MADAGASCAR

Unité de Conception et d'Edition
de Manuels Scolaires

Collection **Unité**

Maths Term C

1^{∞} ?

MATHEMATIQUES TC

PREFACE

En cette époque de la mondialisation où les technologies nouvelles sont parvenues à supprimer toute notion de frontières, l'équipe de l'UCEMS (Unité de Conception et d'Edition de Manuels Scolaires) à Madagascar se fixe comme objectif de permettre aux enfants malgaches d'emboiter le pas vers le progrès.

Pour ce faire, l'UCEMS offre aux élèves du niveau de l'éducation fondamentale (EPP et CEG) et du secondaire (Lycée), des ouvrages didactiques conçus pour répondre aux mieux à leurs besoins et aux attentes légitimes de leurs parents. Ces ouvrages sont les fruits des travaux d'enseignants chevronnés(expérimentés), de femmes et d'hommes de terrain qui ont accumulé du savoir faire dans le domaine de l'enseignement dans toutes les Régions de Madagascar et dans des localités allant des plus urbanisées aux plus rurales.

Tous ces Educateurs, chacun en ce qui le concerne, ont constaté la nécessité de doter les apprenants d'ouvrages qui puissent leur procurer, non seulement une autonomie d'études, mais surtout des outils efficaces pour compléter les acquis dispensés à l'école.

Ce qui permet surtout de pallier à l'insuffisance d'enseignants par rapport au nombre sans cesse croissant d'élèves entrainant une restriction obligatoire des heures de cours.

Le programme de production de manuels scolaires, conçu et élaboré pour durer, entame cette année sa première édition.

Première étape : produire des recueils de cours de mathématiques, physique – chimie, français et malagasy pour les classes d'examen 7ème, 3ème, Terminales, accompagnés d'exercices d'application et de documents annexes rappelant les acquis des classes antérieures.

Deuxième étape : servir les classes de début de cycles 11ème, 6ème et 2nd .

Troisième étape : se consacrer aux classes intermédiaires 10ème, 9ème, 8ème, 5ème, 4ème et 1re.

A la portée de toutes les bourses, le Manuel scolaire pour tous sera ainsi le manuel de référence car, édité pour être un instrument d'apprentissage performant, s'adresse à tous les élèves quels qu'ils soient sur le territoire malagasy, issus d'établissements publics ou privés, confessionnels ou non confessionnels.

En réalisant le projet « Manuel pour Tous », l'UCEMS ambitionne, dès sa première édition d'être le plus proche de sa cible : les Apprenants, en leur accordant une égalité de chance.

Comme nous, vous êtes convaincus vous aussi de la mission salvatrice de nos actions ; l'UCEMS, ouverte à toutes et à tous sur l'e-mail :ucems_madagascar@yahoo.fr, est déjà honoré de votre implication et souhaite la bienvenue à toutes vos suggestions et, pourquoi pas, à vos idées sur les Manuels que nous aurons le plaisir de réaliser ensemble.

Chers élèves, je vous souhaite un bon apprentissage, et je vous dis à très bientôt pour la prochaine édition.

Le Ministre de l'Education Nationale

Julien RAZAFIMANAZATO

LES AUTEURS ASSOCIES :

RAZAFIMANAZATO Julien................................. Ministre de l'Education Nationale

BOTOMAZAVA Michel.. Secrétaire Général du Ministère de l'Education Nationale

RATSIMANDRESY Aristide..................................Directeur Général de l'Education Fondamentale et de l'Alphabétisation

RANDRIAMANANJATOVO Noué Albertrand......CRINFP Benasandratra

RANDRIAMIARINA Yvon Olivier........................Lycée Andohalo

RAVALISON Justin...Lycée Mananara Nord

RAZAFY Gilbert..Lycée Maevatanana

RANDEVOLAHY François

SOLOFOSON Hery Manandafy............................Lycée Mahasoabe

FELIX...Lycée Laurent Botokeky Tuléar

RALAIKOTOMANGA R. Tinasoa....................... Lycée Ambohimanarina

RAVELOARISON William Narcisse....................Lycée Tsiebo Calvin Betroka

MAROLAHY Joseph...Lycée Rabemanajara

RALIJAONA Jean Louis.....................................Lycée Ihosy

RAZANATSOA Symphrose.................................DES/MEN

ANDRIANARIMANANA Emmanuel..................Lycée J. J. Rabearivelo

RAKOTONIRINA Mamy Ny Aina R..................Lycée Ambohimanarina

RABENATOANDRO Andriamiarana..................Lycée Nanisana

RANDRIANANDRAINA Oly Bodonirina

RAHARINORO Fidy Mbolatiana

Sommaire

CHAPITRE 1 : ARITHMETIQUE

1. Ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$:

1.1- Loi de composition

Loi de composition interne

Définition

Soit E un ensemble non vide et soit $\star$ une opération

On dit que $\star$ est une *loi de composition interne* dans E si pour tout a, b de E, $a\star b$ appartient à E

Propriétés et définitions

(P_1) : La loi $\star$ est *commutative* dans E si pour tout a et b de E : $a\star b = b\star a$

(P_2) : La loi $\star$ est dite *associative* dans E si pour tout a, b et c de E : $(a\star b) \star c = a\star (b\star c)$

(P_3) : « e » est un *élément neutre* de la loi $\star$ si pour tout a de E : $a\star e=e\star a=a$

(P_4) : Un élément a de E est dit *symétrisable* pour $\star$ s'il existe a' de E tel que $a\star a' = a'\star a = e$; dans ce cas a' est appelé *symétrique* de a

Groupe

Définition

Soit E est un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $\star$

On dit que (E, $\star$) est un *groupe* si :

$\star$ est associative

$\star$ admet un élément neutre dans E

tout élément de E est symétrisable pour $\star$

De plus, si $\star$ est commutative, on dit que (E, $\star$) est un groupe commutatif ou groupe abélien

1.2- Ensemble $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels ; $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, ...\}$

Propriétés de l'addition et multiplication dans $\mathbb{N}$

(P_1) : l'addition classique « + » est une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$ et a les propriétés suivantes :

- associative : $(a+b)+c = a+(b+c)$
- commutative : $a+b = b+a$
- admet 0 comme élément neutre : $a+0 = 0+a = a$

(P_2) : la multiplication classique « • » est une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$ et a les propriétés suivantes :

- associative : $(a\bullet b)\bullet c = a\bullet(b\bullet c)$
- commutative: $a\bullet b = b\bullet a$
- admet 1 comme élément neutre : $a\bullet 1 = 1\bullet a = a$

(P_3) : pour tout entier c non nul, si $a\bullet c = b\bullet c$ alors $a=b$

(P_4) : la loi • est distributive par rapport à la loi + : $a\bullet(b + c) = (a\bullet b) + (a\bullet c)$

1.3- L'ensemble $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs ; $\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

a) Propriétés de l'addition dans $\mathbb{Z}$

L'addition classique « + » est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$, avec les propriétés suivantes :

(P_1) : + est associative : $a+(b+c) = (a+b)+c$

(P_2) : 0 est un élément neutre de + dans $\mathbb{Z}$: $a+0=0+a=a$

(P_3) : tout élément de $\mathbb{Z}$ est symétrisable : $a+(-a)=(-a)+a=0$

(P_4) : + est commutative dans $\mathbb{Z}$: $a+b=b+a$

$\Rightarrow$ ($\mathbb{Z}$,+) est un groupe commutatif

b) Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{Z}$

La multiplication classique «•» est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$, avec les propriétés suivantes :

(P_1) : • est associative dans $\mathbb{Z}$: $a\bullet(b\bullet c) = (a\bullet b)\bullet c$

(P_2) : 1 est l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{Z}$: $a\bullet 1=1\bullet a = a$

(P_3) : • est commutative dans $\mathbb{Z}$: $a\bullet b = b\bullet c$

Par ailleurs, la *multiplication* est distributive par rapport à l'*addition* : $a\bullet(b+c) = a\bullet b + a\bullet c$

On dit alors que ($\mathbb{Z}$,+, •) est un *anneau unitaire.*

c) Autres propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs, d non nul

(P_1) : Si $a+b = b+c$ alors $a = c$

(P_2) : Si $a \bullet d = b \bullet d$ alors $a = b$

(P_3) : Si $a \bullet b = 1$ alors $a = b = 1$ ou $a = b = -1$ (dans $\mathbb{Z}$!)

d) Relation d'ordre

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs

On écrit $b - a = b + (-a)$

Pour tous entiers relatifs a et b, on dit que « *a est inférieur à b* » si b-a est positif. Autrement dit : $a \leq b$ équivaut à $b-a \geq 0$.

Propriétés et définitions

a, b et c étant des entiers relatifs, on a les propriétés suivantes :

(P_1) : Si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a=b$; on dit que la relation d'ordre est *antisymétrique*

(P_2) : Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$; on dit que la relation d'ordre est *transitive*

On a : $a \leq b \Leftrightarrow (a+c) \leq (b+c), \forall c \in \mathbb{Z}$

$a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c, \forall c \in \mathbb{Z}$ et $c \geq 0$

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:

Théorème

Pour tout entier relatif a et tout entier naturel b non nul (c'est-à-dire : $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$),
Il existe un couple unique (q, r) de $\mathbb{Z} x \mathbb{N}$ tel que $a=b \bullet q+r$ avec $0 \leq r < |b|$; q et r sont appelés respectivement *quotient* et *reste* de la division euclidienne de a par b.

Démonstration

Il suffit de faire la démonstration pour a et b positifs. Les autres cas s'en déduisent aisément.

a et b étant des entiers, de deux choses l'une : soit a est multiple de b, soit a n'est pas multiple de b.

Si a est multiple de b alors il existe un k tel que $a = k \bullet b$; dans ce cas, a est de la forme $q \bullet b+r$, où $q=k$ et $r=0$.

Si a n'est pas multiple de b alors il existe un unique entier naturel q tel que $b \bullet q < a < b \bullet (q+1)$.

a s'écrit : $a = b \bullet q + (a-b \bullet q)$

Cette expression est de la forme $b \bullet q+r$ où $r = a-b \bullet q$. Il reste à montrer que : $(a-b \bullet q)$ est compris entre 0 et b.

Or $b \bullet q<a<b \bullet (q+1)$. D'où $0<(a-b \bullet q)<b$.

Définition

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.

Effectuer la *division euclidienne de a par b* signifie déterminer le couple (q,r) tels que $a = b \bullet q + r$.

Les entiers a, b, q et r sont appelés respectivement *dividende, diviseur, quotient* et *reste* de la division de a par b.

Exemple :

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

(a , b) = (59, 12)

(a , b) = (-59, 12)

(a , b) = (59, -12)

(a , b) = (-59, -12)

On a :

$\begin{cases} 59 = 12 \bullet 4 + 11 \\ 0 \leq 11 < 12 \end{cases}$ donc $(q, r) = (4, 11)$ $\quad \begin{cases} -59 = 12 \bullet (-5) + 1 \\ 0 \leq 1 < 12 \end{cases}$ donc $(q, r) = (-5, 1)$

2. Numération

2.1- Système de numération dans une base x

Propriétés

Tout entier naturel a ($a \geq 1$) s'écrit de la manière suivante : $a_n \bullet 10^n + ... + a_2 \bullet 10^2 + a_1 \bullet 10^1 + a_0$

Exemple :

321 s'écrit : $1+2 \bullet 10+3 \bullet 10^2$; c'est-à-dire $312 = 3 \bullet 10^2+2 \bullet 10+1$

Quelque soit l'entier $x > 1$, tout entier a peut s'écrire de la manière suivante :

$a = a_n \cdot x^n + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$; on dit que cette écriture est l'écriture de a dans la base x.

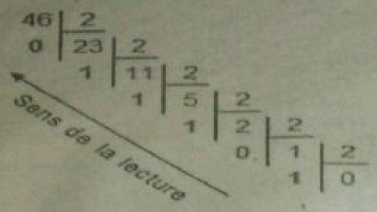
On note: $a = (a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0) = \overline{(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)}$

2.2- Changement de base

a) Passage de la base 10 à une base quelconque x

Pour obtenir l'expression d'un nombre a exprimé en décimal en un nombre dans une base x donnée, il suffit de diviser successivement ce nombre par x jusqu'à ce que le quotient obtenu soit égal à 0.

Exemple : Ecrire $(46)_{10}$ dans la base 2.



On a : $46 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$; autrement dit : $46 = \overline{101110^2}$

b) Passage de la base x à la base décimale 10

Il suffit de calculer les puissances successives de x, et d'effectuer les multiplications et les additions qui s'en suivent, et on obtient l'écriture dans la base 10 qui n'est autre que l'écriture habituelle.

Exemple: Ecrire dans la base 10, le nombre a qui s'écrit 32501 dans la base 7 (c'est-à-dire $a = \overline{32501^7}$).

On a : $3 \cdot 7^4 + 2 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 8135$

3. Décomposition d'un entier naturel :

<u>Définition d'un nombre premier</u>

Tout entier naturel p n'admettant que deux diviseurs, à savoir 1 et lui-même, est dit nombre premier.

Exemples :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 sont les dix plus petits nombres premiers.

Remarques :

(R_1) : 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur (lui-même).

(R_2) : 2 est le seul nombre premier pair.

<u>Définition de la décomposition</u>

Si a est un entier naturel, il existe p nombres premiers $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tels que $a = k_1^{n_1} k_2^{n_2} \cdots k_p^{n_p}$. Cette écriture s'appelle décomposition de a en facteurs premiers et cette décomposition est unique.

Exemple :

$36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2$ donc la décomposition en facteurs premiers de 36 est $2^2 \cdot 3^2$.

<u>Propriétés :</u>

(P_1) : Un nombre entier naturel non nul a est multiple d'un entier naturel non nul b si et seulement si a contient tout facteur premier de b avec un exposant au moins égal

(P_2) : Un nombre entier non nul b est diviseur d'un entier naturel non nul a, si et seulement si tout facteur premier de b est un facteur premier de a avec un exposant au plus égal.

(P_3) : Un nombre a dont la décomposition en facteurs premiers est $a = k_1^{n_1} k_2^{n_2} \cdots k_p^{n_p}$ possède $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_p + 1)$ diviseurs.

Démonstration :

(P_1) et (P_2) sont évidentes.

Pour montrer (P_3), on constate que :

a admet (n_1+1) diviseurs qui sont multiples de k_1 ; à savoir : $k_1, k_1^2, \ , k_1^{n_1}$

a admet (n_2+1) diviseurs qui sont multiples de k_2 ; à savoir : $k_2, k_2^2, \ , k_2^{n_2}$

a admet (n_p+1) diviseurs qui sont multiples de k_p ; à savoir : $k_p, k_p^2, \ , k_p^{n_p}$

Pour obtenir tous les diviseurs de a, il faut multiplier les diviseurs qui soient multiples de k_1 avec les diviseurs qui sont multiples de k_2 ; et ainsi de suite.

Le nombre total de diviseurs de a est donc : $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_p + 1)$.

Exemple :
$36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2$
36 a « $(2+1)\cdot(2+1) = 9$ » diviseurs qui, sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.

4. Divisibilité dans Z

<u>Définition</u>
Soient a et b deux entiers relatifs.
On dit que a est multiple de b s'il existe un entier relatif c tel que $a = b \cdot c$
Si de plus b est non nul, on dit que b est un diviseur de a ou b divise a

Exemple :
$-56 = (-7) \cdot 8$ signifie que -56 est un multiple de (-7) et 8 ou encore (-7) et 8 sont des diviseurs de -56

<u>Propriétés :</u>
Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que a et b non nuls.
(P_1) : a divise a (réflexivité de la relation « divise »).
(P_2) : Si a divise b et b divise a alors $a = b$ ou $a = -b$.
(P_3) : Si a divise b et b divise c alors a divise c (transitivité de la relation « divise »).
(P_4) : Si a divise b et c alors pour tous entiers relatifs p et q, a divise $p \cdot b + q \cdot c$

Démonstration :
(P_1) : $a = a \cdot 1$ donc a divise a
(P_2) : a divise b donc il existe un entier relatif k tel que $b = k \cdot a$ (1)
b divise a donc il existe un entier relatif k' tel que $a = k' \cdot b$ (2)
De (1) et (2) on a : $a = k' \cdot b = k' \cdot k \cdot a$ donc $a = k' \cdot k \cdot a$, nécessairement $k' \cdot k = 1$, ou bien $k = k' = 1$ ou bien $k = k' = -1$ car k et k' sont deux éléments de $\mathbb{Z}$. Donc si $k = k' = 1$ alors $a = b$, et pour $k = k' = -1$, $a = -b$.
(P_3) : a divise b donc il existe un entier relatif k tel que $b = k \cdot a$, et b divise c donc il existe un entier relatif k' tel que $c = k' \cdot b$, d'où $c = k' \cdot k \cdot a$, ce qui signifie : a divise c.
(P_4) : a divise b donc il existe un entier relatif k tel que $b = k \cdot a$ (1)
a divise c donc il existe un entier relatif k tel que $c = k' \cdot a$ (2)
Or $b = k \cdot a$ entraîne que pour tout entier relatif p ; $b \cdot p = p \cdot k \cdot a$
$c = k' \cdot a$ entraîne que pour tout entier relatif q ; $c \cdot q = q \cdot k' \cdot a$
Donc $b \cdot p + c \cdot q = (p \cdot k + q \cdot k') \cdot a$, ce qui signifie que a divise $b \cdot p + c \cdot q$.

5. Diviseurs et multiples d'un entier :

5.1- Ensemble de diviseurs

Soit a un entier relatif, dans tout ce qui suit, l'ensemble de tous les diviseurs de a sera noté D_a.

Exemple :
Déterminons l'ensemble de diviseurs de 72
$72 = 2^3 \cdot 3^2$ (décomposition en produit de facteurs premiers). Donc 72 admet $(3+1)\cdot(2+1) = 12$ diviseurs.
$D_{72} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}$

<u>Méthode 1</u> : Pour déterminer ces diviseurs, on fait le produit suivant :
$(1 ;2 ;4 ;8)\cdot(1 ;3 ;9) = 1 ;3 ;9 ;2 ;6 ;18 ;12 ;36 ;8 ;24 ;72$

On obtient directement ces diviseurs à l'aide du tableau suivant :

•	*1*	*2*	*4*	*8*
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
9	9	18	36	72

<u>Méthode 2</u>:
Les diviseurs de $72 = 2^3 \cdot 3^2$ est de la forme $2^m \cdot 3^n$ où $m \in \{0,1,2,3\}$ et $n \in \{0,1,2\}$. On obtient tous les diviseurs de a en calculant $2^m \cdot 3^n$ pour (m,n) appartenant à $\{0,1,2,3\} \times \{0,1,2\}$:

(m ; n)	$2^m \cdot 3^n$		(m ; n)	$2^m \cdot 3^n$		(m ; n)	$2^m \cdot 3^n$		(m ; n)	$2^m \cdot 3^n$
(0 ; 0)	1		(1 ; 0)	2		(2 ; 0)	4		(3 ; 0)	8
(0 ; 1)	3		(1 ; 1)	6		(2 ; 1)	12		(3 ; 1)	24
(0 ; 2)	9		(1 ; 2)	18		(2 ; 2)	36		(3 ; 2)	72

5.2- Multiple de a

Soit a un entier non nul.

L'ensemble des nombres a•k, avec k entier relatif, est appelé ensemble des multiples de a. Cet ensemble sera noté $a\mathbb{Z}$.

$a\mathbb{Z} = \{\dots.-3a;\ -2a;\ -a; 0; a; 2a; 3a; \dots\dots\dots.\}$

Exemples :

$1\mathbb{Z} \ = \{\dots.;\ -3;\ -2;\ -1; 0; 1; 2; 3; \dots\dots\dots.\}$

$3\mathbb{Z} \ = \{\dots.; -9;\ -6;\ -3; 0; 3; 6; 9; \dots\dots\dots.\}$

$-5\mathbb{Z} = \{\dots.; -15;\ -10;\ -5; 0; 5; 10; 15; \dots\dots\dots.\}$

Propriétés :

(P_1) : *b divise a est équivalent à* $D_b \subset D_a$

(P_2) : *b divise a est équivalent à* $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$

5.3- Congruence modulo n (n ∈ IN*)

Définition

Soit n ∈ IN* ; a et b deux entiers relatifs

On dit que a est congru à b modulo n si (a – b) est multiple de n c'est-à-dire $(a-b) \in n\mathbb{Z}$.

On note $a \equiv b[n]$

Exemple :

$(29-5) \ \in 12\mathbb{Z}$ *donc* $29 \equiv 5[12]$

$29-(-5) \in 17\mathbb{Z}$ *donc* $29 \equiv -5[17]$

$(-29+5) \in 2\mathbb{Z}$ *donc* $-29 \equiv -5[2]$

$(-29-5) \in 34\mathbb{Z}$ *donc* $-29 \equiv 5[34]$

Remarques

$* \ a \equiv 0[n] \iff a \in n\mathbb{Z}$

$* \ a \equiv b[n] \iff (a-b) \in n\mathbb{Z}$

$* \ Si \begin{cases} a \equiv q \cdot n + r \\ 0 \leq r < n \end{cases} alors\ a \equiv r[n]$

Propriétés

Soit n ∈ IN* et soient a, b et c trois entiers relatifs

(P_1): $a \equiv a[n]$ *donc* $\equiv$ *est réflexive*

(P_2): *Si* $a \equiv b[n]$ *alors* $b \equiv a[n]$ *donc* $\equiv$ *est symétrique*

(P_3): *Si* $a \equiv b[n]$ *et* $b \equiv c[n]$ *alors* $a \equiv c[n]$; $\equiv$ *est donc transitive*

Conclusion : La congruence modulo n est réflexive, symétrique et transitive. On dit que de telle relation est une relation d'équivalence.

Théories des restes

Soient n ∈ IN* et a ; b ; c ; d quatre entiers relatifs

$$Si\ a \equiv b[n]\ et\ c \equiv d[n]\ alors \begin{cases} a+c \equiv b+d[n] \\ a-c \equiv b-d[n] \\ a^p \equiv b^p[n] \text{ où } p \text{ est un entier naturel} \\ a \cdot c \equiv b \cdot d[n] \end{cases}$$

1-Déterminer le reste de la division par 13 de l'entier naturel 5^{2010}

Solution

$5^0 \equiv 1[13]$

$5^1 \equiv 5[13]$

$5^2 \equiv 12[13]$

$5^3 \equiv 8[13]$

$5^4 \equiv 1[13]$

Le reste est périodique de 4

Or $2010 \equiv 2[4]$ *donc* 5^{2010} *et* 5^2 *ont le même reste par 13*

Donc, $5^{2010} \equiv 12[13]$

2-Déterminer les restes possibles de la division de 13^n par 5 selon les valeurs de n

Solution

$13^0 \equiv 1[5]$
$13^1 \equiv 3[5]$
$13^2 \equiv 4[5]$
$13^3 \equiv 2[5]$
$13^4 \equiv 1[5]$

Le reste est périodique de 4 et que les restes possibles sont 1; 2; 3; *et* 4 *tels que*

Si $n = 4k$ *alors* $13^n \equiv 1[5]$
Si $n = 4k+1$ *alors* $13^n \equiv 3[5]$
Si $n = 4k+2$ *alors* $13^n \equiv 4[5]$
Si $n = 4k+3$ *alors* $13^n \equiv 2[5]$

Exercices résolus 2

Dans cette partie, x désigne un entier naturel non nul et $a_p a_{p-1} \cdots \ldots . a_1 a_0$ son écriture décimale.
On a : $x = a_p \cdot 10^p + a_{p-1} \cdot 10^{p-1} + \cdots \ldots \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$

Congruences modulo 5 :

a) Démontrer que : $x \equiv a_0[5]$
b) En déduire les restes des divisions euclidiennes par 5 de 1 826, 3 252 et 27 325

Congruence modulo 4 et 25 :

a) Démontrer que $x \equiv \overline{a_1 \cdot a_0}[4]$ *et* $x \equiv \overline{a_1 \cdot a_0}[25]$
b) Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 4 et 25 de 1 826, 3 252 et 27 325.

Congruence modulo 9 et 3 :

a) Démontrer que : $x \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k[9]$ *et* $x \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k[3]$
b) Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 9 et 3 de 1 826, 3 252 et 27 325

Congruences modulo 11 :

a) Démontrer que : $x \equiv \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \cdot a_k[11]$
b) Déterminer les restes de la division euclidienne par 11 de 1 826, 3 252 et 27 325.

Solutions

Congruences modulo 5 :

a) On a : $10 \equiv 0[5]$ *Donc, pour tout entier k non nul* $10^k \equiv 0[5]$
On en déduit que : $a_p \cdot 10^p + a_{p-1} \cdot 10^{p-1} + \cdots \ldots \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_0[5]$
b) Les restes des divisions euclidiennes par 5 de 1 826, 3 252 et 27 325 sont respectivement 1, 2 et 0

Congruence modulo 4 et 25 :

a) On a : $10^2 \equiv 0[4]$ *et* $10^2 \equiv 0[25]$ *Donc, pour tout entier k supérieur ou égal* 2;
$10^k \equiv 0[4]$ *et* $10^k \equiv 0[25]$
On en déduit que : $a_p \cdot 10^p + a_{p-1} \cdot 10^{p-1} + \cdots \ldots \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_1 10^1 + a_0[4]$ et
$a_p \cdot 10^p + a_{p-1} \cdot 10^{p-1} + \cdots \ldots \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_1 10^1 + a_0[25]$
b) Les restes des divisions euclidiennes par 4 de 1 826, 3 252 et 27 325 sont respectivement 2, 0 et 1.
Les restes des divisions euclidiennes par 25 de 1 826, 3 252 et 27 325 sont respectivement 1, 2 et 0.

Congruence modulo 9 et 3 :

a) On a : $10 \equiv 1[9]$ et $10 \equiv 1[3]$ donc, pour tout entier naturel k $10^k \equiv 1[9]$ et $10^k \equiv 1[3]$

on en déduit que : $a_p \cdot 10^p + a_{p-1} \cdot 10^{p-1} + \cdots \ldots \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k[9]$

$$a_p \cdot 10^p + a_{p-1} \cdot 10^{p-1} + \cdots \ldots \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k[3]$$

b) On a : 1 826 $\equiv 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6$; donc le reste de la division de 1 826 par 9 est 8.
De même, les restes des divisions euclidiennes par 9 de 3 252 et 27 325 sont respectivement 3 et 1.
Les restes des divisions euclidiennes par 3 de 1 826, 3 252 et 27 325 sont respectivement 2, 0 et 1.

Congruences modulo 11 :

a) On a : $10 \equiv -1[11]$ donc, pour tout entier naturel k : $10^k \equiv (-1)^k[11]$ On en déduit que :

$$a_p \cdot 10^p + a_{p-1} \cdot 10^{p-1} + \cdots \ldots \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k [11]$$

b) On a 1 826 ≡-1+8-2+6; donc le reste de la division euclidienne de 1 826 par 11 est 0.
De même, les restes des divisions euclidiennes par 11 de 3 252 et 27 325 sont respectivement 7 et 1.

6. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

6.1- Classe modulo n d'un entier a

Définition

Soit n un entier naturel non nul et a un entier relatif. L'ensemble des entiers relatifs congru à a modulo n s'appelle classe modulo n de l'entier a, noté $\bar{a}$. $\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv a[n]\}$.

Exemple

Les classes modulo 6 de chacun des entiers : 4 , 11, -14 et 0

$\bar{4}=\{x \in Z;\ x \equiv 4[6]\} = \{x \in Z; x = 6k + 4, k \in Z\} = \{\ldots\ldots, -20, -14, -8, -2, 4, 10, 16, 22, \ldots\ldots\ldots\}$

$\overline{11}=\{x \in Z;\ x \equiv 11[6]\} = \{x \in Z; x = 6k + 11, k \in Z\} = \{\ldots\ldots, -19, -13, -7, -1, 5, 11, 17, 23, \ldots\ldots\ldots\}$

$\overline{-26} = \{x \in Z;\ x \equiv -26[6]\} = \{x \in Z; x = 6k - 26, k \in Z\}$
$= \{\ldots, -26, -20, -14, -8, -2, 4, 10, 16, 22 \ldots.\}$

$\bar{0}=\{x \in Z\ x \equiv 0[6]\} = \{x \in Z; x = 6k, k \in Z\} = \{\ldots\ldots, -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, \ldots\ldots\ldots\}$

Remarque : $\bar{4} = \overline{-26}$

6.2- Ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition

Dans la division euclidienne par n ($n \in \mathbb{N}^*$), les restes possibles sont : 0, 1, 2,3,..., (n-1).
L'ensemble $\{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{(n-1)}\}$ s'appelle ensemble quotient modulo n et se note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
C'est-à-dire : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{(n-1)}\}$

Exemples :

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

6.3- Addition et multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Pour tous entiers relatifs a et b, l'addition notée ⊕, et la multiplication notée ⊗, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont définies par : $\begin{cases} \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b} \\ \bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a \cdot b} \end{cases}$

Propriétés

Soient $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$ trois éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on a :

(P_1): $\bar{a} \oplus \bar{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (⊕ est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

(P_2) : $\bar{a} \oplus \bar{0} = \bar{0} \oplus \bar{a} = \bar{a}$ ($\bar{0}$ est l'élément neutre pour ⊕)

(P_3) : $\bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c}) = (\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{c}$ (⊕ est associative)

(P_4) : $\exists \bar{a}' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \bar{a} \oplus \bar{a}' = \bar{a}' \oplus \bar{a} = \bar{0}$ (tout élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a un opposé dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

(P_5): $\bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{b} \oplus \bar{a}$ (⊕ est commutative)

(P_6) : $(\bar{a} \otimes \bar{b}) \otimes \bar{c} = (\bar{a} \otimes (\bar{b}) \otimes \bar{c})$ (⊗ est associative)

(P_7) : $\bar{a} \otimes (\bar{b} \oplus \bar{c}) = (\bar{a} \otimes \bar{b}) \oplus (\bar{a} \otimes \bar{c})$ (⊗ est distributive par rapport à ⊕)

(P_8) : $\bar{a} \otimes \bar{b} = \bar{b} \otimes \bar{a}$ (⊗ est commutative)

(P_9) : $\bar{a} \otimes \bar{1} = \bar{1} \otimes \bar{a} = \bar{a}$ ($\bar{1}$ est l'élément neutre pour ⊗)

Les neuf propriétés se résument en disant que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif unitaire.

Dans Z/ 3Z, les lois ⊕ *et* ⊗ sont définies par le tableau ci-dessous :

⊕	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

⊗	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Dans $Z/4Z$, les lois $\oplus$ *et* $\otimes$ sont données par le tableau suivant :

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

$\otimes$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

7. Nombres premiers :

7.1- Rappel

Tout entier naturel non nul a n'ayant que deux diviseurs positifs 1 et lui-même est appelé nombre premier.

Exemple :

E1 : Soit $a = 13$

On sait que $13 = 1 \bullet 13$ donc 1 et 13 sont les seuls diviseurs positifs de 13

13 est donc un nombre premier

E2 : Soit $a = 6$

On sait que $6 = 1 \bullet 2 \bullet 3$ c'est-à-dire que 1 ; 2 ;3 et 6 sont les diviseurs positifs de 6

Donc, 6 n'est pas premier car il admet 4 diviseurs distincts

7.2- Théorèmes

<u>Théorèmes :</u>

(T_1) : Tout entier naturel non premier admet au moins un diviseur positif premier, son plus petit diviseur distinct de 1

(T_2) : Si a est un entier non premier, alors il existe un entier naturel b premier tel que b divise a et $b^2 < a$

(T_3) : Critère de primalité

Si un entier naturel a n'est divisible par aucun nombre premier dont le carré lui est inférieur ou égal, alors a est premier

Démonstration

(T_1) : Démonstration par l'absurde

Soit a un nombre non premier dont ses diviseurs ordonnés sont 1 ; b ; c ;...

Supposons que le plus petit diviseur b de a ne soit pas premier ; il existe donc un nombre premier b' tel que

$b = b' \bullet q$ b' est donc un diviseur de a ; cela contredit l'hypothèse car b est le plus petit diviseur

Conclusion ; b est un nombre premier

(T_2) : Soit a un nombre non premier

D'après le (T_1), il existe donc un plus petit diviseur premier b de a tel que $a = b \bullet q$

Or b est le plus petit, c'est-à-dire que $b < q$

D'où $b^2 < b \bullet q = a$

Exemple:

Soit $a = 12$ or $12 = 2^2 \bullet 3$

3 est un nombre premier diviseur de 12 tel que $3^2 < 12$

Exemple :

Soit $a = 31$

31 n'est pas divisible par 2 ; 3 ; 5 et 7

Or $5^2 < 31 < 7^2$

Donc 31 est un nombre premier

Remarque : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$est un corps si et seulement si n est premier. Dans un corps tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication.

7.3- Nombres premiers entre eux

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls
a et b sont premiers entre eux si les seuls diviseurs communs de a et b sont -1 et 1

Exercice résolu 3

Montrer que 9 et 16 sont premiers entre eux

Solution :

$9 = 3^2$ donc les diviseurs positifs de 9 sont 1 ; 3 et 9
$16 = 2^4$ donc les diviseurs positifs de 16 sont 1 ;2 ;4 ;8 et 16
Le diviseur commun positif de 9 et 16 est 1
Conclusion 9 et 16 sont premiers entre eux

8. pgcd et ppcm

8.1- Plus grand commun diviseur pgcd

Définition
Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
L'ensemble des diviseurs communs à a et à b possède un plus grand élément appelé « plus grand commun diviseur » de a et b, et noté pgcd (a ; b).

Propriétés
Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
(P_1) : pgcd (a ; b) = pgcd (b ; a)
(P_2) : Si b divise a, on a pgcd (a ; b) = b ; en particulier pgcd (a ; 1) = 1 et pgcd (a ; a) = a.
(P_3) : Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Soient q le quotient et r ~~le quotient et~~ le reste de la division euclidienne de a par b.
(On a : $a = b \cdot q + r$)
Alors Si $r = 0$, pgcd (a ; b) = b
Si $r \neq 0$, alors pgcd (a ; b)= pgcd (b ; r)
(P_4) : pgcd (a ; b) divise a et b
(P_5) : Si pgcd (a ; b)=d alors il existe deux entiers k et k' premiers entre eux tels que $a = d \cdot k$ et $b = d \cdot k'$
(P_6) : a et b sont premiers entre eux si pgcd (a ; b) = 1
(P_7) : Si d = pgcd (a ; b) alors pour tout entier naturel k non nul ; pgcd ($k \cdot a$; $k \cdot b$) = $k \cdot d$

8.2- Plus petit commun multiple ppcm

Définition
Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
L'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et à b possède un plus petit élément appelé « plus petit commun multiple » de a et b, et noté ppcm (a ; b).

Propriétés
Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
(P_1) : a et b sont premiers entre eux si et seulement si ppcm (a;b) = $a \cdot b$
(P_2) : Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a ppcm (ka;kb) = k ppcm (a ; b)
(P_3) : Pour tous entiers naturels a et b on a: ppcm(a ;b).pgcd(a ; b) = $a \cdot b$

Recherche du pgcd de deux entiers par l'Algorithme d'Euclide

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Pour déterminer le pgcd de a et de b, on effectue des divisions euclidiennes successives de a par b, puis du diviseur par le reste, le dernier reste non nul est le pgcd de a et de b. C'est l'Algorithme d'Euclide

Exercices résolus 4

❶ Quel est le pgcd de 410 258 et de 126 ?
Pour déterminer le pgcd de 410 258 et de 126, écrivons les divisions euclidiennes successives :
$410\,250 = 126 \cdot 3\,256 + 2$
$126 = 2 \cdot 63 + 0$
Donc pgcd (410 258 ; 126) = 2

❷ Quel est le pgcd de 15 648 et de 657 ?

Ecrivons les divisions euclidiennes successives :

$15\,648 = 657 \cdot 23 + 537$

$657 = 537 \cdot 1 + 120$ → $537 = 120 \times 4 + 57$

$120 = 57 \cdot 2 + 6$

$57 = 6 \cdot 9 + 3$

$6 = 3 \cdot 2 + 0$

Donc pgcd (15 648 ; 657) = 3

8.3- Théorème de Bézout

> Si a et b sont deux entiers naturels non nuls dont leur pgcd = d, alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $a \cdot u + b \cdot v = d$
> a et b sont premiers entres eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a \cdot u + b \cdot v = 1$

Démonstration

D'après l'algorithme d'Euclide ; on admet que le pgcd (a ; b) est le dernier reste non nul de la division euclidienne de a par b

$a = b \cdot q_1 + r_1$

$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$

$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$

.

.

.

$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n$

$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}$

Donc $d = \text{pgcd}(a ; b) = r_n = r_{n-2} - r_{n-1} \cdot q_n$

On va démontrer par récurrence qu'il existe deux entiers relatifs u_n et v_n tels que $r_n = a \cdot u_n + b \cdot v_n$

Pour $n = 1$ on a $r_1 = a_1 - b \cdot q_1$ (vraie)

Supposons que cette proposition est vraie jusqu'à l'ordre n -1 et n - 2 c'est-à-dire qu'il existe des entiers relatifs u_{n-1} ; u_{n-2} ; v_{n-1} et v_{n-2} tels que $r_{n-1} = a \cdot u_{n-1} + b \cdot v_{n-1}$ et $r_{n-2} = a \cdot u_{n-2} + b \cdot v_{n-2}$

Démontrons qu'il existe deux entiers relatifs u_n et v_n tels que $r_n = a \cdot u_n + b \cdot v_n$

Or, d'après l'algorithme d'Euclide $r_n = r_{n-2} - r_{n-1} \cdot q_n$

Donc on a : $r_n = a \cdot u_{n-2} + b \cdot v_{n-2} - (a \cdot u_{n-1} + b \cdot v_{n-1}) \cdot q_n$

$= a \cdot (u_{n-2} - u_{n-1} \cdot q_n) + b \cdot (v_{n-2} - v_{n-1} \cdot q_n)$

Posons $u_n = u_{n-2} - u_{n-1} \cdot q_n$ et $v_n = v_{n-2} - v_{n-1} \cdot q_n$

Il en résulte donc qu'il existe deux entiers relatifs $u_n = u_{n-2} - u_{n-1} \cdot q_n$ et $v_n = v_{n-2} - v_{n-1} \cdot q_n$ tels que $r_n = d = a \cdot u_n + b \cdot v_n$

Exemple :

$35 \cdot 2 + 13 \cdot (-3) = 1$ alors 35 et 13 sont premiers entre eux, ou bien pgcd(35,13)=1

Deux entiers consécutifs non nuls n+1 et n+2 sont premiers entre eux car $(n+1) \cdot (-1) + (n+2) \cdot 1 = 1$

Exercice résolu 5

Détermination des coefficients d'une égalité de Bézout

1- Démontrer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que 564 et 271 sont premiers entre eux.

2- En déduire deux entiers relatifs u et v tels que : $564u + 271v = 1$

Solution :

1- On a $564 = 271 \cdot 2 + 22$ donc pgcd(564 ; 271) = pgcd (271 ; 22)

On a $271 = 22 \cdot 12 + 7$ donc pgcd (271 ; 22) = pgcd (22 ; 7)

On a $22 = 7 \cdot 3 + 1$ donc pgcd (22 ; 7) = pgcd (7 ; 1)=1

Les nombres 564 et 271 sont premiers entres eux

2- Utilisons les divisions euclidiennes précédentes ; de la dernière à la première.

On a $1 = 22 + 7 \cdot (-3)$

$= 22 + (271 - 22 \cdot 12) \cdot (-3)$

$= 271 \cdot (-3) + 22 \cdot 37$

$= 271 \cdot (-3) + (564 - 271 \cdot 2) \cdot 37$

$= 564 \cdot 37 + 271 \cdot (-77)$

8.4- Théorème de Gauss

Théorème
Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si a divise b•c et si a et b premiers entre eux, alors a divise c.

Démonstration :
Il existe trois entiers k, u et v tels que : b•c = k•a et a•u+b•v=1 tel que
On a : a•u•c + b•v•c = c : donc : a• (u•c + k•v) = c
On en déduit que a divise c.

