciclo é que o número de arestas pertencentes a ele é igual a número de vértices.



Teoria dos Grafos

Introdução - Subgrafo

O grafo H é um *subgrafo* de G, denotado por

$$H \subseteq G$$

se $V(H) \subseteq V(G)$ **e** $A(H) \subseteq A(G)$

Se $H \neq G$, **temos** $H \subset G$ **, ou seja, H é um subgrafo próprio de G.**

Um subgrafo gerador de G é um subgrafo H, com V(H)=V(G).