Задание 8

Найти все особые точки заданной функции, определить их характер и найти вычеты в них. Установить, чем является для данной функции бесконечно удаленная точка, и найти вычеты в ней.

Дана функция:

$$f(z\_) := \frac{\cosh(z)}{\left(z^2+\pi^2\right)^3}$$

Представим функцию в виде:

$$f(z\_) := \frac{\cos[i\, z]}{(z+i\,\pi)^3\,(z-i\,\pi)^3}$$

Теперь видно что данная функция имеет 2 полюса 3-его порядка: $z = I$ Pi, $z = -I$ Pi, и существенно особую точку $z = \infty$

При помощи СКМ Mathematica, мы конечно можем найти вычеты в них разными способами.

1. Самый простой, воспользоваться встроенной функцией Residue[f[z], {z, z_0}] которая находит вычет функции f[z] в точке z_0

```
Residue[f[z], {z, I Pi}]
```

вычет · число

$$-\frac{i\,(-3+\pi^2)}{16\,\pi^5}$$

```
Residue[f[z], {z, -I Pi}]
```

вычет · число

$$\frac{i\,(-3+\pi^2)}{16\,\pi^5}$$

```
Residue[f[z], {z, Infinity}]
```

вычет бесконечность

$$\text{Residue}\left[\frac{\text{Cosh}[z]}{(-i\,\pi+z)^3\,(i\,\pi+z)^3},\ \{z,\ \infty\}\right]$$

Данная функция не в состоянии найти вычет в бесконечно удаленной точке.

2. Вторый способ, не менее простой, просто задать функцию для поиска вычета в общей форме и подставить нужные нам точки:

$$\text{res}(\text{expr}\_,\ \text{z0}\_,\ \text{m}\_) := \frac{\lim_{z\to z0} \frac{\partial^{m-1}(\text{expr} * (z-\text{z0})^m)}{\partial z^{m-1}}}{(m-1)!}$$

```
res[f[z], I Pi, 3]
```

· число пи

$$-\frac{i\,(-3+\pi^2)}{16\,\pi^5}$$

```
res[f[z], -I Pi, 3]
```

· число пи

$$\frac{i\,(-3+\pi^2)}{16\,\pi^5}$$

Получили тот же самый результат, однако вычет в бесконечно удаленной точке всё еще не найден.

3. Третий способ. Найти разложение функции в ряд в окрестностях z0, вычет будет равен коэф. c_{-1}

```
Series[f[z], {z, I Pi, 1}]
```
разложить в ряд · число пи

$$-\frac{i}{8\pi^3 (z-i\pi)^3}+\frac{3}{16\pi^4 (z-i\pi)^2}-\frac{i(-3+\pi^2)}{16\pi^5 (z-i\pi)}+\frac{-5+3\pi^2}{32\pi^6}-\frac{i(45-36\pi^2+2\pi^4)(z-i\pi)}{384\pi^7}+O[z-i\pi]^2$$

$$\texttt{Coefficient}\left[\texttt{Series[f[z], \{z, I Pi, 1\}]}, \frac{1}{\texttt{z - I Pi}}, 1\right]$$
коэффициент ⋯ разложить в ряд · число пи

$$-\frac{i(-3+\pi^2)}{16\pi^5}$$

```
Series[f[z], {z, -I Pi, 1}]
```
разложить в ряд · число пи

$$\frac{i}{8\pi^3 (z+i\pi)^3}+\frac{3}{16\pi^4 (z+i\pi)^2}+\frac{i(-3+\pi^2)}{16\pi^5 (z+i\pi)}+\frac{-5+3\pi^2}{32\pi^6}+\frac{i(45-36\pi^2+2\pi^4)(z+i\pi)}{384\pi^7}+O[z+i\pi]^2$$

$$\texttt{Coefficient}\left[\texttt{Series[f[z], \{z, -I Pi, 1\}]}, \frac{1}{\texttt{z + I Pi}}, 1\right]$$
коэффициент ⋯ разложить в ряд · число пи

$$\frac{i(-3+\pi^2)}{16\pi^5}$$

```
Series[f[z], {z, Infinity, 5}]
```
разложить в ряд бесконечность

$$\text{Cosh}[z]\, O\left[\frac{1}{z}\right]^6$$

Отсюда вычет в бесконечно удаленной точке равен 0.