9. Résolution de l'équation ax + by =c

Pour que cette équation admet des solutions dans ZxZ ; il suffit que le pgcd (a ; b) est un diviseur de c
Désormais on suppose que a et b sont premiers entres eux

9.1- Méthode 1

Si $(x_0 ; y_0)$ est une solution particulière de ax + by = c alors toutes les solutions de ce système sont données par $\begin{cases} x = -b \bullet k + x_0 \\ y = a \bullet k + y_0 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$

En effet $(x_0 ; y_0)$ est une solution particulière de ax + by = c c'est-à-dire que $ax_0 + by_0 = c$

D'où le système $\begin{cases} ax + by = c \\ ax_0 + by_0 = c \end{cases}$

En faisant la différence membre à membre on a :

$a\bullet (x - x_0) + b\bullet (y - y_0) = 0$ si et seulement si $a\bullet (x - x_0) = - b\bullet (y - y_0)$

Or a et b sont premiers entre eux ;et d'après Gauss on a : $(x - x_0) = - b\bullet k$ et $(y - y_0) = a\bullet k$ où k appartient à Z

Il en résulte que $\begin{cases} x = -b \bullet k + x_0 \\ y = a \bullet k + y_0 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$

9.2- Méthode 2

Si $(x_0 ; y_0)$ est une solution particulière de ax + by = 1 alors toutes les solutions de ce système sont données par $\begin{cases} x = -b \bullet k + c \bullet x_0 \\ y = a \bullet k + c \bullet y_0 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$

Remarque
Si la résolution étant dans INxIN alors il faut vérifier que les valeurs prises par x et y sont positives

Exercice résolu 6
Résoudre dans ZxZ l'équation 5x – 3y = 4
Solution

> 3 et 5 sont premiers entre eux ; donc cette équation admet des solutions dans $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$
> Comme 5•2 – 3•2 = 4 donc le couple (2 ; 2) est une solution particulière de l'équation 5x – 3y = 4
> L'ensemble de solutions de cette équation est de $\begin{cases} x = 3k + 2 \\ y = 5k + 2 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercice résolu 7
On se propose de résoudre dans Z^2 l'équation : (E): $34x - 15y = 2$

1. Résoudre dans Z^2 l'équation : (E'): 34x – 15y = 0
2. Déterminer une solution (x_0, y_0) de (E)
3. Résoudre (E').

Solution

> 1. Soit (x, y) une solution de (E'). On a $34x = 15y$. 15 divise $34x$ et 15 premier avec 34 ; donc, d'après le théorème de Gauss, 15 divise x. Il existe, donc, un entier relatif k tel que : $x = 15k$.
> De même, on en déduit que : $y = 34k$. Donc (x ;y) = (15k ; 34k) où k est un entier relatif
> Réciproquement, pour tout entier relatif k, le couple (*15k, 34k*) est solution de (E') car 34.15k – 15.34k = 0
> L'ensemble des solutions de (E')est donc {(*15k, 34k*), k∈ $\mathbb{Z}$}
> 2. On remarque que 4 x 34 = 136 et 9 x 15= 135 ; donc 34 x 8 – 15 x 18= 2 . On peut prendre : $(x_0, y_0) = (8, 18)$

3. Soit un couple d'entiers relatifs. On a 34x-15y=0 ; ce qui signifie : $\mathbf{34(x+x_0)-15(y+y_0)=2}$
On en déduit que les solutions de (E') sont les couples $(x+x_0 : y+y_0)$ où (x,y) est solution de (E')
L'ensemble des solutions de (E') est donc : $\{(15k+8 : 34k+18), k \in \mathbb{Z}\}$

<u>Exercice résolu 7</u>

Résoudre dans Z le système (S_1) : $\begin{cases} x \equiv -1[34] \\ x \equiv +1[15] \end{cases}$

Solution

Soit x une solution du système (S1). Il existe deux entiers relatifs p et q tels que $x = 34p - 1$ et $x = 15q + 1$
On en déduit que $34p - 15q = 2$
D'après l'étude précédente, il existe un entier relatif k tel que : $(p ; q) = (15k + 8 ; 34k + 18)$
Réciproquement, soit k un entier relatif
Posons: $x = 34(15k + 8) - 1$
On a: $x \equiv -1[34]$ *et* $x \equiv +1[15]$

L'ensemble des solutions de (S_1) est donc : $\{(510k+271) ; k \in \mathbb{Z}\}$
(A noter qu'on obtient le même résultat en posant $x = 15(34k + 18) + 1$)

EXERCICES

Exercice 1 :

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{37 \times 2}$ dans le système de numération de base 8.

Déterminer x pour que :

1. A soit divisible par 6.
2. A soit divisible par 5.

En déduire qu'il existe x tel que A soit divisible par 30.

Exercice 2

1. Ecrire dans le système décimal le nombre $345_{(6)}$
2. Ecrire dans le système de base 7 le nombre 2009 écrit dans la base 10
3. Soit $a = 4p32$ dans la base 5 avec p entier naturel inférieur ou égal à 4. Déterminer p pour que a est divisible par 7

Exercice 3 :

Pour tout n élément de IN, on considère les deux entiers : $U_n = 2^n + 3^n$ $V_n = 2^{n+1} + 3^{n+1}$.

En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que U_n et V_n sont premiers entre eux.

Exercice 4

1. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne d'un entier par 5 puis par 10.
2. Démontrer que si $m \equiv 2\ [10]$, alors $m \equiv 2[5]$ et $m \equiv 2[2]$.

Exercice 5

On suppose que $r \equiv 2[5]$ et $s \equiv 3[5]$ .Déterminer le reste de la division par 5 de $r^2 + 2s^2$.

Exercice 6

1. Déterminer les restes possibles de 2601^n par 11 pour tout entier naturel n .
2. En déduire la résolution dans IN de: $2601^{173} \equiv x \bmod(11)$.

Exercice 7

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de 3^n par 7 ?
2. Préciser, alors, le reste de la division de 2010^{142} par 7.

Exercice 8

Déterminer le reste de la division euclidienne de $8.35^{121} - 12.50^{251}$ par 17.

Exercice 9 :

Donner suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes de la division euclidienne de 2^n par 5.

En déduire le reste de la division euclidienne par 5 de 2^{3542}

Donner le reste de la division euclidienne par 5 de $(3722)^{563}$

Exercice 10

1. Ecrire Donner suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes de la division euclidienne de 2^n par 7.
2. En déduire que si n n'est pas multiple de 3, alors $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7.

Exercice 11

1. Vérifier que $1000 \equiv 1[37]$
2. En déduire que pour tout entier naturel on a : $10^{3n} \equiv 1[37]$
3. Quel est, alors le reste de la division euclidienne de 1001037 par 37 ?

Exercice 12

1. Ecrire la division euclidienne de 1000 par 11.
2. Soit n un entier naturel.
   Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 11.
3. a) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de $10^{3n+2} + 10^{3n}$ par 11
   b) En déduire le reste e la division euclidienne par 11de 101000000.

Exercice 13

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5

1. Démontrer que $2p^2 - 2$ est divisible par 6
2. En déduire que $128p^2 - 2$ est divisible par 6
3. Démontrer que si $8p - 1$ est un nombre premier, alors $8p + 1$ ne l'est pas, et que si $8p + 1$ est un nombre premier ; alors $8p - 1$ ne l'est pas

Exercice 14 :

Démontrer que pour tout entier relatif n on a :

1. $n^3 - n$ est divisible par 6
2. $n^4 - n^2$ est divisible par 12
3. $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6
4. $n^5 - n$ est divisible par 30
5. $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24

Exercice 15

1. Démontrer que quelque soit l'entier relatif n ; si n n'est ni multiple de 2 ni multiple de 3 alors 24 divise $n^2 - 1$
2. Démontrer que quelque soit l'entier relatif n ; si n n'est pas divisible par 3 alors 9 divise $n^6 - 1$

Exercice 16 :

Déterminer les entiers relatifs n vérifiant la propriété indiquée

1. $n - 3$ divise $n + 2$
2. $n - 4$ divise $2n + 8$
3. $n + 3$ divise $5n - 2$

Exercice 17

1. Déterminer, selon le reste de la division de n par 7, le reste de la division de $n^2 + n - 6$ par 7
2. En déduire l'ensemble des entiers relatifs n tels que 7 divise $n^2 + n - 6$
3. En s'inspirant de la méthode utilisée précédente, déterminer l'ensemble des entiers relatifs n vérifiant la propriété indiquée
   a) $n^2 + n - 1$ est divisible par 11
   b) $n^2 + n + 1$ est divisible par 6
   c) $4^n - 9$ est divisible par 13

Exercice 18

1. En écrivant $17 = 13 + 4$, déterminer les restes des divisions euclidiennes par 13 de 17^k pour $0 \leq k \leq 6$. En déduire que la suite des restes est périodique
2. Indiquer selon les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 17^n par 13
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 17^{53} par 13
4. Démontrer que le reste de la division euclidienne de 2019^{53} par 13 est le même que celle de la division euclidienne de 17^{53} par 13. Quel est ce reste ?

Exercice 19

Soit n un entier relatif

a) a) Déterminer toutes les valeurs possibles du reste de la division de n^4 par 5
   b) En déduire que quel que soit l'entier relatif n, si n n'est pas multiple de 5 alors 5 divise $n^4 - 1$
   c) Démontrer que quel que soit l'entier relatif n, 10 divise $n^5 - n$

b) a) Soit deux entiers relatifs a et b ? Développer $(a + b)^5$
   b) En déduire que quels que soient les entiers relatifs a et b, $(a + b)^5$ et $a^5 + b^5$ ont même reste dans la division euclidienne par 5
   c) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tel que le reste de la division de $n^5 + 101^5$ par 5 soit égal à 2

Exercice 20

1. a) Quel est le reste de la division de 522 par 23 ?
   b) Après avoir vérifié que $2002 = 22.91$, donner le reste de la division de 5^{2002} par 23.
2. Montrer que 23 divise $5^{2002} - 3^{2003}$
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n : 23 divise $4.5^{22n} + 3^{22n+1}$

Exercice 21

1. Déterminer les entiers naturels n pour que $n^2 + 3n + 2$ soit divisible par 3
2. a) Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de 5^n par 6
   b) En déduire le reste de 2009^{2010} par 6

Exercice 22 :

Dresser la table d'addition et le table de multiplication dans Z/3Z Z/3Z

Exercice 23

Soit à résoudre dans Z le système (S) : $\begin{cases} 2x^2 + x - 3 \equiv 0[7] \\ |x| < 30 \end{cases}$

Soit (E) l'équation définie sur par : $\overline{2}x^2 + x - \overline{3} = \overline{0}$

1. a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ on a : $\overline{2}x^2 + x - \overline{3} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{2}(x - \overline{1})(x - \overline{2}) = \overline{0}$

   b) En déduire la résolution de (E) dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

2. En utilisant les questions précédentes, déterminer toutes les solutions de (S)

Exercice 24

Soit à résoudre dans IN l'équation (E) : $3x^2 - 2x + 4 = 0[5]$

1. Montrer que dans l'ensemble quotient Z/5Z on a : $\dot{3}x^2 - \dot{2}x + \dot{4} = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{3}(x - \dot{3})(x - \dot{1}) = \dot{0}$
2. *En déduire la résolution dans IN de (E)*

Exercice 25

On considère le système (S) défini par $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 1[7] \end{cases}$

1- Résoudre dans ZxZ l'équation $5x - 7y = -1$

2- En déduire la résolution dans IN du système (S)

Exercice 26 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3

1. Démontrer que $4n - 1$ est divisible par 3
2. Démontrer que si $2n + 1$ est un nombre premier ; alors $2n - 1$ n'est pas un nombre premier

Exercice 27 : Calculer les entiers naturels a, b, c, d, m, n, u, v qui vérifient :

1. $ab = 4335$ et pgcd (a ; b) =17
2. $c + d = 1216$ et pgcd (c ; d) = 64
3. $m + n = 704$ et pgcd (m ; n) = 32
4. $u - v = 105$ et pgcd (u ; v) = 15

Exercice 28 :

Soient m et n deux entiers naturels tels que $n < m$ et la division euclidienne de m par n s'écrit $m=nq + r$

1. Montrer que si u est un diviseur commun à m et n, alors u divise r.
2. Montrer que si v est un diviseur commun à r et n, alors v divise m.
3. Que peut-on en déduire de pgcd (m, n) et pgcd (r, n) ?

Exercice 29 :

En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de :

- 342 et 212
- 728 et 114
- 650 et 8543
- 2590 et 365

Exercice 30 :

Soit n un entier naturel, on pose $a=2n+8$; $b=5n+15$. On désigne par d le pgcd de a et b.

1. Démontrer que pour tout n élément de IN, d divise 10.
2. Déterminer l'ensemble S des entiers naturels n pour lesquels d =10 c'est à dire l'ensemble $S = \{n \in IN / \text{pgcd}(2n+8 ; 5n+15)=10\}$.

Exercice 31 :

Soit n un entier naturel non nul. On pose $a = 7n - 2$ et $b = 3n + 1$

1. Démontrer que le pgcd de a et b est un diviseur de 13
2. Déterminer les entiers n pour que pgcd (a ;b) = 13

Exercice 32

On pose d = pgcd (a ; b) et m = ppcm (a ; b)

Pour chacun des cas suivants ; déterminer les couples (a ; b) tel que $a < b$ vérifiant :

1. d = 15 et m = 300
2. $d + m = 126$ et $5 < d < 10$
3. $m - 5d = 52$ et tels que a ne divise pas b

Exercice 33 :

Trouver les couples (a ; b) d'entiers naturels dont le pgcd et le ppcm sont les solutions de l'équation : $X^2-91X+588=0$.

Exercice 34 :

Soient s, t et u trois entiers relatifs ; montrer que :

1. pgcd (su ; st) = u.pgcd (s ; t)
2. pgcd $(s^2 ; t^2) = [\text{pgcd}(s ; t)]^2$
3. Si pgcd (s ; t) =1 et u divise s, alors pgcd (u ; t) = 1

Exercice 35

Déterminer tous les couples des entiers naturels (a ; b) vérifiant $a - b = 12$ et ppcm (a ; b) = 90

Exercice 36 :

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, les entiers $n - 1$ et $n^2+ 2n - 2$ sont premiers entre eux.

Exercice 37

1. Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 1980 ?
2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls
   Déterminer a et b sachant que ppcm (a, b)2 - 5pgcd (a, b)2 = 1980

Exercice 38 :

Dans chacun des cas suivants, décomposer en produit des facteurs premiers les nombres x et y puis déterminer leur ppcm et pgcd

1. $x = 4312$ et $y = 6776$.
2. $x = 28665$ et $y = 412375$

Exercice 39 :

Soient m et n deux entiers relatifs non nuls. On pose : $m = 15x + 4y$ et $n = 11x + 3y$

1. Calculer $3m - 4n$ et $15m - 11n$.
2. Démontrer que pgcd (x, y) = pgcd (m, n)

Exercice 40 :

Déterminer les entiers relatifs m et n dans chaque équation :

1. $12m = 7n$.
2. $17m = 21n$.
3. $48m - 64n = 0$

Exercice 41 :

Résoudre les équations :

1. $14x + 25y = 1$
2. $3x + 4y = 1$

Exercice 42 :

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'équation $3x - 6y = a$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si, 3 divise a
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :
   a) $3x - 6y = 3$ b) $3x+6y = -3$
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$, de $(3x - 6y + 4)(3x - 6y -4)= -7$

Exercice 43 :

Résoudre dans INxIN l'équation $36x - 14y = 6$

Exercice 44 :

On considère les 3 entiers naturels a, b et c qui s'écrivent dans la base n par : $a = (111)_n$; $b = (114)_n$; $c = (13054)_n$

1. Sachant que $c = ab$, montrer que $n = 6$
   Dans toute la suite, on prend $n = 6$
2. a) Ecrire a, b, et c dans la base décimale
   b) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que a et b sont premiers entre eux
   c) En déduire la résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $ax + by = 3$

Exercice 45

1. a) Déterminer le pgcd des nombres 168 et 20
   b) Soit l'équation $168x+20y=6$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a-t-elle une solution ?
   c) Soit l'équation $168x+20y=4$ d'inconnues entiers relatifs x et y. Cette équation possède-t-elle des solutions ?

2. a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver deux entiers relatifs m et n tels que : $42m+5n=1$.

b) En déduire deux entiers relatifs u et v tels que : $42u+5v=2$.

c) Démontrer que le couple des entiers relatifs $(x ; y)$ est solution de l'équation $42x+5y=2$ si et seulement si $42(x+4) = 5(34-y)$.

d) Déterminer, alors, tous les couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $42x+5y=2$

3. Déduire de 2/ les couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solution de l'équation $(42x+5y-3)(42x+5y+3) = -5$

Exercice 46

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $5x - 3y = 1$

2. En déduire la résolution dans $\mathbb{Z}$ de $\begin{cases} z \equiv 1 \bmod(5) \\ z \equiv 2 \bmod(3) \end{cases}$

Exercice 47

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux

2. On considère l'équation (E) : $143x + 51y = 1$; où x et y sont des entiers relatifs. Vérifier, en utilisant, par exemple, la question 1- que 143 et 51 sont premiers entres eux.
En déduire le couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tels que $143u + 51v = 1$, puis une solution $(x_0 ; y_0)$ de (E)

3. Soit (E') l'équation $143x + 51y = 0$ où x et y sont des entiers relatifs

a) Démontrer que $(x ; y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x - x_0 ; y - y_0)$ est solution de (E')

b) Résoudre (E')

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E)

Exercice 48 : Soit $n \in \mathbb{Z}$

a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $nu + (2n + 1)v = 1$

b) En déduire que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux

c) Que peut-on dire de la fraction $\frac{2n+1}{n}$

d) Démontrer que ; pour tout entier relatif n ; la fraction $\frac{3n+4}{5n+7}$ est irréductible

Exercice 49 :

On considère l'équation (E) d'inconnue (x, y) définie par : $39x+19y=1$

1. Démontrer que cette équation admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}$
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver un couple d'entiers relatifs (x, y) solution de (E)
3. Démontrer que si (x, y) est solution de (E), alors il existe un entier k tel que $x=1-19k$ et $y=-2+39k$
4. Vérifier que, s'il existe un entier k tel que $x=1-19k$ et $y=-2+39k$, alors (x, y) est solution de (E)
5. Conclure.

Exercice 50

1. Déterminer deux entiers relatifs a et b tels que : $2a + 3b = 1$
2. On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la droite (D) d'équation : $2x+3y-1=0$
3. En utilisant le résultat du 1 déterminer un point du plan à coordonnées entières appartient à (D)
4. On cherche à déterminer tous les points du plan à coordonnées entières appartient à (D)

a) Démontrer que $2(x-a) = 3(b-y)$, avec a et b les nombres trouvés en 1

b) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que : $x-a = 5k$ et $y-b=3k$

c) Justifier que l'ensemble des points à coordonnées entières de (D) est l'ensemble des points de coordonnées $(a+5k, b-3k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$

d) La droite (D) possède - t - elle un point de coordonnées entières positives ?
Si oui, préciser le.

CHAPITRE 2 : SUITES NUMERIQUES

1. Raisonnement par récurrence

<u>Définition</u>
Le raisonnement par récurrence est utilisé uniquement pour démontrer une proposition de la forme : « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$: $p(n)$ », où $p(n)$ est une propriété dépendant exclusivement de l'entier naturel n.

La démonstration par récurrence de cette proposition se fait en trois étapes.

<u>Première étape</u> (*Initialisation*):
Pour $n = n_0$, on vérifie que $p(n_0)$ est vraie.

<u>Deuxième étape</u> :
Pour $n \geq n_0$, on suppose que $p(n)$ est vraie (*Hypothèse de récurrence*), et on montre que $p(n+1)$ est encore vraie (*Conclusion de récurrence*).

<u>Troisième étape</u> :
On conclut que la propriété $p(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

<u>**Exercice résolu 1**</u>

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Solution

- Vérification/Initialisation

Pour $n = 1$, $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, la propriété est vraie. Car $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

- Supposons que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie jusqu'au rang n, où $n \in \mathbb{N}^*$, (hypothèse de récurrence) et montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$, c'est-à- dire :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

En effet, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

<u>**Exercice résolu 2**</u>

Montrer que pour tout entier naturel n, $A_n = 10^n - 1$ est un multiple de 9.

Solution.

- Vérification /Initialisation : Pour n = 0 : $A_0 = 10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 9\text{x}0$ et 0 est multiple de 9, la propriété est vraie. Supposons que $A_0 = 10^n - 1$ est un multiple de 9 jusqu'au rang n (*hypothèse de récurrence*) et montrons qu'elle est encore vraie au rang n+1, c'est-à- dire : $A_{n+1} = 10^{n+1} - 1$ est un multiple de 9.

En effet, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $A_n = 10^n - 1$ est un multiple de 9

Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A_n = (10^n - 1) = 9k$

$10(10^n - 1) = 10 \times 9k$

$10^{n+1} - 10 = 10 \times 9k$

$10^{n+1} - 1 - 9 = 10 \times 9k$

$10^{n+1} - 1 = 9 + 10 \times 9k$

$10^{n+1} - 1 = 9\text{x}(1 + 10k)$

$A_{n+1} = 10^{n+1} - 1 = 9k' \, avec \, k' = 1 + 10k \, et \, k' \in \mathbb{N}$

$A_{n+1} = 10^{n+1} - 1$ est un multiple de 9, la propriété est donc vraie au rang n+1.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $A_n = 10^n - 1$ est un multiple de 9.

2. Suites monotones

Définitions

Soient $I \subset \mathbb{N}$ et (u_n) une suite définie sur I.

- (u_n) est *croissante* (respectivement strictement croissante) si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement $u_{n+1} > u_n$)
- (u_n) est *décroissante* (respectivement strictement décroissante) si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} \leq u_n$ (respectivement $u_{n+1} < u_n$).
- (u_n) est *constante* si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarque :
Une suite est dite *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang.

Méthodes

Pour démontrer qu'une suite est monotone, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Raisonnement par récurrence.
- Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$
- Etude du sens de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$ pour $u_n = f(n)$
- Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1, pour une suite à termes strictement positifs.

Exercice résolu 3

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que cette suite est croissante.
(Indication : *démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$

Solution

Utilisons le raisonnement par récurrence.
- Vérification / Initialisation : $u_0 = 2$ *et* $u_1 = 4$ $u_1 \geq u_0$ est vraie.
- Supposons que $u_{n+1} \geq u_n$ jusqu'au rang n (*hypothèse de récurrence*) et montrons qu'elle est encore vraie au rang n+1, c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

En effet, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $u_{n+1} \geq u_n$

Donc $\frac{1}{2}u_{n+1} \geq \frac{1}{2}u_n$

$\frac{1}{2}u_{n+1} + 3 \geq \frac{1}{2}u_n + 3$

D'où $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, la propriété est vraie au rang n+1. Donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Conclusion : la suite (u_n) est croissante.

Exercice résolu 4

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $U_n = 2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Pour cet exercice; il est préférable d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

En effet $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n$
$= 2^n(2-1)$
$= 2^n > 0$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement croissante.

3. Suites majorées – minorées – bornées

Définitions

Soient $I \subset \mathbb{N}$ et (u_n) une suite définie sur I.

- (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in I$, $u_n \leq M$.
- (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout $n \in I$, $u_n \geq m$.
- (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exercice résolu 5

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$

Solution

– *Pour* $n = o, u_0 = 0$ *donc* $0 \leq u_0 \leq 2$
– *Supposons que* $0 \leq u_n \leq 2$ *jusqu'au rang* n (*hypothyse de récurrence*)
et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ *est encore vraie. En effet* $0 \leq u_n \leq 2$
Donc $0 + 2 \leq u_n + 2 \leq 2 + 2$
soit $2 \leq u_n + 2 \leq 4$
Ainsi $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 4$ *c'est-à-dire* $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$
Or $0 \leq \sqrt{2}$ *d'où* $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

La propriété reste encore vraie au rang $n+1$.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$

4. Suite convergente – limite d'une suite

<u>Définitions</u>

- Une suite (U_n) est convergente si elle admet une limite finie l ($l \in \mathbb{R}$) lorsque n tend vers $+\infty$.
  Dans ce cas on écrit $\lim_{n\to\infty} U_n = l$; on dit aussi que (u_n) converge vers l.
  Retenez : $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ équivaut à $\lim_{n\to+\infty}(U_n - l) = 0$

<u>Propriétés</u> :
(P_1) : La limite d'une suite (U_n), si elle existe, est unique.
(P_2) : Une suite est divergente si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire elle a une limite infinie ou elle n'admet pas de limite.

Exemples

a) $u_n = \frac{2n-3}{n+1}$; $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ (U_n) est convergente
b) $v_n = \frac{-2n^2-3}{n+1}$; $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ (v_n) est divergente
c) $w_n = \frac{n+1}{n^2n+1}$; $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ (v_n) est convergente
d) $t_n = \cos(n\pi)$; $\begin{cases} \cos(n\pi) = 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ \cos(n\pi) = -1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ (t_n) n'admet pas de limite donc (t_n) est divergente

Remarques

- **Suite (U_n) définie par $u_n = f(n)$**
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$
- **Suite $\left(a^n\right)$, $a \neq 0$.**
  $$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} n'existe\ pas\ si\ a \leq -1 \\ 0 & si -1<a<1 \\ 1 & si\ a=1 \\ +\infty & si\ a>1 \end{cases}$$
- **Suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$**

<u>Théorème</u>

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I telle que $u_{n+1} = f(u_n)$
  Si la suite (u_n) converge vers le nombre réel l et si f est continue en l alors $f(l) = l$.

<u>Théorèmes</u>

(T_1) : Toute suite croissante et majorée est convergente.
(T_2) : Toute suite décroissante et minorée est convergente.
(T_3) : Toute suite croissante et non majorée est divergente (elle admet pour limite $+\infty$).
(T_4) : Toute suite décroissante et non minorée est divergente (elle admet pour limite $-\infty$).

<u>Exercice résolu 6</u>

Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que la suite (U_n) est croissante et majorée par 2.
En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Solution

- Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Vérification : Initialisation
$u_0 = 0$ *et* $u_1 = \sqrt{2}$
$u_1 > u_0$ *est vraie.*
Supposons que $u_{n+1} \geq u_n$ au rang n (*hypothèse de récurrence*) et montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$
En effet, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $u_{n+1} \geq u_n$
donc $u_{n+1} + 2 \geq u_n + 2$
$\sqrt{u_{n+1} + 2} \geq \sqrt{u_n + 2}$
d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} \geq u_{n+1}$
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion : la suite (U_n) est croissante.

- On a déjà vu que cette suite est majorée par 2.
- Comme la suite (U_n) est croissante et majorée elle est convergente. Soit l sa limite.

l vérifie $l = \sqrt{l+2}$ donc $l^2 = l + 2$ *et* $l \geq 0$
il en résulte que $l = 2$ d'où
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Théorèmes

(T_1): Soient (u_n) *et* (v_n) deux suites.
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ ***tel que pour tout*** $n \geq n_0 : u_n \geq v_n$ ***alors*** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

(T_2) : Soient (u_n) *et* (v_n) deux suites telles que

- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ ***tel que pour tout*** $n \geq n_0 : u_n \geq v_n$ ***alors*** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

(T_3) : Soient (u_n) *et* (v_n) deux suites telles que

- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$
- s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ ***tel que pour tout*** $n \geq n_0 : |u_n - l| \leq |v_n|$ alors la suite (u_n) a pour limite l.

(T_4) : Soient (u_n) (v_n) et (w_n) trois suites telles que

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$
- s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ ***tel que pour tout*** $n \geq n_0 : u_n \leq v_n \leq w_n$ ***alors*** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$

5.1- Suite arithmétique

Définitions

Soient $I \subset \mathbb{N}$ et (u_n) une suite définie sur I.

- (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier $n \in I$ on a :
- $u_{n+1} = u_n + r$ *ou* $u_{n+1} - u_n = r$
- Le réel r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n).

Théorèmes

(T_1) : Une suite (u_n) définie sur $I \subset \mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison r si et seulement si pour tous entiers naturels n et p tels que $p<n$, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$
En particulier :
$u_n = u_0 + nr$
$u_n = u_1 + (n-1)r$

(T_2): Trois nombres a, b, c sont en progression arithmétique si et seulement si $a + c = 2b$.

Variation et limite

- - si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

- - si $r<0$, (u_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Somme de termes consécutifs

$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \dfrac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$

En particulier :

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n)$

5.2- Suite géométrique

Définitions

Soient $I \subset \mathbb{N}$ et (u_n) une suite définie sur I.

- (u_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = qu_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$
- Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique (u_n) .

Théorèmes

(T 1) : Une suite (u_n) définie sur $I \subset \mathbb{N}$ est une suite géometrique de raison q si et seulement si pour tous entiers naturels n et p tels que $p<n$, on a $u_n = u_p\, q^{n-p}$

En particulier :

$u_n = u_0 q^n$

$u_n = u_1 q^{n-1}$

(T 2) : Trois nombres a , b , c sont en progression géométrique si et seulement si a c = b ².

Variation et limite

- Suite à termes positifs
  - si $q>1$, (u_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
  - si $0<q<1$, (u_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- Suite à termes négatifs
  - si $q>1$, (u_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
  - si $0<q<1$, (u_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Somme de termes consécutifs

$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \dfrac{u_p}{1-q}(1-q^{n-p+1})$ $avec\ q \neq 1$

En particulier :

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{u_0}{1-q}(1-q^{n+1})$

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{u_1}{1-q}(1-q^n)$

Remarque

Une suite arithmétique de raison $r=0$ est une suite géométrique de raison $q=1$; c'est aussi une suite constante. Dans ce cas, $S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)u_p$

En particulier :

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)u_0$

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = nu_1$

EXERCICES

Raisonnement par récurrence

Exercice 1

Démontrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 2 à 16

Même question que l'exercice 1 pour tous les exercices suivants :

2) Pour tout $n \in IN$, $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ où $\alpha > 0$
3) Pour tout $n \geq 4$, $2n < n!$
4) Pour tout $n \in IN$, $2^n > n$
5) Pour tout n non nul, $2^{n-1} \leq n!$
6) Pour tout $n > 3$, $n^2 \leq n!$
7) Pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$
8) Pour tout $n \geq 4$, $3^n \geq n^3$
9) Pour tout n non nul, $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$
10) Pour tout $n \in IN$, $3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5.
11) Démontrer que $4^n - 1$ est un multiple de 3, pour tout naturel n.
12) Montrer pour tout n de IN $9^{n+1} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.
13) Montrer pour tout n de IN $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.
14) Montrer pour tout n de IN $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
15) Montrer pour tout n de IN* $3(5^{2n-1}) + 2^{3n-2}$ est un multiple de 17.
16) Montrer pour tout n de IN* $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11.

Exercice 17

On s'intéresse à la somme des cubes des premiers entiers naturels impairs : $s_n = 1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^3$

1- Calculer s_1, s_2 et s_3.

2- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $s_n = 2n^4 - n^2$

3- Quel est l'entier n pour lequel $s_n = 19900$?

Exercice 18

Démontrer par récurrence que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$ *est telle que* $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 19

Soit la suite (u_0) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n+4}$

Montrer que pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 1$.

Suite arithmétique - Suite géométrique

Exercice 20

(u_n) est une suite arithmétique telle que $\sum_{p=3}^{10} u_p = 672$ *et* $u_7 = 81$

Déterminer la raison r de cette suite, ainsi que son terme u_{10}.

Exercice 21

(u_n) est une suite géométrique telle que : $u_n = 64$ et $u_n = 1024$.

Déterminer la raison q de cette suite, et déterminer le premier terme u_0

Exercice 22

1- Déterminer les couples de réels (a ; b) qui satisfont aux deux conditions suivantes :

(i)- les réels b +1 ; 2a ; 2a + b constituent une progression arithmétique

(ii)- les réels b ; 2a ; 10a – 4b constituent une progression géométrique.

2- Préciser, pour chacune des solutions trouvées, les raisons de la progression.

Exercice 23

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 15$ *et* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}4.u_n - 5$

1- On introduit la suite $w_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique.
En préciser la raison et le premier terme.

b) On pose, pour $n \geq 0$, $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

Montrer que $S_n = u_{n+1} + u_0$

2- Déduire de ce qui précède une expression de u_n en fonction de n.

3- Déterminer le comportement à l'infini de la suite (u_n)

Exercice 24

Soient les suites (u_n) *et* (v_n) définies respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ et } v_n = \frac{1}{u_n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

1- Déterminer les cinq premiers termes de (u_n)

Faire une conjecture sur l'expression du terme général de la suite (u_n).

2-a) Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3- Retrouver le résultat de 1-.

Exercice 25

Soient les suites (u_n) *et* (v_n) définies respectivement sur IN* par :

$$u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \quad et\ v_0 = 3 \ , \quad v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5}$$

1- Démontrer par récurrence que, pour tout naturel n, $v_n > u_n$.

2- Montrer que la suite (w_n) définie par : $w_n = v_n - u_n$ est géométrique.

3- Calculer la limite de $v_n - u_n$ quand n tend vers$+\infty$.

4- Démonter par récurrence que la suite (x_n) définie par : $x_n = u_n - v_n$ est constante, pour tout n de IN.

Donner la valeur du terme généralx_n de la suite(x_n).

5- En déduire la limite commune des suites (u_n) *et* (v_n)

Exercice 26

On considère les suites (u_n) *et* (v_n) définies, pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_1 = 2 \text{ et } v_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \end{cases}$$

1- Calculer v_1 *et* v_2

2- Soit (w_n) une troisième suite définie par : $w_n = v_n - u_n$, pour tout entier naturel n.

Démontrer (w_n) que est géométrique et préciser sa limite.

3- Démontrer que les deux suites(u_n) et (v_n) sont adjacentes. C'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

4- Démontrer que la suite (t_n) définie sur IN par : $t_n = u_n - v_n$ est constante.

5- Calculer la somme des vingt premiers termes de la suite(t_n).

Exercice 27

On définit les suite (u_n) *et* (v_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}; \\ v_0 = 3 \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

1- Vérifier que (u_n) *et* (v_n) sont strictement positives.

2- On pose, pour tout entier naturel n, $t_n = u_n - v_n$

Démontrer que $0 < t_{n+1} < \frac{1}{3}t_n$ et en déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

pour tout entier naturel n, $0 < t_n < \frac{1}{3^n}$

3- Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

4- Que peut-on en déduire pour les suite (u_n) *et* (v_n) ?

Convergence

Exercice 28

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$

1- Calculer les six premiers termes de la suite.

2- Montrer que (u_n) est décroissante sur IN*.

3- Montrer que (u_n) est convergente.

4- Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 < u_n < \dfrac{4}{n}$

5- Quelle est la limite de cette suite ?

Exercice 29

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 2$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 5$ pour tout entier naturel n.

1- a) Calculer u_0, u_2 et u_3.

b) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

c) Etablir que pour tout $n \in IN$, $u_n < \frac{15}{2}$

d) Déduire des résultats précédents que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2- On pose pour tout $n \in IN$, $v_n = u_n + \alpha$ où $\alpha \in IR$.

a) Déterminer α pour que (v_n) soit une suite géométrique.

b) Exprimer alors v_n en fonction de n.

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis retrouver $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n$

Exercice 30

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$ pour tout entier naturel n.

1- Démontrer que tous les termes sont positifs.

2- Montrer que si (u_n) est convergente, alors sa limite l est solution de l'équation : $x^2+x-2=0$.

3- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ (v_n) est une suite géométrique convergente. Préciser sa limite. Déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 31

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_n = \frac{5u_{n-1}}{3u_{n-1}+5}$, pour tout $n \in IN^*$.

1- Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

2- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Que peut-on en déduire ?

3- Soit (v_n) la deuxième suite définie par : $(v_n) = \frac{5}{u_n}$

a) Prouver que (v_n) est une suite arithmétique.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n

b) Etudier la convergence de la suite u_n.

Exercice 32

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$.

1- Déterminer deux réels a et b tel que l'on ait : $u_n = a + \frac{b}{n+1}$

2- En déduire que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 33

(u_n) est une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ $pour\ tout\ entier\ naturel\ n$

1- Montrer que, pour tout naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$

2- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3- En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 34

Soit la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 \in [0, 1]$ et la relation de récurrence :

$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ pour tout entier naturel n.

On se propose de trouver la limite de la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Méthode 1

1- Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n \in [0, 1]$.

2- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3- En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Méthode 2

On pose $u_0 = \cos\theta$ où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1- Etablir par récurrence que pour tout $n \in IN$, $u_n = \cos\frac{\theta}{2^n}$

2- Retrouver alors le résultat du 3- *Méthode 1*

(On rappelle que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$)

Exercice 35

Soit u_1 un réel strictement positif. On considère la suite (u_n)définie par son premier terme $u_1$et pour tout entier naturel non nul $u_{n+1} = \frac{u_n}{n}$

1- Montrer que (u_n) est décroissante et minorée.

2- Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq u_n \leq \frac{u_1}{n}$.

En déduire la convergence de la suite et calculer sa limite.

Exercice 36

Reprendre toutes les questions de l'exercice précédent avec la condition u_1 un réel strictement négatif.

Exercice 37

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$

1- Montrer que la suite (s_n) définie sur IN par : $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

En déduire (s_n) en fonction de n.

2- On pose $v_n = (-1^n)u_n$ et on considère la suite(t_n) définie par : $t_n = v_{n+1} - v_n$.

Exprimer t_n en fonction de s_n

3- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

(On pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{8^n}$

Exercice 38

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel$n \geq 1, par\ u_n = \frac{3^n}{n!}$

1- Démontrer que (u_n) est minorée par 0 et décroissante à partir du rang 3.

Que peut-on en déduire ?

2- Etablir que, pour tout entier n, on a $u_{n+1} = \frac{3u_n}{n+1}$

En déduire que, pour tout n ≥ 3, on a $0 < u_n < \frac{3u_3}{n}$

3- Préciser la limite de la suite (u_n).

Exercice 39

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - n^2 + n \end{cases}$

1- On donne le polynôme$P(n) = an^2 + bn + c$
Déterminer a, b et c pour que la suite (v_n) définie par $v_n = P(n)$ vérifie la relation de récurrence précédente.

2- Démontrer que la suite (w_n)définie par $w_n = u_n - v_n$ est une suite géométrique.

3- Exprimer w_n puis u_n en fonction de n.

4- Etudier la convergence des suites (u_n) et (w_n)

Suite et fonction

Exercice 40

La suite (u_n) est définie sur IN par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+3}$

1- Montrer que, pour tout n, $u_n > 0$

2- Etudier le sens de variation de la fonction $f: x \longmapsto \frac{x+1}{x+3}$ sur $\mathbb{R}^+$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

3- Montrer que la suite (u_n) est convergente.

5 -Trouver la limite exacte de la suite (u_n)

Exercice 41

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{8u_n+3}{u_n+6}$ pour tout entier naturel n

1- a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

On pourra utiliser le sens de variation de la fonction $f: x \longmapsto \frac{8x+3}{x+6}$ sur $[0, +\infty[$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n > 1$, on a: $1 < u_n < 3$

2- On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n-3}{u_n-1}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Quelle est la limite de (v_n) ?

c) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n.

Exercice 42

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ pour\ tout\ entier\ n \geq 1,\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

1- Calculer $u_0, u_1, \ldots\ldots, u_n$
2- Construire dans un même repère la droite d'équation y = x et la courbe (C) représentative de la fonction f définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\ sur\ ]0;\ +\infty[$
3- Utiliser ces deux courbes pour représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n)
4- Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 43

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \propto\ \text{où}\ \propto\ est\ un\ réel \\ pour\ tout\ entier\ n,\ u_{n+1} = u_n - {u^2}_n \end{cases}$

Calculer $u_0, u_1, \ldots\ldots, u_n$

1- Construire dans un même repère la droite d'équation y = x et la courbe (C) représentative de la fonction f définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\ sur\ ]0;\ +\infty[$
2- Utiliser ces deux courbes pour représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n)
3- Faire une conjecture sur la limite de la suite (u_n)

Exercice 44

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ pour\ tout\ entier\ n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n^n} \end{cases}$

1- Montrer que la suite (u_n) est croissante

$\begin{cases} v_1 = 1 \\ pour\ tout\ entier\ n \geq 2, v_n = u_{n-1} + \frac{1}{2^n} \end{cases}$

2- On appelle (v_n) la suite définie par
a) Exprimer v_n en fonction de n
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq v_n$
c) En déduire que la suite (u_n) est majorée. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 46

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ pour\ tout\ entier\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

1- Construire dans un même repère la droite d'équation y = x et la courbe (C) représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}\ sur\ ]0;\ +\infty[$
2- Utiliser ces deux courbes pour représenter graphiquement des trois premiers termes de la suite (u_n)
3- Faire une conjecture sur la limite de la suite (u_n).
4- Démontrer que la suite $(u_{2p})\ p \in \mathbb{N}$ est croissante et majorée par $1 + \sqrt{2}$.
5- Démontrer que la suite $(u_{2p+1})\ p \in \mathbb{N}$ est décroissante et minorée par $1 + \sqrt{2}$.
6- Démontrer que les suites $(u_{2p})\ p \in \mathbb{N}$ et $(u_{2p+1})\ p \in \mathbb{N}$ sont convergentes et ont la même limite.

