① Verificar si el conjunto:

$$V = \{(x, y) \ \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Cumple con los axiomas para constituir un espacio vectorial con las operaciones:

Suma Vectorial: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicación por escalar: $k \cdot (a, b) = (ka, kb)$

A1) Asociatividad respecto a la suma $\forall u, v, w \in V$

$(a;b) + (c;d) = (a+c ; b+d)$

$u = (a ; b)$ $\qquad (u+v)+w \stackrel{?}{=} u+(v+w)$
$v = (c ; d)$
$w = (e ; f)$

$u+v = (a+c; b+d) \qquad (u+v)+w = (\overbrace{a+c}+e ; \overbrace{b+d}+f)$

$v+w = (c+e; d+f) \qquad u+(v+w) = (a+\overbrace{c+e} ; b+\overbrace{d+f})$

$(u+v)+w = u+(v+w)$ ✓

A2) Existencia del elemento neutro $\forall u \in V \ \exists \ 0 \in V$

$0 = (0_1 ; 0_2) \qquad u = (a; b)$

$(a;b) + (0_1;0_2) = (a+0_1 ; b+0_2) = (a;b)$

Si $0_1 = 0_2 = 0$ se cumple
y se cumple para cualquier vector $\therefore$ es unico

$(0_1 ; 0_2) = (0;0)$ ✓

A3) Existencia del inverso aditivo $\forall u \in V \ \exists \ (-u) \in V$

para un vector generico $u = (a;b)$ debe ser posible encontrar $\bar{u} = (\bar{a};\bar{b})$ tal que

$u + \bar{u} = 0 \Rightarrow (a+\bar{a} ; b+\bar{b}) = (0_1 ; 0_2)$

$= (a+\bar{a} ; b+\bar{b}) = (0;0)$

Si $a+\bar{a} = 0 \Rightarrow \bar{a} = -a$ analogamente $\bar{b} = -b$

para cada vector se puede encontrar un elemento unico que hace que su suma vectorial sea igual al vector nulo

A4) Conmutatividad respecto a la suma $\forall u, v \in V$

$u = (a;b) \qquad v = (c;d) \qquad u+v \stackrel{?}{=} v+u$

$u+v = (a+c ; b+d)$

$v+u = (c+a ; d+b)$ $\qquad a+c = c+a$ y $b+d = d+b$

✓

$$K.(a;b) = (K.a\,;\,K.b)$$

M1) $K(u+v) \stackrel{?}{=} Ku+Kv \rightarrow \forall k \in K \wedge \forall u,v \in V$

$u=(a;b) \qquad v=(c;d)$

$u+v=(a+c;b+d) \qquad K(u+v) = K(a+c\,;\,b+d)$

$K(u+v) = K(a+c)\,;\,K(b+d) = \boxed{Ka+Kc\,;\,Kb+Kd}$

$Ku = K(a;b) = Ka\,;\,Kb \qquad Kv = K(c;d) = Kc\,;\,Kd$

$Ku+Kv = \boxed{Ka+Kc\,;\,Kb+Kd}$ ✓

M2) $\alpha;\beta \in K \quad (\alpha+\beta).u = \alpha u+\beta u \qquad u=(a;b)$

$(\alpha+\beta).(a;b) = (\alpha+\beta).a\,;\,(\alpha+\beta).b = (\alpha a+\beta a\,;\,\alpha b+\beta b)$

$\alpha u = \alpha.(a;b) = (\alpha a\,;\,\alpha b)$

$\beta u = \beta(a;b) = (\beta a\,;\,\beta b)$

$\alpha u+\beta u = (\alpha a+\beta a\,;\,\alpha b+\beta b)$ ✓

M3) Asociatividad respecto a la multiplicación

$\forall \alpha;\beta \in K \wedge \forall u \in V \qquad (\alpha\beta)u \stackrel{?}{=} \alpha(\beta u)$

$\alpha\beta u = \alpha\beta(a;b) = (\alpha\beta a\,;\,\alpha\beta b)$

$\beta u = \beta(a;b) = (\beta a;\beta b) \qquad \alpha(\beta u) = (\alpha\beta a\,;\,\alpha\beta b)$ ✓

M4) Existencia de identidad multiplicativo

$\exists\, 1 \in K\,;\,\forall u \in V \,/\, \bar{1}u = u$

$\bar{1}(a;b) = (\bar{1}.a\,;\,\bar{1}b) = (a;b)$

$\bar{1}.a = a \rightarrow \bar{1} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = 1 \qquad \bar{1} = 1$

El conjunto $\{(x;y) \mid x;y \in \mathbb{R}\}$

con suma $(a;b)+(c;d) = (a+c\,;\,b+d)$ y

Multiplicación por escalar $K.(a;b) = (Ka;Kb)$

Cumple con los 8 axiomas $\therefore$ Es un Espacio Vectorial sobre el cuerpo de los reales con las operaciones anteriormente definidas