Take-Home Eksamen DM500 Efterår 2020

h8 - studiegruppe 3:
Andreas Rosenstjerne Hansen(andrh20)
Frederik Mortensen Dam(Frdam20)
Gabrielle Hvid Benn Madsen (gamad20)
Nanta Veliovits (navel16)

November 2020

1 Opgave 1(Reeksamen februar 2015)

I det følgende lader vi $U = \{1, 2, 3, ..., 15\}$ være universet (universal set).
Betragt de to mængder
$A = \{2n|n\} \in\ S\ og\ B\{3n + 2|n\} \in S$
hvor S= {1,2,3,4}

Angiv samtlige elementer i hver af følgende mængder

a) A $\{2, 4, 6, 8\}$

b) B $\{5, 8, 11, 14\}$

c) $A \cap B\{8\}$

d) $A \cup B$\{2, 4, 5, 6, 8, 11, 14\}

e) A - B $\{2, 4, 6\}$

f) $\overline{\text{A}}$ { 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

2 Opgave 2 (Reeksamen februar 2015)

a) Hvilke af følgende udsagn er sande?

$$1.\ \forall x \in N : \exists\, y \in N : x < y \quad \textit{Det er sandt.}$$

For hvert x må man godt vælge et nyt naturligt tal y, sådan at x< y.

$$2.\ \forall x \in N : \exists\,!\, y \in N : x < y \quad \textit{Det er ikke sandt.}$$

Der eksisterer ikke kun ét naturligt tal y, sådan at x< y.

$$3.\ \exists y \in N :\ \forall x \in N : x < y \quad \textit{Det er ikke sandt.}$$

Der eksisterer ikke et naturligt tal y, sådan at for alle naturlige tal x gælder: x< y.

b) Angiv negeringen af udsagn 1. fra spørgsmål a).

Negerings-operatoren (¬) må ikke indgå i dit udsagn.

$$\exists\, x \in N : \forall\, y \in N : x > y$$

3 Opgave 3 (Reeksamen februar 2015)

Lad R, S og T være binære relationer på mængden {1, 2, 3, 4}.

a) Lad R = {(1,1), (2,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,4)}. Er R en partiel ordning?

Svar: Ja, da relationen er både refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

b) Lad S = {(1,2), (2,3), (2,4), (4,2)}. Angiv den transitive lukning af S.

Svar: Vi tilføjer de par, der mangler for, at relationen lever op til den transitive egenskab. Den nye relation ser sådan ud: {(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (4,2), (4,3), (4,4)}

c) Lad T = {(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)}. Bemærk at T er en ækvivalensrelation. Angiv T's ækvivalensklasser.

Svar:
$[1] \cup [3] = \{1, 3\}$

$[2] \cup [4] = \{2, 4\}$

Opskriv desuden matricerne, der repræsenterer de tre relationer R, S og T.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 Opgave 1 (Reeksamen Januar 2012)

Betragt funktionerne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x + 2 + x + 1$$
$$g(x) = 2x - 2$$

a) Er f en bijektion?

Svar: Nej, da vi ved $x = 1$ og $x = -2$ får resultatet 3

b) Har f en invers funktion?

Svar: Nej, da det ikke er en bijektion, da den skal opfylde $f(x) = y$ og $f^-1(y) = x$

c) Angiv $f + g$.

Svar: Vi sætter $f(x) + g(x)$ sammen

$$f(x) + g(x) = x^2 + x + 1 + 2x - 2$$
$$\Updownarrow$$
$$2x^3 + 3x$$

a) Angiv $g \circ f$

Svar: Vi sætter $f(x)$ ind i $g(x)$, så vi får

$$g(f(x)) = 2(x^2 + x + 1) - 2$$
$$\Updownarrow$$
$$2x^2 + 2x$$

5 Opgave 1 (Reeksamen Januar 2009)

Lad $S = \{1, 2, ...15\}$. Betragt følgende binære relation på S:

$$R = \{(a, b)|b = 2a\}$$

a) Hvilken af nedenstående par tilhører R? Hvilke tilhører R^2

Eftersom at vi har formlen (a,b) og b skal være det dobbelte af a, derfor er det kun {2,4}

Ved R^2 er det { 2,8 } da det er et transitivt trin mellem {2,4} og {4,8}

b) Opskriv alle par i den transitive lukning af **R**

{1,2 ; 1,4 ; 1,8 ; 2,4 ; 2,8 ; 3,6 ; 3,12 ; 4,8 ; 5,10 ; 6,12 ; 7,14 }

Vi skal nu opstille matricen som repræsentere relationen R, dog med S reduceret til 6.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$