Exercice 47

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ pour\ tout\ entier\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$

1- Construire la courbe représentative de la fonction f définie par f(x) = ln(1 + x).
2- En déduire une représentation graphique des quatre premiers termes de la suite (u_n).
3- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.
4- En déduire que la suite (u_n) est convergente et démontrer que sa limite est 0.

Exercice 48

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ pour\ tout\ entier\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{3}(e^{u_n} - 2) \end{cases}$

1- Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = 2e^x - 3x - 4$
2- Construire la courbe représentative de la fonction f.
3- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions x_1 et x_2 tels que $x_1 < 0 < x_2$.
4- Dire pourquoi la limite de la suite (u_n) , si elle existe, ne peut être que x_1 ou x_2.

CHAPITRE 3 : FONCTIONS NUMERIQUES

1. Limites et continuité

1.1- Limites

__Rappels__

Les formes indéterminées :

Somme : $+\infty-\infty$? ou $-\infty+\infty$?

Produit : $0.\infty$?

Quotient : $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

Puissance : 1^{∞} ? 0^0 ? ; ∞^{∞} ?, ∞^0

Remarques

Si l'une de ces formes apparaît dans un calcul de limite, on doit recourir à une astuce de calcul comme la factorisation, le produit par quantité conjuguée, le changement de variable, les théorèmes...
Avant de calculer les limites, il faut voir s'il y a une simplification possible.

Théorèmes

(T_1) : La limite d'une fonction polynôme de degré n, en $-\infty$ ou en $+\infty$

$$\lim_{x\to\infty}(a_x x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

(T_2) : La limite d'une fonction rationnelle, en $-\infty$ ou en $+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^{n-m}}{b_m}$$

Exemples

$$\lim_{x\mapsto-\infty}(-2x^2+3x-1) = \lim_{x\mapsto-\infty}(-2x^2) = -\infty$$
$$\lim_{x\mapsto+\infty}(-2x^2+3x-1) = \lim_{x\mapsto+\infty}(-2x^2) = -\infty$$
$$\lim_{x\mapsto-\infty}(3x^5+x^3-5x^2-4x-6) = \lim_{x\mapsto-\infty}(3x^5) = -\infty$$
$$\lim_{x\mapsto+\infty}(3x^5+x^3-5x^2-4x-6) = \lim_{x\mapsto+\infty}(3x^5) = +\infty$$
$$\lim_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{8x^2-5x+3}{-2x^3+x^2-6x+3}\right] = \lim_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{8x^2}{-2x^3}\right] = \lim_{x\mapsto-\infty}\frac{-4}{x} = 0$$
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{8x^2-5x+3}{-2x^3+x^2-6x+3}\right] = \lim_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{8x^2}{-2x^3}\right] = \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-4}{x} = 0$$

Théorème : Limite d'une fonction composée

f et g sont deux fonctions telles que gof existe.
a, b et c désignent : soit des réels soit $-\infty$ soit $+\infty$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x\to a} g\ o\ f\ (x) = c$

Exemple

$h :\ ]3;+\infty[\ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto h(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$

$h = g o f$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : [0\ ; +\infty[\ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 + 4x + 3 \qquad x \mapsto \sqrt{x}$

on a $\lim_{x\to3}(x^2-4x+3) = 0$ *et* $\lim_{x\to0}\sqrt{x} = 0$ *d'où* $\lim_{x\to3} h(x) = 0$

1.2- Continuité en un point et sur un intervalle

a) __Continuité en un point__

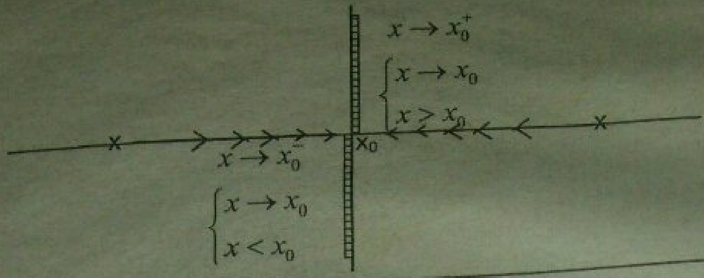
__Définitions :__ Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

(D_1) : f est continue en x_0 si f admet une limite finie l ($l \in \mathbb{R}$) en x_0 et que $l = f(x_0)$.

C'est-à-dire $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

(D_2) : f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

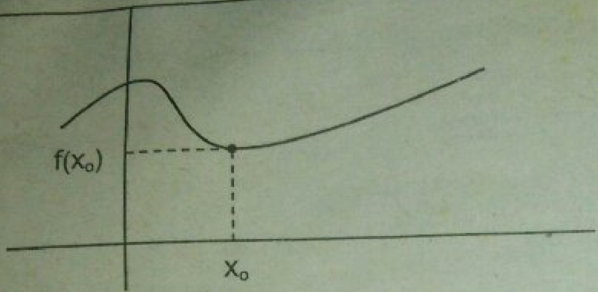
(D_3) : f est continue à droite en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$



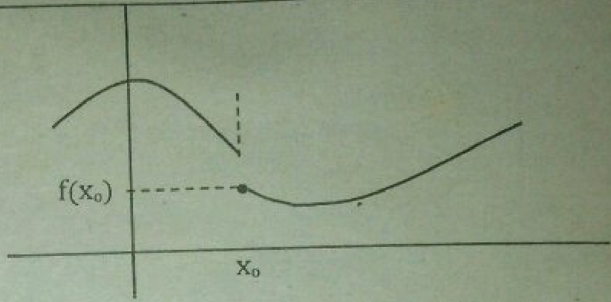
Théorème

f est continue en x_0 si et seulement si f est à la fois continue à gauche et à droite en x_0

C'est-à-dire : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

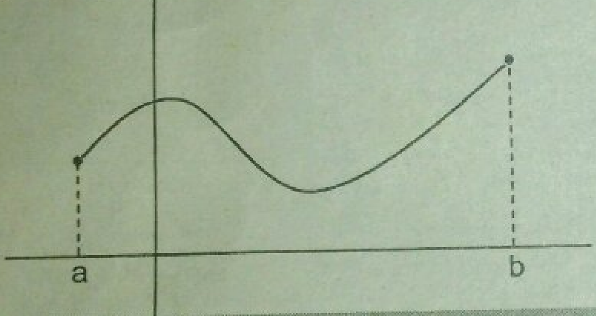


Il n'y a pas de rupture de la représentation graphique au point d'abscisse x_0 .
f est continue en x_0.



Il y a au voisinage de x_0 une rupture de la représentation graphique.
On dit que f est *discontinue* en x_0.

b) Continuité sur un intervalle



Deux points de la courbe représentative de f sont reliés par une ligne continue, obtenue sans lever le crayon. On dit que f est continue sur [a; b]

Définitions

(D_1) : Une fonction f est continue sur un intervalle I si f est continue en tout point de l'intervalle I.

(D_2) : Une fonction f est continue sur un intervalle fermé [a ;b] si

- f est continue sur l'intervalle ouvert]a ;b[
- f est continue à droite en a et à gauche en b

Théorèmes

(T_1) : Toute fonction polynôme est continue sur IR.

(T_2) : Toute fonction rationnelle ou irrationnelle est continue sur chacun de ses intervalles de définition.

(T_3) : Les fonctions trigonométriques cos et sin sont continues sur IR.

Exercice résolu 1

Soit f la fonction définie sur IR par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} & si\ x < 0 \\ 2x+1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

Solution

$0 \geq 0$ donc $f(0) = 2\times0 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^+} (2x+1) = 1 = f(0)$; f est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^-} (\sqrt{x^2+1}) = \sqrt{0+1} = 1 = f(0)$; f est continue à gauche en 0.

f étant à la fois continue à droite et à gauche en 0, est donc continue en 0.

c) Prolongement par continuité

Définition

Si f est une fonction non définie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \; (l \in \mathbb{R})$, alors la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq a \\ g(a) = l \end{cases}$$

s'appelle prolongement par continuité de f en a. Cette fonction g est continue en a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $IR - \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

On considère la fonction g telle que : $\begin{cases} g(x) = f(x) si\ x \neq -2 \\ g(-2) = -4 \end{cases}$

La fonction g est le prolongement par continuité de f en (-2) puisque $\lim\limits_{x\mapsto -2} f(x) = -4 = g(-2)$.

1.3- Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Théorèmes

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors

(T_1) : I et f(I) sont des intervalles de même nature.

(T_2) : f est **bijective** de I vers f(I).

$$I \xrightarrow{f} f(I) \xrightarrow{f^{-1}} I$$

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto x = f^{-1}(y)$$

(T_3) : f et f^{-1} ont le même sens de variation.

(T_4) : La courbe représentative de f^{-1} se déduit de celle de f par **symétrie par rapport à la droite d'équation y = x** (première bissectrice).

(T_5) : Si de plus $f'(y_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}$

Exercice résolu 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]1 ;+\infty[$
   a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
   b) Préciser le sens de variations de g^{-1}, réciproque de g.
3- Calculer $g^{-1}(0)$ et $(g^{-1})'(0)$.
4- Construire dans un même repère la courbe (C) et la courbe (Γ) représentative de g^{-1}.
5- Donner l'expression explicite de $g^{-1}(x)$ et vérifier les résultats de la question 3-.

Solution

1- La dérivée de f étant strictement positive, f est strictement croissante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition : $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

Le tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2

2-a) f est une fonction continue sur I =]1 ;+∞[puisqu'elle est rationnelle. f est strictement croissante sur I =]1 ;+∞[donc la fonction g, restriction de f à l'intervalle I =]1 ;+∞[est une bijection de I =]1 ;+∞[vers l'intervalle J =]-∞ ;2[

b) La fonction g^{-1} est strictement croissante sur J =]-∞ ;2[

3-Calcul de $g^{-1}(0)$ et $(g^{-1})'(0)$.

On pose $g^{-1}(0) = x_0$ donc $0 = g(x_0)$.

Soit $\frac{x_0-3}{x_0-1} = 0$. On a $x_0=\frac{3}{2}$ D'où $g^{-1}(0) = \frac{3}{2}$

Calcul de $(g^{-1})'(0)$.

$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'[g^{-1}(0)]} = \frac{1}{g'(\frac{3}{2})} = \frac{1}{4}$ D'où $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{4}$

4- Expression explicite de $g^{-1}(x)$

Soit $y = g^{-1}(x)$ équivaut à $y = \frac{2x-3}{x-1}$ on a $y(x-1)=2x-3$

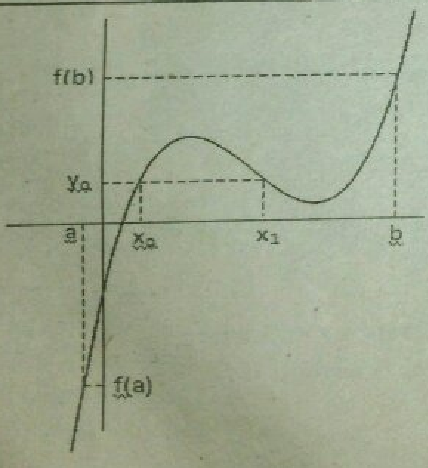
ainsi $yx - y = 2x-3$; $yx-2x = y-3$; $x(y-2)= y-3$ soit $x = \frac{y-3}{y-2}$ D'où : $g^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}$

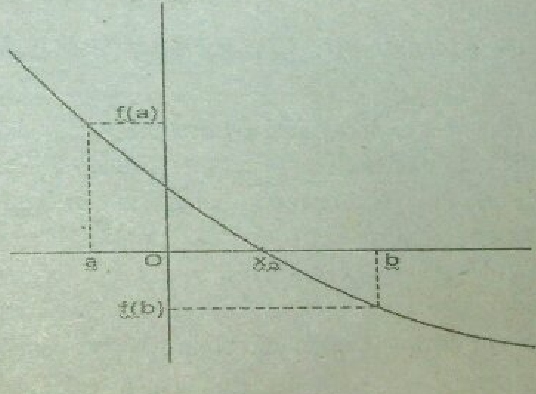
Vérification des résultats de la question 3-

$g^{-1}(0) = \frac{0-3}{0-2} = \frac{3}{2}$ et comme $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ donc $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{4}$

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur l'intervalle I, a et b deux éléments de I alors pour toute valeur y_0 comprise entre f(a) et f(b) ; il existe au moins un nombre x_0 de [a,b] tel que $y_0 = f(x_0)$.





Conséquence

Si f est continue et strictement monotone sur [a, b] et f(a) f(b) < 0 alors il existe un réel unique x_o de] a, b [tel que $f(x_o) = 0$.

Exercice résolu 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x^3 + x - 1$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ;1]

Solution

f est une fonction polynôme donc elle est continue sur [0 ;1].
f est dérivable sur [0 ;1] et $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$; f est strictement croissante sur [0 ;1].
De plus ; $f(0).f(1) < 0$. Par conséquent il existe un réel α unique dans [0 ;1] tel que $f(\alpha) = 0$.

Remarque

Ce théorème nous permet de prouver l'existence d'un réel x_0 et non sa valeur. Il n'est pas toujours évident de trouver la valeur exacte de x_0. Il s'agit de prouver l'existence d'un réel α. Les hypothèses du théorème (cas particulier) étant remplies, α existe et il est unique. On n'a pas besoin de calculer sa valeur.

1.4- Composée de deux fonctions continues

<u>Théorèmes</u>

Considérons un intervalle non vide I contenant x_0.

(T_1) : Si f est une fonction continue en x_0 et g une fonction continue en $f(x_0)$ alors gof est une fonction continue en x_0

(T_2) : Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J ($f(I) \subset J$).
Si f et g sont continues alors gof est continue sur I.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & f(I) \subset J \arrow[r, "g"] & IR \end{tikzcd}$$

2. Dérivation

2.1- Fonctions dérivables

<u>Définition</u>

Soit f une fonction définie sur l'intervalle ouvert I et x_0 un point de I.
f est dérivable en x_0 si la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.
Cette limite est notée $f'(x_0)$ et appelée nombre dérivé de f au point x_0.

Bref, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Remarque

Si cette limite est égale à l'infini ou n'existe pas alors la fonction f n'est pas dérivable en x_0.

Exemple

La fonction $f: x \longmapsto f(x) = x^2 + x$ est dérivable en 1 et on a $f'(1) = 3$.

En effet $\lim\limits_{x \mapsto 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \lim\limits_{x \mapsto 1} (x+2) = 3\ d'où f'(1) = 3$

<u>Théorème : Continuité d'une fonction dérivable</u>

Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en ce point.

Démonstration

Soit f une fonction dérivable en x_0.

On sait que $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

Posons $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *qui équivaut à* $\mathcal{E}(x)(x-x_0) = f(x) - f(x_0)$

Comme $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \mathcal{E}(x) = f'(x_0)$ et $\lim\limits_{x \mapsto x_0} (x - x_0) = 0$ donc $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \mathcal{E}(x)(x-x_0) = 0$

D'où $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$

Attention, la réciproque n'est pas toujours vraie.
La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2.2- Dérivabilité à droite ; dérivabilité à gauche

Définitions

Soit f une fonction définie sur l'intervalle ouvert I et x_0 un point de I.

(D_1) : f est dérivable à droite en x_0 si la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0^+

Cette limite est notée $f'_d(x_0)$ et appelée nombre dérivé à droite de f au point x_0.

(D_2) : f est dérivable à gauche en x_0 si la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0^-.

Cette limite est notée $f'_g(x_0)$ et appelée nombre dérivé à gauche de f au point x_0.

Théorème

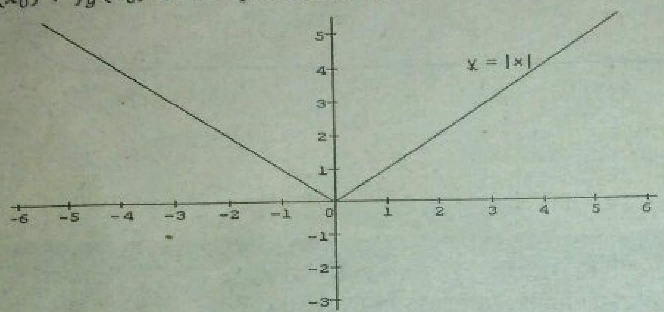
Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est à la fois dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$

Contre exemple

La fonction $f: x \longmapsto f(x) = |x|$ est dérivable à droite en 0 et on a $f'_d(x_0) = 1$

La fonction $f: x \longmapsto f(x) = |x|$ est dérivable à gauche en 0 et on a $f'_g(x_0) = -1$

$f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ f n'est pas dérivable en 0.

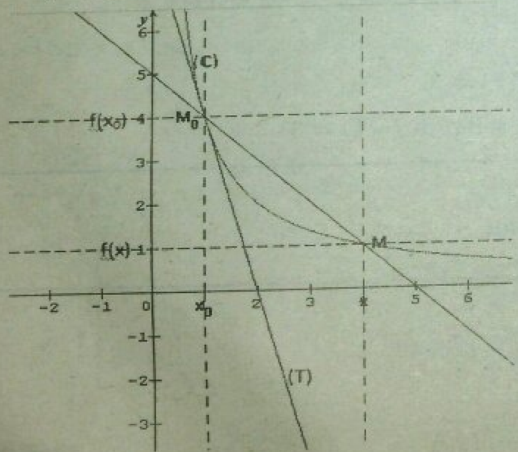


2.3- Interprétation géométrique

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f.

a) Tangente en un point

Si f est dérivable en x_0, alors (C) admet en son point d'abscisse x_0 une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$. (T) a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

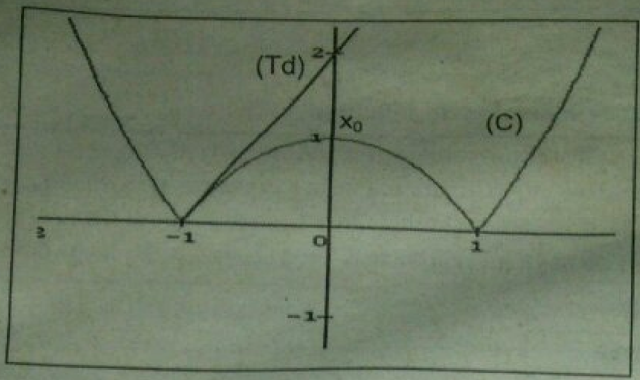


$M_0(x_0 ;f(x_0))$ et $M(x;f(x))$ sont deux points de (C)
Si , M se glisse sur la courbe vers M_0. La droite M_0M s'approche de la tangente (T).

b) Demi tangente à droite en un point

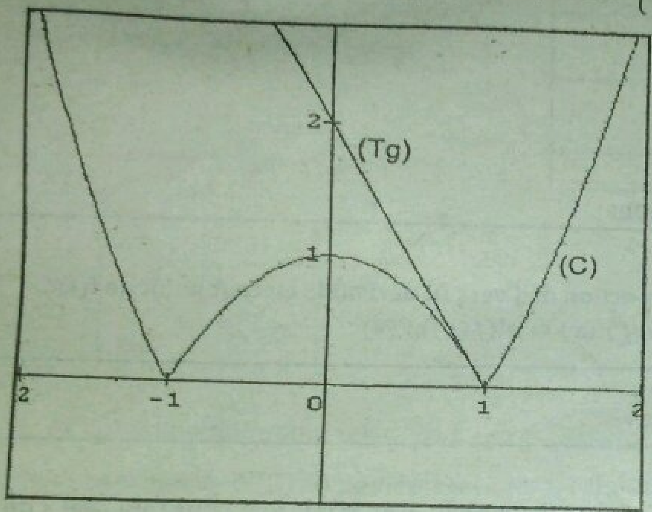
Si f est dérivable à droite en x_0 alors (C) admet en son point d'abscisse x_0 une demi tangente (Td) de coefficient directeur $f'_d(x_0)$

(Td) a pour équation $\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$



c) Demi tangente à gauche en un point

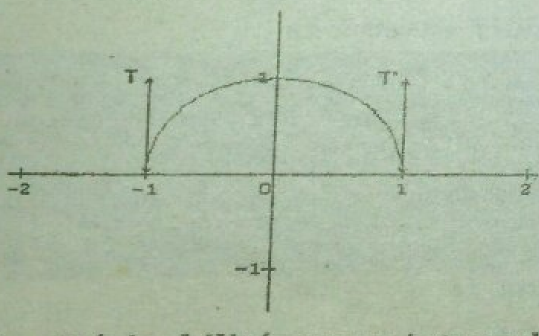
Si f est dérivable à gauche en x_0 alors (C) admet en son point d'abscisse x_0 une demi tangente (Tg) de coefficient directeur $f'_g(x_0)$. (Tg) a pour équation $\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \le x_0 \end{cases}$



d) Demi tangente verticale

Dans le cas où $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$, la courbe (C) admet une demi tangente verticale à droite au point d'abscisse x_0

Et si $\lim\limits_{x \mapsto x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$, la courbe (C) admet une demi tangente verticale à gauche au point d'abscisse x_0



(T) : demi-tangente verticale à droite au point d'abscisse -1
(T') : demi-tangente verticale à gauche au point d'abscisse1

2.4- Dérivabilité sur un intervalle

Définitions

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.
f étant une fonction dérivable sur un intervalle I, soit la fonction

$f' : I \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f'(x)$ *nombre dérivée de f en x*

La fonction f' est appelée fonction dérivée de f.

Théorèmes
Toute fonction polynôme est dérivable sur IR.
Toute fonction rationnelle est dérivable sur chacun de ses intervalles de définition.

2.5- Calculs sur les fonctions dérivées

a) Opérations (Rappels)

u *et* v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de IR ; k un réel.

Les fonctions $u+v$, ku , uv , $\frac{1}{v}$, $\frac{u}{v}$, $\sqrt{u}$, u^n sont dérivables.

Fonction	Fonction dérivée
u+v	u'+v'
k.u, k∈ℝ	k.u'
u.v	u'.v+u.v'
$\frac{1}{v}$ (*v ne s'annulant pas sur I*)	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ (*v ne s'annulant pas sur I*)	$\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$
$\sqrt{u}$ (*u strictement positive sur I*)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n $(n \in \mathbb{Z}$ *et* $n \neq 0)$	$n.u'.u^{n-1}$

b) Fonction dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème
Soient f une fonction de I vers J dérivable sur I ; g une fonction de J vers IR dérivable en tout point de f(I).
La fonction gof est dérivable sur I et pour tout $x \in I, (gof)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$

c) Inégalités des accroissements finis

Théorèmes
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle [a ;b]. S'il existe deux réels m et M tels que pour tout réel x de [a ;b], $m \leq f'(x) \leq M$ alors on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Conséquence
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe un nombre réel M tel que pour tout réel x de I, $|f'(x)| \leq M$, alors pour tous réels a et b de I , $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

d) Fonctions dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ; sa fonction dérivée f' est définie sur I.

Définition
Si la fonction f' est elle-même dérivable sur I, sa fonction dérivée notée f'', appelée fonction dérivée seconde (ou fonction dérivée d'ordre 2) de f est définie sur I. On dit que f est deux fois dérivable sur I.
D'une façon générale, si f est n fois dérivable sur I, on définit la fonction dérivée d'ordre n de f, notée $f^{(n)}$ par la formule de récurrence $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Exemple
Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2$
f est dérivable sur IR et f' est définie par $f'(x) = 12x^2 - 6x + 7$
f' est dérivable sur IR et f'' est définie par $f''(x) = 24x - 6$
f'' est dérivable sur IR et $f^{(3)}$ est définie par $f^{(3)}(x) = 24$
Et pour tout entier p supérieur ou égal à 4, la fonction dérivée d'ordre p de f est la fonction nulle.

Remarque
Pour tout polynôme f de degré n on a $f^{(n+1)}(x) = 0$.

2.6- Application des dérivées à l'étude d'une fonction

a) Dérivabilité et sens de variation

Théorèmes

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(T_1) : f est constante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) = 0$

(T_2) : f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$

(T_3) : f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$

b) Extremum relatif

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in$ I.

La fonction f admet un extremum relatif f(x_0) en x_0 si et seulement si la fonction f' s'annule en x_0 en changeant de signe.

Remarques

(R_1) : Deux cas peuvent se présenter :

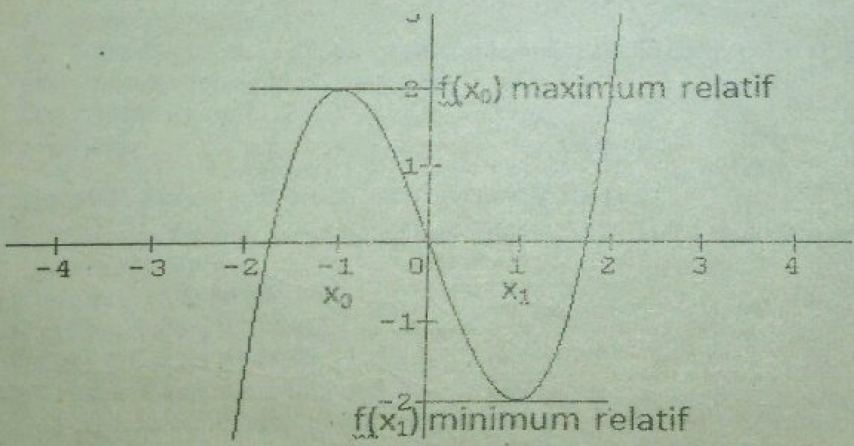
x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
f (x)	↘	$f(x_0)$	↗

$f(x_0)$ est un minimum relatif de f

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	-
f(x)	↗	$f(x_0)$	↘

$f(x_0)$ est un maximum relatif de f

(R_2) : La tangente à (C) au point d'abscisse x_0 est une droite horizontale (parallèle à l'axe des abscisses). Elle a pour équation $y = f(x_0)$



c) Point d'inflexion

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in$ I.

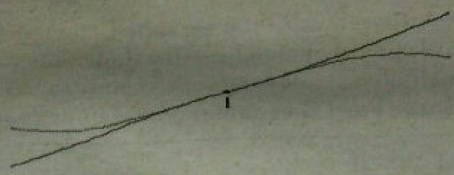
Le point d'abscisse x_0 est un point d'inflexion de la courbe (C) de f si et seulement si la fonction f'' s'annule en x_0 en changeant de signe.

Remarques

(R_1) : Deux cas peuvent se présenter :

x	x_0
$f''(x)$	- 0 +

x	x_0
$f''(x)$	+ 0 -



(R_2) : La courbe traverse sa tangente au point d'abscisse x_0.

(R_3) : Le signe (−) des tableaux signifie que la courbe se trouve au-dessous de la tangente.

Le signe (+) des tableaux signifie que la courbe se trouve au-dessus de la tangente.

EXERCICES

Questions à choix multiples

Exercices 1 à 8

Dans les exercices 1 à 8, marquer la ou les réponses justes.

1) La fonction f définie sur]-∞ ;1] par $f(x) = \sqrt{1-x}$:

- est croissante sur]-∞ ;1]
- est décroissante sur]-∞ ;1]
- admet un minimum relatif en 1
- admet un maximum relatif en 1

2) f est la fonction définie sur IR par $f(x) = -7(x-3)^2 + 2$:

- f est croissante sur [3 ;+∞[
- est décroissante sur [3 ;+∞[
- admet un minimum relatif en 3
- admet un maximum relatif en 3

3) Soient les fonctions f, u, v et w définies par

$f: x \longmapsto \frac{3}{2x^2+1}$ $u: x \longmapsto x^2$ $v: x \longmapsto \frac{3}{x}$ et $w: x \longmapsto 2x+1$

- f = w o v o u
- f = v o u o w
- f = w o u o v
- f = v o w o v

(o désigne la composition de deux fonctions)

4) f est une fonction définie et dérivable sur IR telle que f(1)=1 et f ' (1)=2. (T) est la tangente au point d'abscisse 1.

- (T) passe par le point A (1 ;1)
- (T) passe par le point B (1 ;2)
- Le coefficient directeur de (T) est égal à 1
- Le coefficient directeur de (T) est égal à 2

5) Soit g la fonction définie et dérivable sur IR⁺ par $g(x) = 4x + 12$ *et* $f = \sqrt{g}$

- f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$
- f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$
- f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$
- f n'est pas dérivable en 1

6) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$

- f est définie sur [-2 ;+∞[
- f est dérivable sur [-2 ;+∞[
- f est dérivable sur]-2 ;+∞[
- f n'est pas dérivable en -2

7) Soit f une fonction définie et dérivable sur $[1;2]$ telle que $f'(x) < 0$ *sur* $]1;2[$, $f(1) = 3$ *et* $f(2) = -3$.

- f est une bijection de [1 ;2] sur [-3 ;3]
- f est croissante sur [1 ;2]
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$
- l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ admet une solution unique sur [1 ;2]

8) f est une fonction strictement croissante sur [-3 ;-1]et strictement décroissante sur [-1 ;2] telle que $f(1) = 5$

Soit β un élément de [-1 ;2].

- Si $f(\beta) < 5$ alors β ∈[-1 ;1]
- Si $f(\beta) < 5$ alors β ∈[1 ;2]
- f(-1) est le maximum relatif de f
- f(-1) est le minimum relatif de f

Limites

Exercice 9

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, préciser l'ensemble de définition D et déterminer toutes les limites de f aux bornes de D.

$f(x) = -2x^3 + 5x - 3$ $f(x) = \frac{1}{x^2(1-x)}$ $f(x) = \frac{4x}{x-2}$ $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x-1}$

$f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-4}$ $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$ $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$

Exercice 10 à 13

Dans les exercices 10 à 13, utiliser le théorème de limite d'une fonction composée pour calculer la limite de f en x_0.

10) $x \longmapsto \sqrt{2x^2 - x + 2}$ $\quad x_0 = -\infty$ et $x_0 = +\infty$

12) $x \longmapsto f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ $\quad x_0 = +\infty$

11) $x \longmapsto f(x) = \frac{x}{x+\sin x}$ $\quad x_0 = 0$

13) $x \longmapsto f(x) = \left(\frac{2x}{x^2+2}\right)$ $\quad x_0 = +\infty$

Continuité

Exercice 14 à 16

Dans les exercices 14 à 16, étudier la continuité de f en x_0

14) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+|x|}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

15) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} \\ f(1) = 2 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

16) $\begin{cases} f(x) = \frac{1-3x}{x-2} & si\ x \in [0;1[\\ f(x) = 2\sin\frac{\pi}{2}x & si\ x \in [1;2] \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax & si\ x \in]-\infty; -1] \\ f(x) = 2x - 1 & si\ x \in]-1; 1] \\ f(x) = b(x^2 - 1) & si\ x \in]1; +\infty] \end{cases}$$

a) Déterminer a pour que f soit continue en -1.

b) Peut-on déterminer b pour que f soit continue en 1 ?

Exercice 18 à 22

Dans les exercices 18 à 22, déterminer l'image par f de l'intervalle I. (On peut utiliser son tableau de variation ou sa représentation graphique).

18) $f(x) = x^2 - 1$ $\quad$ I=[-1 ;2]

19) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $\quad$ I=[0 ;3]

20) $\begin{cases} f(x) = -x - 1 & si\ x \in]-\infty; 0] \\ f(x) = 2x - 3 & si\ x \in]0; +\infty[\end{cases}$ $\quad$ I=[-2 ;2]

21) $\begin{cases} f(x) = x + 2 & si\ x \in]-\infty; -1] \\ f(x) = |x| - 1 & si\ x \in]-1; +\infty[\end{cases}$ $\quad$ I=[-3;1]

22) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|+1}$ $\quad$ I=$\mathbb{R}$

Dérivabilité en un point

Exercice 23 à 26

Dans les exercices 23 à 26, étudier la dérivabilité de f en x_0. Donner une interprétation géométrique du résultat.

23) $f(x) = |x^2 + x - 2|$ $\quad x_0 = 1$

24) $f(x) = x|x|$ $\quad x_0 = 2$

25) $f(x) = (x-2)\sqrt{x-2}$ $\quad x_0 = 2$

26) $f(x) = \frac{x^2+2|x|}{x^2-2x-1}$ $\quad x_0 = 0$

Exercice 27

On considère une fonction f définie sur un intervalle I. Déterminer l'ensemble sur lequel f est dérivable et calculer f ' (x) dans chacun des cas suivants :

a) $f: x \longmapsto (x^2 + 2)^3$ $\quad$ I=$\mathbb{R}$

b) $f: x \longmapsto \frac{4x^2-3}{(x-1)^2}$ $\quad$ I=]-∞ ;1[

c) $f: x \longmapsto -2\sqrt{x} + x$ $\quad$ I=[0 ;+∞[

d) $f: x \longmapsto \frac{x+2}{\sqrt{3-x}}$ I=]-∞ ;3[

e) $f: x \longmapsto (x+1)^2\sqrt{x+1}$ I=[-1 ;+∞[

Tangente

Exercice 28

Pour chacune des fonctions f, écrire une équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse x_0.

a) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ $x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{3x-2}{7x-4}$ $x_0 = 3$

c) $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ $x_0 = 2$

Exercice 29

La fonction f est définie sur IR par $f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$, a et b sont des réels.

1- Déterminer a et b pour que la tangente (T) à la courbe (C) de f au point d'abscisse 0 ait pour équation y = 4x + 3.

2- Etudier la position de (C) par rapport à (T).

Variations de fonction

Exercice 30

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+mx}{x^2-1}$, m désigne un paramètre réel,x différent de 1 et -1

1- Pour quelles valeurs de m cette fonction n'admet ni minimum ni maximum ?

2- Pour quelles valeurs de m cette fonction admet un minimum et un maximum ?

Exercice 31

Soit la fonction

$f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = 4x^3 - x^2 + 3x + 1$

a) Calculer f ' (x).

b) Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 32

Soit la fonction

$f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 2x + 3$

a) Calculer f ' (x).

b) Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 33

1- Déterminer le signe du polynôme $P(x) = 4x^2 - x + 1$

2- Soit

$f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt{4x^2 - x + 1}$

a) Montrer que f est dérivable sur IR. Calculer f ' (x).

b) Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations.

Bijection

Exercice 34

Soit f la fonction définie sur [0; 4] par $f(x) = \sqrt{x^3} - 3$

a) Sur quel intervalle f est-elle dérivable ?

b) Montrer que f ' est à valeurs strictement positives sur]0; 4[.

c) Montrer que l'équation f(x)=4 admet une solution unique sur [0; 4].

Exercice 35

Soit f la fonction définie sur [1; 3] par $f(x) = \sqrt{x} + x - 3$

a) Calculer f ' (x).

b) Montrer que l'équation f(x)=1, admet une solution unique α sur[0; 4].

Exercice 36

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

a) Montrer que f' est à valeurs strictement positives sur $]1\,;2[$.
b) Montrer que l'équation $f(x)=3$, admet une solution unique α sur $]1\,;2[$.
c) Résoudre l'équation $t^2-t-2=0$ En déduire la valeur exacte de α.

Exercice 37

Soit la fonction numérique $f: [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

1- Etudier la variation de f.
2- Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3- Déterminer la bijection réciproque g.

Exercice 38

Soit la fonction numérique $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}(x+4+\sqrt{x^2+4})$$

1- Etudier la variation de f.
2- Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.
3- Préciser la variation de la bijection réciproque g.

Courbe d'une fonction

Exercice 39

Soit la fonction numérique $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1- Etudier les variations de f.
2- Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans l'intervalle $[1;2]$.
3- Montrer que la restriction de f sur IR^+ réalise une bijection de IR^+ sur un intervalle J que l'on précisera.
4- Construire dans un même repère orthonormé, la courbe (C) de f et la courbe (C') de la bijection réciproque g.

Exercice 40 à 44

Pour chacun des exercices suivants :
a) Etudier les variations de la fonction f.
b) Déterminer les asymptotes de la courbe (C) de f.
c) Construire (C) avec ses asymptotes dans un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. .

40) $x \mapsto f(x) = -x-3-\frac{1}{(x+5)^2}$

41) $x \mapsto f(x) = 1+3x-\frac{15}{x+2}$

42) $x \mapsto f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+3}$

43) $x \mapsto f(x) = \frac{2x^2-3x-5}{x-3}$

44) $x \mapsto f(x) = \frac{3x^2}{x^2+x+1}$

Inégalités des accroissements finis

Exercice 45

Démontrer que, pour tous réels a et b tels que $0 \leq a \leq b < \frac{\pi}{2}$, on a : $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$

(On posera $f(x) = \tan x$).

Exercice 46

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur l'intervalle $[x^2+2x;(x+1)^2]$ où x est un réel strictement positif ; démontrer que $\frac{1}{2(x+1)} \leq x+1-\sqrt{x(x+2)} \leq \frac{1}{2\sqrt{x(x+2)}}$

Dérivées successives

Exercice 47

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, déterminer les fonctions dérivées première et seconde, après avoir précisé leur ensemble de définition. En déduire l'existence ou non d'extremum de la fonction et de point d'inflexion de sa courbe.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

c) $f(x) = x^3 - 2x\sqrt{x}$

d) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

e) $f(x) = \cos x$

Exercice 48

Déterminer la fonction polynôme f de degré 4 sachant que :

$f(-1) = 8;\ f'(-1) = -8;\ f''(-1) = 2;\ f^{(3)}(-1) = -6;\ f^{(4)}(-1) = 24$

Exercice 49

1- Démontrer par récurrence que la dérivée n ième de la fonction cosinus définie sur IR pour tout entier naturel non nul n, est la fonction : $x \longmapsto \cos(x + n\frac{\pi}{2})$

2- Quelle est la dérivée n ième de la fonction sinus ?

Exercice 50

Démontrer par récurrence que la fonction f est définie pour tout x différent de 2 par $f(x)\frac{1}{x-2}$, a pour dérivée n ième la fonction définie par$f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}$, pour tout entier naturel non nul n.

Fonction auxiliaire

Quelquefois, pour étudier une fonction f, on introduit une fonction g qui permet de connaître les variations de f. Cette fonction g est appelée fonction auxiliaire.

Exercice 51

1- Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3 + x + 1$

a) Calculer g ' (x).

b) Montrer que g ' est à valeurs strictement positives sur IR.

c) Montrer que l'équation g(x)=0, admet une solution unique α sur$[0; 1]$

d) Déterminer le signe de g(x) en fonction de x.

2- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 1$

a) Calculer f ' (x).

b) Montrer que pour tout x élément de IR, f ' (x)=4.g(x).

c) Déduire de la question b) les variations de f.

Exercice 52

1- Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ *par* $g(x) = 1 - 2\sqrt{x+1}$. Déterminer le signe de g(x).

2- Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ *par* $f'(x) = \sqrt{x+1} - x$

a) Montrer que pour tout x élément de $]-1; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x+1}}$

b) Déterminer les variations de f.

c) Montrer que 1,25 est le maximum de f.

d) Montrer que f est une bijection de $[0; 3]$. Sur $[-1; 1]$.

e) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique $\propto$ élément de $[0; 3]$.

3- Montrer que $\propto$ est solution de : $x + 1 = x^2$;En déduire la valeur exacte de $\propto$

Résolution d'équation

Exercice 53

Soit à résoudre l'équation $(E): x^5 - 5x - 5 = 0$

On considère la fonction f définie par $f(x): x^5 - 5x - 5 = 0$

1- Etudier les variations de f.

2- En déduire le nombre de solutions de (E).

Exercice 54

Soit à résoudre l'équation(E): $tanx = \frac{\pi}{2} - x \ avec\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

On considère la fonction g définie par $g(x) = 2tanx - \pi + 2x \quad sur \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

1- Montrer que l'équation (E) équivaut à l'équation g(x)=0.

2- Etudier les variations de g.

3- En déduire que l'équation (E) admet une solution unique α.

