

Sub espacios vectoriales , afines

• Sub Esp. vect

Sea V un K -espacio vectorial

Un subconjunto $F \subseteq V$ ^{significa que esta contenido en V y hasta podría llegar a ser de igual tamaño}

es un sub espacio vectorial si F es K -espacio vectorial con las operaciones heredadas de V

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V$$

• Teorema Sea V K -espacio vectorial , $F \subseteq V$ es un sub esp vect si y solo si

a) $0_V \in F$

b) $\forall \alpha, \beta \in K$ y $u, v \in F$ $\alpha u + \beta v \in F$

Ejemplo: \mathbb{R}^3 con estructura usual

$$F = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y+z=0 \}$$

¿Es $F \subset \mathbb{R}^3$ sub esp vectorial?

a) $0_{\mathbb{R}^3} \in F$? $0_{\mathbb{R}^3} = (0; 0; 0)$ $0+0+0=0$ ✓

b) $u = (u_1; u_2; u_3)$ $v = (v_1; v_2; v_3)$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\alpha u + \beta v \in F ?$$

$$\alpha u + \beta v = (\alpha u_1 + \beta v_1 ; \alpha u_2 + \beta v_2 ; \alpha u_3 + \beta v_3)$$

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \alpha u_2 + \beta v_2 + \alpha u_3 + \beta v_3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\alpha (u_1 + u_2 + u_3) + \beta (v_1 + v_2 + v_3) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Ejemplo 2:

$$\mathbb{R}^3 \quad F = \{ 0_{\mathbb{R}^3}; e_1 \} \subset \mathbb{R}^3 \quad e_1 = (1; 0; 0)$$

1) $0_{\mathbb{R}^3} \in F$? - Si \checkmark

2) Notemos que $e_1 \in F$ pero $2e_1 \notin F$

\therefore No es un sub espacio vectorial

En otros textos se puede encontrar que las consideraciones para ver si es un sub espacio vectorial sean 3

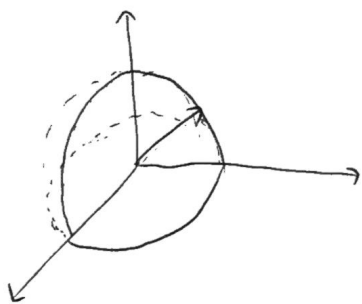
1) $0_v \in F$

2) F es cerrado p/ la suma

3) F es cerrado p/ producto por escalar

Ejemplo 3:

$$F = \{ (x; y; z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$



$$\text{si } v = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right) \in F$$

$$4 \cdot v = (1; 1; 1) \text{ sigue estando en } F?$$

$$1^2 + 1^2 + 1^2 \leq 1 \quad \times$$

$$3 \leq 1$$

Como no es cerrado p/ producto por escalar

No es un sub espacio vect.

Ejemplo 4:

2 Teoría

(2)

$V = K[t]$ es K -espacio vectorial

Fijamos $n \in \mathbb{N}$.

$$K_n[t] \subset K[t]$$

¿Es un sub esp. vect.?

$$0_V = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots$$

Grado del polinomio nulo $= -\infty$

Decreto de la Cátedra

Así siempre podemos decir que el polinomio nulo \in a cualquier $K_n[t]$

1) $0_V \in K_n[t]$ ✓

2) ¿Es cerrado para la suma? - Si al sumar polinomios el polinomio resultante siempre será menor o igual a n

3) ¿Es cerrado p/ la mult. por escalar? - Si, al multiplicar un polinomio por un escalar, el grado se sigue manteniendo ej $2x^3 \cdot 3 \cdot (2x^3) = 6x^3$

Ejercicio

Intersección de sub espacios vectoriales es sub espacio vectorial
Ver las notas para ver mejor explicado; Básicamente se toma cualquier cantidad de sub espacios dentro de un espacio vectorial; luego se intersecciona todo eso, el resultado de esa intersección vuelve a ser un sub esp. vect.

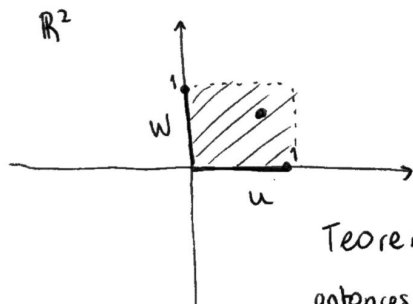
Suma de Sub Espacios

V esp vect

$U, W \subseteq V$ subconjuntos

$$U + W := \{u + w \mid u \in U \text{ y } w \in W\}$$

Ejemplo:



$$U = \{(x; 0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

$$W = \{(0; y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$$

$$U + W = ?$$

Teorema: Si U y $W \subseteq V$ son sub esp vectoriales entonces $U + W$ es también un sub esp vect.