1

Verificar si el conjunto:

$$V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Cumple con los axiomas para constituir un espacio vectorial con las operaciones:

Suma Vectorial: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicación por escalar: $k \cdot (a, b) = (ka, kb)$

A1) Asociatividad respecto a la suma

$(a;b) + (c;d) = (a+c\,;\,b+d)$

$u = (a\,;\,b)$ $\qquad (u+v)+w \overset{?}{=} u+(v+w)$
$v = (c\,;\,d)$
$w = (e\,;\,f)$

$u+v = (a+c\,;\,b+d)$ $\qquad (u+v)+w = (\overset{\frown}{a+c}+e\,;\,\overset{\frown}{b+d}+f)$

$v+w = (c+e\,;\,d+f)$ $\qquad u+(v+w) = (a+\overset{\frown}{c+e}\,;\,b+\overset{\frown}{d+f})$

$(u+v)+w = u+(v+w)$ ✓

A2) Existencia del elemento neutro

$0 = (0_1\,;\,0_2)$ $\qquad u = (a;b)$

$(a;b) + (0_1;0_2) = (a+0_1\,;\,b+0_2) = (a\,;\,b)$

Si $0_1 = 0_2 = 0$ se cumple
y se cumple para cualquier vector $\therefore$ es unico

$(0_1\,;\,0_2) = (0\,;\,0)$ ✓

A3) Existencia del inverso aditivo

para un vector generico $u = (a;b)$ debe ser posible encontrar $\bar{u} = (\bar{a};\bar{b})$ tal que

$u + \bar{u} = 0 \Rightarrow (a+\bar{a}\,;\,b+\bar{b}) = (0_1\,;\,0_2)$

$= (a+\bar{a}\,;\,b+\bar{b}) = (0\,;\,0)$

Si $a+\bar{a} = 0 \Rightarrow \bar{a} = -a$ analogamente $\bar{b} = -b$

para cada vector se puede encontrar un elemento unico que hace que su suma vectorial sea igual al vector nulo

A4) Conmutatividad respecto a la suma

$u = (a;b)$ $\qquad v = (c;d)$ $\qquad u+v \overset{?}{=} v+u$

$u+v = (a+c\,;\,b+d)$

$v+u = (c+a\,;\,d+b)$ $\qquad a+c = c+a$ y $b+d = d+b$

✓