4- Montrer que α vérifie $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

Exercice 55

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur[0; 1[$par\ f(x) = x^3 - 3x + 1\ et\ g(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$

On appelle (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 10 cm)

et (D) la droite d'équation y = x.

1- Tracer (C) et (D).Par simple lecture graphique, déterminer l'abscisse α de leur point d'intersection.

2- Montrer que α est solution des équations g(x) = x et f(x) = 0.

3- a) Déterminer f ' (x).

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique sur [0,1]. Déterminer-en une valeur approchée à 0,001 près.

Problème

Exercice 56

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-2}{x^2+3}$

1- a) Calculer f ' (x).

b) Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \frac{(x+1)^2(x^2-2x+9)}{(x^2+3)^2}$

c) En déduire les variations de f.

2- a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en$+\infty$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

3- a) Montrer que pour tout réel x : $f(x) = x + 2 - \frac{8}{x^2+3}$

b) Montrer que la droite (D) d'équation y = x+2 est une asymptote à la courbe (C) de f en$-\infty$ et en$+\infty$.

4- Déterminer la position de (C) par rapport à (D).

5- a) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

b) Montrer que (T) est la seule tangente à (C) parallèle à (D).

c) Déterminer la position de (C) par rapport à (T).

6- Dans un repère orthogonal$(O, \vec{i}, \vec{j})$, tracer (C), (D) et (T).

Exercice 57

Pour tout réel x strictement positif, on définit la fonction f par $f(x) = 2\sqrt{x} - 1 - \frac{1}{x}$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- a) Calculer la limite se f(x) en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

2- a) Calculer f ' (x).

b) Déterminer les variations de f.

3-a) Tracer (C)

b) Tracer la tangente (T) à (C) qui passe par l'origine du repère.

c) On appelle α l'abscisse de point d'intersection de (C) et (T). Déterminer graphiquement une valeur approchée de α.

4- Montrer que $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0 \quad et\ \sqrt{\alpha} - 1 - \frac{2}{\alpha} = 0$

5- Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x} - 1 - \frac{2}{x}$ pour tout réel x strictement positif.

On appelle (C') sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Tracer (C').

b) Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 0$.
c) Calculer $g'(x)$.
d) Montrer que g est une bijection de $[2; 3]$sur un intervalle que l'on précisera.
e) Montrer que α appartient à$[2; 3]$.

Exercice 58

La fonction f est définie sur IR par $(x) = \frac{2x+1}{|x-1|+2}$. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 2 cm).

1- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en$+\infty$.

2- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. (On distinguera deux cas suivant les valeurs de x).

3- Tracer (C) avec ses asymptotes.

4- Peut-on dire que f est dérivable sur IR ?
Interpréter graphiquement le résultat.

5- Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1.

CHAPITRE 4 : PRIMITIVES DE FONCTIONS - CALCULS D'INTEGRALES

1. Primitives

1.1- Définition et propriétés

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I et dont la fonction dérivée est f.
Autrement dit, F est une primitive de f sur I si pour tout x de I $F'(x) = f(x)$

Exemple :
Soit la fonction f définie sur] -1/2 ; + ∞[par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.
La fonction F définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $F(x) = \sqrt{2x+1}$ est une primitive de f sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.
En effet F est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et pour tout réel x de $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, on a
$F'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = f(x)$.

Propriétés

(P_1) : Toute fonction définie et continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
(P_2) : Si une fonction f admet une primitive F sur un intervalle I, alors toutes les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$ où $k \in IR$ sont des primitives de f sur I.
(P_3) : Si F et G sont des primitives de f sur I, alors il existe un réel k tel que pour tout x de I, $G(x) = F(x) + k$
(P_4) : Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I et λ un nombre réel quelconque.

Primitive de (f+g) = primitive de f + primitive de g
Primitive de (λ f) = λ (primitive de f)

Remarque : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant des primitives sur I, x_0 et y_0 sont deux nombres réels donnés, il existe une seule primitive F de f sur I prenant la valeur y_0 en x_0.

Exemple 1
Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 2x+3$. Les fonctions G définies sur ℝ par $G(x) = x^2+3x+k$ sont les primitives de f sur IR; avec k réel.

Exemple 2
Soit f la fonction définie par sur I =] -1/2 ; + ∞[par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. La fonction f admet sur I une primitive F définie par $F(x) = \sqrt{2x+1}$.
La fonction H définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $H(x) = \sqrt{2x+1} - 3$ est la primitive de f sur I prenant la valeur $y_0 = -2$ en $x_0 = 0$. En effet $H'(x) = f(x)$ et $H(0) = -2$

1.2- Calcul des primitives

a) Primitives des fonctions usuelles

Fonction f définie par f (x) =	Fonction F : Une primitive de f définie par F (x) =	Ensemble de définition
$a; a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
$x^n; n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}$	$]-\infty;0[ou]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}; n \in \mathbb{N}$ et n>1	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[ou]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	sin x	$\mathbb{R}$

$\sin x$	-cos x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{cos^2x} = 1 + tan^2x$	tan x	$\left]\frac{-\pi}{2} + k\pi; \frac{+\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{sin^2x} = 1 + cotan^2x$	-cotan x	$]k\pi; \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

b) Opérations sur les primitives

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction f	une primitive de f : F
$u'.u^q, q \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{1}{q+1}u^{q+1}$
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N} - \{1\}$ et u ne s'annulant pas sur I	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$, u étant strictement positif sur I.	$2\sqrt{u}$
u'v+uv'	u.v
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$, v ne s'annulant pas sur I	$\frac{u}{v}$
v'(u'ov)	uov
u'cos u	sin u
u'sin u	-cos u
$\frac{u'}{cos^2u}$	tan u
$\frac{u'}{sin^2u}$	-cotan u

Exercices résolus 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer F une primitive de f sur I.

1. $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{x^2}$; $I =]-\infty, 0[$
2. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$; $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{\sin x - x.\cos x}{sin^2x}$; $I =]0, \frac{\pi}{2}[$
4. $f(x) = \frac{3}{(3x-4)^5}$; $I = \left]-\infty; \frac{4}{3}\right[$ $\left(ou \left]\frac{4}{3}; +\infty\right[\right.$
5. $f(x) = 2x.\cos x - x^2 \sin x$; $I = \mathbb{R}$

Solutions:

1) Posons $g(x) = 4x^3$ et $h(x) = -\frac{1}{x^2}$ pour tout x de I. f est la somme de deux fonctions définies et dérivables sur I. Pour tout x de $]-\infty; 0[$, posons : f(x) = g(x) + h(x). La fonction $G: x \longmapsto x^4$ et $H: x \longmapsto \frac{1}{x}$ sont les primitives respectives des fonctions g et h sur I. Si F est une primitive de f sur I alors F= G+H et pour tout x de I, $F(x) = x^4 + \frac{1}{x}$ est une primitive de f sur $]-\infty; 0[$.

2) *Soit u la fonction définie sur IR par : $u(x) = 1 + x^2$ La fonction u est dérivable sur IR et $u'(x) = 2x$.*
Donc pour tout x de IR, on a : $f(x) = \frac{1}{2}u'(x).u(x)^{\frac{1}{2}}$
Or primitive de $u'u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}u'u^{\frac{3}{2}}$. D'où la fonction $F: x \longmapsto \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de f sur IR.

3) On remarque que pour tout x de l'intervalle I, $f(x) = \frac{u'(x).v(x) - v'(x).u(x)}{(v(x))^2}$ avec u(x)= x et v(x)= sin x, donc la fonction $F: x \longmapsto \frac{x}{\sin x}$ est une primitive de f sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

4) u est une fonction définie et dérivable sur *I*. Pour tout x de l'intervalle $I\, f(x) = u'(x).(u(x))^5$ avec $u(x) = (3x-4)$ donc la fonction $F: x \longmapsto \frac{1}{6}(3x-4)^6$ est une primitive de f sur *I*.

5) Pour tout x de $\mathbb{R}$, f(x)= u'(x).v(x) + u(x) . v'(x) avec $u(x) = x^2$ et v(x) = cos x.
Donc la fonction $F : x \longmapsto x^2.\cos x$ est une primitive de f sur *I*.

2. Calcul intégral

2.1- Intégrale d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
a et b étant deux nombres réels de I, on appelle intégrale de a à b de la fonction f, le nombre réel F(b) - F(a). On note $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b) = [F(x)]_a^b$

Exemples

1. La fonction $F: x \longmapsto -\frac{1}{x}$ est une primitive de la fonction $f: x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ et on a
$\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$
2. La fonction $G: x \longmapsto -cosx$ est une primitive de la fonction $g: x \longmapsto sinx$ sur $[0;\pi]$ et on a

$\int_0^\pi sinxdx = [-cosx]_0^\pi = 1 + 1 = 2$

Vocabulaires

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit « somme (ou intégrale) de a à b de f(x) dx ».
- $[F(x)]_a^b$ se lit « F (x) pris entre a et b
- a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer x par toute autre lettre autre que a et b

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$. x est appelée variable muette ; t et u sont aussi des variables muettes.

Remarques

(R_1) : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(R_2) : $\int_a^a f(x)dx = 0$

(R_3) : $\int_a^b 0dx = 0$

(R_4) : $\int_a^b cdx = c(b-a)$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b et c sont des réels de I.

(P_1) : Intégrale d'une somme : $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(P_2) : Linéarité : Pour tout réel α, $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

(P_3) : Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

2.2- Inégalités et intégrales

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I; a, b et c sont des réels de I.

(T_1) : Si pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(T_2) : Si pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

(T_3) : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Démonstration :

(T_1) : Notons F une primitive de f sur I.
Pour tout x ∈ [a ;b] , F'(x)= f(x)≥0. F est croissante sur $[a; b]$
Par conséquent F(a) ≤ F(b) c'est – à – dire F(b) - F(a) ≥0 d'où
$\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(T_2) : Pour tout x ∈ [a ;b] , g(x) - f(x)≥0
Donc [g – f](x) ≥0 d'après (T_1) $\int_a^b [g-f](x)dx \geq 0$ d'où

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(T₃) : On sait que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ donc $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$ d'où

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

2.3- Intégrale d'une fonction paire, impaire et périodique

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. a est un élément de I.

Si f est paire sur I, alors $\int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx$ et $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Si f est impaire sur I, alors $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$ et $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Si f est périodique de période T sur I, alors $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

2.4- Inégalité de la moyenne

Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a ;b], m et M sont des nombres réels.

Si pour tout x appartenant à [a ;b], $m \leq f(x) \leq M$, alors $m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a)$

Démonstration :

Si $m \leq f(x) \leq M$, alors $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$

soit $m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a)$.

Conséquence

Si pour tout x appartenant à [a ;b], $|f(x)| \leq M$, alors $\int_a^b |f(x)dx| \leq M(b-a)$.

Démonstration :

$|f(x)| \leq M$ signifie $-M \leq f(x) \leq M$, donc $\int_a^b -Mf(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mf(x)dx$ d'où

$M[-(b-a)] \leq \int_a^b f(x)dx \leq M[+(b-a)]$ c'est-à dire $\int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a)$

d'où $\int_a^b |f(x)dx| \leq M(b-a)$

Exercice résolu 2

Sachant que pour tout réel x, $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ $1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$

Démontrer que: $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sinx} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Solution :

Démonstration: Pour tout x de $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, $1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$ alors $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sinx} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}dx$ soit

$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sinx} \leq \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ d'où $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sinx} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

2.5- Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a ;b].On appelle valeur moyenne de la fonction f sur [a ;b] le nombre réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Exemple : La valeur moyenne de la fonction $x \longmapsto 1-x^2$ sur $[-1;1]$ est $\mu = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 (1-x^2)dx$

$\mu = \frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$

2.6- Quelques méthodes de calcul d'intégrales

En classe de terminale il y a généralement trois méthodes pour le calcul d'intégral : l'utilisation des primitives, l'intégration par parties et l'intégration par changement de variables.

a) Utilisation des primitives

Exemple :

Calcul $de \int_0^{\frac{\pi}{3}} sinxdx = [-cosx]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

b) Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur [a ;b]. Si les fonctions dérivés u' et v' sont continues sur [a ;b], alors $\int_a^b u'(x).v(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx$

Exemple : calcul de $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xcosxdx$

Posons u'(x) = cos x et v(x) = x, alors u(x) = sin x et v'(x) = 1.

Par intégration par partie on a : $L = [xsinx]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx$

$$= \frac{\pi}{2}[-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

c) Intégration par changement de variables

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt$ $(\alpha \neq 0)$, on peut utiliser le procédé suivant :

- Faire le changement de variable : u=αt+β ; on obtient du = αdt.
- Utiliser l'égalité $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)du$

Exemple :

Calcul de $I = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx$. Posons u = 2x+3. On a du = 2dx donc $dx = \frac{1}{2}du$

x = -1 ⇔ u = 1 et x= 0 ⇔ u = 3.

$I = \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}}\right) du$

X $= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} - 6\sqrt{u}\right]_1^3 = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$

2.7- Applications du calcul intégral

a) Fonction définie à partir d'une intégrale

Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . u et v deux fonctions définies et dérivables sur I. La fonction g définie sur I par : pour tout x appartenant à I, $g(x)= \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I et pour tout x appartenant à I, $g'(x) = v'(x).f[v(x)] - u'(x).f[u(x)]$

Corollaire

Soit a un nombre réel, f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Alors la fonction g définie sur I par $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur et pour tout x appartenant à I g'(x)= f(x)

Exercice résolu 3

1. **Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}$ pour tout réel x**
   Démontrer que f est dérivable sur]0; +∞[et calculer f'(x).
2. **Soit la fonction f définie sur [0; +∞[par $f(x) = \int_0^x t\sqrt{1+t^2}dt$**
   Démontrer que f est dérivable sur [0; +∞[et calculer f'(x).

Solution :

Démonstration et calcul de f'(x) :

1. la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est définie et continue sur ℝ et les fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto x^2$ sont définies et dérivables sur ℝ donc f est dérivable sur ℝ et pour tout x appartenant à ℝ, on a $f'(x)=2x\frac{1}{1+(x^2)^2} - 2\frac{1}{1+(2x)^2} = \frac{2x}{1+x^4} - \frac{2}{1+4x^2}$ D'où $f'(x)= \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{1+4x^2}$
2. On sait que les fonctions : $t \mapsto t$ et $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ sont définies et continues sur [0; +∞[. Donc la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est définie et continue sur [0; +∞[en tant que produit de deux fonctions continues sur un même intervalle. Par conséquent, f est dérivable sur [0; +∞[et pour tout x appartenant à [0; +∞[$f'(x) = x\sqrt{1+x^2}$

b) Calcul d'aires

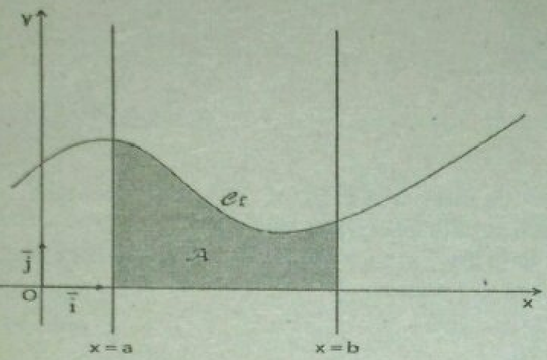
Unité d'aire : Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; l'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ.

Si $\|\vec{i}\| = a$ cm et $\|\vec{j}\| = b$ cm alors 1u.a = ab cm^2

Cas d'une courbe

- Soit f la fonction positive admettant des primitives sur un intervalle [a ;b], et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

L'aire du domaine limite par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b, est, en unités d'aire, A $=\int_a^b f(x)dx$



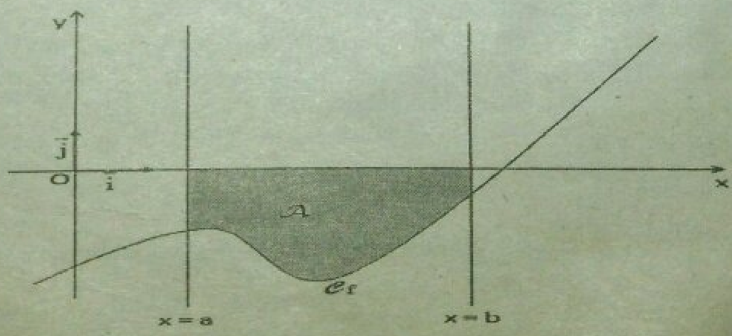
Exemple 1 :

Soit f la fonction définie, pour tout x de l'intervalle [3 ;1] par : $f(x)= x^2+1$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal$(O,\vec{i},\vec{j})$, avec $\|\vec{i}\| = 2cm;\ \|\vec{j}\| = 3cm$.
L'aire A, en cm^2, du domaine D du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -3 et x= 1 est égale à $\int_{-3}^{1}(x^2+1)dx.\,1u.a.$

$A =\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-3}^{1} \times 2cm \times 3cm\ ;\ A = 80\,\text{cm}^2$

- Soit f la fonction négative admettant des primitives sur un intervalle, [a ;b] et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

L'aire du domaine limite par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b, est, en unités d'aire, A $= -\int_a^b f(x)dx$ x 1 u.a.



Exemple 2

Le plan P est muni d'un repère orthonormé R $=(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unités 2cm.
Soit f la fonction définie, pour tout x de l'intervalle [-2 ;-1] par : $f(x) = \frac{1}{x^3}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans $\mathbb{R}^3$. L'aire A, en cm^2, du domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = -1$ est égal à

$A = -\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3} dx \times 1u.a.$

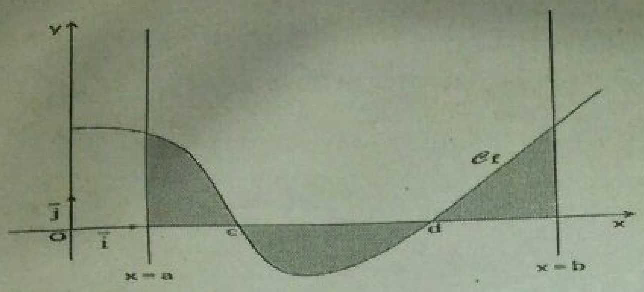
$A = -\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-2}^{-1} = \frac{3}{2} cm^2$ ou $A = 1,5cm^2$

- I est un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. a, b, c et d sont des éléments de I tels que a<b <c<d. L'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = a$ et $x = b$ est égal à

$A = \int_a^b f(x)dx \times 1$ u.a.

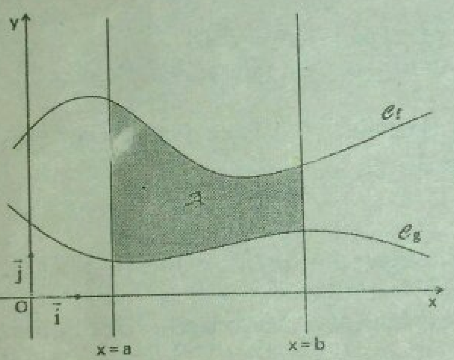
$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \times 1$ u.a.



Cas de deux courbes

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal, a et b sont des nombres réels de I.
Sachant que pour tout x appartenant à l'intervalle [a ;b] $g(x) \leq f(x)$, l'aire du domaine D délimité par les courbes (C_f) et (C_g), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \times 1\, u.a.$



Exemple :

Soit f et g deux fonctions définies sur IR par :
$f(x) = -x^2+3$ et $g(x) = x^2 + 1$ et, (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 1 cm. Pour tout réel x de [0 ;1]; $f(x) - g(x) \geq 0$, Donc l'aire de la portion du plan délimité par les deux courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est

$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx \times 1u.a$

$= \int_0^1 (-2x^2 + 2)dx \times 1$u.a

$= \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_0^1 cm^2$ Donc $A = \frac{4}{3} cm^2$ (c'est la valeur de A)

EXERCICES

Exercice 1

Déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 4x^3 + x^2 + 3; I = \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - \frac{1}{x^4}; I =]0, +\infty[$

$f(x) = (2x-3)(x^2 - 3x + 4)^2; I = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}; I =]1, +\infty[$

$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}; I =]-\infty, 1[$

$f(x) = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 1}; I = [1, +\infty[$

$f(x) = \sin x . \cos x; I = \mathbb{R}$

$f(x) = cosx. sin^2 x; I = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{sinx}{\sqrt{cosx}}; I = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$

$f(x) = \frac{1}{x^2} sin\frac{1}{x}; I =]0, +\infty[$

$f(x) = \frac{cosx}{sin^2 x}; I =]0, \pi[$

$f(x) = \frac{tanx}{cos^2 x}; I = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 2

1 .Parmi les fonctions suivantes, reconnaître celles qui sont de la forme $u'.u^{\alpha}$;$\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$f_1: x \longmapsto 2x\sqrt{x^2+5}$; $f_2: x \longmapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$; $f_3: x \longmapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+5}}$; $f_4: x \longmapsto (2x+1).(x^2+2x+5)$

$f_5: x \longmapsto (2x+1).(x^2+x-3)^{16}$; $f_6: x \longmapsto sin^2 x. cos^2 x$; $f_7: x \longmapsto \frac{cos^2 x}{sinx}$; $f_8: x \longmapsto \frac{sinx}{(cosx)^{19}}$

2 .Exprimer Pour celles qui sont de ce type calculer les primitives.

Exercice 3 à 6

Calculer les primitives de chacune des fonctions suivantes :

3)$f: \longmapsto sin^2 x. cos^3 x$
$g: \longmapsto cos^2 x. sin^3 x$
4)$f: \longmapsto \sin(3\pi x) + \cos(3\pi x)$
5)$g: x \longmapsto \cos\left(\frac{3\pi x}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)$
6)$h: x \longmapsto \tan^2\left(\frac{5\pi x}{12}\right) - \cos\left(3\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

Exercice 7

Pour chacun des cas linéariser d'abord et ensuite calculer une primitive.

$f_1(x) = sin^4 x.$ $\qquad f_2(x) = sin^5 x.$

$g_1(x) = cos^4 x.$ $\qquad g_2(x) = cos^5 x.$

Exercice 8

1 .Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de cos2x

2. Déterminer les primitives de la fonction f : $x \longmapsto cosx + cos^2 x.$

Exercice 9

Soit f la fonction telle que f(x)= tan x sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

1. Calculer la dérivée f' en fonction de f.
2. En déduire la primitive de le fonction g : $x \longmapsto \tan^2 x$ qui s'annule en $\left]\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 10

Calculer les primitives de chacune des fonctions f et suivantes sachant que

$f(x) = cos^3 x$ et $g(x) = \frac{xsinx+cosx}{x^2}$; $x \in \mathbb{R}$

Exercice 11

Calculer chacune des intégrales en utilisant des primitives

$I = \int_1^e \left(2x + 3 - \frac{1}{x}\right) dx$ $\qquad J = \int_{-1}^{2} 4x(6x^2+1)dx$

$K = \int_0^4 \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - 32\right) dx$

$L = \int_1^4 x\sqrt{x^2+3}dx$

$M = \int_0^{\pi}(sin^2x - cos^2x)dx$

$N = \int_0^{\pi}(sinx + cos^2x)dx$

$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx.cosx.dx$

$Q = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^4x.cosx.dx$

$R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5x.dx$

$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x.dx$

$X = \int_1^2 \frac{1}{x^2} sin\frac{\pi}{x} dx$

$Y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+tan^2x}{tanx} dx$

Exercice 12

On note I , J et K les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4x.dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5x.dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2x.cos^2x.dx$

1. Exprimer Calculer I - J et I + J + K
2. Exprimer $2sin^2x.cos^2x$ en fonction de $\sin^2 2x$ puis de cos4x. Calculer alors K.
3. Déduire I et J des résultats précédents.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = \sqrt{1+cos^2x}$

1. Trouver un encadrement de f(x).
2. En déduire un encadrement de l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{1}{f(t)} dt$

Exercice 14

On pose $M = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{sinx}{cosx-sinx} dx$ et $N = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{cosx}{cosx-sinx} dx.$

Calculer M + N et M - N . En déduire la valeur de M et celle de N.

Exercice 15

a et b sont deux nombres réels donnés.

1 .Développer sin(a+b) et sin(a – b). En déduire que $sina.cosb = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

2. Démontrer que $\sin x.cosx\frac{1}{2}(sin4x - sin2x)$ *En déduire* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx.cos3x).dx$

Exercice 16

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x différent des 0 et de -1 : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$
2. Calculer alors $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

Exercice 17

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel t différent de 0 et de -1 : $\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \frac{c}{t+1}$

2 . Calculer alors $\int_1^2 \frac{1}{t^2(t+1)} dt$

Exercice 18

1. n étant un entier naturel non nul ; calculer l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi} x.cos2nx.dx$
2. Linéariser $f(x) = sin^6x$
3. Utiliser les questions précédentes pour calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} sin^6x.dx$

Exercice 19

A l'aide d'une intégration par parties, calculer chacune des intégrales suivantes :

- $\int_0^{\pi}(2x+3)sinx.dx$
- $\int_0^{1} x\sqrt{x+1}dx$
- $\int_0^{\pi} xcos\left(\frac{x}{2}\right) dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cos^2x} dx$

Exercice 20

Soit $J_n = \int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n dx, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Etablir la relation de récurrence $(2n+1)J_n + 2nJ_{n-1}$ en effectuant une intégration par parties. En déduire J_n.

Exercice 21

On considère l'intégrale $\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$, n étant un nombre entier naturel non nul.

1. Calculer α_1.
2. Calculer $\alpha_{2p+1} - \alpha_{2p-1}$. En déduire la valeur de α_{2p+1}.
3. Calculer α_2.
4. Calculer $\alpha_{2n+2} - \alpha_{2n}$. En déduire la valeur de α_{2n}.

Exercice 22

n est un nombre entier naturel non nul. On considère l'intégrale $X_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt$.

1. pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = X_{n+1} - X_n$. Simplifier Y_n.
2. Calculer $Y_{n+1} - Y_n$. En déduire Y_n.
3. Calculer X_1 puis X_n.

Exercice 23

En utilisant un changement de variables affines, calculer chacune des intégrales suivantes

$\int_0^2 (2x-1)^3 dx$ $\int_1^2 x\sqrt{-x+3}\,dx$ $\int_{\frac{5}{3}}^2 \frac{x^2}{(3x-4)^5} dx$ $\int_0^2 x\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx, poser\ x = 2cosx$

Exercice 24 :

Etant donnés deux nombre réels a et b strictement positifs. Démontrer, à l'aide d'un changement de variables, que $\int_1^a \frac{dt}{t} = \int_a^{ab} \frac{dt}{t}$

Exercice 25

On désigne par E la fonction partie entière. Calculer la valeur moyenne de cette fonction sur l'intervalle I=[-1 ;3]

Exercice 26

Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants

1. $f(x) = x^2 - 3\ et\ I = [-1; +1]$
2. $f(x) = \cos(3x-4)\ et\ I = [0; \frac{2\pi}{3}]$
3. $f(x) = x^2 + 1; I = [0; 10]$
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}; I = [8; 15]$
5. $f(x) = \frac{1}{x+2}; I = [e-2; e^2-2]$
6. $f(x) = cos2x; I = [0; \pi]$

Exercice 27

Sachant que $\int_0^1 f(x)dx = 2\ et\ \int_0^1 g(x)dx = -3$, calculer $I = \int_0^1 5f(x)dx; J = \int_0^1 \frac{1}{4} g(x)dx\ et$ $K = \int_0^1 (2f(x) - 3g(x))dx$

Exercice 28

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$d'unité 1cm.

1. Tracer dans (P) la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = cosx\ \ sur\ \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par cette courbe, l'axe (xx') et les droites d'équations : $x = 0\ et x = \pi$.
3. Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 29

1. Représenter graphiquement la fonction $x \longrightarrow \frac{x}{1+x^2}$ .Unités : 1cmsur l'axe des abscisses et 6cm sur l'axe des ordonnées.
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine D délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = +3$.

Exercice 30

On considère la fonction $x \to x + \frac{1}{2x^2}$

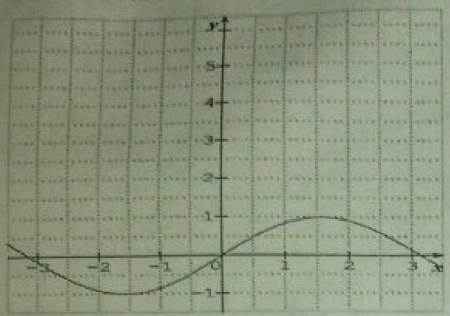
1. Etudier le sens de variation de cette fonction et construire sa courbe représentative Tracer (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Calculer l'aire $S(\lambda)$ de la portion du plan limité par la courbe(C), la droite d'équation y=x et les parallèles à l'axe (O y) d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$ $(\lambda > 1)$
3. Calculer la limite de $S(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

Exercice 31

1. Tracer les courbes (C) et (C ') dont les équations respectives, dans un repère orthonormal, sont $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1$ et $y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 3$.
2. Calculer les abscisses x_0 et x_1 de leurs points communs.
3. Calculer l'aire de la surface comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $x = x_0$ et $x' = x_1$

Exercice 32

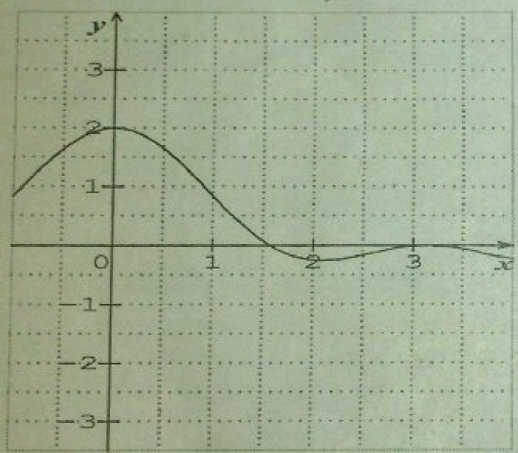
Voici la courbe de la fonction f : x⟼sin x sur l'intervalle [-3,5 ;+3,5]



Observer cette figure. Prouver que l'aire du domaine délimité par la courbe , l'axe (xOx') et les droites d'équations x=-π et x=π est nulle.

Exercice 33

L'unité de longueur est le centimètre. Voici la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = cosx + cos^2x$ sur l'intervalle [-1 ;4].

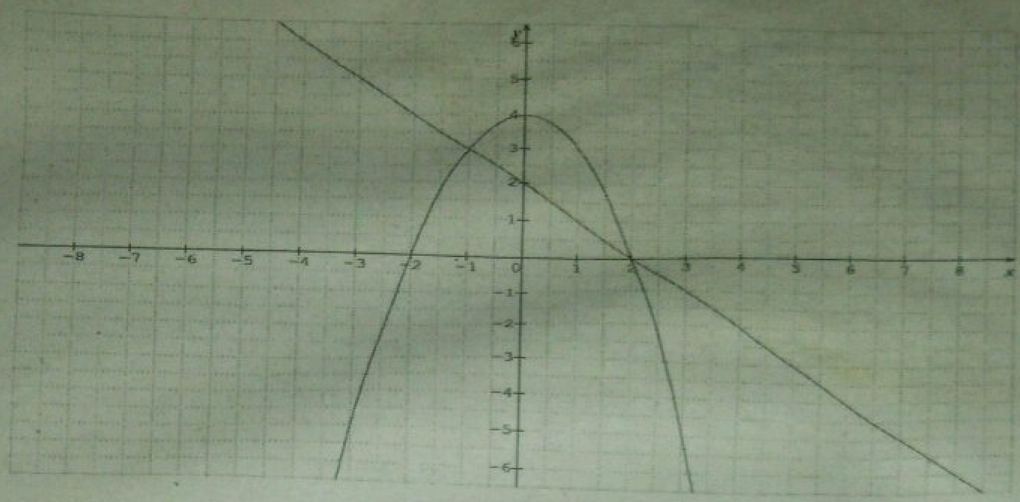


Elle coupe l'axe des abscisses en $\frac{\pi}{2}$ et en π. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=π.

Exercice 34

Etant données deux fonctions f et g dont les courbes représentatives dans un repère orthonormé d'unité 1cm sont données sur la figure ci-dessous.

1. Déterminer f et g
2. Donner les abscisses x_0 et x_1 des points communs aux deux courbes
3. Calculer l'aire du domaine délimité par les deux courbes et les droites d'équations $x = x_0$ et $x = x_1$



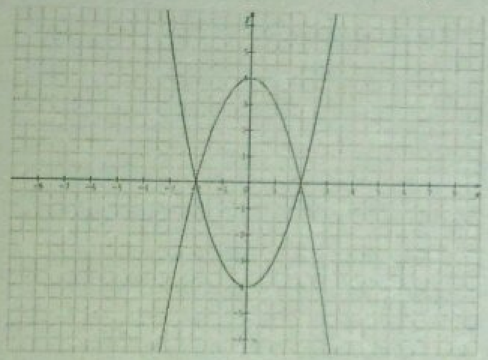
Consigne : Pour les exercices 36 à 39 on demande de calculer l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équations x=a et x=b

Exercice 35

$f: x \longmapsto -x^2 + 4$ et $g: x \longmapsto x^2 - 4; a = -2$ et $b = +2$

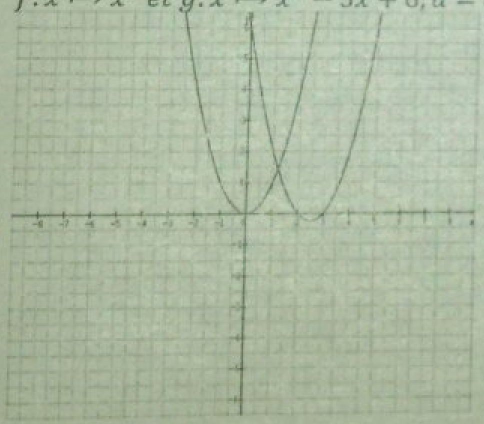
Exercice 36

$f: x \longmapsto -x^2 + 4$ et $g: x \longmapsto x^2 - 4; a = -2$ et $b = +2$



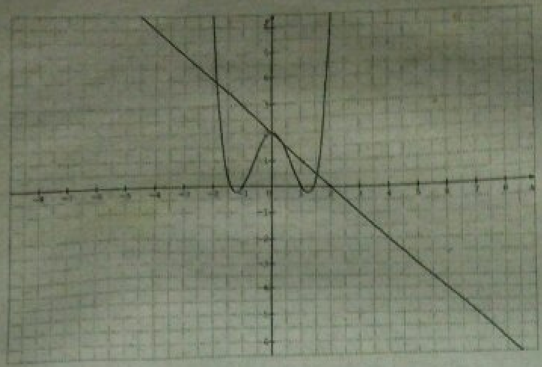
Exercice 37

$f: x \longmapsto x^2$ et $g: x \longmapsto x^2 - 5x + 6; a = 0$ et b est l'abscisse du point commun aux deux courbes



Exercice 38

$f : x \longmapsto x^4 - 3x^2 + 2$ et $g : x \longmapsto -x + 2 ; a = -1$ et $b = 0$



Exercice 39

Soit f la fonction telle que $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de g.
2. Prouver que g est paire sur D.
3. Calculer $\int_0^1 g(x)dx$ puis $\int_{-1}^1 g(x)dx$

Exercice 40

1. Démontrer que pour tout nombre réel x : $cos^3x = \frac{1}{4}cos^3x + 3cosx.$
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t+1)cos^2t.sint.dt$

Exercice 41

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = \frac{sinx}{cos^3x}$.

Démontrer que pour tout réel x de$[0\,;\frac{\pi}{4}]$, $f'(x) = \frac{3}{cos^4x} - \frac{2}{cos^2x}$

Calculer alors $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{cos^4x}$

Exercice 42 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt$

1. Montrer que la fonction f est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
2. Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, calculer la fonction dérivée f'(x).
3. Etudier le sens de variation de f.

Exercice 43

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

1. Prouver que u est paire sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que : pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\frac{x}{\sqrt{1+16x^2}} \leq u(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$
3. Justifier que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer u'(x).
4. Etudier le sens de u.

Exercice 44

Soit f et g deux fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$, par $f(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$ et $g(x) = (3-x)\sqrt{x}$

Calculer g'(x) et en déduire la valeur de $I = \int_1^2 f(x)dx$

Exercice 45

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = sinx.cos^3x + 3sin^3x$

1. Démontrer que $f(x) = sinx.(cos^3x - 3cos^2x + 3)$.
2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

Exercice 46

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$

Calculer $\int_0^1 I_n(x)dx$.

Exercice 47

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n(x) = (1+x)^n, x \in \mathbb{R}$

Calculer de deux manières différentes $\int_0^1 J_n(x)dx$.

Exercice 48

En utilisant deux intégrations par parties, calculer :

$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}.dx$ $\qquad$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sin2x.dx$

Exercice 49

1. a) Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}.dt$ en effectuant un changement de variables.(indication : poser $t = \sin\theta$ $\theta \in [0\,;\pi]$).
   b) Calculer $\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}.dt$.
2. Pour tout entier naturel n et pour tout réel x de [0 ;1], on pose $I_n(x) = \int_0^n t^n\sqrt{1-t^2}.dt$.
   a) Calculer $I_1(x)$.
   b) Etablir une relation de récurrence entre $I_n(x) et\ I_{n+2}(x)$.
   Que devient cette relation pour n=1 ?
   c) en déduire $I_{2p}(x) et\ I_{2p+1}(x)$.

Exercice 50

Soit f_n la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f_n(x) = tan^n x$ où $n \in \mathbb{N}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_n(x)dx$.

1. Pour tout entier naturel n, calculer, $(f_{n+1})'(x)$.
2. Démontrer que : la suite (I_n) est positive et décroissante.
3. En déduire que :
   a) Pour tout entier non nul, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
   b) Pour tout entier nature n non nul, $\frac{1}{2n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   c) la suite (I_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse

Exercice 51

Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1. Calculer u_1.
2. a) Prouver que la suite (U_n) est décroissante.
   En déduire que la suite (U_n) est convergente.
   b) Démontrer que , pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ;1], $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1
   on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)}$.
   c) Calculer la limite de (U_n).
3. Pour tout entier naturel n≥3, , on pose : $I_n = \int_0^1 \sqrt{1+x^2 dx}$
   a) Vérifier que, pour tout entier naturel n≥3, on a $U_n + U_{n-2} = I_n$

   b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur I_n, démontrer que
   pour tout entier naturel n≥3, on a : $n\,U_n + (n+1)U_{n-2} = \sqrt{2}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n≥3 , $(2n-1).U_n \leq \sqrt{2}$.

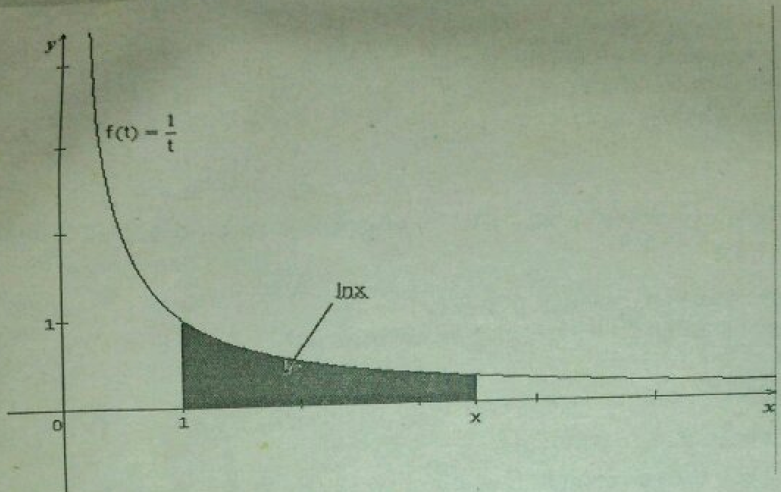
   c) A l'aide des inégalités des questions 2-b) et 3-b) , démontrer que la suite (nU_n) est convergente et calculer sa limite.

CHAPITRE 5 : FONCTION LOGARITHME - FONCTION EXPONENTIELLE

1. Fonction Logarithme Népérien

1.1- Définition et ses conséquences immédiates

<u>Définition</u>
On appelle fonction logarithme népérien la fonction notée ln et définie sur $]0,+\infty[$ par $\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$.



