Типовой расчет по теории вероятностей.

Задача 1

Одновременно подбрасывают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков 1) равна k, 2) меньше k+1, 3) больше k-1, 4)заключена в промежутке $[\alpha,\beta]$.

Дано :

$$k = 5, \ [\alpha, \beta] = [3, 7]$$

Таблица суммы выпавших очков:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1) Используя классическое определение вероятности, найдем вероятность, что сумма выпавших очков равна 5:

$$P(\sum = 5) = \frac{N_{\sum = 5}}{N} = \frac{4}{64} = 0.0625$$

2) Вероятность, что сумма меньше 6:

$$P(\sum < 6) = \frac{N_{\sum < 6}}{N} = \frac{10}{64} = 0.15625$$

3) Вероятность, что сумма больше 4:

$$P(\sum > 4) = \frac{N_{\sum > 4}}{N} = \frac{64 - 6}{64} = 0.90625$$

4) Вероятность, что сумма в промежутке от 3 до 7:

$$P(3 \le \sum \le 7) = \frac{N_{3 \le \sum \le 7}}{N} = \frac{64 - 16}{64} = 0.75$$

Задача 2

На некоторое обслуживающее устройство поступает две заявки. Каждая может поступить в любой момент времени в течение Т минут. Время обслуживания первой заявки t_1 минут, второй t_2 минут. При поступлении заявки на занятое устройство она не принимается. При поступлении ее хотя бы в последний последний момент времени Т она обслуживается. Найти вероятность того, что 1)обе заявки будут обслужены, 2) будет обслужена одна заявка.

Дано:

$$T = 100, \ t_1 = 5, \ t_2 = 15$$

Пусть x- время поступления первой заявки, y- время поступления второй.

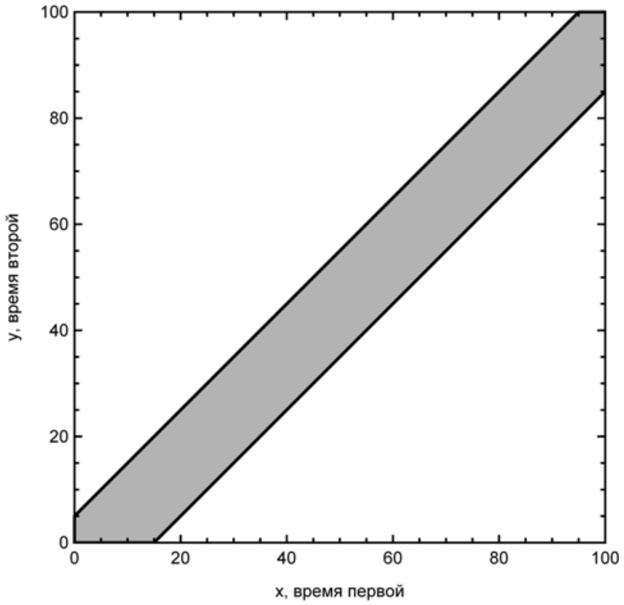
Тогда первая не будет обслужена если:

$$y < x < y + 15$$

Вторая не будет обслужена:

$$x < y < x + 5$$

Тогда, чтобы найти вероятность того, что будет обслужена одна заявка, надо найти площадь области удовлетворяющей условию: или не обслужена первая, или не обслужена вторая.



Найдем эту площадь:

$$\textbf{Area}\left[\textbf{ImplicitRegion}\left[y \le x \le y + 15 \vee x \le y \le x + 5, \begin{pmatrix} x & 0 & 100 \\ y & 0 & 100 \end{pmatrix}\right]\right]$$

1875

Тогда вероятность того, что будет обслужена одна заявка:

$$P(A) = \frac{1875}{100^2} = 0.1875$$

Вероятность того, что будут обслужены обе:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.8125$$

Задача 3

Задана электрическая схема системы, состоящей из пяти элементов. Событие $\overline{A}_i$ - отказ i-ого элемента за некоторый промежуток времени. Вероятности безотказной работы элементов заданы:

$$P(A_i) = 0.95, \ \ i = 1, 3, 5;$$
$$P(A_i) = 0.9, \ \ i = 2, 4.$$

Событие A состоит в безотказной работе всей системы за рассматриваемый промежуток времени.

Требуется: 1) Выразить событие A через A_i или $\overline{A}_i$, 2)найти вероятность P(A) безотказной работы системы.

