Вычеты и их применение.

Теоремы о вычетах и их применение к вычислению конурных интегралов.

№12.434 Используя теоремы о вычетах, вычислить следующий интеграл:

$$\int_{C^+} \frac{z}{(z-1)(z-2)} dz, \quad C = \{z \mid |z-2| = 2\}$$

Для этого воспользуемся Первой теоремой о вычетах:

$$\int_{C^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{res}(f(z); z_k)$$

Найдем все полюса функции $f(z)$

```
f[z_] := z/((z - 1) (z - 2))
```

Конечно видно, что полюсами будут точки $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$, но всё же применим более общий способ:

```
sol = Solve[f[z]^-1 == 0, z]
      решить уравнения
```

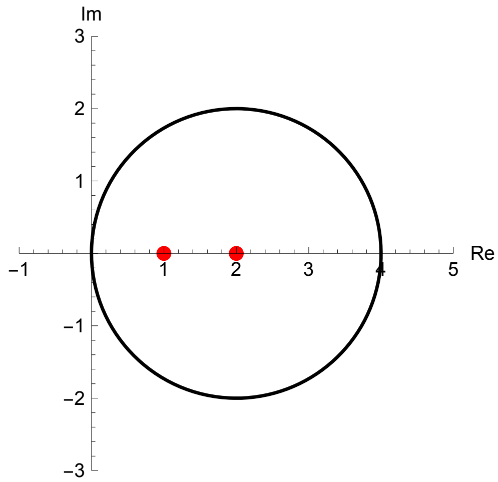
```
{{z → 1}, {z → 2}}
```

Теперь нужно определить, какие из найденных полюсов охватываются контуром C.

1) Определим графически.

Для этого изобразим контур C, и найденые нами полюса.

```
Show[ContourPlot[(x - 2)^2 + y^2 == 4, {x, 0, 4}, {y, -2, 2}, AxesLabel → {Re, Im},
пока··· контурный график                                         обозначения на··· д··· мнима
  PlotRange → {{-1, 5}, {-3, 3}} , Frame → False, Axes → True],
  отображаемый диапазон графика      рамка      ложь     оси     истина
 Graphics[{PointSize[Large], Red, Point[ReIm[z /. sol]]} ] ]
 графика    размер точки  крупный  кра··· точка  действительная и мнимая части
```



Из рисунка видно, что обе точки лежат внутри контура C.

Найдем интеграл по первой теореме вычетов (1).

```
int = 2 π i Sum[Residue[f[z], {z, z /. sol[[i]]}], {i, 1, Length[sol]}]
            су··· вычет                                   длина
```

```
2 i π
```

2) Определим аналитически.

Будем брать каждый i-ый полюс,проверять растояние от него до точки (2,0) - центра окружности, и если оно меньше заданного радиуса, будем считать в нем вычет.

```
int1 = 2 π ⅈ Sum [ If[ Abs[ -2 + z /. sol[[i]]] ≤ 2, Residue[f[z], {z, z /. sol[[i]] } ], 0],
                 сумма у… абсолютное значение                   вычет
    {i, 1, Length[z /. sol]} ]
           длина
```

2 ⅈ π

Итак конечный ответ:

$$\int_{C^+} \frac{z}{(z-1)(z-2)}\, dz = 2\, i\, \pi$$

Итак, это общий алгоритм решения такого класса задач, в которых НЕТ существенно особых точек, используя который можно, заменяя вверху функцию f[z_] на одну из тех, которые есть в задачах №№ 12.435-449 получить ответы их решения (см. таблицу ответов). Читатель же теперь может найти эти решения и ответы самостоятельно.

$$F[z\_] := \left\{\left\{\frac{E^z}{z^2\,(z^2+9)}, 0, 1\right\}, \left\{\frac{\mathrm{Sin}[z]}{z^2+9}, 0, 4\right\}, \left\{\frac{1}{(z-1)^2\,(z^2+1)}, 0, 1\right\}, \left\{\frac{z+1}{E^z+1}, 0, 4\right\}, \left\{\frac{1-E^{z^2}}{z^2\,(z-I)}, I, 2\right\}, \left\{\frac{E^z}{z^4+2\,z^2+1}, I, 1\right\}, \left\{\frac{z^3}{2\,z^4+1}, 0, 1\right\}\right\}$$

мнимая единица мнимая единица

```
Grid[
таблица
 Table[ {"∮", F[z][[i, 1]], "ⅆ z =",
 таблица значений
   2 π ⅈ
    Sum[
    сумма
     Boole[
     индикатор
       Abs[-F[z][[i, 2]] + z /. DeleteDuplicates[Solve[F[z][[i, 1]]^-1 == 0, z]][[
       абсолютное значение       удалить дубликаты  решить уравнения
            k]]] ≤ F[z][[i, 3]]]
      Residue[F[z][[i, 1]],
      вычет
        {z, z /. DeleteDuplicates[Solve[F[z][[i, 1]]^-1 == 0, z]][[k]]}],
                 удалить дубликаты  решить уравнения
      {k, 1, Length@DeleteDuplicates[Solve[F[z][[i, 1]]^-1 == 0, z]]}]},
             длина  удалить дубликаты  решить уравнения
   {i, 1, Length[F[z]]}], Dividers → {False, All}]
          длина          разделители  ложь  всё
```

∮	$\frac{e^z}{z^2\,(9+z^2)}$	ⅆ z =	$\frac{2\,i\,\pi}{9}$
∮	$\frac{\mathrm{Sin}[z]}{9+z^2}$	ⅆ z =	$\frac{2}{3}\,i\,\pi\,\mathrm{Sinh}[3]$
∮	$\frac{1}{(-1+z)^2\,(1+z^2)}$	ⅆ z =	0
∮	$\frac{1+z}{1+e^z}$	ⅆ z =	$2\,\pi\,(-i+\pi)$
∮	$\frac{1-e^{z^2}}{z^2\,(-i+z)}$	ⅆ z =	$\frac{2\,i\,(1-e)\,\pi}{e}$
∮	$\frac{e^z}{1+2\,z^2+z^4}$	ⅆ z =	$\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\,e^{i}\,\pi$
∮	$\frac{z^3}{1+2\,z^4}$	ⅆ z =	$i\,\pi$