<u>Conséquences immédiates (autre définition)</u>
La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ telle que $\ln 1 = 0$

<u>Propriété :</u> pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$; $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Exemple d'ensemble de définition:
a) $f(x) = \ln(1\text{-}4x)$ est définie si $1-4x > 0$ donc $x < \frac{1}{4}$ d'où $D_f =]-\infty\,;\frac{1}{4}[$
b) $f(x) = \ln\left|\frac{-X+1}{3X-2}\right|$ est définie si $\frac{-X+1}{3X-2} \neq 0$ et $3x - 2 \neq 0$ donc $D_f = IR\text{-}\{\frac{2}{3}\,;1\}$

<u>Conséquences</u>
La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$:
$a < b$ équivaut à $\ln a < \ln b$
$a = b$ équivaut à $\ln a = \ln b$
<u>En particulier</u> :
Si $x > 1$, alors $\ln x > \ln 1$, c'est-à-dire $\ln x > 0$.
Si $0 < x < 1$, alors $\ln x < \ln 1$, c'est-à-dire $\ln x < 0$.

<u>Propriétés algébriques</u>
Pour tous réels a et b de l'intervalle $]0\,;+\infty[$
(P_1) : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
(P_2) : $\ln\frac{1}{b} = -\ln b$
(P_3) : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
(P_4) : $\ln a^p = p\ln a$, p appartenant à Q
(P_5) : $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Démonstration

(P_1) : ln ab = ln a + ln b :

$\ln(ab) = \int_1^{ab}\frac{1}{t}dt = \int_1^{a}\frac{dt}{t} + \int_a^{ab}\frac{dt}{t}$. Posons $u = \frac{t}{a}$; $du = \frac{dt}{a}$

si t = a alors u = 1 et si t = ab alors u = b donc $\int_a^{ab}\frac{dt}{t} = \int_1^{b}\frac{du}{u} = \ln b$ or $\int_1^{a}\frac{dt}{t} = \ln a$ d'où ln(ab) = lna + lnb

(P_2) : $\frac{1}{b}\cdot b = 1$; $\ln 1 = \ln(b\cdot\frac{1}{b}) = lnb + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$ donc $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -lnb$

(P_3) : $\ln\frac{a}{b} = lna\cdot\frac{1}{b} = lna + ln\frac{1}{b} = lna - lnb$

(P_4) : lorsque p ∈ IN $\ln a^p = \ln(\underbrace{a.a \dots .a}_{p-facteurs})$ = lna+lna+...+lna = p lna

lorsque p = -q on a $\ln a^p = \ln a^{-q} = \ln\left(\frac{1}{a^q}\right) = -\ln a^q = -q\ln a = p\ln a$

posons $p = \frac{m}{n}$, on sait que $\left[a^{\frac{m}{n}}\right]^n = a^m$ donc $\ln\left[a^{\frac{m}{n}}\right]^n = \ln(a^m)$ ensuite $n\ln a^{\frac{m}{n}} = m\ln a$ d'où

$\ln a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}lna$ et enfin $\ln a^p = p\ln a$

(P_5) : $\sqrt{a}^2 = a$ donc $\ln\sqrt{a}^2 = \ln a$ d'où $2\ln\sqrt{a} = \ln a$ enfin $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}lna$

Exemples

ln6 = ln(2 x 3) = ln2 + ln3

$\ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3$

1.2- Equations – Inéquations

ln [U(x)] = ln [V(x)] équivaut à U(x) > 0, V(x) > 0 et U(x) = V(x)

ln [U(x)] < ln [V(x)] équivaut à U(x) > 0, V(x) > 0 et U(x) < V(x)

<u>Exercice résolu 1</u>

Résoudre dans IR

ln (2x+1) = ln(3x-1) et ln(2x+1) ≤ ln(3x-1)

Solution

• ln (2x+1) = ln(3x-1) est définie si 2x+1 > 0 et 3x-1 > 0 c'est-à-dire $x > -\frac{1}{2}$ et $x > \frac{1}{3}$ ce qui donne $x > \frac{1}{3}$

ln(2x+1) = ln(3x-1) implique 2x+1 = 3x-1

x = 2 et comme $2 > \frac{1}{3}$ donc la solution est x = 2

• ln (2x+1) ≤ ln(3x-1) est définie si $x > \frac{1}{3}$

ln (2x+1) ≤ ln(3x-1) implique 2x+1 ≤ 3x-1

-x ≤ -2

x ≥ 2 donc l'ensemble des solutions est [2 ;+∞[

1.3- Limites usuelles

1) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

2) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

4) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

6) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Démonstration

3) Considérons $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$ une fonction définie sur [1 ;+∞[. On a $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x} < 0$ (car x ≥ 1 donc $\sqrt{x} \geq 1$ d'où $1 - \sqrt{x} \leq 0$) signifie que f est décroissante.

Or x ≥1 donc f(x) ≤ f(1).

Ensuite f(x) ≤ -2 < 0, car f(1) = -2

d'où $\ln x - 2\sqrt{x} < 0$ entraîne $\ln x < 2\sqrt{x}$

$$\frac{lnx}{x} < 2\frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\frac{lnx}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Or $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{lnx}{x} = 0$

4) Posons $t = \frac{1}{x}$. Si x tend vers 0^+ alors t tend vers $+\infty$ donc ; $\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{t\to+\infty} -\frac{lnt}{t} = 0$

5) La fonction ln est dérivable en 1; en ce point le nombre dérivé est 1, donc

$$\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = 1\ d'où\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

6) Posons t = x-1 d'où x = t + 1 ; si x tend vers 1 alors t tend vers 0

$$\lim_{x\to1}\frac{lnx}{x-1} = \lim_{X\to0}\frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

<u>Exercice résolu 2</u>

Calculer

a) les limites de $g(x) = \frac{2-\ln x}{1+\ln x}$ en $+\infty$; en 0 et en e

b) la limite de $\frac{\ln x}{x-1}$ en $+\infty$ (en utilisant une transformation d'écriture)

Solutions

a) Posons t = lnx si x tend vers $+\infty$ alors t tend vers $+\infty$ or $\lim_{X\to+\infty}\frac{2-X}{1+X}$ = -1 donc la limite de g(x) en $+\infty$ est -1

b) Posons

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\cdot\frac{lnx}{x} = 0\ car\ \frac{1}{x}\to 0\ et\ \frac{lnx}{x\longrightarrow 0}$$

1.4- Dérivée

$(\ln[U(x)])' = \frac{U'(x)}{U(x)}$ si U est dérivable sur son ensemble de définition et $U(x) > 0$

Remarque

$(\ln|U(x)|)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$ si U est dérivable sur son ensemble de définition et $U(x) \neq 0$

<u>Exercice résolu 3</u>

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes

$f(x) = \ln(-2x^2+3x-1)$ et $g(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{x-3}\right)$

Solutions

$$f'(x) = \frac{(-2x^2+3x-1)'}{-2x^2+3x-1} = \frac{-4x+3}{-2x^2+3x-1}$$

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{3x+2}{x-3}\right)'}{\left(\frac{3x+2}{x-3}\right)} = \frac{\frac{-11}{(x-3)^2}}{\left(\frac{3x+2}{x-3}\right)} = \frac{-11}{(x-3)^2}\cdot\frac{x-3}{3x+2} = -\frac{11}{(x-3)(3x+2)}$$

1.5- Variation et courbe

a) <u>Limites</u>

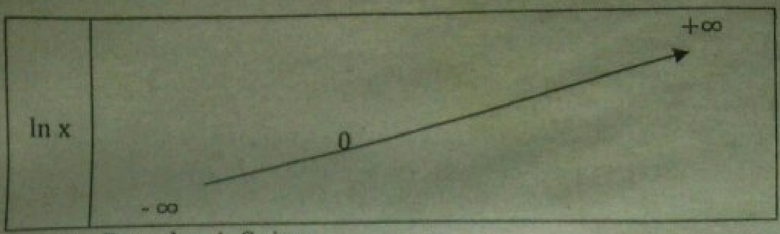
- $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$
- $\lim_{x\to0^+}\ln x = -\infty$

b) <u>Variations</u>

Pour tout x appartenant à$]0, +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$; la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+	



c) Branches infinies

- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln
- $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc la courbe admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses.

Remarques

La tangente au point A(1 ; 0) a pour coefficient directeur 1.

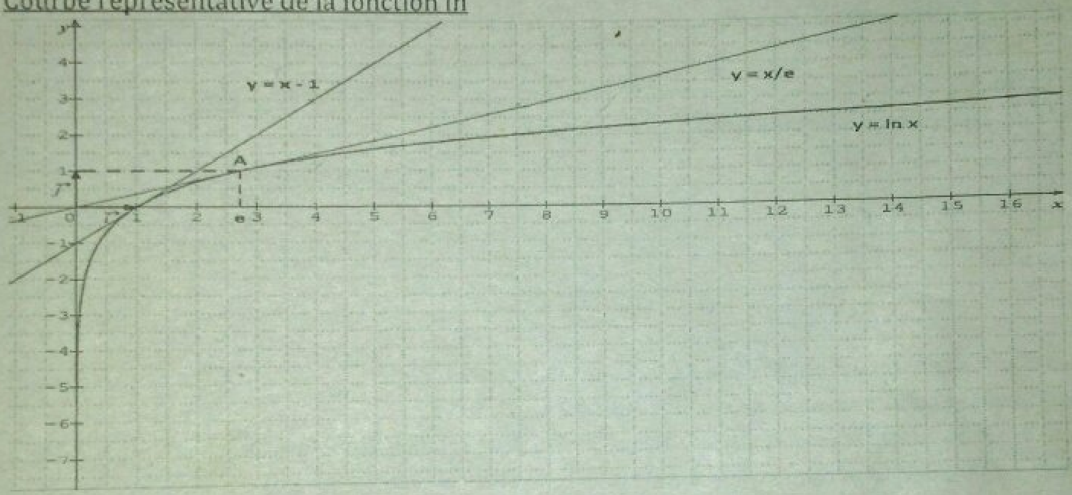
Le nombre e

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Elle est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. Il en résulte que 1 a un antécédent unique que l'on note e.

$\ln e = 1$ ($e \approx 2{,}71828$)

Le nombre e est appelé base du logarithme népérien

d) Courbe représentative de la fonction ln



2. Fonction Exponentielle népérienne

2.1- Définition et propriétés

Définition

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme néperien. C'est-à-dire :

$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

$x \longmapsto \ln x$ $\qquad x \longmapsto e^x$

Pour tout élément x de IR et pour tout élément y de $\mathbb{R}_+^*$

$\ln y = x$ équivaut à $y = e^x$

Par conséquent, pour tout élément x de IR : $e^x > 0$

Propriétés

(P_1) : Pour tout élément x de IR : $\ln e^x = x$

(P_2) : Pour tout élément x de $\mathbb{R}_+^*$: $e^{\ln x} = x$

(P_3) : $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

Pour tout a et b éléments de IR :

(P_4) : $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$

(P_5) : $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$

(P_6) : $e^{a+b} = e^a . e^b$

(P_7) : $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$

$(P_8) : e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$(P_9) : (e^a)^r = e^{ra}$

Exercice résolu 4

Ecrire sous forme la plus simple possible :

$\ln\sqrt{e^3}$; $\frac{1}{3}\ln e^{0,36}$; $e^{\ln 3 - \ln 8}$; $e^{\ln(x+1)}. e^{-\ln x}$; $e^{\ln x} - \ln e^x$

Solutions

$\ln\sqrt{e^3} = \frac{3}{2}$;

$\frac{1}{3}\ln e^{0,36} = 0,12$;

$e^{\ln 3 - \ln 8} = e^{\ln\frac{3}{8}} = \frac{3}{8}$;

$e^{\ln(x+1)}. e^{-\ln x} = (x+1)\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$;

$e^{\ln x} - \ln e^x = x - x = 0$

2.2- Equations inéquations

Propriétés

$(P_1) : e^{U(x)} = e^{V(x)}$ équivaut à $U(x) = V(x)$

$(P_2) : e^{U(x)} < e^{V(x)}$ équivaut à $U(x) < V(x)$

$(P_3) : e^{U(x)} = a$ équivaut à $U(x) = \ln a$

l$(P_4) : \ln [U(x)] = a$ équivaut à $U(x) = e^a$

Exercice résolu 5

Résoudre dans IR les équations suivantes

a) $e^{x+4} = 4$;

b) $e^{x+4} < 4$

c) $e^{x-5} = -3$

d) $\ln(x+2) = -3$

Solutions

a) $e^{x+4} = 4$ si et seulement si $x+4 = 2\ln 2$ donc $x = -4 + 2\ln 2$

b) $e^{x+4} < 4$ si et seulement si $x+4 < 2n2$ donc $x < -4 + 2\ln 2$

c) $e^{x-5} = -3$ impossible (car $-3<0$) donc cette équation n'a pas de solution

d) $\ln(x+2) = -3$ si et seulement si $x+2 = e^{-3}$ donc $x = -2 + e^{-3}$

2.3- Limites- Dérivées

a) Limites usuelles

1) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

4) $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On pose $t = e^x$; on a $x = \ln t$ et si x tend vers $+\infty$ alors t tend vers $+\infty$ d'où

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{\ln t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\frac{\ln t}{t}} = +\infty$$

car $\frac{\ln X}{X}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$

4) $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$:

On pose $t = -x$; si x tend vers $-\infty$ alors t tend vers $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = \lim_{t\to+\infty} -te^{-t} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{\frac{e^{t}}{t}} = 0^{-}$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$:

La fonction $x \mapsto e^{x}$ est dérivable en 0.

Le nombre dérivé en 0 est 1 donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{0}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$$

<u>Exercice résolu 6</u>

On donne la fonction $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)\,e^{-x}$.

Calculer la limite de g en $+\infty$

Solution

$$\lim_{x\mapsto+\infty} g(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} 1 - x^2e^{-x} = \lim_{x\mapsto+\infty} 1 - (2.\tfrac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x})^2 = \lim_{x\mapsto+\infty} 1 - 4(-\tfrac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x})^2 = 1$$

en posant $t = -\frac{1}{2}x$; si x tend vers $+\infty$ alors t tend vers $-\infty$

Ainsi ; $\lim_{x\mapsto+\infty} -\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x} = \lim_{t\mapsto-\infty} te^{t} = 0$

b) <u>Dérivée</u>

<u>**Théorème**</u>

$[e^{U(x)}]' = U'(x)e^{U(x)}$

Remarque : $(e^{x})' = e^{x}$

<u>Exercice résolu 7</u>

Calculer la dérivée de chaque fonction définie par :

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$g(x) = (x+1)^2e^{-x}$

Solutions

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$;

$g'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2e^{-x} = (1-x^2)e^{-x}$

2.3- Variation et courbe

a) <u>Limites</u>

$\lim_{x\mapsto+\infty} e^{x} = +\infty$

$\lim_{x\mapsto-\infty} e^{x} = 0$

b) <u>Variations</u>

Pour tout x]-∞, +∞ [$(e^{x})' = e^{x} > 0$; la fonction exponentielle est strictement croissante sur]-∞, +∞[.

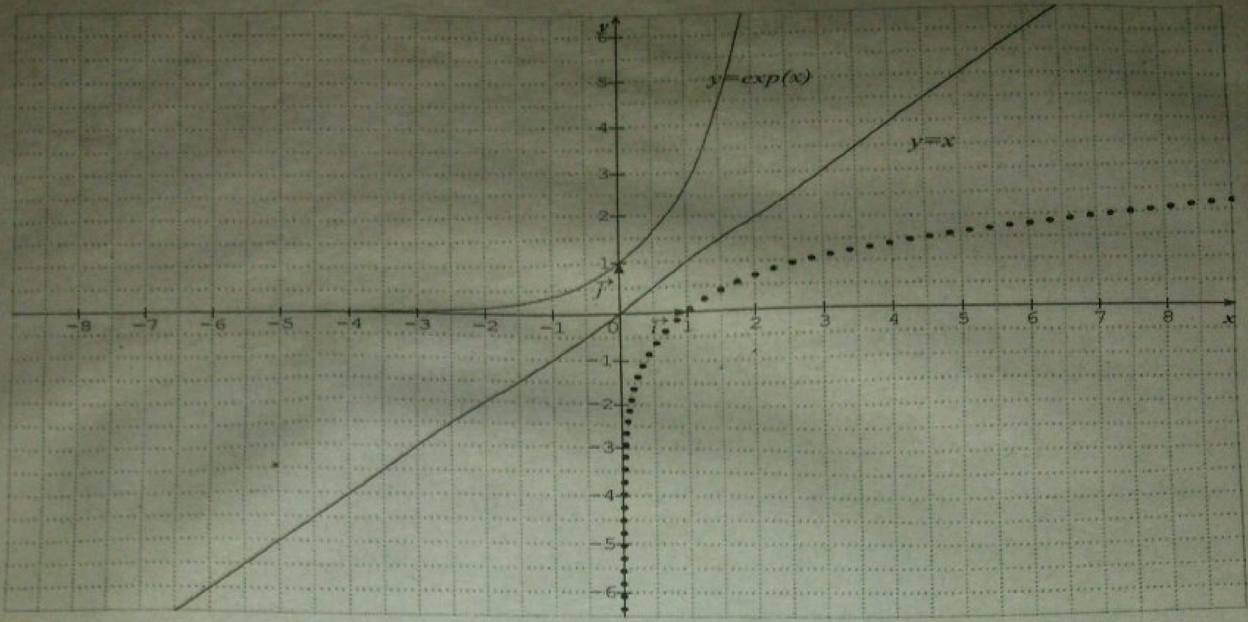
Tableau de variation

x	-∞	0	1	+∞
e^x		+		
e^x	0	1	e	+∞

<u>Remarque</u>

- L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle
- La tangente au point A(0 ; 1) a pour coefficient directeur 1.

Courbe représentative de la fonction exponentielle



3. Primitives des fonctions logarithme népérien et exponentielle népérienne

3.1- Primitives des fonctions élémentaires

si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $F(x) = \ln|x| + k$; pour x non nul

si $f(x) = e^x$ alors $F(x) = e^x + k$;pout tout réel x

3.2- Primitives des fonctions composées

si $f(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$ alors $F(x) = \ln|U(x)| + k$; pour u(x) non nul

si $f(x) = U'(x)e^{U(x)}$ alors $F(x) = e^{U(x)} + k$

<u>Exercice résolu 8</u>

Déterminer les primitives sur I des fonctions suivantes

$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ sur I =]-2 ; 2[

$g(x) = \frac{(\ln x)^9}{x}$ sur I =]0 ; +∞[

$h(x) = xe^{x^2}$ sur I = IR

Solution

$F(x) = \frac{1}{2}\ln(4 - x^2) + k$

$G(x) = \frac{(\ln x)^{10}}{10} + k$

$H(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$

3.3- Primitivation par parties

Soient U et V deux fonctions numériques dérivables,, on sait que $[U(x)V(x)]' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$ donc

$U'(x)V(x) = [U(x)V(x)]' - U(x)V'(x)$ d'où

$\text{Prim}[U'(x)V(x)] = U(x)V(x) - \text{Prim}[U(x)V'(x)]$

<u>Exercice résolu 9</u>

Déterminer les primitives sur I des fonctions suivantes :

$f(x) = \ln x$ sur I =]0 ; +∞[

$g(x) = (x^2+x+1)\ e^{3x+1}$ sur IR

Solution

$f(x) = \ln x$ sur $I =]0\ ;+\infty[$

Posons $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$

$u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

$F(x) = x\ln x - x + k$

$g(x) = (x^2+x+1)\ e^{3x+1}$ sur IR

Posons $u'(x) = e^{3x+1}$ et $v(x) = x^2+x+1$ d'où

$u(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1}$ $v'(x) = 2x+1$ on a $G(x) = u(x)\ v(x) - \text{Prim}[u(x)v'(x)] = \frac{1}{3}(\ x^2+x+1\ )\ e^{3x+1} - \frac{1}{3}\text{Prim}[\ (2x+1)e^{3x+1}]$

notons $l(x) = (2x+1)e^{3x+1}$ on pose $u'(x) = e^{3x+1}$ et $v(x) = 2x+1$ d'où $u(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1}$ et $v'(x) = 2$

$L(x) = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x+1} - \text{Prim}[\frac{2}{3}e^{3x+1}] = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x+1} - \frac{2}{9}e^{3x+1}+k$ on a donc

$G(x) = \frac{1}{3}(\ x^2+x+1\ )\ e^{3x+1} - \frac{1}{3}[\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x+1} - \frac{2}{9}e^{3x+1}] + k$

EXERCICES

Exercices 1 à 5

1. Déterminer a défini par $\ln a = \ln 2 + \ln(2+\sqrt{2}) + \ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$
2. Pour $u > 1$ et $v > 1$, calculer : $y = \ln(u^2-1) + \ln(v^2-1) - \ln[(uv+1)^2-(u+v)^2]$
3. Comparer si $a > 1$, $\ln(a+\sqrt{a^2-1})$ et $\ln(a-\sqrt{a^2-1})$
4. Démontrer que $\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) = \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1) + 4\ln(\sqrt{2}+1)$
5. Déterminer $\frac{a}{b}$ sachant que a et b sont des réels positifs vérifiant $\ln\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$

Exercice 6

Résoudre chacune des équations suivantes après avoir donné le domaine de définition :

a) $\ln(2x+7) = \ln(x-3)$

b) $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$

c) $\ln(x-3) = \ln(x+7) - \ln(x-1)$

d) $\ln(x^2-2x-3) = \ln(x-7)$

e) $\ln(x^2-4x+3) = \ln 3$

f) $\ln(x-1) = -\ln(\frac{1}{3}(x-3))$

g) $\ln(x+1) + \ln(4-x) = \ln 7 + \ln(1-\frac{x}{2})$

h) $2\ln(x+1) - \ln(1-x-2x^2) = \ln(4x+1) - \ln(x+1)$

Exercices 7, 8, 9

Résoudre dans IR :

7. a) $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln 13$

   b) $\ln|x+1| + \ln|x+5| = \ln 13$

8. a) $\ln|2x-7| - \ln|3x+4| = \ln|x+1|$

   b) $\frac{1}{3}\ln(x^3-x^2-5x) + \ln 2 = \ln x$

9. a) $x^2+17x+16 = 0$

   b) $2\ln(4+x) = \ln x + 2\ln 3$

Exercice 10

On donne $^{22}P(x) = -x^3+8x+8$; $x \in$ IR

a) Calculer P(2) puis montrer que l'on peut écrire $P(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$

b) Résoudre alors :

b_1 : $P(x) = 0$

b_2 : $\frac{1}{3}\ln(-x-1) + \ln 2 = \ln(-x)$

Exercices 11 à 14

Résoudre dans IR

11) l'équation : $\cos^2(\ln x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin[\ln(x^2)] - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

12) les systèmes :

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ \ln x + \ln y = -3\ln 2 + \ln 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ \ln x + \ln y = \ln 15 \end{cases}$

13) les systèmes

a) $\begin{cases} 5x+4y=12 \\ \ln(x-1) + \ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}$

14) les inéquations:

a) $\ln(2x^2-3x-5) \leq 2\ln 2$

b) $\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2\ln 2$

c) $\ln(-x^2+4x+6) < 0$

d) $\ln(x+1) + \ln(5-x) > 0$

e) $\ln(x^2-1) > \ln(4x-1)$

f) $\ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1)$

g) $(\ln x)^2 - \ln x - 6 < 0$

h) $\ln(x^2+11x+30) > \ln(x+14)$

Exercice 15

Sachant que $0,68 \leq \ln 2 \leq 0,70$ et $1,09 \leq \ln 3 \leq 1,10$

Donner un encadrement de chacun des nombres suivants $\ln 24$; $\ln 0,75$

Exercice 16

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies ci-après.

a) $f(x) = \ln(2x-3)$; b) $f(x) = \ln(4-5x)$; c) $f(x) = \ln|2-x|$; d) $f(x) = \ln(x^2+4x)$;

e) $f(x) = \ln(-x^2+4x+5)$ f) $f(x) = \ln|x^2-3x+2|$; g) $f(x) = \ln\frac{x^2-3x+2}{x+3}$; h) $f(x) = \ln\frac{-x^2+4x+5}{x^2-3x+2}$

Exercice 17

Soit f la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{2-\ln(x+8)}{1-\ln(2-x)}$

Déterminer l'ensemble de définition de f

Résoudre, dans IR, chacune des équations : $f(x) = 1$ et $f(x) = 2$,

Exercice 18

Dans chacun des cas suivants, déterminer D_f et calculer les limites de f aux bornes de D_f

$f(x) = 2x + 1 - \ln x$

$f(x) = (x+1) - \ln(x+1)$

$f(x) = \ln\frac{2x-1}{x+1}$

$f(x) = x^2\ln|x|$

$f(x) = x\ln(x+\frac{1}{x})$

$f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln|x+1|$

$f(x) = -x + \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

Exercice 19

Déterminer l'ensemble de définition et dérivées :

a) $y = \ln(2x+1)$

b) $y = \ln 5x + \ln 3$

c) $y = 3\ln\frac{1}{x}$

d) $y = \frac{\ln(3x-4)}{\ln(x-1)}$

e) $y = \sqrt{\ln(x-4)}$

f) $y = \ln\sqrt{3x+1}$

g) $y = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

h) $y = \ln(x^4 + 5x^2 + 4)$

i) $y = 3\ln|x^3 - 7x + 5| - \ln x$

j) $y = \ln x \cdot \ln^2 3x$

k) $y = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Exercice 20

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

a) $f(x) = x - \ln x$

b) $f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$

c) $f(x) = \frac{1}{\ln|x+1|}$

Exercice 21

Trouver la limite de f en x_0 et déterminer un prolongement par continuité en x_0 de la fonction f dans les cas suivant :

a) $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x-1)$, $x_0 = 1$

b) $f : x \mapsto \ln(1-\cos x) - 2\ln x$, $x_0 = 0$

Exercice 22

Etudier les variations des fonctions suivantes

a) $f(x) = \ln(x^2)$ b) $f(x) = [\ln x]^2$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

Exercice 23
Etudier les variations de chacune des fonctions proposées et tracer leurs courbes représentatives dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$;
$f(x) = \ln|x|$
$f(x) = |\ln x|$
$f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$

Exercice 24
Sachant que $\ln e = 1$, donner, sans calculatrice, la valeur des réels suivants : $\ln e^2$; $(\ln e)^2$; $\ln\frac{1}{e}$; $\ln\sqrt{e}$; $\ln\frac{1}{\sqrt{e}}$; $(\ln\sqrt{e})^2$; $\ln\frac{1}{e^2}$

Exercice 25
Simplifier les écritures des nombres donnés (calculatrice inutile)
a) $\ln e^{12}$; $\ln e^{\frac{3}{4}}$; $e^{\ln\frac{1}{4}}$; $e^{-\ln 2}$
b) $e^{5\ln 2}$; $e^{1-\ln 2}$; $e^{3+\ln 3}$; $e^{\frac{1}{4}\ln 2}$; $e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}$
c) $e^{-\ln 2}$; $e^{\ln e}$; $\ln e^{e}$
d) $(2+\ln\sqrt{e})(1+\ln e^2)$; $\frac{1-\ln(\ln e)}{1-e^{-\ln 2}}$

Exercice 26
Simplifier les écritures des expressions données en fonction d'un réel x (préciser éventuellement les conditions à imposer à x)
a) $e^{2x}e^{-5x}$; $e^{x}e^{2x}$; $e^{4x}e^{-4x}$; $e^{1+x}e^{2x-3}$
b) $\frac{e^{x-3}}{e^{2x}}$; $\frac{e^{-4x}}{e^{2+x}}$; $\frac{\ln e^{x^2}}{e^{\ln x}}$; $\frac{\ln e^{x}}{e^{\ln x}}$

Exercice 27
Simplifier les expressions :
$e^{4\ln 2}$; $\ln e^{-\frac{1}{2}}$; $e^{-4\ln 3}$; $e^{3\ln 2} \cdot \ln\sqrt{e}$

Exercice 28
Résolvez dans IR les équations proposées
1°) $e^{x} = \frac{1}{3}$; $e^{3x} = 25$; $e^{\frac{1}{2}x} = 7$
2°) $e^{2x} - 9 = 0$; $e^{2x} + 3 = 0$; $243 - 9e^{3x} = 0$
3°) $\ln(e^{x} + 2) = 1$; $\ln(e^{x} + 5) = 3$
4°) $e^{5x+1} = e^{x^2-5}$; $e^{\sin x} = e^{\cos x}$

Exercice 29
Résoudre dans IR les équations :
a) $e^{x+2}. e^{-\frac{1}{x}} = e$ b) $e^{2x-1} = e^{x^2}$

Exercice 30
Résoudre chacune des équations proposées :
a) $e^{2x} + 3e^{x} - 4 = 0$ b) $e^{2x} - \frac{1}{4} = 0$ c) $2e^{2x} - 5e^{x} + 2 = 0$
d) $e^{2x+1} + 3e^{x+1} = 4e$ e) $2e^{2x} + 3e^{x} + 2 = 0$ f) $2e^{3x+1} - e^{2x+1} - 2e^{x+1} + e = 0$
g) $2e^{2x} - (e+1)e^{x} + e = 0$ h) $\frac{2e^{x+1}-1}{e-2e^{x}} = 1$ i) $e^{x} - e^{-x} = \frac{8}{3}$

Exercice 31
Résoudre dans IR les équations :
1°) $e^{2x} - e^{x} - 2 = 0$ 2°) $e^{x} - 7 + 10e^{-x} = 0$
3°) $e^{3x+1} - 2e^{2x+1} + e^{x+1} = 0$; 4°) $e^{4x} - 13e^{2x} + 36 = 0$

Exercice 32

On considère le polynôme

$P(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$

a) Trouver les racines de l'équation $P(x) = 0$.

b) Utiliser le résultat pour calculer les racines de l'équation : $-e^{3x+1} + 6e^{2x+1} - e(11e^x - 6) = 0$.

Exercice 33

a) Résoudre le système d'équation dans IR^2 : $\begin{cases} 2x - y = \ln\frac{3}{2} & (1) \\ -xy + \ln 3 \ln 2 + (\ln 3)^2 = 0 & (2) \end{cases}$

b) Résoudre dans IR : $\ln|x-1| + \ln|x-5| = \ln 96$

c) On donne $P(x) = -x^3+13x+12$

1-Calculer $P(4)$

2-Montrer qu'on peut écrire $P(x) = (x-4)(ax^2+bx+c)$

3-Résoudre alors : $P(x) = 0$ en déduire les solutions de $e^{-3x} - 13e^{-x} - 12 = 0$

Exercice 34

Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} e^x + e^y = 3 \\ 2e^{-x} + 2e^{-y} = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} e^x e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ (e^x + e^y)(e^x - e^y) = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} e^{x+1}e^{y-2} = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln(x-1) + \ln(y+1 \end{cases}$

Exercice 35

Résoudre, dans IR^2, le système : $\begin{cases} xy = \frac{1}{6} \\ e^{2x}\ e^{3y} = \frac{1}{e} \end{cases}$

Exercice 36

Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre des racines de l'équation suivante :

$e^{2x} - 4me^x + 2m + 2 = 0$

Résoudre cette équation dans le cas où $m = 1$

Exercice 37

Déterminer les réels a, b, c, a', b', c' vérifiant l'égalité proposée pour tout réel x

1°) $\frac{e^{2x}-2}{2e^{2x}+1} = a + \frac{be^x}{2e^x+1}$

2°) $\frac{e^{2x}-2}{2e^{2x}+1} = a' + \frac{b'}{2e^x+1}$

3°) $\frac{e^{2x}}{e^x-4} = ae^x + b + \frac{ce^x}{e^x-4}$

4°) $\frac{e^{2x}}{e^x-4} = a'e^x + b' + \frac{c'}{e^x-4}$

Exercice 38

Résolvez dans IR les inéquations proposées

1°) $e^x \geq 4$; $\frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{4}$; $e^{-x} \leq \frac{3}{5}$

2°) $7e^{2x} + 3 \geq 1 + e^{2x}$, $\ln(3e^x + 5) > 4$; $\ln\frac{e^x - e^{-x}}{2e^{-x}+3e^x} \geq \ln 4$

Exercice 39

Résolvez dans IR :

1°) l'équation $e^{2x} + 4e^x + 3 = 0$;

2°) l'inéquation $e^{2x} + 4e^x + 3 > 0$;

Exercice 40

Résoudre chacune des inéquations :

a) $2e^x - 1 > 0$

b) $e^{-x} - 2 \leq 0$

c) $(e^x - 1)(e^{-x} - 4) > 0$

d) $2e^{2x} - 1 > 0$

e) $2e^{2x} - 5e^x + 2 \leq 0$

f) $e^{2x+1} + 3e^{x+1} \geq 4e$

g) $2e^{4x} - 7e^{2x} + 3 \leq 0$

h) $e^{2(x+1)} + 3e^{x+2} \leq 0$

Exercice 41

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies ci-après

a) $f(x) = x - e^x$; b) $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$; c) $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$; d) $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{x}$;

e) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$f) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln x$;g) $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$; h) $f(x) = (\tan x)e^{\frac{1}{\tan x}}$

Exercice 42

Déterminer ²les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes

- $f(x) = e^{2x} + 3e^x + 5$
- $f(x) = \frac{2e^x+3}{e^x+7}$
- $f(x) = \frac{e^{2x}-7_2}{1+3e^x}2$

Exercice 43

Etudier les limites des fonctions proposées aux bornes de leur ensemble de définition

1°) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$; $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}\ln x$

2°) $f(x) = -x\,e^{\frac{1}{x}}$; $g(x) = e^{-x}\ln x$

3°) $f(x) = x + e^x$; $g(x) = \frac{e^x}{x-1}$

4°) $f(x) = x + 2\ln(x+1)$; $g(x) = e^{f(x)}$

5°) $f(x) = \frac{e^x-3}{2-e^x}$; $g(x) = \frac{e^{1+x}}{1+e^x}$; $h(x) = \frac{2e^x-1}{1-e^x}$

Exercice 44

Etudier les limites des fonctions proposées aux bornes de leurs ensembles de définition :

$f(x) = x - e^x$ $f(x) = x + e^x$ $f(x) = xe^{-x}$ $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$ $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{x}$

Exercice 45

Soit f l'application de IR dans IR définie par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x - x \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \cos^2 \pi x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

1°)Etudier la continuité de f

2°)Etudier la dérivabilité de f

Exercice 46

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

a)$f(x) = \frac{e^{2x^2}}{x^4+1}$

b)$f(x) = (x^3 - 1)e^x$

c)$f(x) = (x^3+1)e^{2x^2}$

Exercice 47

Etudier les variations des fonctions suivantes

a)$f(x) = xe^{|\ln x|}$

b)$f(x) = e^{-x^2}$

c)$f(x) = \frac{1}{x}e^{\ln|x|}$

d)$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

e)$f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$

Exercice 48

a) Déterminer les intersections avec les axes de $f(x) = (x+2)e^x$

b) Calculer $f'(x)$; $f''(x)$.

c) Etudier les variations de f.

Exercice 49

Déterminer la primitive de chaque fonction f sur l'intervalle I considéré

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$ sur I =IR

b) $f(x) = \frac{(\ln x)^9}{2x}$ sur $I =]0; +\infty[$

c) $f(x) = e^{2\cos x}\sin x$ sur I = IR

d) $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{3x+1}$ sur I = IR

e) $f(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$ sur $I =]1; +\infty[$

Exercice 50

On donne $f(x) = 2x\,(2 - \ln 2x)$

a) Etudier les intersections avec les axes.

b) Etudier les variations de f.

c) Calculer la dérivée de $g(x) = 4x^2\,(5 - 2\ln 2x)$

d) En déduire l'intégrale $I = \int_1^2 f(x)dx$

Exercice 51

Soit $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

a) Etudier les variations de f.

b) En déduire que la courbe (C) de f admet un centre de symétrie $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

c) calculer $I = \int_{-\ln 2}^{-\ln 3} f(x)dx$

Exercice 52

On considère les fonctions f et n définies par : $f(x) = \frac{1+2e^x}{1-2e^x}$ et $n(x) = 1 - 2\,e^{2x}$

a) Trouver a et b tel que $f(x) = a + \frac{be^x}{1-2e^x}$.

b) Calculer $n'(x)$ et exprimer $\frac{2n'(x)}{n(x)}$ en fonction de e^x.

c) En déduire l'intégrale $I = \int_{-\ln 3}^{-\ln 4} f(x)dx$.

Exercice 53

Soit la fonction f définie sur]0 ;e[par : $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$

1°) Etudier le sens de variation de la fonction $g : x \mapsto \frac{x-2}{x-1}$ sur $]-\infty ;1[$. En déduire le sens de variation de f sur]0 ; e [.

2°) Montrer que f définie une bijection de]0 ;e[sur $]1 ;+\infty[$. Préciser les propriétés de sa fonction réciproque h (continuité, sens de variation)

3°) Montrer que h est dérivable au point $x_0 = 2$ et calculer le nombre dérivé de h en ce point.

Exercice 54

On considère la fonction f définie sur $[0 ;+\infty[$ $f(x) = x\ln x$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$

1°)Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0 ;+\infty[$

2°)Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative (Γ) en repère orthonormé.

Exercice 55

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1°)Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2°)Etudier les variations de f, construire la courbe représentative (C) de f dans un plan rapporté à un repère $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Exercice 56

La fonction f est définie sur IR par : $f(x) = 2\,e^x - e^{2x} + 1$

1°)Etudier les variations et les limites de f.

2°)Préciser les asymptotes et tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé du plan

Exercice 57

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 2(1 - x)e^{2x} - 1$

1°)Etudier les variations de f et calculer la limite de f en $+\infty$

2°)Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé.

3°)Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[\frac{1}{2}\ ; 1]$. Donner une valeur approché de α à 0,01 près par défaut.

4°)En déduire le signe de f(x).

Exercice 58

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = x\,e^{x} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = -x\ln x + 2x \text{ si } x > 0 \end{cases}$

1°)Montrer que f est continue en $x = 0$

2°)La fonction f est-elle dérivable en $x = 0$?

3°)Dresser le tableau de variation de f

4°)Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Préciser les demi-tangente à l'origine.

Exercice 59 :

A-Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x)= -x + \ln(x + 1) - \ln x$.

On désigne par (C) (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Unité 2 cm.

1) Etudier les variations de f.

2) Démontrer que la droite $(\Delta) : y = -x$ est asymptote (C). Préciser la position de (C) par rapport à (Δ).

3) démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1.

4) Construire la courbe (C).

B –Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = -x + \ln\frac{x+1}{x}$.

1) Etudier les variations de h.

2) On appelle (Γ) la courbe représentative de h dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Démontrer que (Γ) admet le point $I(-\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{2})$ pour centre de symétrie. Tracer (Γ) sur le même graphique que (C).

Exercice 60

A – Soit g la fonction définie par : $g(x) = (\ln x)^3 + \ln x - 2$.

1) Donner l'ensemble de définition de g ; noté Eg et calculer g(e) ,

2) Montrer que g est strictement croissante sur Eg.

3) En déduire le signe de g(x) pour x élément de Eg.

B – Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{(\ln x)^3 - \ln x + 1}{(\ln x)^2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition E_f de f .Calculer les limites de f au de E_f.

2) Montrer que f est dérivable sur E_f et que pour tout x de E_f : $f'(x) = \frac{g(x)\ln x}{x(\ln x)^4}$

3) Etudier les variations de f .

4) Dans le plan ; muni d'un repère ortho normal ;on considère la courbe (C) représentative de f et la courbe (Γ) d'équation $y=\ln x$.

Etudier la position relative de(C) et de (Γ) .

5) Tracer (C) et (Γ) sur le même graphique.

Exercice 61

Soit u et v les fonctions définies sur IR par : $u(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ et $v(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

1) Calculer $(u(x))^2 - (v(x))^2$.

2) Démontrer que : $u(2x)=2(u(x))^2-1$ et $v(x)= 2u(x)v(x)$.

3) Exprimer u(x+y) et v(x+y) en fonction de u(x) ; u(y) ;v(x) et v(y).

Exercice 62

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$. On note par (C) sa courbe ;unité 1 cm.

1) Démontrer que f est une fonction impaire.

Que peut-on dire de la courbe (C) de f. ?

2) Etudier les variations de f. Préciser les asymptotes éventuelles.

3) Démontrer que $f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$

4) Exprimer f(x+y) en fonction de f(x) et f(y).

5) Construire la courbe (C) de f et ses asymptotes.

Exercice 63

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = e^x - x - 4$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Etudier les variations de la fonction f.

2) Montrer que ;pour tout réel non nul x : $f(x) = x(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{4}{x})$.