1) Событие A - безотказность системы, ее можно выразить как:

$$A = ((A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) \bigcap A_4) \bigcup A_5$$

Что можно преобразовать в:

$$A = (A_1 \bigcap A_4) \bigcup (A_2 \bigcap A_4) \bigcup (A_3 \bigcap A_4) \bigcup A_5$$

2) Безотказность работы блока (1 или 2 или 3) найдем по формуле:

$$p_{123} = 1 - \prod_{i=1}^{3} (1 - p(A_i)) = 0.99975$$

Безотказность работы блока ((1 или 2 или 3) и 4) найдем как:

$$p_{1234} = p_{123}\ \ p_4 = \left(1 - \prod_{i=1}^{3} (1 - p(A_i))\right) p(A_4) = 0.899775$$

Тогда безотказность всей системы выразим:

$$p(A) = 1 - (1 - p_{1234})\,(1 - p_5) =$$

$$= 1 - \left(1 - \left(1 - \prod_{i=1}^{3} (1 - p(A_i))\right) p(A_4)\right) (1 - p(A_5)) = 0.994989$$

Задача 4

Из партии содержащей n изделий, среди которых k - высшего сорта, для контроля последовательно наугад выбирают m изделий. Найти вероятность того, что среду выбранных изделий окажется ровно *l* высшего сорта, при условии, что выборка производится 1) с возвращением 2) без возвращения.

Дано:

$$n = 12,\ k = 6,\ m = 6,\ l = 3$$

1) Выборка последовательная с возвращением.

Вероятность p, того что наугад выбрано изделие высшего сорта:

$$p = \frac{k}{n} = 0.5$$

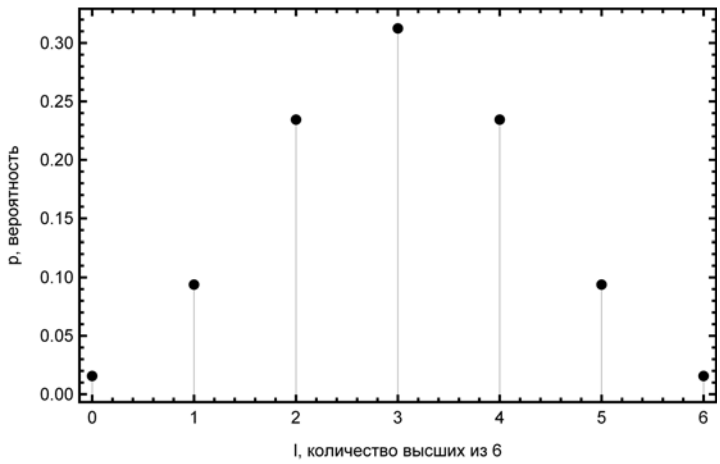
Тогда, воспользовавшись биномиальным распределением, определим вероятность того что среди m окажется *l* высшего сорта:

$$P(A) = P_m^l = C_m^l\ p^{m-l} (1 - p)^l$$

В нашем случае:

$$P(A) = P_6^3 = C_6^3\ p^3 (1 - p)^3 = 0.3125$$

Эта точка будет соответствовать максимуму на графике плотности вероятности:



2) Выборка последовательная без возвращения.

Всего способов выбрать m изделий:

$$N = \mathrm{C}_n^m = C_{12}^6$$

Количество способов выбрать из $m - l$ и из $(n-m) - (m-l)$ равно их произведению:

$$N_A = \mathrm{C}_m^l\, C_{n-m}^{m-l} = C_6^3\, C_6^3$$

Тогда используя классическое определение вероятности:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{C_6^3\, C_6^3}{C_{12}^6} = \frac{100}{231} = 0.4329$$

Задача 5

На склад поступали детали, изготовляемые на трех станках. Изготовлена на станках деталей, %:
на первом - a, на втором - b,на третьем - c. Вероятность выпуска бракованных деталей на i-ом станке равна P_i. Определить вероятность того, что изделие, наудачу взятое со склада 1) оказалось бракованным, 2) оказалось небракованным. Найти вероятность того, что оно изготовлено на j-м станке.

Дано:

$$a = 0.10,\ b = 0.60,\ c = 0.30$$
$$p_1 = 0.02,\ p_2 = 0.04,\ p_3 = 0.03$$
$$j = 3$$

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{3} p(A \mid H_i)\, p(H_i),$$

где $p(H_i) -$ вероятность выбрать деталь с $i -$ ого станка,

$p(A \mid H_i) -$ вероятность брака при условии что деталь с $i -$ ого станка

1) Деталь выбранная на удачу оказалась бракованной:

$$p(H_1) = a,\ p(H_2) = b,\ p(H_3) = c$$
$$p(A \mid H_i) = p_i$$

Тогда вероятность этого события:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{3} p(A \mid H_i)\, p(H_i) = a\, p_1 + b\, p_2 + c\, p_3 = 0.035$$

2) Деталь оказалась небракованной:

$$p(B) = \sum_{i=1}^{3} (1 - p(A \mid H_i))\, p(H_i) = a\,(1 - p_1) + b\,(1 - p_2) + c\,(1 - p_3) = 0.965$$

3) Найти вероятность того, что она изготовлена на 3-ем станке.

Для этого воспользуемся формулой Байеса:

$$p(H_3 \mid A) = \frac{p(A \mid H_3)\, p(H_3)}{p(A)} = \frac{p_3\, c}{a\, p_1 + b\, p_2 + c\, p_3} = 0.257143$$