TP3
3.1.1
a)

$$\begin{aligned} S(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 \times \cos(nt) + \frac{2}{n\pi}\Big(1 - \cos(n\pi)\Big)\sin(nt) \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\Big(1 - \cos(n\pi)\Big)\sin(nt) \end{aligned}$$

On remarque que pour tout entier $n \geqslant 1$

on a : $\cos(n\pi) = (-1)^n$

et ainsi que les coefficients b_n de rang pair, $n = 2p + 1$, sont nuls

et que ceux de rang impair valent plus simplement $b_{2p+1} = \frac{4}{n} = \frac{4}{2p+1}$

La série de Fourier s'écrit alors :

$$S(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p+1}\sin((2p+1)t)$$

b)

Sachant que

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{2\pi} f(t)\,\cos(nt)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} f(t)\,\cos(nt)\,dt \quad + \int_\pi^{2\pi} f(t)\,\cos(nt)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} 1\,\cos(nt)\,dt \quad + \int_\pi^{2\pi} (-1)\,\cos(nt)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} \cos(nt)\,dt \quad - \int_\pi^{2\pi} \cos(nt)\,dt \\
&= \left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} \quad - \left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_\pi^{2\pi} \\
&= \frac{1}{n}\Big[\sin(n\pi) - \sin(0)\Big] \quad - \frac{1}{n}\Big[\sin(2n\pi) - \sin(n\pi)\Big]
\end{aligned}
$$

Alors on a :

$$
a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi} I_n
$$

Sachant que :

$$
\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{2\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt \quad + \int_\pi^{2\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} 1\,\sin(nt)\,dt \quad + \int_\pi^{2\pi} (-1)\,\sin(nt)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt \quad - \int_\pi^{2\pi} \sin(nt)\,dt \\
&= \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} \quad - \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_\pi^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{n}\Big[\cos(n\pi) - \cos(0)\Big] \quad + \frac{1}{n}\Big[\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)\Big]
\end{aligned}
$$

Alors on a :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}J_n$$