En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Montrer que la droite (D) :$x + y + 4 = 0$; est une asymptote à la courbe (C) de f.

Préciser la position de (C) par rapport à (D).

Construire (C) et son asymptote.

Exercice 64 : Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$;et (C) sa courbe représentative dans un repère Orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1.Donner le domaine de définition D de f.

E n déduire les limites aux bornes de son domaine de définition.

2) Montrer que la droite d'équation y – x =0 est une asymptote à (C).

3) Démontrer que pour tout réel non nul x : $f'(x) = (x-1)\frac{1}{x}\ e^{\frac{1}{x}}$.En déduire le sens de Variation de f.

Poser : g(x) = f(x) – (x + 1).

4)Démontrer que pour tout réel non nul x : $g''(x) = \frac{1}{x^3}\ e^{\frac{1}{x}}$.

Démontrer que $\lim_{x\to-\infty} g'(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$

Déduire , des résultats précédents, le signe de g'(x) puis le sens de variation de g et son signe.

5) Construire la courbe (C) de f ,ainsi que son asymptote .

Exercice 65

1°)Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = -1 + (x^2+2x+2)\,e^x$

a)Etudier les variations de g.

b)Démontrer que l'équations g(x) = 0 admet une solution unique α dans IR puis justifier que $-0,36<\alpha<-0,35$.

c)En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

2°)On donne la fonction f définie sur IR par $f(x) = -x - 1 + (x^2+2)e^x$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm

a)Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b)Calculer la dérivée f '(x). Etudier le sens de variation de f en utilisant le signe de g(x)

c)Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

Préciser la position de (C) par rapport à (Δ).

d)Donner une équation de la tangente (T) à (C) en 0.

e)Démontrer que $f(\alpha) = -\alpha\,(1+2e^{\alpha})$ et donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4.10^{-2}.

f) Tracer (Δ) ; (T) et (C).

Exercice 66 (Bac C 1ère session 1991 Madagasikara)

1°- Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = (\frac{1}{x} - 1)e^{-\frac{1}{x}} + 1$

a)Etudier les variations de g.

b)En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x .

2°- Soit f l'application de IR vers IR définie par: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-e^{-\frac{1}{x}}} & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

a) f est- elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

b) Etudier les variations de f.

c) Etudier les branches infinies de (C) , courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
d) Tracer la courbe (C).
3°- a) On note f_1 la restriction de f à $I =]0 ; +\infty[$. Montrer que f_1 est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
b) Calculer $f_1(1)$; en déduire $(f_1^{-1})'\left(\frac{e}{e-1}\right)$.
c) Tracer la courbe (C)' représentative de f_1^{-1} sur le graphique précédent.

Exercice 67 (Bac C Session spéciale 1991 Madagasikara)(sujet 2)
Soit f l'application de IR vers IR définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où ln est le logarithme népérien et e la base de ce logarithme. On note (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité 2 cm).
1°- a) f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
b)Etudier les variation de f.
c)Etudier les branches infinies de (C).
2°-a) Déterminer les coordonnées (α, β) ; $\alpha > 0$ du point d'inflexion de la courbe (C) ainsi que l'équation de la tangente à (C) en ce point.
b)Tracer la courbe (C). (On donne : $e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}606$; $e^{-1} \approx 0{,}37$)
3°-a)On note f_1 la restriction de f à $I = [e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.
Montrer que f_1 est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
b)Calculer $(f_1^{-1})'(0)$.
c)Tracer la courbe (C') représentative de f_1^{-1} sur le graphique précédent.
4°- Soit D_a le domaine-plan limité par (C) et les droites d'équation :
$y = -x - 1$, $y = 0$, $x = a$ et $x = 0$ où $a \leq 0$.
Calculer en fonction de a l'aire géométrique $A(a)$ de D_a et donner la limite de $A(a)$ quand $a \to +\infty$.

Exercice 68 (Bac C 1993 Sujet 2 Madagasikara)
A- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1,3]$ telle que : $f(x) = 1 - x + \ln(1 + x)$
1°- Dresser le tableau de variation de f.
2°- Montrer que f est une bijection de I vers J que l'on déterminera.
3°- En déduire qu'il existe un seul nombre réel $\alpha \in]1,3[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
B- Soit $(U_n)_{n \in IN}$ la suite numérique définie par $U_0 = 1$ et n [] IN , $U_{n+1} = g(U_n)$ avec g la fonction définie par : $x \in I = [1,3]$ $g(x) = 1 + \ln(1 + x)$
1°- Montrer que g est une fonction croissante.
2°- En déduire que :
a) $\forall x \in I$ $g(x) \in I$.
b) $n \in IN$ $U_n \in I$.(raisonner par récurrence).
3°- a)Montrer que $\forall x \in I$ $\frac{1}{4} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.
b)Démontrer à l'aide du théorème des accroissements finis que $x \in I$ $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$ où α est le nombre réel dans la partie A.
c)En déduire que: $n \in IN$ $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$
4°- a)Montrer que $n \in IN^*$ $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
b)En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.
c)Déterminer le plus petit entier $n_0 \in IN$ tel que pour tout $n \in IN$, si $n \geq n_0$ alors $|U_n - \alpha| \leq 10^{-2}$.
On prend : $\ln 2 \approx 0{,}7$; $\ln 3 \approx 1{,}1$; $\ln 10 \approx 2{,}3$.

Exercice 69(BAC C 2003 Madagasikara)

PARTIE A : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$ où ln désigne le logarithme népérien. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 1$ cm, $\|\vec{\jmath}\| = 5$ cm.

1- On pose $g(x) = -\frac{1}{x} + \ln x$.

a) Etudier la variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2- Etudier la variation de f.

3- Ecrire $f(\alpha)$ sans $\ln \alpha$ et en déduire que $\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{3} < f(\alpha) < 2\ \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{3}$

4- Tracer la courbe (C).

5- On pose $G(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)dt$, $\forall x > 0$. Montrer que G est dérivable et calculer $G'(x)$.

PARTIE B : On pose $\forall x > 0$, $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à $h(x) = x$.

2- Calculer $h'(x)$ et vérifier que : $\forall x \in [\frac{3}{2}, 2]$, $-\frac{4}{9} e^{2/3} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4} e^{1/2}$.

En déduire qu'il existe un réel $k \in]0,1[$ tel que : $\forall x \in [\frac{3}{2}, 2]$, $| h'(x) | \leq k$.

3- Prouver que $\forall x,y \in [\frac{3}{2}, 2]$, $| h(x) - h(y) | \leq k | x - y |$

4- On définit la suite (U_n) par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in IN$, $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$.

b) Montrer que $\forall n \in IN$, $| U_{n+1} - \alpha | \leq k | U_n - \alpha |$

c) En déduire que $\forall n \in IN$, $| U_n - \alpha | \leq k^n | U_0 - \alpha |$ et calculer $\lim U_n$

PARTIE C : On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$

1. Vérifier que la fonction f de la partie A est solution de (E).
2. Résoudre alors (E).

On donne : $e^{-2} \approx 0,13$; $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,22$; $e^{-\frac{1}{2}} \approx 1,6$; $e^{\frac{2}{3}} \approx 1,94$.

CHAPITRE 6 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. Vocabulaire.

Dans de nombreuses situations, on est conduit à résoudre sur un intervalle I des équations du type :

(E_1): $3f'(x) = -f(x)$

(E_2): $g''(x) - 2g'(x) + 4g(x) = -x^2$

(E_3): $h'''(x) = 0$

De telles équations s'appellent équations différentielles.

(E_1) est dite équation différentielle du *premier ordre* car le plus grand ordre des dérivées y intervenant est un.

(E_2) est dite équation différentielle du *second ordre* car le plus grand ordre des dérivées y intervenant est deux.

(E_3) est dite équation différentielle du *troisième ordre* car le plus grand ordre des dérivées y intervenant est trois.

La fonction $x \mapsto (\cos x)e^{-x}$ est ***une solution particulière***, dans $I = \mathbb{R}$, de l'équation différentielle du second ordre : $f''(x)+2f'(x)+2f(x)=0$.

Résoudre une équation différentielle dans I c'est déterminer ***toutes les fonctions solutions*** dans I de cette équation différentielle.

2. Equations différentielles du premier ordre : y'+ay=0 (a réel) (E)

2.1- Solution générale.

La fonction nulle est solution de (E)

Soit y une fonction solution de (E) ne s'annulant pas dans IR. Sont équivalentes :

. $y' + ay = 0$

. $\frac{y'}{y} = -a$

. *Il existe en réel k tel que* $\ln|y| = -ax+k$

. *il existe un réel k tel que* $|y| = e^{-ax+k}$

. $y' + ay = 0$ $\quad$ $y = Ae^{-ax}$

La fonction y est dérivable et ne s'annule pas dans IR, donc elle est de signe constant. On en déduit qu'il existe un réel A non nul tel que $y=Ae^{-ax}$

Ainsi, en ajoutant la fonction nulle, les fonctions $x \longmapsto Ae^{-ax}$, A réel non nul, sont solutions de (E).

Réciproquement, montrons que toute solution de (E) est de la forme, $x \longmapsto Ae^{-ax}$ A réel.

Soit y une solution de (E)et z la fonction $x \mapsto ye^{ax}$. z est dérivable sur IR telle que

$z': x \mapsto (y' + ay)e^{ax}$ .Or $y'+ay=0$; donc $z'=0$ et z est une fonction constante. Donc il existe un réel A tel que : $ye^{ax} = A$ pour tout réel x. Ainsi, pour tout réel x ; $y = Ae^{-ax}$.

Conclusion : Toute fonction solution de $y' + ay = 0$ $(a\ réel)(E)$ est de la forme $x \longmapsto Ae^{-ax}$, A réel.

> **Théorème 1**
>
> Les solutions sur IR de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ $(a\ réel)$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{-ax}$, *a réel*

2.2- Solution vérifiant une condition initiale.

Soit l'équation (E): $y' + ay = 0$ $(a\ réel)$, x_0 et y_0 deux réels quelconques.

Déterminons les solutions de (E) vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$

Nous avons : $y(x_0) = y_0$ *équivaut* à $Ae^{-ax_0}y_0$ *équivaut* à $A = y_0e^{ax_0}$.

Conclusion : la fonction $x \longmapsto y_0e^{-a(x-x_0)}$ est la solution unique de (E) vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

> **Théorème 2**. Pour tout couple de nombres réels$(x_0; y_0)$, l'équation différentielle $y' + ay = 0$ $(a\ réel)$, admet une solution unique sur IR, qui prend la valeur y_0 *en* x_0 : la fonction $x \longmapsto y_0e^{-a(x-x_0)}$

Exercice résolu 1.

1) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $(E): 2y' - y = 0$.

2) Déterminer la solution f de (E) vérifiant : $f(-2) = 3$.

Solution

(E) *équivaut* à $y' + \left(-\frac{1}{2}\right)y = 0$

1) Les fonctions solutions de (E) dans IR sont toutes de la forme: $x \mapsto A\,e^{-\frac{1}{2}x}$, A réel.

2) $f(-2) = 3$ *donc* $3 = Ae^{-1}$ d'où A=3e

Conclusion : La fonction solution cherchée est $x \mapsto 3e^{\frac{1}{2}x+1}$

3. Équations différentielles du second ordre

3.1- Equation caractéristique

Soit l'équation différentielle du second ordre $(E): y'' + ay' + by = 0$, r un nombre réel et y la fonction $x \longmapsto e^{rx}$.

Nous avons : $y' = ry$ *et* $y'' = r^2y$

Ainsi, $y'' + ay' + by = (r^2 + ar + b)y$.

Donc, *y solution de (E) équivaut à* $r^2 + ar + b = 0$.

Définition

L'équation du second degré d'inconnue $r, r^2 + ar + b = 0$ s'appelle équation caractéristique de l'équation différentielle du second ordre $y'' + ay' + by = 0$ *(a, b réels).*

Exemples

$r^2 + 2r + 5 = 0$ est l'équation caractéristique de l'équation différentielle du second ordre $y'' + 2y' + 5y = 0$

$r^2 - 3r - 4 = 0$ est l'équation caractéristique de l'équation différentielle du second ordre $y'' - 3y' - 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0$ est l'équation caractéristique de l'équation différentielle du second ordre $y'' + 4y' + 4y = 0$

3.2- Résolution de l'équation $(E): y'' + ay' + by = 0$ $(a, b$ réels$)$

a) Equations de référence

Theoreme 3

Equations de référence (θ réel non nul)	Fonctions solutions (A, B réels)
$y" = 0$	$y = Ax + B$
$y" - \theta^2y = 0$	$y = Ae^{-\theta x} + Be^{\theta x}$
$y" + \theta^2y = 0$	$y = A\cos\theta x + B\sin\theta x$

Démonstration

(1) Une primitive de la fonction nulle est la fonction $x \mapsto A$, *A réel*. Une primitive de la fonction $x \mapsto A$, *A réel* est la fonction $x \mapsto Ax+B$; *A, B réels.*

Conclusion : Les foncions solutions dans IR de l'équation $y" = 0$, sont de la forme : $x \mapsto Ax+B$; *A, B réels.*

(2) Pour tout réel non nul θ, toute fonction y de la forme $x \longmapsto Ae^{-\theta x} + Be^{\theta x}$, *A et B réels*, vérifie l'équation différentielle $y" - \theta^2y = 0$

En effet, $y': x \longmapsto -\theta Ae^{-\theta x} + \theta Be^{\theta x}$; A et B réels

- Réciproquement, montrons que toute solution de $y" - \theta^2y = 0$ est de la forme $x \longmapsto Ae^{-\theta x} + Be^{\theta x}$, *A et B réels.*

Soit y une fonction solution de $y" - \theta^2y = 0$, et z la fonction $x \longmapsto y(x)e^{-\theta x}$.

Nous avons : $\begin{cases} z': x \longmapsto [y'(x) - \theta y(x)]e^{-\theta x} \\ z": x \longmapsto [y"(x) - 2\theta y'(x) + \theta^2 y(x)]e^{-\theta x} \end{cases}$

Donc : $z" + 2\theta z' = 0$

Or, $z" + 2\theta z' = 0$ *équivaut à* $\frac{z"}{z'} = -2\theta$ *équivaut à* $z': x \longmapsto pe^{-2\theta x}, p \in \mathbb{R}$

Nous en déduisons que: $z: x \longmapsto \frac{p}{-2\theta}e^{-2\theta} + q$; *p et q réels*

Or, $z(x) = y(x)e^{-\theta x}$.

Donc : $y(x) = z(x)e^{\theta x}$.

D'où $y(x) = \frac{p}{-2\theta}e^{-\theta x} + qe^{\theta x}$.

Conclusion : y est une fonction de la forme : $x \longmapsto Ae^{-\theta x} + Be^{\theta x}$; *A et B réels.*

(3) Pour tout réel non nul θ, toute fonction y de la forme $x \longmapsto A\cos\theta x + B\sin\theta x$; *A et B réels* est solution de l'équation $y'' + \theta^2 y = 0$.

En effet, $\begin{cases} y' : x \longmapsto -\theta A\sin\theta x + \theta B\cos\theta x \\ y'' : x \longmapsto -\theta^2 A\cos\theta x - \theta^2 B\sin\theta x \end{cases}$

D'où : $y'' + \theta^2 y = 0$

Réciproquement, montrons que toute solution de l'équation $y'' + \theta^2 y = 0$ est de la forme $x \longmapsto A\cos\theta x + B\sin\theta x$; ***A et B réels.***

Soit y une solution de $y'' + \theta^2 y = 0$ et z la fonction : $x \longmapsto y(x) - y(0)\cos\theta x - \frac{1}{\theta} y'(0)\sin\theta x$; *θ réel non nul.*

Nous avons : $\begin{cases} z' : x \longmapsto y'(x) + y(0)\theta\sin\theta x - y'(0)\cos\theta x \\ z : x \longmapsto y''(x) + y(0)\theta^2\cos\theta x + y'(0)\theta\sin\theta x \end{cases}$

Ce qui implique : $z'' + \theta^2 z = 0$.

Donc : la fonction z : $x \longmapsto y(x) - y(0)\cos\theta x - \frac{1}{\theta} y'(0)\sin\theta x$ est une solution de l'équation différentielle $y'' + \theta^2 y = 0$.

Soit la fonction $k : x \longmapsto \theta^2 (z(x))^2 + (z'(x))^2$; $x \in \mathbb{R}$.

Montrons que k est une fonction constante et que z est la fonction nulle.

Nous avons : $k' : x \longmapsto 2z'(x)[z''(x) + \theta^2 z(x)]$; $x \in \mathbb{R}$

Or, $z''(x) + \theta^2 z(x) = 0$ car z solution de $y'' + \theta^2 y = 0$.

Conclusion1 : k est une fonction constante.

D'où : $\theta^2 (z(x))^2 + (z'(x))^2 = c$; *c une constante réelle*

De plus nous avons : $z(0) = z'(0) = 0$ ce qui nous conduit à $\theta (z(x))^2 + (z'(x))^2 = 0$; $x \in \mathbb{R}$.

Donc : $\theta z(x) = z'(x) = 0$; $x \in \mathbb{R}$; *avec θ réel non nul*

Conclusion 2 : z est la fonction nulle.

Nous obtenons : $y(x) - y(0)\cos\theta x - \frac{1}{\theta} y'(0)\sin\theta x = 0$

Nous en déduisons que : $y(x) = y(0)\cos\theta x + \frac{1}{\theta} y'(0)\sin\theta x$

Conclusion générale :

La fonction y est de la forme $x \longmapsto A\cos\theta x + B\sin\theta x$; *A, B réels*

b) Résolution.

Un changement de fonction.

Soit y une fonction définie dans ℝ, α un réel et z la fonction définie dans ℝ par $z(x) = y(x)e^{-\alpha x}$.

Nous avons : y soluition de (E) équivaut à z solution de : $z'' + (\alpha + 2\alpha) z' + (\alpha^2 + a\alpha + b) z = 0$

Prenons $\alpha = -\frac{a}{2}$, ceci nous ramène à une équation de référence.

Ainsi : $y'' + ay' + by = 0$ équivaut à $\begin{cases} y(x) = z(x)e^{-\frac{a}{2}x} \\ z'' = \left(\frac{a^2-4b}{4}\right) z \end{cases}$ (F)

L'équation caractéristique

L'équation caractéristique, $r^2 + ar + b = 0$, a pour discriminant égal à $(a^2 - 4b)$.

Ainsi, (F) équivaut à (F') : $\begin{cases} y(x) = z(x)e^{-\frac{a}{2}x} \\ z'' = \left(\frac{a^2-4b}{4}\right) z \end{cases}$

Il ne nous reste que de résoudre, à l'aide du théorème 3, l'équation de référence $z'' = \left(\frac{a^2-4b}{4}\right) z$, et interpréter les résultats obtenus à l'aide des solutions de l'équation caractéristique

Résolvons l'équation (R) : $z'' = \left(\frac{a^2-4b}{4}\right) z$.

Nous avons : $z'' = \left(\frac{a^2-4b}{4}\right) z$ équivaut à $z'' - \left(\frac{a^2-4b}{4}\right) z = 0$.

Distinguons trois cas.

Premier cas : $(a^2 - 4b) = 0$.

D'une part, l'équation caractéristique admet une solution double égale à : $-\frac{a}{2}$

D'autre part, $z'' = \left(\frac{a^2-4b}{4}\right) z$ équivaut à $z'' = 0$.

Donc d'après le théorème 3 : z : $x \mapsto Ax + B$, A, B réels

Et par hypothèse : $y(x) = z(x)e^{-\frac{a}{2}x} = z(x)e^{rx}$.

Résultat1 y : $x \mapsto (Ax+B)e^{rx}$, *A, B réels.*

Deuxième cas : $a^2 - 4b > 0$

D'une part, l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes :

$r_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ et $r_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$

D'autre part, $z'' = \left(\frac{a^2-4b}{4}\right)z$ équivaut à $z'' - \left(\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)^2 z = 0$.

Donc d'après le théorème 3 : $z : x \mapsto Ae^{-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}} + Be^{\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}}; A, B$ *réels*.

Or, par hypothèse : $y(x)= z(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} = z(x)e^{rx}$.

Donc : $y : x \mapsto Ae^{\left(-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)x} + Be^{\left(-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)x}, A, B$ *réels*

Résultat 2 $y : x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, A, B$ *réels*.

Troisième cas : $a^2 - 4b < 0$ donc $-(a^2- 4b)>0$.

D'une part, l'équation caractéristique admet deux solutions imaginaires conjuguées : $-\frac{a}{2} - i\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$ et $-\frac{a}{2} + i\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

D'autre part ; $z''=\left(\frac{a^2-4b}{4}\right)$ z *équivaut à* $z'' + \left(\frac{\sqrt{-(a^2-4b)}}{2}\right)^2 z = 0$

Donc d'après le théorème 3 : $z : x \mapsto \left(A\cos\frac{\sqrt{-(a^2-4b)}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{-(a^2-4b)}}{2}x\right)$, A, B *réels*

Or, par hypothèse : $y(x)=z(x)\, e^{-\frac{a}{2}x}$

Donc : $y : x \mapsto e^{-\frac{a}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{-(a^2-4b)}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{-(a^2-4b)}}{2}x\right)$; A, B réels

Résultat 3 $y : x \mapsto e^{ax}(A\cos vx + B\sin vx)$; *A et B réels* où $u= -\frac{a}{2}$ *et* $v = \frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$

Nous rassemblons ces résultats dans le tableau suivant :

Théorème 4

Equation caractéristique $r^2+ar+b=0$, a, b réels	Fonctions solutions de l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$, a, b réels
Admet une solution réelle double r	$y= (Ax+B)\, e^{rx}$, A et B réels
Admet deux solutions réelles distinctes r_1, r_2	$y=Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$, A et B réels
Admet deux solutions complexes conjuguées $u+vi$ et $u - vi$ (u, v réels)	$y=e^{rx}\,(A\cos vx + B\sin vx)$ A et B réels

Pour les exercices suivants, déterminons toutes les solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle donnée :

Exercice résolu 2. $(E_1) : y''+y' - 2y = 0$

Solution

L'équation caractéristique $r^2+r - 2= 0$ de (E_1) a deux solutions réelles distinctes $r_1=1$ et $r_2=-2$

Les fonctions solutions de(E_1) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{x}$,A et B réels.

Exercice résolu 3. $(E_2): y'' + 6y' + 9y = 0$

Solution

L'équation caractéristique $r^2+6r+9=0$ de (E_2) a une solution unique : $r =3$.

Les fonctions solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto (Ax+B)e^{3x}$, *A et B réels*

Exercice résolu 4. $(E_3): y'' - \sqrt{3}y' + 3y = 0$

Solution

L'équation caractéristique $r^2 - \sqrt{3}r + 3 = 0$ de (E_3) a deux solutions complexes conjuguées $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ *et* $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

Les fonctions solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$x \mapsto e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(A\cos\frac{3}{2}x + B\sin\frac{3}{2}x\right)$, *A et B réels.*

3.3 Avec les conditions initiales.

Théorème 5.
Il existe une unique solution de l'équation différentielle du second ordre $y'' + ay' + by = 0$ satisfaisant aux conditions initiales : $y(x_0) = y_0$ *et* $y'(x_0) = y'_0$; x_0, y_0, y'_0 étant des nombres réels donnés

La démonstration de ce théorème 5 fait l'objet de l'exercice 37

Exercice résolu 5

Déterminer la fonction y vérifiant le système : $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Solution

L équation caractéristique $r^2+2r+2=0$ a deux solutions complexes conjuguées -1 +i et -1-i

Les fonctions solutions y de l'équation différentielle du second ordre $y''+2y'+2y=0$ sont définies par : $y(x) = e^{-x}\,(A\cos x + B\sin x)$, *A et B réels.*

Les conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=-1$ conduisent à $(A;B)=(1;0)$.

La fonction solution cherchée est donc la fonction : $x \mapsto e^{-x}.\cos x$.

Exercice résolu 6

Une boule de fer de masse m, lâchée sans vitesse initiale subit en chute libre, la force de la résistance de l'air d'intensité R proportionnelle à la vitesse v : R= - cv (c >0)

1. Montrer que la fonction de temps : $t \mapsto v(t)$ est une solution dans $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y'+\frac{c}{m}y = g$ (g accélération de pesanteur).
2. Trouver une fonction constante solution particulière de cette équation. En déduire que v : t $\mapsto$ $\frac{mg}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)$ et interpréter la quantité : $v = \frac{mg}{c}$.

Solution

1. Les forces appliquées sur la brique sont : son poids : $\vec{p} = m\vec{g}$
, et la résistance de l'air : $\vec{R} = -c\overrightarrow{v(t)}$. L'accélération à l'instant t est : *a(t)*

Le principe fondamental de la dynamique nous permet d'écrire : $\vec{R} + \vec{p} = m\overrightarrow{a(t)}$
En projetant sur un axe vertical descendant, nous obtenons : $mg - cv(t) = ma(t)$

comme $a(t) = v'(t)$, donc $mg - cv(t) = mv(t)$ et nous obtenons $v'(t) + \frac{c}{m}v(t) = g$. La fonction $t \mapsto v(t)$ est une solution de(E) : $y'+\frac{c}{m}y = g$.

2. Il est évident que la fonction constante $t \mapsto \frac{mg}{c}$; de dérivée nulle, est une solution particulière de (E) : $y'+\frac{c}{m}y = g$.

Comme la solution générale de l'équation différentielle sans second membre $y'+\frac{c}{m}y = 0$, est $t \mapsto Ae^{-\frac{c}{m}t}$, la solution générale de (E) est donc toute fonction de la forme : $t \mapsto Ae^{-\frac{c}{m}t} + \frac{mg}{c}$; *A réel.*

La condition initiale $v(0)=0$ conduit à $A = \frac{-mg}{c}$ d'où l'expression de $v(t) = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)$

Nous avons : $\lim_{t\to+\infty}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) = 1$.Donc : $\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{c} = v$.

Exercice résolu 7

Résoudre dans$\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' = -7x^3 + 5$

Solution

Une primitive de la fonction : $x \mapsto -7x^3 + 5$ est la fonction : $x \mapsto -\frac{7}{4}x^4 + 5x$

Donc, les solutions dans$\mathbb{R}$ de sont les fonctions de la forme: $x \mapsto -\frac{7}{4}x^4 + 5x + k, k \in \mathbb{R}$

Exercice résolu 8

a) Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle (E) : $y' = 3x - \frac{5}{\cos^2 x}$
b) Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(\pi) = \pi^2$.

Solution

a) Une primitive de la fonction $x \mapsto 3x - \frac{5}{\cos^2 x}$ est la fonction : $x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - 5\frac{\sin x}{\cos x}$

Donc, les solutions dans $\left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$ de (E) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \frac{3}{2}x - 5\frac{\sin x}{\cos x} + k$, $k \in \mathbb{R}$. La condition initiale $y(\pi) = \pi^2$ conduit à $k = -\frac{\pi^2}{2}$

Donc la solution dans $\left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$ demandée est la fonction $x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - 5\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\pi^2}{2}$

Pour les exercices résolus 9 ; 10 ; 11 : trouver la fonction vérifiant chacun des systèmes donnés :

Exercice résolu 9

$$\begin{cases} y'' = 0 \\ y(51) = -27 \\ y'(0) = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Solution

Toute fonction solution du système est de la forme : $y : x \mapsto Ax+B$; $x \in \mathbb{R}$, A et B nombres réels

Les conditions initiales $y(51) = -27$ et $y'(0)=\frac{11}{3}$ conduisent à $(A ;B) =(\frac{11}{3}; -214)$

La fonction solution demandée est la fonction $:x \mapsto \frac{11}{3}x - 214 : x \in \mathbb{R}$

Exercice résolu 10

$$\begin{cases} y'' = 3y \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solution

Nous avons : $y''= 3y$ équivaut à $y'' - (\sqrt{3})^2 y=0$

Donc, toute fonction solution est de la forme : $y : x \mapsto y(x) = Ae^{-\sqrt{3x}} - Be^{\sqrt{3x}}$, A et B nombres réels.

Les conditions initiales $y(0)= - 3$ et $y'(0)= 0$ conduisent à $(A ; B)= (-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$. La fonction solution demandée est la fonction : $x \mapsto -\frac{3}{2}e^{-\sqrt{3x}} - \frac{3}{2}e^{\sqrt{3x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice résolu 11

$$\begin{cases} y'' + 49y = 0 \\ y(-3\pi) = -1 \\ y'(12\pi) = -7\sqrt{23} \end{cases}$$

Solution

Nous avons : $y''+49y =0$ équivaut à $y''+7^2y=0$.

Toute fonction solution est de la forme : $y : x \mapsto A \cos 7x+B \sin 7x$; $x \in \mathbb{R}$, A et B nombre réels

Les conditions initiales $y(-3\pi)=- 1$ et $y'(12\pi)=-7\sqrt{23}$ conduisent à $(A ;B)=(1 ; -\sqrt{23})$.

La fonction solution demandée est la fonction : $x \mapsto \cos 7x - \sqrt{23}\sin 7x$; $x \in \mathbb{R}$.

Exercice résolu 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y''= - \cos x$.

Solution

Nous avons : $y''= - \cos x \Leftrightarrow y'= - \sin x+k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y = \cos x + k_1x + k_2$, $k_1 \in \mathbb{R}$ $k_2 \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto y=\cos x+k_1x + k_2$, $k_1 \in \mathbb{R}$ $k_2 \in \mathbb{R}$

Exercice résolu 13

1. Nous nous proposons de résoudre l'équation différentielle $(E): y' - 3y = \frac{13}{2}\sin 2x$.
   a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction $h: x \mapsto a\cos 2x + b\sin 2x$ soit solution de (E)
   b) Soit une f fonction dérivable dans $\mathbb{R}$. Démontrer que f+h est solution de (E) si et seulement si f est une solution de l'équation différentielle (F) : $y'-3y=0$.
   c) Résoudre (F) et en déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de €.
2. Soit à résoudre l'équation différentielle (G) : $y''+y'-2y=-20e^{3x}$
   a) Déterminer un nombre réel a tel que la fonction $h: x \mapsto ae^{3x}$ soit solution de (G) .
   b) Utiliser une méthode analogue à celle utilisée dans la question 1) pour résoudre l'équation proposée

Solution

1. a) *h solution de* (E) équivaut à $(-2a-3b)\sin 2x + (-3a+2b)\sin 2x = \frac{13}{2}\sin 2x$; x *réel* équivaut à $\begin{cases} -2a-3b = \frac{13}{2} \\ -3a+2b = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$

   b) Nous avons :

   $(f+h)$ *solution de* (E)*équivaut* à $f'(x) + h'(x) - 3f(x) - 3h(x) = \frac{13}{2\sin 2x}$, x *réel*

   équivaut à $f'(x) - 3f(x) = 0$; x *réel*

   équivaut à f *est solution de* (F)

   Les solutions de *(F)* sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{3x}, k \in \mathbb{R}$.Donc les fonctions solutions de

   c) *(E)* sont les fonctions de la forme : $x \mapsto -\cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x + ke^{3x}, k \in \mathbb{R}$

2. Considérons l'équation différentielle $(G): y'' + y' - 2y = -20e^{-3x}$.

   a) Nous avons pour tout nombre réel x : $h'(x) = 3ae^{3x}, h''(x) = 9ae^{3x}$ *et* $h''(x) + h'(x) - 2h(x) = 10ae^{3x}$

   Alors, h solution de (G) équivaut à 10a= - $20e^{-3x}$ $\Leftrightarrow$ a= - 2

   b) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Procédons comme à la question 1.b.

Nous obtenons : $(f+h)$*solution de* (G)*équivaut* à f *solution de* $(H): y'' + y' - 2y = 0$
L'équation caractéristique $r^2+r-2=0$ de H a deux solutions réelles distinctes : -2 et 1.Nous en déduisons que les fonctions solutions de *(H)* sont les fonctions de la forme : $\mapsto Ae^{-2x} + Be^{x}, A$ *et* B *réels.*
Alors, les solutions dans$\mathbb{R}$ de (G)sont les fonctions de la forme : $x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{x} - 2e^{3x}, A$ *et* B *réels.*

Exercice résolu 14

Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $y''=\frac{1}{x}$ telle que $y'(1)=-2$ et $y(1)=2$

Solution

Une primitive sur$]0,+\infty[$ de la fonction :$x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction : $x \mapsto lnx + k_1, k_1 \in \mathbb{R}$.
Une primitive sur$]0,+\infty[$ de la fonction: $x \mapsto lnx + k_1, k_1 \in \mathbb{R}$.. est la fonction $x \mapsto xlnx - x + k_1x + k_2$; $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_2 \in \mathbb{R}$
Les conditions initiales : $\begin{cases} y'(1) = -2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ *équivaut* à $\begin{cases} \ln(1) + k_1 = -2 \\ 1.\ln(1) - 1 - 2.1 + k_2 = 2 \end{cases}$ *équivaut* à $\begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = 5 \end{cases}$
La fonction : $x \mapsto xlnx(x) - 3x + 5$, est la fonction solution cherchée.

EXERCICES

Équations différentielles du premier ordre

Exercices 15 à 18

Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) dans l'intervalle I.

$$15)\ f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + 1 \quad (E): 2(y' + y) = x^2, \quad I = \mathbb{R}$$

$$16)\ f : x \mapsto (-8x - 1)e^x, \quad (E): y' - y = -8e^x \quad , I = \mathbb{R}$$

$$17)\ f : x \mapsto x\cos x\,, \quad (E): y - xy = x^2 \sin x\,, \quad I = \mathbb{R}$$

$$18)\ f : x \mapsto x\ln x - x, \quad (E): xy' - y = x, \quad I = [0, +\infty[$$

Exercices 19 à 22

Résoudre (ou Intégrer) dans $\mathbb{R}$ l équation différentielle:

19) $4y' + 3y = 0$

20) $y\ ln12 = y'$

21) $\frac{1}{5}\,y + \frac{1}{3}y' = 0$

22) $y' = \sqrt{7}y$

Exercices 23 à 26

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle *(E)* et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée :

23) $(E): y' - 3y = 0 \quad et\ y(1) = e^4$

24) $(E): 3y' + y = 0 \quad et\ y(0) = 5$

25) $(E): y' + y\ln 2 = 0 \qquad et\ y\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2}$

26) $y' = y \quad et\ y(-3) = \frac{27}{e^2}$

Exercices 27 à 30

Le plan est muni du repère (O ; I, J). Résoudre dans$\mathbb{R}$ l'équation différentielle *(E)* et déterminer la fonction solution dont la courbe représentative passe par le point A :

27) $(E): 2y' + 3y = 0\ et\ A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

28) $(E): -y' = y\ et\ A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

29) $(E): 2y' - \frac{1}{2}y = 0\ et\ A\begin{pmatrix}2\\2e\end{pmatrix}$

30) $(E): y' - \pi y = 0\ et\ A\begin{pmatrix}2\\e^2\end{pmatrix}$

Exercices 31

Le plan est muni du repère (O ;I ,J). Déterminer la fonction f ,dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2f' + f = 0$ et dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse 2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$.

Exercices 32

On considère l'équation différentielle*(E)* : $y' + 2y = e^{-2x}$

a) Vérifier que la fonction $g(x): x \mapsto (x+1)e^{-2x}$ est solution dans $\mathbb{R}$ de*(E)*

b) Démontrer qu'une solution f+g est solution de*(E)* si la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

c) En déduire toutes les solutions dans$\mathbb{R}$ de *(E)*.

Exercice 33

Intégrer l'équation différentielle (E) : 2y' – y = 0, où y et y' désignent les images respectives d'une variable réelle x par une application numérique het par sa dérivée h'.

1. Montrer que la fonction u , telle que u(x) = x - 1 est une solution de l'équation différentielle $(F): 2y' - y = 3 - x$
2. Montrer que, quelque soit la solution v de *(F)* la fonction u - v est une solution de l'équation différentielle*(E)* Déterminer la solution particulière $u_0$de*(F)* telle que u_0 (0) = 2 et calculer la valeur de la dérivée de u_0 pour x=0.

Exercice 34

Résolution de l'équation *(E) : y'+y= x -1.*

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^x e^t\,(t-1)dt$
2. a) Soit g une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on pose $u(x) = g(x)e^{-x}$

b) Montrer que la fonction u est solution de (E) si, pour tout nombre réel x, $g'(x) = e^x (x-1)$.

c) A l'aide de la première question déterminer toutes les fonctions g vérifiant, pour tout nombre réel réel x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = e^x (x-1)$.

3. a) Déduire de la question précédente les solutions de (E)

b) Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0

Exercice 35

Soit θ la température d'un corps à l'instant t . La température ambiante est 30°C . A chaque instant t on pose $x(t)=\theta(t) - 30$ On suppose que la fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie $x' = -k^2x$ ($k \in \mathbb{R}^*$)

A l'instant 0 la température du corps est 70°C et au bout de 5mn, elle n'est que 60°C

1. Déterminer $\theta(t)$, où t est mesuré en minutes.
2. A quelle température sera le corps au bout de 20mn ?

Exercice 36

1. Intégrer l'équation différentielle (E) : $\frac{1}{2} y = y'$; où y et y'désignent les images respectives d'une variable réelle x par la fonction u et u' sa dérivée
2. Montrer que la fonction f, telle que $f(x) = -2x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (F) : $-y' + \frac{1}{2}y = -x + \frac{5}{2}$
3. Montrer que, quelle que soit la solution h de (F), la fonction h-$f$est une solution de l'équation différentielle (E)
4. Déterminer la solution particulière h_0 de (F) telle que $h_0(2) = -3 + 2e$ et calculer la valeur de la dérivée de h_0 pour x=2

Exercice 37

On se propose de trouver une fonction Pdéfinie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, s'annulant pour $x=1$ et vérifiant la propriété : pour tout $x>0$, $xp'(x) - 5p(x)=x\ln x$, (E) où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Trouver toutes les fonctions polynômes P de degré cinq telles que, pour tout nombre réel x :
   $xP'(x) - 5P(x) = 0$
2. Soit une fonction p définie et dérivable sur l'intervalle$]0;+\infty[$ telle que $p(1)=0$ soit i la fonction définie sur l'intervalle$]0;+\infty[$ par la relation : $p(x) = x^5\, i(x)$
   a) Calculer $i(1)$
   b) Exprimer $p'(x)$ en fonction de i'(x) et de i(x)
   c) Montrer que p vérifie la propriété (E) si et seulement si, pour tout : $x > 0$, $i'(x) = \frac{1}{x^5}\ln x$
   d) On suppose que p vérifie la propriété (E). Montrer que $i$est définie sur l'intervalle$]0;+\infty[$ par : $i(x) = \int_1^x \frac{1}{t^5} \ln t\,dt$
   e) Déterminer $i(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

Montrer qu'il existe une fonction Pet une seule solution du problème posé et donner l'expression

Équations différentielles du second ordre

Exercice 38

Démontrer les résultats résumés dans le tableau suivant :

Equation caractéristique admet	La fonction solution vérifiant les conditions initiales est $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$
Une solution réelle : r	$x \mapsto [\,(y'_0 - ry_0)x + (x_0y'_0 - y_0(1+rx_0))]\, e^{r(x-x_0)}$
Deux solutions réelles distinctes : r_1 et r_2	$x \mapsto \left(\frac{y_0r_2 - y'_0}{r_2 - r_1}\right) e^{r_1(x-x_0)} + \left(\frac{y'_0 - r_1y_0}{r_2 - r_1}\right) e^{r_2(x-x_0)}$
Deux solutions imaginaires conjuguées : $u+iv$ et $u-iv$	$x \mapsto [(y'_0 \sin vx_0 + y_0(u \sin vx_0 + v \cos vx_0))] \cos vx + [(y'_0 \cos vx_0 - y_0(u \cos vx_0 - v \sin vx_0))] \sin vx \;\frac{e^{\pi(x-x_0)}}{v}$

Exercices 39 à 42

Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle(E) dans l'intervalle I

39) $x \mapsto sin2x$ $(E): y'' + (sin2x)y' + 4y = sin4x$; $I = \mathbb{R}$

40) $x \mapsto e^{x} - e^{-2x}$ $(E): y'' - y' - 2y = -2e^{x}$; $I = \mathbb{R}$

41) $x \mapsto x^2 + \ln x$ $(E): y'' + \frac{1}{x}y' = 4$; $I =]0; +\infty[$

42) $x \mapsto xe^{x}$ $(E) = y'' + \frac{1}{4}y' = 4$; $I = \mathbb{R}$

Le plan est muni du repère (O ; I, J).

