Задача 7

Определить круг сходимости заданного степенного ряда. Сходится ли ряд в точке z1,z2,z3? Если сходится, то как - абсолютно или условно? Сделать рисунок.

Дан ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2\,i)^{2n-1}}{(n+1)^2 \log(n+1)}, \quad z1 = 0, \; z2 = 3\,i, \; z3 = 1+2\,i$$

Для того чтобы найти область сходимости воспользуемся критерием Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z-2\,i|^{\frac{2n-1}{n}}}{\left((n+1)^2 \log(n+1)\right)^{1/n}}$$

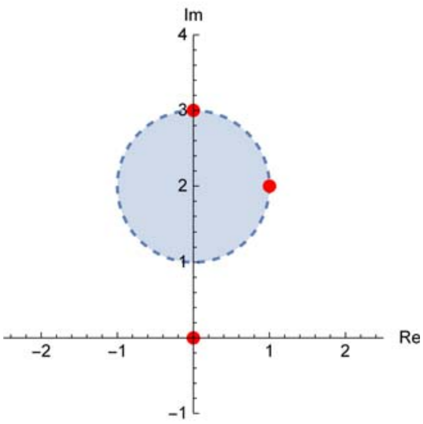
■ $|-2\,i+z|^2$

Отсюда область сходимости:

$$|z-2i|^2 < 1 \quad => \quad |z-2i| < 1$$

Изобразим полученный ответ:

```
Show[RegionPlot[x²+(y-2)²<1,{x,-1,1},{y,1,3},AxesLabel→{Re,Im},PlotRange→{{-2.5,2.5},{
Axes→True,BoundaryStyle→Dashed],Graphics[{PointSize[Large],Red,Point[{{0,0},{0,3},{1,2
```



Теперь исследуем сходимость ряда в точках z1,z2,z3.

Точку z1=0 можно сразу исключить, так как она не попадает в область сходимости.

Рассмотрим точку $z1 = 3\,i$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2\,i)^{2n-1}}{(n+1)^2 \log(n+1)} \,/.\, z \to 3\,I$$

мнимая

■ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{-1+2n}}{(1+n)^2 \, \mathrm{Log}[1+n]}$

Исследуем на абсолютную сходимость сходимость при помощи интегрального признака Коши:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \log(n+1)} \, dn \; // \; N$$

численное приближение

- 0.378671

Интеграл является сходящимся, следовательно в точке $z = 3\,I$ ряд сходится абсолютно.
Исследуем ряд в точке $z = 1 + 2\,I$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - 2\,i)^{2n-1}}{(n+1)^2 \log(n+1)} \; /. \; z \to 1 + 2\,I$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2 \, \text{Log}[1+n]}$$

Уже было получено что данный ряд сходится абсолютно, следовательно в точке $z = 1 + 2\,I$ ряд также сходится абсолютно.