

# Sub espacios vectoriales y afines

## • Sub Esp. vect

Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial

Un subconjunto  $F \subseteq V$  significa que esta contenido en  $V$  y hasta podría llegar a ser de igual tamaño

es un sub espacio vectorial si  $F$  es  $K$ -espacio vectorial con las operaciones heredadas de  $V$

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V$$

• Teorema Sea  $V$   $K$ -espacio vectorial,  $F \subseteq V$  es un sub esp. vect si y solo si

a)  $0_V \in F$

b)  $\forall \alpha, \beta \in K$  y  $u, v \in F$   $\alpha u + \beta v \in F$

Ejemplo:  $\mathbb{R}^3$  con estructura usual

$$F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y+z=0\}$$

¿Es  $F \subset \mathbb{R}^3$  sub esp. vectorial?

a)  $0_{\mathbb{R}^3} \in F ? \quad 0_{\mathbb{R}^3} = (0; 0; 0) \quad 0+0+0=0 \quad \checkmark$

b)  $u = (u_1; u_2; u_3) \quad v = (v_1; v_2; v_3)$   
 $u_1+u_2+u_3=0$   
 $v_1+v_2+v_3=0$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$   
 $\alpha u + \beta v \in F ?$

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v &= (\alpha u_1 + \beta v_1; \alpha u_2 + \beta v_2; \alpha u_3 + \beta v_3) \\ &= \alpha(u_1 + u_2 + u_3) + \beta(v_1 + v_2 + v_3) \stackrel{?}{=} 0 \\ &\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \\ &0 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

### Ejemplo 2:

$$\mathbb{R}^3 \quad F = \{ 0_{\mathbb{R}^3}; e_1 \} \subset \mathbb{R}^3 \quad e_1 = (1; 0; 0)$$

1)  $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ ? - Si ✓

2) Notemos que  $e_1 \in F$  pero  $2e_1 \notin F$   
 $\therefore$  No es un sub espacio vectorial

En otros textos se puede encontrar que las consideraciones para ver si es un sub espacio vectorial son 3

1)  $0_v \in F$

2)  $F$  es cerrado p/ la suma

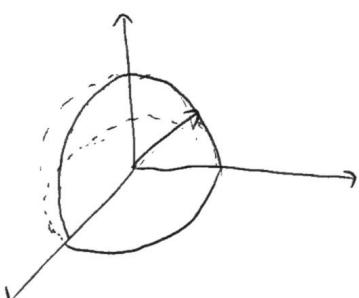
3)  $F$  es cerrado p/ producto por escalar

### Ejemplo 3:

$$F = \{ (x; y; z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

$$\text{si } V = \left( \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right) \in F$$

$4 \cdot V = (1; 1; 1)$  sigue estando en  $F$ ?



$$1^2 + 1^2 + 1^2 \leq 1 \quad X$$

$$3 \leq 1$$

Como no es cerrado p/ producto por escalar

No es un sub espacio vect.

Ejemplo 4:

$V = K[t]$  es  $K$ -espacio vectorial

Fijamos  $n \in \mathbb{N}$ .

$$K_n[t] \subset K[t]$$

¿Es un sub esp. vect.?

1)  $0_V \in K_n[t]$  ✓

2) ¿Es cerrado para la suma? - Si al sumar polinomios el polinomio resultante siempre sera menor o igual a  $n$

3) ¿Es cerrado p/ la mult. por escalares? - Si, al multiplicar un polinomio por un escalar, el grado se sigue manteniendo ej  $2x^3 \cdot 3 \cdot (2x^3) = 6x^3$

$$0_V = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots$$

Grado del polinomio nulo =  $-\infty$

Decreto de la Cátedra

Así siempre podemos decir que el polinomio nulo  $\in$  a cualquier  $K_n[t]$

Ejercicio

Intersección de sub espacios vectoriales es sub espacio vectorial

Ver las notas para ver mejor explicado; Basicamente se toma cualquier cantidad de sub espacios dentro de un espacio vectorial; luego de intersectar todo eso, el resultado de esa intersección vuelve a ser un sub esp. vect.

Suma de Sub Espacios

$V$  esp. vect

$U, W \subseteq V$  subconjuntos

$$U+W := \{ u+w ; u \in U \text{ y } w \in W \}$$

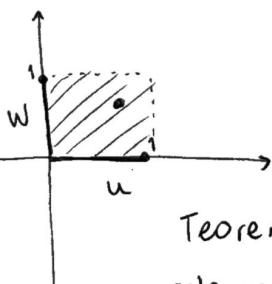
Ejemplo:

$\mathbb{R}^2$

$$U = \{ (x; 0) ; 0 \leq x \leq 1 \}$$

$$W = \{ (0; y) ; 0 \leq y \leq 1 \}$$

$$U+W = ?$$



Teorema: Si  $U$  y  $W \subseteq V$  son sub esp vectoriales entonces  $U+W$  es tambien un sub esp vect.