Exercice 43

Déterminer la fonction u deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $u''+\pi u=0$ et dont la courbe représentative admet au point $M\binom{0}{-\pi}$ une tangente de coefficient directeur $\frac{2}{3}\pi$

Exercice 44

Le plan est muni du repère (O ; I, J)

Déterminer la fonction v deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $v'' - v' + \frac{9}{4}v=0$ et dont la courbe représentative est tangente en O à la droite d'équation $y=2x$

Exercices 45 à 57

Déterminer la fonction solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

45) $y'' = -5$

46) $y'' = -5x + 2$

47) $y'' = x^2$

48) $y'' = -y'$

49) $y'' + 3y = 0$

50) $y'' = 49y$

51) $y'' - y' = 0$

52) $y'' = -y'$

53) $y'' = 4y'$

54) $y'' - 5y' + 6y = 0$

55) $y'' - 2y' + y = 0$

56) $y'' + \sqrt{3}\,y' + 7y = 0$

57) $y'' + y' + y = 0$

Exercices 58 à 63

Résoudre dans$\mathbb{R}$ l'équation différentielle(E) et déterminerla solution vérifiant les conditions initiales données :

58) $(E): y'' + 2y' + y = 0$; $y(0) = -0$ et $y'(0) = 0$

59) $(E) = y'' + 2y' + y = 0$; $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$

60) $(E) = y'' - (\ln 2)^2 y = 0$; $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

61) $(E): 4y'' + y = 0$; $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ et $y'(0) = 2$

62) $(E): y'' + 2y' - 3y = 0$; $y(0) = 3$ et $y'(0) = -1$

63) $(E): y'' + y' + y = 0$; $y(0) = -1$ et $y'(0) = \sqrt{3}$

Exercice 64

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(D): y'' = -16y$
2. Déterminer la fonction q qui vérifie : $q\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$ et $q\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$
3. Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation : $q(x) = -\sqrt{2}$

Exercice 65

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E): y'' + 4y' + 4y = 0$
2. Déterminer les nombres réels a,b,c pour que la fonction $g: x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation différentielle : $(E'): y'' + 4y' + 4y = -x^2 + x + 2$

Exercice 66

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y''+9y=5x+3$

Montrer que si une fonction polynôme P est solution de (E_1), alors son degré est 1.

1. Déterminer P solution de(E_1)
2. On pose $g = f - P$
   a) Montrer que f est solution de E_1 si et seulement si g est solution de l'équation $(E_2): y'' + 9y = 0$
   b) Résoudre (E_2)
   c) Résoudre (E_1) et montrer que cette équation admet une solution unique $f$vérifiant les conditions : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$

CHAPITRE 7 : ENSEMBLE C DES NOMBRES COMPLEXES

1. Définition

Définition
Un nombre complexe est un nombre de la forme $z = x + iy$ ou $z = x + yi$, où x et y sont deux nombres réels et i est un nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$.

Exemple : $z_0 = 1 - 3i$; $z_1 = 4$; $z_2 = -2i$ sont trois nombres complexes.
Remarque : L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

2. Forme algébrique

Définition
La forme $z = x + iy$ s'appelle « *forme algébrique* » du nombre complexe z.
x est appelé *partie réelle* de z et notée $x = \mathrm{Re}(z)$
y est appelé *partie imaginaire* de z et notée $y = \mathrm{Im}(z)$

Exemples
Si $z = 2 + 3i$ alors $\mathrm{Re}(z) = 2$ et $\mathrm{Im}(z) = 3$
Si $z = -3$ alors $\mathrm{Re}(z) = -3$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$
Si $z = 2i$ alors $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 2$

Remarques
(R_1) : Un nombre complexe z est un réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.
(R2) : Un nombre complexe z est un imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Egalité de deux nombres complexes
Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.
$z = z'$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$ c'est-à-dire $x = x'$ et $y = y'$
Cas particulier : si $x + iy = 0$ alors $x = 0$ et $y = 0$.

3. Calculs dans $\mathbb{C}$

L'addition et la multiplication suivent dans $\mathbb{C}$, les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$.
Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
$z + z' = (x + x') + i(y + y')$
$z.z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$
$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$
$(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$

Exercice résolu 1
Soit $z = 2 + 3i$; $z' = 2i - 5$.
Calculer et écrire sous forme algébrique $z + z'$; $2z - 3z'$; $z.z'$; z^2.
Solution
$z + z' = (2+3i) + (5+2i) = (2-5) + i(3+2) = -3+5i$
$z.z' = (2+3i).(-5+2i) = ((-5).2-3.2) + i(2.2+(-5).3) = -16-11i$
$2z - 3z' = 2(2+3i) - 3(-5+2i) = 19$

4. Conjugué d'un nombre complexe

Definition
Le *conjugué* du nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

Remarque
$\bar{\bar{z}} = z$
$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$ est toujours un réel positif.

Exemple :
si $z = \sqrt{2} - 3i$ alors $\bar{z} = \sqrt{2} + 3i$ et $z\bar{z} = 11$
si $z = 1 + i\sqrt{3}$ alors $\bar{z} = 1 - i\sqrt{3}$ et $z\bar{z} = 4$

<u>Exercice résolu 2</u>

Soient $z = 4 + 3i$ et $z' = 1 - 2i$

Calculer : $\bar{z}, \bar{\bar{z}}, \overline{z'}, z + z', \bar{z} + \overline{z'}, \overline{z + z'}, zz', \bar{z}\overline{z'}, \overline{zz'}$

Solution

> $\bar{z} = 4 - 3i$ et $\overline{z'} = 1 + 2i$
> $\bar{\bar{z}} = z = 4 + 3i$
> $z + z' = (4 + 3i) + (1 - 2i) = (4+1) + (3-2)i = 5 + i$
> $\bar{z} + \overline{z'} = (4 - 3i) + (1 + 2i) = (4+1) + (-3+2)i = 5 - i$
> $\overline{z + z'} = \overline{5 - i} = 5 + i$
> $zz' = (4 + 3i)(1 - 2i) = (4+6) + (-8+3)i = 10 - 5i.$
> $\bar{z}\overline{z'} = (4 - 3i)(1 + 2i) = (4+6) + (8 - 3)i = 10 + 5i$
> $\overline{zz'} = \overline{10 - 5i} = 10 + 5i$

4.1- Quotient de deux nombres complexes

Propriétés

Tout nombre complexe z non nul admet un inverse $\frac{1}{z}$, avec $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$

Si $z \neq 0$, alors $\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{z\bar{z}}$

Exemple

Soit $z = = 1 + i\sqrt{3}$

La forme algébrique de l'inverse de z est : $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{(1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}}} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

4.2- Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

(P_1) : $\bar{\bar{z}} = z$

(P_2) : z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$

z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$

(P_3) : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

(P_4) : Si $z \neq 0$ alors : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\bar{z}}$

(P_5) : $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

(P_6) : $\overline{(z^n)} = \bar{z}^n$

<u>Exercice résolu 3</u>

On donne les deux nombres complexes suivants : $z = \frac{3-4i}{1+2i}$ et $z' = \frac{3+4i}{1-2i}$

Sans effectuer aucun calcul, montrer que $z + z'$ est réel et que $z - z'$ est imaginaire pur.

Solution :

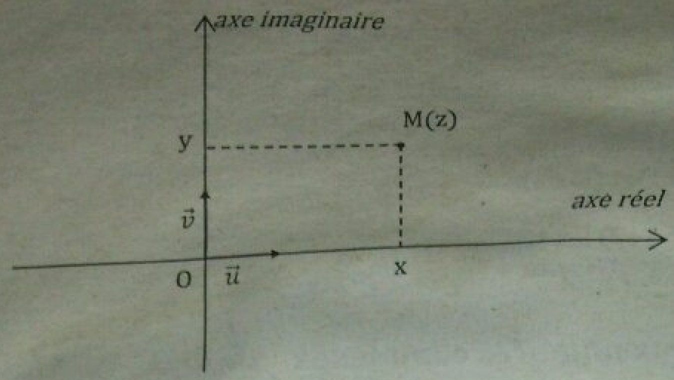
> On remarque que : z' est le conjugué de z, c'est-à-dire : $z' = \bar{z}$
> D'où $z + z' = z + \bar{z} = 2Re(z)$ *donc* $z + z'$ *est réel*
> *et* $z - \bar{z} = z \quad \bar{z} = 2\,Im(z)$ *donc* $z - z'$ *est imaginaire pur*

5. Représentation géométrique

5.1 Plan complexe

On appelle plan complexe, le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que :

- l'axe $(O, \vec{u})$ représente l'axe réel
- l'axe $(O, \vec{v})$ représente axe imaginaire



5.2 Affixe d'un point – Affixe d'un vecteur :

a) Affixe d'un point

Définition
Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé affixe du point M (x,y).
Le point M(x,y) est appelé image du nombre complexe $z = x + iy$.
Notation : M(x,y) est noté M(z)

Exemple :
$z = 1 - 3i$ est l'affixe du point M (1, -3)

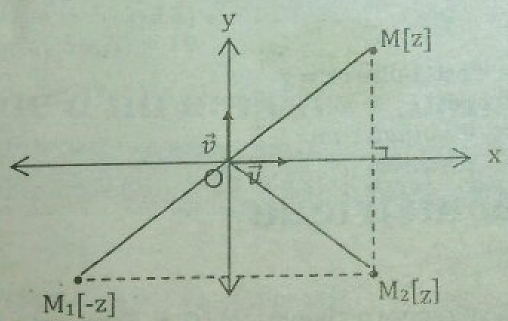
b) Affixe d'un vecteur :

Définition
Soient $z = x + iy$, A un point d'affixe z_A et B un point d'affixe z_B.
z est appelé *affixe* du vecteur $\vec{u} = \binom{x}{y}$; le vecteur $\vec{u}$ est appelé vecteur *image* du nombre complexe z.
$z_{AB} = z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exemple :
Soient $z_A = 3 + 2i$ et $z_B = 1 + i$
Calculons l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$
On a : $z_B - z_A = (1 + i) - (3 + 2i) = -2 - i$

5.3 Représentation géométrique de l'opposé et du conjugué d'un nombre complexe

a) Les points images de $z = x + iy$ et de son opposé $-z = -x - iy$ sont symétriques par rapport à l'origine O.
b) Les points images de $z = x + iy$ et de son conjugué $\bar{z} = x - iy$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



6. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

6.1 Module d'un nombre complexe

Définition
Soit $z = x + yi$, *le module* de z est le réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Remarque
Si M est le point image de z alors le module de z est la distance OM ou d(O,M)
Exemple :

$z = 4 - 3i$; le module de z est $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

Exercice résolu 4

Calculer les modules des nombres complexes suivants : $1 + 2i, 1 + i\sqrt{3}, 3 - 4i, 3, -\frac{2}{3}, 4i, i$

Solution :

$|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$|3| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{3}$

$\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

$|4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$

a) Cas particuliers

Si $z = x$, x réel, alors $|z| = |x|$

Si $z = yi$, y réel, alors $|z| = |y|$

b) Propriétés

Soient z , z' deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$:

(P1) : $|\bar{z}| = |-z| = |z|$

(P2) : $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$

(P3) : $|zz'| = |z||z'|$

(P4) : $|z^n| = |z|^n$

(P5) : $si\ z = x + iy\ alors |z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$

(P6) : $si\ z \neq 0\ alors\ \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}\ \ et\ \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

(P7) : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

6.2 Argument d'un nombre complexe

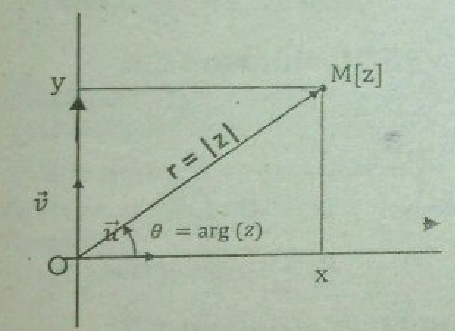
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul de point image M.

Définition

Une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ est appelé *argument* de z, noté arg(z).

$\arg(z) = \theta + 2k\pi$



Propriété - Détermination pratique de l'argument de z

Si θ est un argument de z, alors on a : *Si θ est un argument de z, alors on a :* $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$

Remarque :

Pour déterminer l'argument d'un nombre complexe z, il suffit de résoudre les équations en θ précédentes.

Exemple :

Déterminons un argument de chacun des nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - i$; $z_2 = \sqrt{3}$; $z_3 = -2i$

Solution

$|z_1| = \sqrt{2}$; *l'argument de z_1 est tel que* $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ *d'où* $\arg(z_1) = \theta = +\dfrac{\pi}{4}$

$|z_2| = \sqrt{3}$; *l'argument de z_2 est tel que* $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 \\ \sin\theta = \dfrac{0}{\sqrt{3}} = 0 \end{cases}$ d'où $\arg(z_1) = \theta = 0$

$|z_1| = 2$; *l'argument de z_3 est tel que* $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{0}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-2}{2} \end{cases}$ d'où $\arg(z_1) = \theta = -\dfrac{\pi}{2}$

<u>Forme trigonométrique d' un nombre complexe</u> :

Posons $r = |z|$ et θ un argument de z ;

D'après la définition ci-dessus, on a $x = |z|\cos\theta$ et $y = |z|\sin\theta$

On peut écrire z de la manière suivante $z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

<u>Définition</u>

L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée *forme trigonométrique* de z

Remarque:

La forme trigonométrique s'écrit aussi $z=[r, \theta]$

L'écriture $z=[r, \theta]$ est appelé *forme polaire* de z

a) <u>Propriétés</u>

Soient $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ les formes polaires de z et de z'.

(P_1) : $\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z')$ c'est-à-dire $zz' = [rr', \theta + \theta']$

(P_2) : $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ c'est-à-dire $\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{z}, -\theta\right]$

(P_3) : $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ c'est-à-dire $\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$

(P_4) : Pour : $n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n\arg(z)$

(P_5) : Egalité de deux nombres complexes z= z' si et seulement si $r'= r$ et $\theta' = \theta[mod 2\pi]$

(P_6) : Nombre réel ou Nombre imaginaire pur z est réel si et seulement si $\arg(z) = 0\ [mod\pi]$

z est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2}[mod\pi]$

b) <u>Méthodes de transformations :</u>

<u>Forme algébrique vers forme trigonométrique</u>

Soit $z = x + iy, z \neq 0$

On calcule $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

On calcule $cos\theta = \frac{x}{r}$ et $sin\theta = \frac{y}{r}$

Les deux dernières égalités déterminent $\boldsymbol{\theta}$ à 2 près.

Exemple:

Déterminer la forme trigonométrique de $z = 1 + i\sqrt{3}$

$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$

$cos\theta = \frac{1}{2}$ et $sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{6}[mod 2\pi]$

La forme trigonométrique de z est $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ et sa forme polaire est $z = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]$

<u>Forme trigonométrique vers forme algébrique</u>

Soit $z = [r,\theta]$; z s'écrit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou encore $r\cos\theta + ir\sin\theta$

Il est clair que $Re(z) = rcos\theta$ et $Im(z) = rsin\theta$

Exemple:

Déterminons la forme algébrique du nombre complexe $z = \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

On a $z = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + 2i$ D'où z=2+2i.

e) Utilisation de l'argument d'un nombre complexe en géométrie

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Argument d'une différence

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B .

L'argument de la différence $z_B - z_A$ est la mesure de l'angle$(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}})$. C'est-à-dire : $z_B - z_A = mes(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}})$

Angle de vecteurs

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

On a : $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = arg(z_D - z_C) - arg(z_B - z_A)$

Propriétés

A, B, C et D sont quatre points d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D.

(P_1) : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si $mes(\widehat{AB, CD}) = \frac{\pi}{2}[mod\pi]$

$$arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[mod2\pi]$$

$$\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) est\ imaginaire\ pur$$

(P_2) : A, B et C sont alignés si et seulement si $mes(\widehat{AB, AC}) = 0\ [mod\pi]$

$$arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 0\ [mod2\pi]$$

$$\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) est\ réel$$

Exercice résolu 5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives a = 2 + i, b = 4 + 2i et c = -2 - i.

1- Calculer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

2- Que peut-on dire des points A, B et C ?

Solution

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = arg\left(\frac{(-2-i)-(2+i)}{(4+2i)-(2+i)}\right) = arg\left(\frac{-4-2i}{2+i}\right) = arg(-2) = \pi$$

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \pi\ donc\ A, B, C\ sont\ alignés.$$

Conclusion : A, B et C sont alignés

6.3 Formule d'Euler

Définition

L'expression $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ est appelée *formule d'Euler*

Conséquence 1 : on a : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$

Conséquence 2 : Tout nombre complexe z , non nul, de module r et d'argument θ ,peut s'écrire $z = r\,e^{i\theta}$

Exemple :

z = [2,] peut s'écrire z = 2N

6.4 Formule de Moivre

Propriété

Si z = [r,] alors $z^n = [r^n, n]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

En effet : z = [r,] = $r(\cos\theta + i\sin\theta] = e^{i\theta}$; d'où $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = [r^n, n\theta]$

Exemple :

Soit $z = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}]$. Calculons z^6 puis donnons le résultat sous forme algébrique.

Réponse :

$z^6 = [(\sqrt{2})^6, 6\frac{\pi}{3}] .= [8, 2\pi] = 8$

6.5 Racine nième d'un nombre complexe non nul

Définition

Soient z et a deux nombres complexes, et n un entier non nul.
On dit que a est un racine n-ième de z si $z^n = a$

Propriété

$z = [r, \theta]$ est une racine n-ième de a si et seulement si : $a = [\rho, \varphi]$ où ; $r = \sqrt[n]{\rho}$ et $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

Remarques

(R1) Résoudre l'équation $z^n = a$ équivaut à déterminer toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a.
(R2) Tout nombre complexe non nul admet exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$.

Cas particulier - racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 sont donc les nombres complexes de la forme :
$u_k = \left[1, \frac{2k\pi}{n}\right]$ où $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

Propriétés

(P_1) : La somme des n racines n-ièmes d'un nombre complexe est nul
(P_2) : Les images des n racines n-ièmes d'un nombre complexe de module ρ se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon $r = \sqrt[n]{\rho}$
En particulier, les images des n racines n-ièmes de l'unité se trouvent sur le cercle trigonométrique.
(P_3) : Si a est une racine n-ième de z alors les autres racines n-ièmes s'obtiennent par la relation : $z_k = a.u_k$ avec u_k racine n-ième de l'unité

6.6 Linéarisation

Pour linéariser $\cos^n x$ ou $\sin^n x$, on peut procéder comme suit :

- Partir des formules d'Euler : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
- Développer le second membre suivant la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

et moyennant la formule de Moivre :

$$cos\theta = \left[\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right]^n = \frac{1}{2^n}$$

$$cos^n\theta = \left[\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right]^n = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p e^{ip\theta} e^{-i(n-p)\theta}$$

$$sin^n\theta = \left[\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right]^n = \frac{1}{(2i)^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^{(n-p)} e^{ip\theta} e^{-i(n-p)\theta}$$

Grouper chaque terme avec son inverse
Remplacer : $e^{in\theta} + e^{-in\theta}$ *par* $\cos(n\theta)$
$e^{in\theta} - e^{-in\theta}$ *par* $2i\sin(n\theta)$
$e^{in\theta}e^{-in\theta}$ *par* 1

Exercice résolu 6

Linéariser $\cos^4 x$

Solution :

$$cos^4x = \left[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right]^4 = \frac{1}{2^4}(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{16}[(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4e^{ix}e^{-ix}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6e^{2ix}e^{-2ix}]$$

$$= \frac{1}{16}(2cos4x + 4.2cos2x + 6)$$

$$cos^4x = \frac{1}{8}cos4x + \frac{1}{2}cos2x + \frac{3}{8}$$

7. Equation du second degré dans $\mathbb{C}$:

7.1 Racine carrée dans $\mathbb{C}$

Définition – Propriété
Dans $\mathbb{C}$, on dit que z est une *racine carrée* de Z si $z^2=Z$.

Propriété
Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

a) Détermination des racines carrées dans $\mathbb{C}$ (Méthode algébrique)

Soit $a + ib$ un nombre complexe, avec $b\neq0$.
$x + iy$ est une racine carrée de $a + ib$ si et seulement si
En développant le premier membre on a : $x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$ (*).
(*) implique $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy \quad = b \end{cases}$

Mais, ces deux équations seules ne permettent pas en général à déterminer directement x et y. Souvent, il convient leur adjoindre l'équation traduisant l'égalité des modules : $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

Pour déterminer les racines carrés de a+ib, il convient de résoudre le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy \quad = b \end{cases}$

en tenant compte du fait que xy et b sont de même signe.

Méthode de calcul

(1) + (2) donne $2x^2 = \sqrt{a^2+b^2} + a$; puis on en déduit x ($x = \pm\alpha$)
(1) - (2) donne $2y^2 = \sqrt{a^2+b^2} - a$; puis on en déduit y ($y=\pm\beta$)
Pour déterminer définitivement les valeurs de x et y, il convient de vérifier le signe de xy qui doit être celui de b.

b) Cas particuliers

Soit a un nombre réel.
- Si $a \geq 0$ alors les racines carrées de a sont : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a < 0$ alors les racines carrées de a sont : et $-$i

En effet, a = -(-a) où (-a)>0 ; c'est à dire $a = i^2(-a)$. D'où le résultat.

Exemple

Déterminons dans $\mathbb{C}$ les racines carrées des nombres complexes : -4 ; 5 ; $3 - 4i$.
Les racines carrées de (-4) sont 2i et $-2i$
Les racines carrées de 5 sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$
Les racines carrées de $3 - 4i$ se calculent par le biais du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) donne $2x^2 = 5 + 3 = 8$ c'est-à-dire $x^2 = 4$ donc $x = \pm 2$
(1) - (2) donne $2y^2 = 5 - 3 = 2$ c'est-à-dire $y^2 = 1$ donc $y = \pm 1$
Les racines de $z = 3 - 4i$ sont : $2 - i$ et $-2 + i$.

7.2 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit (E) l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des complexes, avec $a\neq0$.
On note Δ le discriminant de l'équation (E) : $\Delta = b^2-4ac = \delta^2$

Si $\Delta=0$ alors l'équation (E) admet une solution double (ou deux solutions confondues) : $z'=z''=-\frac{b}{2a}$

Si $\Delta\neq 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes : $z'=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z''=\frac{-b-\delta}{2a}$

Exemple :

Résolvons dans C l'équation (E) à une inconnue z suivante: $2z^2 - 2z - 1 + 2i = 0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 2(-1+2i) = 4\cdot(3-4i)$

Les racines carrées de Δ sont $\delta_1 = 2(2-i)$ et $\delta_2 = 2(-2+i)$

Les solutions de l'équation (E) sont : $z_1=\frac{3-i}{2}$ et $z_2=\frac{-1+i}{2}$

7.3 Factorisation du trinôme $f(z) = az^2 + bz + c$

On calcule le discriminant Δ de l'équation.

Si $\Delta=0$ et $z'=z''=-\frac{b}{2a}$ le zéro confondu de f, alors $f(z) = a(z-z')^2$

Si $\Delta \neq 0$ et z' et z'' les zéros du trinôme f, alors $f(z) = a\,(z - z')\,(z - z'')$

EXERCICES

Nombres complexes – représentations

Exercice 1

z est un nombre complexe définie par : $z=-2-\frac{1}{3}i$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La partie réelle de z est -2
2. La partie imaginaire de z est $\frac{1}{3}$
3. Le point N $(-\frac{1}{3},-2)$ est l'image de z
4. z est l'affixe du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$
5. **Exercice 2**

M (x ,y) est un point d'affixe z. Dans chaque cas, représenter dans le plan l'ensemble des points M :

1. 1-z est un réel positif
2. $Re(z) \leq 0$ et $Im(z) \leq 0$
3. $Re(z) = -3$
4. $Im(z) = 2$

Exercice 3

Pour quelles valeurs de m le nombre complexe : $z = (m+i)\,m - 4 - i\,(m-7)$ est-il imaginaire pur ?

Exercice 4

1. Montrer que $(1+i)^8$ est réel
2. Montrer que $(\sqrt{3}+i)^3$ est un nombre imaginaire pur

Calculs avec les nombres complexes

Exercice 5

Les points A, B, C ont pour affixes respectives :

$Z_A = 1 - i$ $\quad Z_B = 2 + i$ $\quad Z_C = -4i$

Répondre par vraie ou faux

1. l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z = 1 + 2i$
2. le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est l'image du nombre complexe $-2 + 5i$
3. l'affixe du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ est $-1 -6i$

Exercice 6

Ecrire sous forme algébrique chaque nombre complexe

$z_1 = (3+i)\left(\frac{2}{3}-i\right), z_2 = \frac{-3}{1-2i}, z_3 = \frac{5-i}{-2+3i}, z_4 = (1-2i)^2 + \frac{1+4i}{2+3i}$

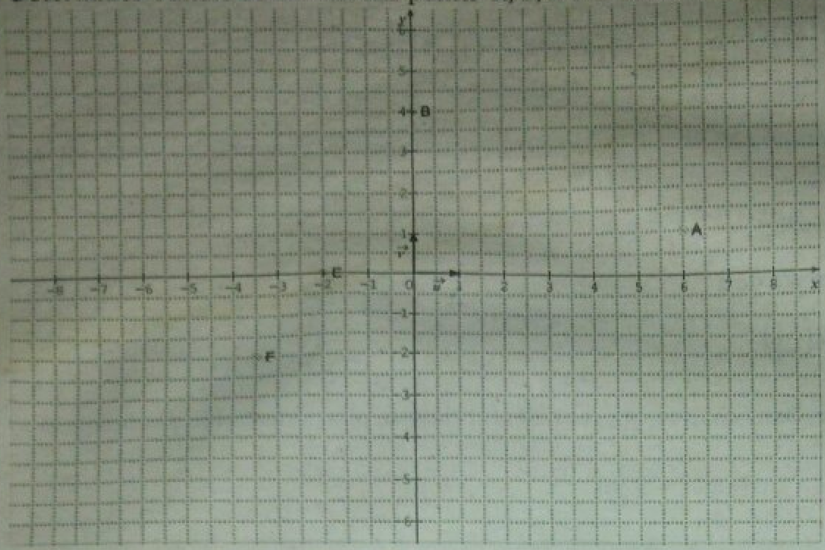
Exercice 7

1. Ecrire sous la forme $a + bi$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, chacun des nombres suivants :

   $z_1 = (2+i)(i-1) + (1+2i)^2$; $z_2 = (1+i\sqrt{3})^3$; $z_3 = \frac{1-3i}{3-i}$
2. calculer : $3z_1 - 2z_3$

Exercice 8

Déterminer l'affixe de chacun des points A, B, E et F sur le graphique ci – dessous :



Exercice 9

On donne les points : A(-1, 3) , B(-4, -5) et C(3, -2)

1. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}$
2. Calculer l'affixe du point D tel que : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$
3. Quelle est l'affixe du point E pour que ABCE soit un parallélogramme ?

CONJUGUES

Exercice 10

Ecrire sous forme algébrique le conjugué de chaque nombre complexe :

$Z_1 = (2\sqrt{3} + i)(-\sqrt{3} + 2i)$ $\qquad z_2 = \frac{4+3i}{2-i}$

Exercice 11

1. On considère les nombres complexes suivants,

   $z = \frac{1+i}{-2+3i}$ $\qquad z' = \frac{1-i}{-2-3i}$

Sans effectuer aucun calcul de z et z', montrer que :

a) $z + z'$ est réel

b) $z - z'$ est imaginaire pur

2. Soit z un nombre complexe non nul. Montrer que $\overline{(z + \frac{1}{z})} - \frac{\overline{1+z}}{\bar{z}} = \bar{z} - 1$

Exercice12

1. Ecrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_A = \frac{1}{i}$; $z_B = \frac{1}{2+5i}$; $z_C = \frac{3}{\sqrt{2}-i}$; $z_D = \frac{3+2i}{2+5i}$; $z_E = \frac{2i}{1-2i}$; $z_F = \frac{3+4i}{i}$; $z = \frac{x+yi}{x-1+yi}$ où x et y sont des réels

2. Résoudre dans £ l'équation $(2 - i)z + 3 - 2i = 0$, donner la solution sous forme algébrique

Exercice 13

1. On considère le polynôme $f(z) = z^2 - (3+4i) - 1 + 5i$

   Calculer sa valeur pour $z = z_1 = 2 + 3i$
2. Donner les expressions de $\overline{(f(z))}$ et $f(\bar{z})$. Comparer ces résultats.
3. Calculer $\overline{(f(z_1))}$ et $f(\overline{z_1})$. Pouvait-on prévoir ces résultats ?

Exercice 14

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$a)\ (1 + 2i)z + 3 + 5i = 0$ $\qquad b)\ 2iz - 3i + z(1 + i) = 0$ $\qquad c)\ \frac{(1-i)z}{z+i} = -1 + 2i$

2. Déterminer le couple de réels (x,y) dans chacun des cas suivants :

a) $2i(x+yi)=3+5i$ b) $(x+2i)(5+yi)=4+16i$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} 2iz - z' = 1 + 2i \\ z + (1+i)z' = 2 - 3i \end{cases}$ b) $\begin{cases} iz - 3z' = -7 + 4i \\ (1+i)z + 2iz' = 2 + 6i \end{cases}$

Modules – Arguments – Formes trigonométriques

Exercice 15

Calculer les modules des nombres complexes suivants :

$z_1 = (-1+2i)(2+3i)$; $z_2 = -2(1+i)$; $\frac{3-4i}{1-2i}$; $z_3 = (1+i)^4$; $z_4 = \left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^2$

Exercice 16

1. Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

$Z_A = 1 - i$, $z_B = -i$, $z_C = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $z_D = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. En déduire leurs formes trigonométriques

Exercice 17

Déterminer la forme trigonométrique de chaque nombre complexe suivant :

$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{i}\right)^2$; $z_4 = (-1-i)^4$

Exercice18

Ecrire sous la forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$1 - i$; $-2 + 2i$; $1 - i\sqrt{3}$; $-\sqrt{3} - i$; $2\sqrt{3} + 2i$; $-2(1-i)$; $(-1-i)(\sqrt{3}+i)$

$(1+i)(-1+i\sqrt{3})$; $(-1+i)^4$; $\frac{1}{1-i}$; $\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$; $\frac{2-2i}{1-i\sqrt{6}}$; $\frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$; $\frac{1-3i}{-3-i}$; $\frac{1}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$

Exercice 19

On considère les nombres complexes suivants :

$z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1. Donner la forme algébrique de $Z = \frac{z_1}{z_2}$
2. Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2
3. En déduire le module et l'argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
4. Tirer des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 20

1. Déterminer le module et l'argument des nombre complexe suivants :

$z_1 = 1 + \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ et $z_2 = 1 - \cos 2\theta - i\sin 2\theta$; θ

2- Application : simplifier la fraction $\frac{1-\cos 2\theta - i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}$

Exercice 21

Soit $Z = \frac{z-i}{z=2i}$; avec $z = x + iy$ $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que le module de Z soit égal à $\frac{1}{2}$.
2. Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que l'argument de Z soit égal à $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Exercice 22

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $u = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$
2. a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de u.
   b) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$
3. On considère le nombre complexe $z = 1 + e^{2i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
   a) Mettre en facteur $e^{i\theta}$ dans l'expression de z.

b) En déduire le module et un argument de z.

4. Soit le nombre complexe $z_0 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

a) Déduire de la question précédente un argument et le module de z_0.

b) Tirer des questions 1), 2), et 4-a) que : $\sqrt{2} + \sqrt{6} = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$

c) Quel est le plus petit entier strictement positif n pour que $(z_0)^n$ soit imaginaire pur.

Exercice 23

On considère les nombres complexes : $z_A = 1 + i$, $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = -5 - i$.

1. a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire une mesure de l'angle$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.
   c) Que peut-on dire de la position des points A, B et C.
2. Mêmes questions avec les points A $(-1+i\sqrt{3})$, B $(2+2i\sqrt{3})$ et C $(-7-i\sqrt{3})$.

Exercice 24

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 4 + i$; $z_B = 3 - 3i$ et $z_C = 2i$.

1. Placer les points A, B et C.
2. On pose $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. Donner la forme trigonométrique de Z .
3. En déduire la nature du triangle BAC.
4. Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère BACD soit un carré.

Exercice 25

On donne les nombres complexes $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$; $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1. Mettre sous la forme trigonométrique les nombres complexes z_1 , z_2 et Z .
2. Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe Z.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
4. Déterminer les entiers n tels que Z^n est réel.
5. Déterminer le plus petit entier positif p tel que Z^n est imaginaire pur.

Exercice 26

a et b sont des nombres réels.

1. Développer $A = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \cdot \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}$
2. En déduire que $\cos(a) . \cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
   (Indication : regrouper les termes d'exposants opposés)

Exercice 27

Linéariser : $f(x) = \cos^3 x$ $g(x) = \sin^4 x$ $h(x) = \cos^2 x . \sin^2 x$ $p(x) = \sin x . \cos^2 x$

Racines n-ième :

Exercice 28

1. Déterminer les racines cinquièmes de l'unité
2. Déterminer les racines cinquièmes de $4 + 4i$

Exercice 29

1. Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 = \frac{z^4 - 1}{z - 1}$
2. Déterminer les racines quatrième de l'unité.
3. En déduire les solutions de l'équation (E) : $1 + z + z^2 + z^3 = 0$.

Equations de degré supérieur ou égal à deux

Exercice 30

Résoudre dans C l'équation : $z^2 - (1+i)z + 2 - i = 0$

Exercice 31

Résoudre dans C les équations d'inconnue z suivantes.

1. $\frac{3z}{z-1} - \frac{z}{1+iz} = 3 + i$
2. $3\bar{z} - 2iz = 2 - 3i$

Exercice 32

On donne $P(z) = z^3 - 2(1+i)z^2 + (2+3i)z + 1 - 3i$ où $z \in C$

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure $z_0 = i\alpha$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. Ecrire P(z) sous la forme $P(z) = (z - i\alpha)(z^2 + az + b)$ avec a et b deux réels que l'on déterminera.
3. Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$.

Exercice33

Soit $z = x + iy$ et $Z = \frac{z+1}{z-i}$ où z est un nombre complexe different de i.

1. Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z = z$.
2. Donner la forme algebrique de z en fonction de x et y .
3. Determiner l'ensemble des points M d'affixe z pour que Z soit imaginaire pur.

Exercice34

Soit la transformation f du plan $M(z) \mapsto M'(z')$ définie pour $z \neq i$ par $z' = \frac{z+2i}{z-i}$.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y , x'et y' réels).

1. Déterminer l'affixe du point A' image du point A $(1 - i)$ par f.
2. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
3. Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M d'affixe z telle que z' soit réel.

Exercice35

1. Résoudre dans C l'équation (E) : $(\sqrt{3}-2i)\,z - \sqrt{3} - 5i = 0$
2. z_1 étant la racine de l'équation (E), calculer z_1^2 et z_1^3
3. Démontrer par récurrence que : Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $z_0^{\,3n+2} = -2^{3n+1}(1+i\sqrt{3})$.

Exercice36

On considère l'équation (E_θ) où θ Î $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z\sin 2\theta + 1 = 0$ (E_θ)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ). On notera z_1 et z_2 les deux solutions de (E_θ).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_{\frac{5\pi}{6}})$ et $(E_{\frac{3\pi}{4}})$.

Exercice37

Soit le polynôme P a variable complexe z défini par :

$P(z) = z^2 - 2\bar{z} + 1$ où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z,

1. a) Calculer P(1), $P(-\frac{1}{2} - \frac{3i}{2})$

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On note z_1, z_2 et z_3 les racines de cette équation, avec z_1 un réel, et $\mathrm{Im}(z_2) > 0$
2. Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $Z = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$
3. Dans le plan complexe (P), les points A, B et C ont pour affixes respectifs z_1, z_2 et z_3.
   Déduire des questions précédentes la nature du triangle ABC.

Exercice38

1. Développer $(1-\sqrt{3})^2$
2. Résoudre dans C l'équation : $z^3 + (1-\sqrt{3})z^2 + (2-\sqrt{3})z = 0$
   Notons z_0 , z_1 , et z_2 les racines de l'équation telles que z_0 est réel et $\mathrm{Im}(z_2) < 0$
3. Dans un plan complexe, on note O, P et Q les points d'affixes respectives z_0, z_1, et z_2, calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{PQ}$
4. En déduire la nature du triangle OPQ

Exercice39

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes ;

1. $z^3 + 8i = 0$
2. $27z^3 - i = 0$
3. $8z^3 + i = 0$
4. $Z^4 - i = 0$

Exercice 40

On considère dans C l'équation (E) :

$$iz^3 + (1 - 4i)\, z^2 - (3 - 11i)\, z + 2 - 14\, i = 0$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle z_0 que l'on déterminera.
2. Montrer alors qu'il existe des nombres complexes a, b et c tels que l'on ait
$$iz^3 + (1 - 4i)\, z^2 - (3 - 11i)\, z + 2 - 14\, i = (z - z_0)\, (az^2 + bz + c)$$
3. En déduire la résolution complète de l'équation (E).

Exercice 41

Z_1 et Z_2 sont deux nombres complexes définis par : $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$

1. Ecrire $Z = z_1 z_2$ sous la forme algébrique,
2. a) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle
   b) En déduire le module et un argument de Z,
3. Deduire des questions 1) et 2) les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$,
4. Trouver la plus petite valeur strictement positive de n telle que Z^n soit un réel, n étant un entier,

Exercice 42

Soient Pet Q deux polynômes à une variable complexe définie par :

$$P(z) = z^3 - (1 - i)\, z^2 - (4 - i)\, z - 12i - 6$$
$$Q(z) = z^3 + 2 - 2i$$

1. Résoudre dans C l'équation $Q(z) = 0$.
2. a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine réel α que l'on déterminera
   b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z - \alpha)\, (z^2 + az + b)$
   c) Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$ dans C.
3. Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, à tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :
   $$z' = P(z) - Q(z) + (1 - i)\, z^2 + (4 + i)z + 14i + 10$$
   a) Caractériser l'application s ainsi définie ?
   b) Exprimer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x èt y de M .
4. Soit(C) le cercle de centre O et de rayon $r = 2$.
   Ecrire l'équation du cercle (C ') image du cercle (C) par s.

Exercice 43 *: (extrait du Bac série C à Madagascar 1995)*

1. On considère l'équation (E) définie par :
   (E) $z^3 - (5 - 2i)z^2 + (15 - 9i)z - 44 + 28i = 0$
   a) Calculer $(3 - 4i)^2$
   b) Déterminer le réel α pour que $z0 = i\alpha$ soit une racine de l'équation (E).
   c) En déduire la résolution de (E) dans C.
   On notera z_1 et z_2 les deux autres racines avec $|z_1| > |z_2|$.
2. Le plan complexe(P) étant rapporté au repère orthonormé, $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
on donne trois points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2
   a) Mettre sous la forme algébrique et trigonométrique le nombre complexe
   $$Z = \frac{z_2 - z_1}{z_0 - z_1}$$
   b) Donner la nature du triangle BAC ?
3. a) Déterminer l'affixe du point N du plan(P) tel que $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$

b) Quelle est la nature du quadrilatère BANC ?

Exercice 44

1. Résoudre dans C l'équation : $z^2 - (4+i)z + 3 + i = 0$
2. Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm , on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1$; $z_B = 3 + ii$ et $z_C = 2i$.

On pose $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

a) Interpréter géométriquement $|Z|$ et arg(Z).

b) Ecrire Z sous forme trigonométrique

c) En déduire la nature du triangle ABC

d) Calculer l'affixe z_D du point D pour que ABDC soit un carré.

