Espacios vectoriales

Propiedades de s

1) $u + v = v + u$

2) $u + (v + w) = (u + v) + w$

3) Existe $e \in V$; $u + e = u \quad \forall u \in V$

4) Dado $u \in V$, existe $\tilde{u} \in V$; $u + \tilde{u} = e$

Propiedades de m

5) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v$

6) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$

7) $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$

8) El $1_K \in \mathbb{K}$ satisface
$1_K \cdot u = u \quad \forall u \in V$

Observaciones importantes

* V es un conjunto no vacío (puede tener cualquier cosa adentro)
* K es el cuerpo ($\mathbb{R}$ reales ó $\mathbb{C}$ complejos); el cuerpo ya tiene una forma de sumar y multiplicar
* cuando se escribe (u, v, w) se refiere a elementos de V
cuando se escribe $(\alpha; \beta; \gamma)$ se refiere a elementos de K

→ Cuando se cumplen los 8 axiomas, Entonces $(V; \mathbb{K}; +; \cdot)$ es un <u>espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$</u>

Notación / Terminología

- $\mathbb{K}$ - espacio vectorial $\begin{cases} \mathbb{R} \text{ espacio vect} \to \text{Esp. vect. real} \\ \mathbb{C} \text{ espacio vect} \to \text{Esp. vect. complejo} \end{cases}$

- Dado que se satisfacen todas las propiedades decimos que los mapas s y m definen en V (sobre V) una estructura de $\mathbb{K}$ espacio vectorial

Ejemplos

no son exponentes
son índices

- $\mathbb{R}^n = \{ X = (X^1 ; X^2 ; \dots ; X^n) \ ; \ X_i \in \mathbb{R} \}$

Sean x, y en $\mathbb{R}^n$ $\quad x = (x^1 ; x^2 ; \dots ; x^n)$ $\quad \boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$

$y = (y^1 ; y^2 ; \dots ; y^n)$

$$x + y := (x^1 + y^1 ; \ x^2 + y^2 ; \dots ; x^n + y^n)$$

$V = \mathbb{R}^n \qquad s : V \times V \to V \qquad m : \mathbb{K} \times V \to V$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Dado $\alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha \cdot x := (\alpha \cdot x^1 ; \alpha \cdot x^2 ; \alpha \cdot x^3 ; \dots \alpha \cdot x^n)$$

Ahora se verifican las propiedades

1) $x + y \stackrel{?}{=} y + x$

$x + y := (x^1 + y^1 ; x^2 + y^2 ; \dots x^n + y^n)$

$y + x := (y^1 + x^1 ; y^2 + x^2 ; \dots ; y^n + x^n)$

2) $x + (y + z) \stackrel{?}{=} (x + y) + z$

3) Sea $e = (0^1 ; 0^2 ; \dots ; 0^n) \in \mathbb{R}^n$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$

$x + e \stackrel{?}{=} x$

$x + e = (x_1 + 0^1 ; x_2 + 0^2 ; \dots x^n + 0^n)$

$x + e = (x_1 ; x^2 ; x^3 ; \dots ; x^n)$

4) Dado x en $\mathbb{R}^n$

Sea $\tilde{x} := (-x^1 ; -x^2 ; \dots ; -x^n)$

$x + \tilde{x} := (x^1 + (-x^1) ; \ x^2 + (-x^2) ; \dots ; x^n + (-x^n))$

$\quad = (0^1 ; 0^2 ; \dots ; 0^n) = e$

Distributividad

5) $\alpha \cdot (x+y) \overset{?}{=} \alpha x + \alpha y$

$$\alpha \cdot (x+y) = \alpha . (x^1+y^1 ; x^2+y^2 ; \cdots ; x^n+y^n)$$

$$= \left(\alpha(x^1+y^1) ; \alpha(x^2+y^2) ; \cdots ; \alpha(x^n+y^n) \right)$$

$$= \alpha x^1 + \alpha y^1 ; \alpha x^2 + \alpha y^2 ; \ldots ; \alpha x^n + \alpha y^n \quad \ldots (*)$$

$$\alpha x + \alpha y = (\alpha x^1 ; \alpha x^2 ; \cdots ; \alpha x^n) + (\alpha y^1 ; \alpha y^2 ; \cdots ; \alpha y^n)$$

$\alpha x + \alpha y = (\alpha x^1 + \alpha y^1 ; \alpha x^2 + \alpha y^2 ; \cdots ; \alpha x^n + \alpha y^n)$ ... es igual a $(*)$

$$= \left(\alpha(x^1+y^1) ; \alpha(x^2+y^2) ; \alpha(x^3+y^3) ; \cdots ; \alpha(x^n+y^n) \right)$$