Ejemplos de Estructuras de Espacios vectoriales

Repaso

Ingredientes: V no vacío

$\mathbb{K}$ cuerpo $(\mathbb{R} ; \mathbb{C})$

$+ : V \times V \to V \quad (u;v) \mapsto u+v$

$\bullet : \mathbb{K} \times V \to V \quad (\alpha;u) \mapsto \alpha . u$

las 4 ~~estructuras~~ elementos son necesarios para tener la estructura de $\mathbb{K}$ - espacio vectorial en V

- Terminología

- Llamaremos vectores a los elementos de V
- Llamaremos escalares a los elementos de $\mathbb{K}$
- Llamaremos suma de vectores a la operación "+"
- Llamaremos producto por escalar a la operación "."

$V = M_{m \times m}(\mathbb{C})$

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} ; a_{ij} \in \mathbb{C}$$

$$B \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

Dadas $A, B \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$

$\alpha \in \mathbb{C}$

$$(\Delta) \quad (A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \qquad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m \end{array}$$

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha . A_{ij}$$

Afirmación: $M_{m \times m}(\mathbb{C})$ con las operaciones (Δ), adquiere estructura de $\mathbb{K}$ - espacio vectorial

Una vez confirmada la estructura vectorial podemos llamar vectores a todos los elementos de V, y aplicar todas las propiedades de vectores ya conocidas

Propiedades generales en Esp. vect.

- Ley de corte $A+B=A+C$

$$B=C$$

- El elemento neutro es único

Sean e y $\hat{e}$ dos neutros $\quad e=e+\hat{e}=\hat{e}$

- Dado u existe $\tilde{u}$; $u+\tilde{u}=e$ (el elemento inverso aditivo también es unico)

Supongamos que $\hat{u}$ es otro opuesto de u

$$u+\hat{u}=e$$

$$u+\tilde{u}=u+\hat{u}=e$$

$$\tilde{u}=\hat{u}$$

← Aplicando la ley de corte vemos que el elemento opuesto aditivo es único

- Dado $u \in V$, sea $-1 \in \mathbb{K} \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$

$-1.u$ es el opuesto de u

$$\begin{aligned} u+(-1.u) &= 1_K.u+(-1_K.u) \\ &= \left(1_K+(-1_K)\right).u \\ &= 0_K.u \overset{?}{=} e \end{aligned}$$

← Leer notas para entender