3. S est la similitude directe telle que S(A) = B et laisse invariant le point C.

a) Ecrire l'éxpression complexe de S

b) En déduire les éléments caractéristiques de S.

c) Caractériser $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$

4. $(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre AC

a- Déterminer $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par S.

b- Construire$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$

Exercice 45

1. On considère les quatre points A, B,Cet D d'affixes respectives 3 , 4i , -2 + 3i , et 1 – i dans un plan complexe *(P)* rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

a) Placer les points A, B, C, et D dans *(P)*.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

2. On donne les équations suivantes :

$Z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = 0$ (1) et $z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i = 0$ (2)

a) Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1 et l'équation (2) une solution Imaginaire pure z_2.

b) Développer $(z-3)\cdot(z+2-3i)$, puis $(z-4i)(z-1+i)$.

c) En déduire les solutions de l'équation $(z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i)(z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i) = 0$

d) Soit z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative .Déterminer la forme Trigonométrique de z_0.

e) Trouver les entiers naturels n tels pour que les points M_n d'affixe $(z_0)^n$ soient sur la droite d'équation y = x

3. f est l'application qui au point M, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$z' = z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i$

a) on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Donner les expressions de x' et de y' en fonction de x et de y.

b) Ecrire une équation de l'ensemble *(C)* des points M pour lesquelles f(M) appartient à l'axe des ordonnées.

Exercice 46

1. Résoudre dans C l'équation d'inconnue z : $z^2 - (4+5i)z - 1 + 7i = 0$.
2. Le plan complexe *(P)* est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 1 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + 4i$ et $z_C = 4 - i$

a) Déterminer l'expression complexe associée à la similitude plane directe S telle que : S(A) = B et S(B) = C.

b) Préciser les éléments caractéristiques de S.

3. On note par I le milieu du segment .

a) Calculer l'affixe z_I de I.

b) Placer les points A, B, C et I dans le plan complexe (P).

c) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M d'affixe z vérifiant :

d) Déterminer et construire l'ensemble (C) image de (C) par S,

Exercice 47

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par ; $P(z) = z^3 + (1 + i) z^2 + (4 - i) z - 6i + 12$

1. a) Calculer P (-3i).
   b) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle α que l'on déterminera.
   c) Déterminer le nombre complexe β tel que P(z) petit s'écrire sous la forme
   $P(z) = (z + 3i)(z + 2)(z + \beta)$.
   d) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$
2. Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = -3i$, $z_B = -2$, $z_C = 1+2i$

Déterminer la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$ et $\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right|$ puis en déduire la nature du triangle ABC.

3. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Ecrire l'expression complexe de la rotation r.
4. On considère la transformation S du plan (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $S : z' = 2iz - 2 + 4i$.
   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.
   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation h telle que r o h = S.

Exercice48

1. Résoudre dans C l'équation ; $z^2 - (1 - 3i) z - 4 = 0$
2. a) Dans le plan complexe (P). muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité 2cm, placer les points A, B et D d'affixes respectives 1, (-1 –i) et (2 – 2i) ainsi que le point C milieu du segment$[BD]$ dont on précisera l'affixe.
   b) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $\frac{z+1+i}{z-2-2i} = 1$.
   Montrer que (Δ) passe par A. Achever alors la construction de(Δ).
3. On considère la similitude directe S définie par : $\begin{cases} S(B) = B \\ S(A) = D \end{cases}$

   Préciser les éléments caractéristiques de S.

Exercice 49

Soit f la fonction définie par f : C-{-1,1} ↦ C

$$z \longmapsto f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

1. Résoudre dans C : $f(z) - \frac{i}{2} = 0$
2. a) Montrer que $f(z) = \frac{2z(\bar{z}^2 - 1)}{|1 - z^2|^2}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.
   b) On note $z = x+iy$ et $2z[\bar{z}^2-1] = X+IY$ ou x ;y ; X et Y sont des nombres réels. Exprimer X et Y en fonction de x et y,
   c) Le plan complexe (P) est rapporté a un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité 2cm.
   Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que f(z) soit imaginaire pur,
   Construire l'ensemble (E),
3. Soit θ ∈] 0, π [
   a) Démontrer que $f(e^{i\theta})$ est imaginaire pur.
   b) Calculer l'argument de $f(e^{i\theta})$.

Exercices résolus

Exercice 50 *(extrait du Bac série S à Antilles-Guyane, juin 2002)*

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{u}, \overrightarrow{v})$. (unité graphique ;2 cm)
On donne les points I et A d'affixes respectives 1 et -2. Le point K est le milieu [IA].
On appelle *(C)* le cercle de diamètre [IA].

Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit B le point d'affixe $z_B = \frac{1+4i}{1-2i}$. Ecrire z_B sous la forme algébrique et montrer que B appartient au cercle *(C)*.
2. D est le point du cercle *(C)* tel que mes (KI, KD)$=\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où k est un entier relatif, et D le point d'affixe z_D
   a) calculer le module de $z_D + \frac{1}{2}$. Donner un argument de $z_D + \frac{1}{2}$.
   b) en déduire que $z_D = \frac{1}{4} + \frac{3i\sqrt{3}}{4}$

<u>Exercice 51</u>

Le plan complexe *(P)* est muni d'un repère orthonormé directe $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité 2 cm.

1. On considère les points S, R et D d'affixes respectives (-4), (1-i) et (3i).

Représenter, dans *R*, l'image du triangle SRD, par la similitude plane directe de centre R, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

2. Soit Ψ le nombre complexe définie par $\Psi = \frac{z-3i}{z+4}$
   a) Interpréter géométriquement le module et l'argument de Ψ.
   b) M étant le point d'affixe z, préciser la nature de chacun des ensembles (Δ) et $(\sum)$ définis respectivement par : $(\Delta) = \{M \in (P), |\psi| = 1\}$ et $(\sum) = \{M \in (P), \arg(\psi) = \frac{\pi}{2}\}$.
   On justifiera que $(\sum)$ ne passe pas par l'origine des axes.
   c) Construire dans *R*, (Δ) et $(\sum)$.
3. On donne le polynôme Q, de la variable complexe z, défini par : $Q(z) = z^4 - 3iz^3 + 8iz + 24$
   a) Calculer Q (3i)
   b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions, dans C, de l'équation Q(z)=0.

CORRIGES

<u>Exercice 50</u>

1. on a $z_B = \frac{1+4i}{1-2i} = \frac{(1+4i)(1+2i)}{1+4} = \frac{1-8+(4+2)i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{6}{5}i$

K est le centre du cercle *(C)*, l'affixe de K est $z_K = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$

Le point B appartient à *(C)* si KB = KA.

Sachant que $KA = \frac{IA}{2} = \frac{3}{2}$ et que :

$$KB = |z_B - z_K| = \left|-\frac{7}{5} + \frac{6}{5}i + \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{9}{10} + \frac{6}{5}i\right| = \sqrt{\frac{81}{100} + \frac{36}{25}} = \frac{3}{2}$$

$\boxed{\text{Comme } KB = KA = \frac{3}{2} \text{, donc le point B appartient à } (C)}$

2. D est le point du cercle *(C)* tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KD}}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
   a) on a $\left|z_D + \frac{1}{2}\right| = |z_D - z_K| = KD = \frac{3}{2}$ (rayon de *(C)*)

   l'affixe de $\overrightarrow{KI} est\ 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ donc $\overrightarrow{KI} = \frac{3}{2}\vec{u}\ et (\vec{u}, \overrightarrow{KD}) = (\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KD}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ avec\ k \in \mathbb{Z}$

   $\boxed{\frac{\pi}{3} \text{ est donc un argument du nombre complexe } z_D + \frac{1}{2}}$

   b) d'après la question a, on a $z_D + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{3i\sqrt{3}}{3}$

   donc $\boxed{z_D = \frac{1}{4}}$

<u>Exercice 51</u> (corrigé bac D 2010)

1. notons par $z' = az + b$ l'expression complexe de la similitude plane directe, de centre R, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

On a : $a = \frac{1}{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) = -\frac{1}{2}i$

$b = z_R(1 - a) = (1 - i)(1 + \frac{1}{2}i) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

d'où $z' = -\frac{1}{2}i\,z + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

l'image de S est le point S' d'affixe $z_{S'} = \frac{1}{2}i\,(-4) + \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}i = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

l' image de R est lui-même car il est le centre de la similitude

l' image de D est le point D' d'affixe $z_{D'} = -\frac{1}{2}i\,(3i) + \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}i = 3\ -\frac{1}{2}i$

l'image du triangle SRD est le triangle S'RD' (on laisse au lecteur de prendre soin la construction)

2. soit le nombre complexe $\psi = \frac{z-3i}{z+4}$

a) on a $|\Psi| = \frac{|z-z_D|}{|z-z_S|} = \frac{DM}{SM}$

le module de ψ est équivaut au rapport de distance de DM par SM

arg ψ= arg $\left(\frac{z-z_D}{z-z_S}\right) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{SM},\overrightarrow{DM}})$

b) $(\Delta) = \{M\in(P)\,;|\Psi| = 1\}$

$|\Psi| = 1$ veut dire $\frac{DM}{SM} = 1$ ou encore DM = SM

Ce qui signifie que M est à égale distance de D et de S, quel que soit M appartenant à (Δ)

(Δ) est la médiatrice du [DS]

$(\Sigma) = \left\{M\epsilon(P), arg\Psi = \frac{\pi}{2}\right\}$

Arg ψ $= \frac{\pi}{2}$ veut dire $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{SM},\overrightarrow{DM}}) = \frac{\pi}{2}$

Il s'ensuit que $\overrightarrow{SM} \perp \overrightarrow{DM}$ c'est-à-dire M appartient à un demi- cercle de diamètre [DS]

Comme $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{SO},\overrightarrow{DO}}) = \arg\frac{0-3i}{0+4} = -\frac{\pi}{2}$

D'où le point $O \notin (\Sigma)$

(Σ) est le demi-cercle de diamètre [DS] ne contenant pas le point O

c- on laisse au lecteur de prendre soin les constructions de (Σ) et de (Δ)

3. $Q(z) = z^4 - 3i\,z^3 + 8iz + 24$

a) $Q(3i) = (3i)^4 - 3i\,(3i)^3 + 8i\,(3i) + 24$

$= 81 - 81 - 24 + 24$

$\boxed{Q(3i) = 0}$

b) d'après le résultat ci-dessus Q (3i) = 0 veut dire que 3i est un zéro de Q.

Il s'ensuit que $Q(z) = (z - 3i)(z^3 + 8i)$

$Q(z) = 0$ équivaut à $(z - 3i)(z^3 + 8i) = 0$

C'est-à-dire $\begin{cases} z - 3i = 0 \ (1) \\ z^3 - 8i = 0 \ (2) \end{cases}$

L'équation (1) donne $z = 3i = \left[3, \frac{\pi}{2}\right]$

L'équation (2) est équivaut $z^3 = -8i = \left[8, -\frac{\pi}{2}\right]$

Ce qui donne $z = \left[2, -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right]$ $avec\ k \in \{0,1,2\}$

Les solutions dans C de l'équation Q(z) = 0 sont :

$z_0 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right), z_1 = 2\cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),$

$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right), z_3 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

CHAPITRE 8 : CALCULS BARYCENTRIQUES

1. Barycentre de n points pondérés

1.1- Définition et propriétés

Définition

$A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des points distincts du plan et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels.

Si $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n \neq 0$ alors il existe un point unique G tel que $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$.

Le point G est appelé le *barycentre* du système $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$ ou encore le barycentre des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ affectés respectivement des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Le réel $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

est appelé masse totale du système $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$.

Soit G le barycentre du système $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$, tel que $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n \neq 0$.

(P_1) : Le barycentre G est indépendant de l'ordre des couples (A_i,α_i)

(P_2) : Pour tout réel k non nul, le point G est aussi barycentre du système $\{(A_1,k\alpha_1),(A_2,k\alpha_2),\dots,(A_n,k\alpha_n)\}$

(P_3) : Lorsque tous les coefficients $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ sont égaux et non nuls, on dit que G est l'isobarycentre des n points $A_1, A_2, \dots, A_n$. C'est aussi le barycentre du système $\{(A_1,1),(A_2,1),\dots,(A_n,1)\}$

L'isobarycentre de deux points distincts A et B est le milieu du segment [A,B].

L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

(P_4) : *Associativité du barycentre.*

Si le système $\{(A_1,\alpha_1),\dots,(A_p,\alpha_p)\}$ admet un barycentre G_1 et que le système $\{(A_{p+1},\alpha_{p+1}),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$ admet un barycentre G_2, avec $1 \leq p \leq n$, alors G est le barycentre du système $\{(G_1\ (\alpha_1+\dots+\alpha_p)),(G_2,(\alpha_{p+1}+\dots+\alpha_n))\}$

Conséquence : en posant $a = \alpha_1+\dots+\alpha_p$ et $b = \alpha_{p+1}+\dots+\alpha_n$, on a $a\overrightarrow{GG_1}+b\overrightarrow{GG_2}=\vec{0}$

Le point G est donc situé sur la droite (G_1G_2) c'est-à-dire les points G_1, G_2 et G sont alignés.

1.2- Détermination du barycentre et Coordonnées dans un repère

Propriété

Soit G le barycentre du système $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$.

Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$.

Dans un repère d'origine O, on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$.

Si $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, ……, $A_n(x_n,y_n)$ et $G(x,y)$ alors on a : $x = \frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$ et $y = \frac{\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_ny_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$

Exercice résolu 1

Dans un plan, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 2 et AC = 4

1) Déterminer et construire le point H, barycentre des points A et C, affectés respectivement des coefficients 3 et -1
2) Même question pour le point G, barycentre des points A, B et C, affectés respectivement des coefficients 3, 2 et -1
3) Prouver que les points B, H et G sont alignés

Solution

1) H est le barycentre des points A et C affectés respectivement des coefficients 3 et -1, donc on a :

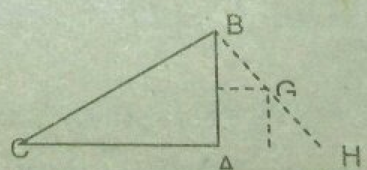
$3\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



2) G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, 2 et -1, donc on a : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$4\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

d'où $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

3) H est le barycentre du système {(A,3) ;(C,-1)} avec 3+(-1) =2 et G celui de {(A,3) ;(C,-1) ;(B,2)}, alors d'après l'associativité du barycentre, G est aussi barycentre du système {(H,2) ;(B,2)} ; ainsi on a : $2\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$$4\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{HB} = \vec{0} \text{ d'où } \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$$

Donc B, H et G sont alignés.

Exercice résolu 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit les points A(-1,3) ;B(1,1) et C(-4,0). Calculer les coordonnées du barycentre G du système de points pondérés {(A,4) ; (B,3) ;(C,5)}

Solution

Soit G(x,y) alors on a : $x = \frac{4x_A+3x_B+5x_C}{4+3+5}$ et $y = \frac{4y_A+3y_B+5y_C}{4+3+5}$

$$x = \frac{-4+3-20}{12} = -\frac{7}{4} \qquad y = \frac{12+3+0}{12} = \frac{5}{4}$$

Donc $G(-\frac{7}{4}, \frac{5}{4})$

2. Fonction vectorielle de Leibniz

Définition

Soit P un plan affine et $\vec{P}$ le plan vectoriel associé. La fonction f de P vers $\vec{P}$ qui à tout point M associe le vecteur $\overrightarrow{f(M)} = \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$ est appelée fonction vectorielle de Leibniz associée au système $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_p, \alpha_p)\}$.

Propriétés

(P_1) : Pour tous points M et N , on a : $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(N)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MN}$

(P_2) : Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors pour tous points M et N , on a : $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(N)}$.

Le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ est donc un vecteur constant c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ est indépendant de M.

(P_3) : Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors le système $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ admet un barycentre G.

On a donc, pour tout point M: $\overrightarrow{f(M)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$

Exercice résolu 3

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. Pour tout point M du plan, on note $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{U_M} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

1) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{V_M}$ est indépendant du point M.
2) On appelle G le barycentre du système de points pondérés {(A,1) ;(B,1) ;(C,2)}.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{U_M}$ en fonction de $\overrightarrow{GM}$

Solution

1) Pour tout point M du plan, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_M} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\\ &= 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Ce résultat montre que le vecteur $\overrightarrow{V_M}$ est indépendant du point M.

2) Pour tout point M du plan, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{U_M} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\\ &= 4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}\end{aligned}$$

or G est le barycentre du système {(A,1) ;(B,1) ; (C,2)} alors

3. Fonction scalaire de Leibnitz

3.1- Définition et propriétés

Définition

La fonction φ de (P) dans $\mathbb{R}$ qui, à tout point M associe le réel :

$$\varphi(M) = \alpha_1\overrightarrow{MA_1}^2 + \alpha_2\overrightarrow{MA_2}^2 + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}^2 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}^2$$

est appelée fonction scalaire de Leibniz associée au système $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_n,\alpha_n)\}$.

Propriétés

(P1) : Pour tous points M et N du plan, on a : $\varphi(M) = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MN}^2 + 2\overrightarrow{MN}.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{NA_i} + \varphi(N)$.

(P_2) : **Si** $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$ **alors** pour tous points M et N, on a : $\varphi(M)$

$$= 2\overrightarrow{MN}.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{NA_i} + \varphi(N)$$

(P_3) : **Si** $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$ **alors le** système $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_n,\alpha_n)\}$ **admet un barycentre G.**

on a, pour tout point M de (P): $\varphi(M) = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G)$

3.2- Détermination des lignes de niveau : Equation φ (M) = k

a) Premier cas : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$

On sait que pour tous points M et N, on a : $\varphi(M) = 2\overrightarrow{MN}.\vec{V} + \varphi(N)$.

Prenons le cas où $\vec{V} \neq \vec{0}$. L'équation φ (M) = k est équivalente à $2\overrightarrow{MN}.\vec{V} + \varphi(N) = k$

On choisit le point A de telle sorte qu'il appartienne à la ligne de niveau k, c'est-à-dire $\varphi(A) = k$.

L'équation $\varphi(M) = k$ est donc équivalente à $2\overrightarrow{MA}.\vec{V} = 0$; ainsi le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est orthogonal au vecteur $\vec{V}$.

Conclusion : la ligne de niveau k est une droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{V}$.

b)Deuxième cas : $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$

Le système $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_p,\alpha_p)\}$ admet un barycentre G.

on sait que pour tout point M : $\varphi(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 + \varphi(G)$

L'équation $\varphi(M) = k$ est équivalente à $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 + \varphi(G) = k$

On en déduit que $MG^2 = \frac{k-\varphi(G)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_1} = a$

Conclusion : Si $a < 0$: la ligne de niveau k est l'ensemble vide.

Si $a = 0$: la ligne de niveau k est le singleton {G}.

Si $a > 0$: la ligne de niveau k est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{a}$.

Exercice résolu 4

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que AB=AC=a où a est réel strictement positif.
On appelle φ et ψ les applications du plan *(P)* dans IR qui, à tout point M du plan, associe respectivement les réels : $\varphi(M) = MA^2 - MB^2 - MC^2$ et $\psi(M) = MA^2 + MB^2 - 2MC^2$.
On note G le barycentre du système {(A, 1) ;(B,-1) ;(C,-1)}.

1) Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de MG
2) Vérifier que $\psi(M) - \psi(A) = 2\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$
3) Déterminer l'ensemble $\sum$ des points M du plan (P) tels que $\varphi(M) = -a^2$
4) Déterminer l'ensemble *(D)* des points M du plan *(P)* tels que $\psi(M) = \psi(A)$.

Solution

1) φ étant une fonction scalaire de Leibniz, on a, d'après la propriété (P_3) pour tout point M,
$\varphi(M) = (1-1-1)\overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G)$ avec $\varphi(G) = \overrightarrow{GA}^2 - \overrightarrow{GB}^2 - \overrightarrow{GC}^2$ et $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ implique $\overrightarrow{GA} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$; d'où : $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
Comme ABC est rectangle en A, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$. D'où $\overrightarrow{AG}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2a^2$.
Par ailleurs, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{GC}^2 = a^2$. De même $\overrightarrow{GB}^2 = a^2$.
Donc $\varphi(G) = GA^2 - GB^2 - GC^2 = 2a^2 - a^2 - a^2 = 0$.
Il en résulte que : $\varphi(M) = -\overrightarrow{MG}^2$, pour tout point M.

2) ψ étant une fonction scalaire de Leibnitz dont la somme des coefficients est nulle, on a :
D'après la propriété (P_2), pour tout point N, $\psi(M) = 2\overrightarrow{MN}.\sum \alpha_i\overrightarrow{NA_i} + \psi(N)$
En particulier pour N=A, on a : $\psi(M) = 2\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) + \psi(A)$
D'où: $\psi(M) - \psi(A) = 2\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$, car $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

3) $(\sum) = \{M \in (P), \varphi(M) = -a^2\}$
$-MG^2 = -a^2$ soit $MG = a$ donc $(\sum)$ est le cercle de centre G et de rayon a.

4) $(D) = \{M \in (P) ; \psi(M) = \psi(A)\}$
$2\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) + \Psi(A) = \Psi(A)$
$2\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) = 0$ donc (D) est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

EXERCICES

Exercice1 à 4

ABC étant un triangle rectangle direct en A tel que AB=2AC. Pour chacune des questions suivantes, déterminer et construire le barycentre G du système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

1) $\alpha=1$; $\beta=-2$; $\gamma=3$ 2) $\alpha=1$; $\beta=-1$; $\gamma=2$

3) $\alpha=-1$; $\beta=-1$; $\gamma=3$ 4) $\alpha=½$; $\beta=-1$; $\gamma=1$

Exercice 5 à 7

A, B et C étant trois points du plan, déterminer les coefficients a et b pour que C soit le barycentre du système {(A,a), (B,b)}.

5) $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ 6) $4\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ 7) $2\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

Exercice 8

Soit LMN un triangle quelconque dans le plan.

1. Construire les points I, J et K tels que : $5\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MN}=\vec{0}; 2\overrightarrow{NJ}+\overrightarrow{LN}=\vec{0}; \overrightarrow{LK}-2\overrightarrow{LM}=\vec{0}$
2. Démontrer que les droites (LI), (MJ) et (NK) sont concourantes.

Exercice 9

ABC est un triangle. B' est le milieu de [AC] et C' est le milieu de [AB] . D est le barycentre {(A,3) ;(B,2)} et I est le barycentre de {(A,2) ;(B,2) ;(A,1) ;(C,1)}.

a) Montrer que le point I est à la fois barycentre de {(B',1) ;(C',2)} et de {(D, 5) ;(C,1)}.

b) En déduire que I est le point d'intersection des droites (B'C') et (CD).

c)La droite (AI) coupe la droite (BC) en E. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EB}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 10

M, E et N sont trois points non alignés du plan. Soit H le barycentre de {(M,3) ;(E,1) ;(N,1)} , Q celui de {(M ,3) ;(N,1)} et R celui de {(M,3) ;(E,1)}.

1. Démontrer que les droites (EQ) et (NR) sont concourantes au point H.
2. Soit P le milieu du segment [EN].
   a) Montrer que les points M, P et H sont alignés.
   b) Exprimer $\overrightarrow{PH}$ en fonction de $\overrightarrow{PM}$.

Exercice 11

ABCD est un rectangle direct du plan tel que AB = 2AD.

a) Déterminer et construire les barycentres respectifs E, F et G des systèmes suivants : {(A,-1),(B,2), (C,1)}, {(B,2),(C,-3)} et {(A,2),(D,1),(F,-1)}.

b) Montrer qu'il existe un vecteur indépendant du point M tel que : $\vec{V}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MD}$

Exercice12

A, B et C sont trois points non alignés du plan et k est un réel quelconque.

a) Démontrer que le barycentre G_k du système {(A, 3) ; (B, k -2) ; (C, -k +1)} existe.

b) Quelle est l'ensemble des points Gk lorsque k décrit $\mathbb{R}$?

Exercice 13

Déterminer trois réels a, b et c tels que le point D soit le barycentre des points A,B et C affectés respectivement des coefficients a ,b et c :

a) ABCD est un carré direct

b) ABCD est un rectangle direct tel que AD = 2 AB

Exercice 14

Soit ABC un triangle isocèle en C tel que : AB=4 et CA= CB = 6.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\|$
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2+MB^2-2MC^2=0$

Exercice 15

Soit EFG un triangle dans le plan.

1. Construire le barycentre I des points pondérés (E,1) ,(F,-1) et (G,1).
2. On note Γ l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{ME}-2\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}\|$

Exercice 16

Soit ABC un triangle. On désigne par I le barycentre du système { (B,2) ;(C,-3)} et par J celui du système { (C,-3) ;(A,1)}.

1. Démontrer que les droites (AI) et (BJ) son parallèles.
2. Soit K le barycentre du système {(A, a) ; (B, b)}. Pour quelles valeurs des nombres réels a et b les droite (AI) et (CJ) sont-elles parallèles ?

Exercice 17

ABC est un triangle rectangle direct isocèle en A tel que AB=AC= a où a est un réel strictement positif

1. Déterminer et construire le barycentre G du système {(A,4) ;(B,-1) ;(C,-1)}
2. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $4MA^2-MB^2-MC^2=2a^2$

Exercice 18

Soit ABCD un carré dans le plan euclidien

1.a) Ecrire A comme barycentre des points B, C et D.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}^2=0$

2.a) Construire le barycentre G des points pondérés (A, 2), (B,-1) et (C, 1) :

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{AB}\|$

Exercice 19

Soit JKL un triangle équilatéral tel que JK = a (a>0)

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
2. $2MJ^2-MK^2-ML^2=a^2$

2. a) Construire le barycentre G du système {(J,-1), (K, 4), (L, 1)}

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $-MJ^2+4MK^2+ML^2=\frac{a^2}{2}$.

Exercice 20

Soit A, B, C trois points non alignés du plan tels que ABC n'est pas équilatéral. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. On pose : BC = a, CA = b et AB = c.

1. On considère le vecteur $\vec{U}=a^2\overrightarrow{BC}+b^2\overrightarrow{CA}+c^2\overrightarrow{AB}$.
   Montrer que : $\vec{U}=(a^2-b^2)\overrightarrow{AC}+(c^2-a^2)\overrightarrow{AB}$
   En déduire que le vecteur $\vec{U}$ est non nul.
2. On définit la fonction f de P vers $\mathbb{R}$ qui à tout point M du plan, associe le réel :
   $f(M)=a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'}+b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB'}+c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC'}$
   a) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Calculer f(O).
   b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que : $BC.GA'=\frac{1}{6}(b^2-c^2)$
   En déduire la valeur de f(G).
   c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que f(M) = 0.

Exercice 21

Soit ABC un triangle isocèle tel que AB= AC= 7 et BC = 4. On désigne par I le milieu de [BC] et par G le centre de gravité de ABC

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\|=12$
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $-2AM^2+BM^2+CM^2=38$
3. a) Calculer AG et BG
   b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $AM^2+BM^2+CM^2=65$

Exercice 22

A et B sont deux points distincts du plan et k un réel strictement positif.

On note (E_k) l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = k$

1. Déterminer E_1.
2. Dans cette question, on suppose que $k \neq 1$.
   a) On note I et J les barycentres respectifs des systèmes {(A,1), (B,k)} et {(A,1),(B,-k)}. Justifier que les points I et J sont bien définis
   b) Démontrer que : « M∈(E_1) si et seulement si $(1\text{-}k^2)\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$ »
   c) En déduire la détermination de l'ensemble (E_k)
3. On prend AB=3. Construire chacun des ensembles E_1, E_2 et $E_{1/2}$.

Exercice 23

Soit KLM un triangle.

1. Construire le barycentre G des points pondérés (K,3), (L,4) et (L,5).
2. Les droites (KG), (LG) et (MG) coupent les droites (LM) ; (MK) et (KL) respectivement en A, B et C.
   Déterminer les réels a, b et c tels que : $\overrightarrow{AL}= a\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}=b\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{CK}=c\overrightarrow{CL}$

Exercice 24

Soit ABCD un parallélogramme.

1. Place le point P sachant que A soit le barycentre du système {(P, 3) ; (B,-1)}
2. Soit Q le symétrique du milieu de [AD] par rapport à A.
   Démontrer que les points P, Q et C sont alignés.

Exercice 25

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives -2i, -1- i et 1+i.

1. Placer les points A, B et C. Donner la nature du triangle ABC. Justifier votre réponse
2. Déterminer l'affixe du point G barycentre du système {(A,2) ;(B,-2) ;(C,1)}
3. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $2MA^2\text{-}2MB^2+MC^2=0$.

Exercice 26

Dans le plan complexe ($\mathcal{P}$) muni du repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives 3i, $3+\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ et $3-\sqrt{3}-i\sqrt{3}$.

1. Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
2. Déterminer les affixes du milieu I du segment [BC], puis les coordonnées de l'isobarycentre G des points A, B et C.
3. Placer les points A, I et G dans le plan complexe, puis indiquer une construction géométrique des points B et C.

Exercice 27

ABCD est un carré dans le plan $\mathcal{P}$

1. Construire le barycentre G des points pondérés (A,2), (B,-1) et (C,1)
2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M de $\mathcal{P}$ tels que : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$
3. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M, associe le point M' tel que :
   $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$
   a) Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
   b) Construire le transformé (Γ ') de (Γ) par f.

Exercice 28

L'unité de longueur est le centimètre.

On donne dans le plan un triangle ABC rectangle en A tel que AB=2AC=8.

1. Construire le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -1 et 2.
2. Déterminer et construire chacun des ensembles suivants :
   a) (E) est ensemble des points M tels que : $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$;

b) (F) est ensemble des points M tels que : $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{CA}$ et de même sens

c) (G) est ensemble des points M tels que : $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|$

3. Soit l'application f qui, à tout point M du plan, associe le point M' défini par l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$
   Montrer que f est une homothétie dont on précisera son centre et son rapport

Exercice 29

Dans le plan complexe P muni du repère orthonormé direct, $(0,\vec{u},\vec{v})$ on donne les points A, B et C d'affixes respectives $a=2-2i\sqrt{3}$, $b= a=2+2i\sqrt{3}$ et $c=8$.

1. Calculer le module et l'argument de a. Placer les points A, B et C
2. a) Calculer le complexe $q=\frac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et son argument.
   b) En déduire la nature du triangle ABC
3. Déterminer le barycentre D des points pondérés $(A, |a|)$; $(B, |b|)$ et $(C, |c|)$. Placer D.
4. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :
   $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$

Exercice 30

ABC est un triangle rectangle direct en A tel que AB =4cm et AC =2cm
Déterminer et construire le point G barycentre du système des points pondérés $\{(A, 2) ;(B,-1) ;(C,1)\}$

Exercice 31

Dans le plan P muni du repère orthonormé direct $(0,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points A(2;0), B(1;-4) et C(7;-12).

a) Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, 3 et -1.

b) Déterminer l'équation de l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$$

Exercice 32

Soit ABC un triangle quelconque, G le barycentre du système $\{(A, 3); (B, 1); (C,1)\}$ et H l'isobarycentre des points B et C.
En utilisant l'associativité du barycentre, prouver que : $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GH} = \vec{0}$
Construire le point G.

Exercice 33

Dans le plan orienté P, on considère le rectangle ABCD tel que $AD = 2AB = 4$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2}$

Soit I le milieu du segment [BC] et (C) le cercle de centre B passant par A.

a) Déterminer le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(C,1),(D,-1)\}$.

b) On considère l'ensemble (E_k) des points M du plan (P) tels que : $\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 - \|\overrightarrow{MD}\|^2 = k$
   Calculer le réel k pour que (E_k) soit le cercle (C).

Exercice 34

On considère un triangle (ABC) rectangle en A avec $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2}$ et AB = 2AC =8.

On note I, J et E les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC].

1. a) Déterminer et construire le barycentre G du système des points pondérés $\{(A,-1),(B,1,(C,1)\}$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$ et calculer la distance AG.
   c) Montrer que le point E est le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC).
   d) Construire le point D tel que (ABDC) soit un rectangle et déterminer 2 isométries affines qui laissent globalement invariant le rectangle (ABDC).
   e) Déterminer et construire l'ensemble (C) des point m vérifiant $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 20$.
   Vérifier que E appartient à (C).
2. a)Montrer que pour tout point M du plan contenant A, B, et C : $-\frac{3}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur fixe $\vec{w}$ que l'on précisera.
   b) Construire le point K tel que $\vec{W} = \overrightarrow{AK}$.

Exercice 35

Dans le plan orienté (P), on considère le rectangle EFGH tel que EH=3EF= 6cm et mes $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}) = \frac{\pi}{2}$

1. Déterminer et construire le barycentre K du système des points pondérés {(E,1) ;(G,1) ;(H,-1)}
2. On considère l'ensemble (Γ_a) des points M du plan *(P) tels que* $ME^2 + MG^2 - MH^2 = a$.
   a) Discuter suivant les valeurs du réel a la nature de l'ensemble (E_a).
   b) En déduire la valeur a_o du réel a pour que (Γ_a) soit le cercle de centre K passant par E.
   c) Tracer l'ensemble $(\Gamma\, a_o)$.

Exercice 36

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que AB=AC=4, où a>0 et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

Soit a un réel non nul, on définit la fonction f_a de (P) dans (P) par : pour tout point $M \in (P)$, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

1. On suppose que $a = -\frac{1}{2}$. Montrer que $f_{-1/2}$ est une translation de vecteur à préciser.
2. Dans toute la suite, on suppose que $a \in \mathbb{R} - \left\{0; -\frac{1}{2}\right\}$
   a) On note G_a le barycentre du système {(A, a) ; (B, a) ; (C,1)}. Vérifier que G_a est invariant par f_a.
   b) Montrer que f_a est une homothétie dont on précisera ses éléments caractéristiques
   c) En déduire la nature et les caractéristiques de f_4.
3. Etudier la fonction f_o

CHAPITRE 9 : APPLICATION AFFINE

1. Définition de l'application affine

<u>Définition</u>

Soit f une application du plan (P) vers lui-même et soit M un point du plan

On note M' le transformé de M par f

Toute application qui conserve le barycentre est appelée application affine c'est-à-dire

Si G = bar $[(A_1 ; a_1) ; (A_2 ; a_2) ; ....;(A_n ; a_n)]$ alors $f(G) = G' =$ bar $[(A'_1 ; a_1) ; (A'_2 ; a_2) ; ....;(A'_n ; a_n)]$ où $A'_i = f(A_i)$

Toute application affine f a pour expression analytique $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = \alpha x + \beta y + \gamma \end{cases}$ relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{i} ; \vec{j})$

Exemple

Soit f l'application définie par f : $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

Montrons que f est une application affine

Soit G = bar $[(A_1 ; a_1) ; (A_2 ; a_2) ; ....;(A_n ; a_n)]$

Les coordonnées de G sont : $x_{G'} = \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i-1}^{n} a_i}$ et $y_{G'} = \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i y_i}{\sum_{i-1}^{n} a_i}$ où $A_i(x_i ; y_i)$

Posons $G' = f(G)$ tel que $G'(x'_G = x_G - 2 ; y'_G = y_G + 1)$

$f(G) = G' =$ bar $[(A'_1 ; a_1) ; (A'_2 ; a_2) ; ....;(A'_n ; a_n)]$ si et seulement si $x_{G'} = \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i x'_i}{\sum_{i-1}^{n} a_i}$ et $y_{G'} = \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i y'_i}{\sum_{i-1}^{n} a_i}$

Or $A'_i = f(A_i)$ c'est-à-dire que $\begin{cases} x'_i = x_i - 2 \\ y'_i = y_i + 1 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} x_{G'} = \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i x'_i}{\sum_{i-1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i (x_i - 2)}{\sum_{i-1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i-1}^{n} a_i} - 2 = x_G - 2 \\ y_{G'} = \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i y'_i}{\sum_{i-1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i (y_i + 1)}{\sum_{i-1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i y_i}{\sum_{i-1}^{n} a_i} + 1 = y_G + 1 \end{cases}$

Donc l'application f conserve le barycentre

Conclusion

f est une application affine

2. Application linéaire associée

<u>Définition</u>

Toute application affine f qui transforme respectivement les points M et N en M' et N' est associée à une application linéaire g telle que $\begin{cases} M' = f(M) \\ N' = f(N) \end{cases}$ *si et seulement si* $\overrightarrow{M'N'} = g(\overrightarrow{MN})$ *avec* $g(\vec{O}) = \vec{O}$

g est dite linéaire si elle vérifie :

pour tout vecteur $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *et pour tout réel non nul k* $\begin{cases} g(\vec{u} + \vec{v}) = g(\vec{u}) + g(\vec{v}) \\ g(k.\vec{v}) = k.g(\vec{u}) \end{cases}$

Exemple

Soit f l'application affine définie par f : $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

L'application linéaire g associée à f est définie par $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ c'est l'application identité

Propriétés

Toute application affine conserve :

- L'alignement
- Le milieu
- L'appartenance
- Le parallélisme

Démonstration

- Alignement

Soient A ; B et C trois points alignés et soit f une application affine telle que A' = f(A) ; B'=f(B) et C' =f(C)

Soit g l'application linéaire associée à f

A ; B et C sont alignés si et seulement si il existe un réel non nul k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$; g est linéaire ; donc

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ entraine que $g(\overrightarrow{AB}) = g(k\overrightarrow{BC})$

$$\left(\overrightarrow{A'B'}\right) = kg(\overrightarrow{BC})$$

$$= k\,\overrightarrow{B'C'}$$

donc, A' ; B' et C' sont alignés

- Milieu

Soit I le milieu du segment [AB]

donc I = bar [(A ;1) ;(B ;1)]

Or f est une application affine donc f(I) = bar [(f(A) ;1) ;(f(B) ;1)]

I '= bar [(A' ;1) ;(B' ;1)]

- On appliquera la même méthode pour démontrer l'appartenance et le parallélisme

3. Détermination d'une application affine

Une application affine f est entièrement déterminée par la donnée des images de trois points non alignés

Exemple

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminons analytiquement l'application affine f qui aux points A(1 ; 2) ; B(2 ; -1) et C(0 ; 3) associe les points A'(5 ; 3) ; B'(7 ; -3) et C'(3 ; 5)

$$f(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = a\,1 + b\,2 + c \\ 3 = \alpha\,1 + \beta\,2 + \delta \end{cases} \qquad (S_1)$$

$$f(B) = B' \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = a\,2 - b + c \\ -3 = \alpha\,2 - \beta + \delta \end{cases} \qquad (S_2)$$

$$f(C) = C' \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 0 + b\,3 + c \\ 5 = 0 + \beta\,3 + \delta \end{cases} \qquad (S_3)$$

D'où les deux systèmes : $(S'_1) : \begin{cases} a + 2b + c = 5 \\ 2a - b + c = 7 \\ 3b + c = 3 \end{cases}$ et $(S'_1) : \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 3 \\ 2\alpha - \beta + \delta = -3 \\ 3\beta + \delta = 5 \end{cases}$

En résolvant ces deux systèmes on a :

a = 2 ; b = 0 ; c = 3 ; α = 0 ; β = 2 et δ = -1

D'où les expressions analytiques de f : $\begin{cases} x' = 2x + 3 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$

4. Point invariant par f

Définition

Soit f une application affine

Le point M est dit invariant par f si f(M) = M

Exemples

Déterminons les points invariants par f dans chacun des cas suivants

1) f : $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x - 2 \\ y = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2 \\ 0 = +1 \end{cases}$ *impossible*

Donc ; f n'a aucun point invariant

2) f : $\begin{cases} x' = 2x + 3 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 3 \\ y = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = +1 \end{cases}$

Le seul point invariant de f est le point $\Omega(-3 ; 1)$

3) f : $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases}$

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3x - 4y + 2 \\ 5y = -4x - 3y + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y - 2 = 0 \\ 4x + 8y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation $x + 2y - 1 = 0$

5. Etude de quelques applications affines

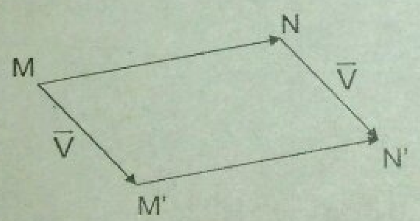
5.1- Translation

Définition géométrique

La translation de vecteur $\vec{V}$, notée $t_{\vec{V}}$, est la transformation qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$

Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par la translation on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ (1)

Remarque : De (1) on déduit que : (MNN'M') est un parallélogramme



Forme complexe

Soit la translation $t_{\vec{V}}$ de vecteur $\vec{V}$ d'affixe b, alors $t_{\vec{V}}$ a pour forme complexe $z' = z + b$.

Réciproquement toute transformation ayant une forme complexe de la forme $z' = z + b$ est une translation de vecteur d'affixe b.

Propriétés

Si $\vec{V} \neq 0$ alors $t_{\vec{V}}$ n'a aucun point invariant.

$t_{\vec{O}} = Id$

$t_{\vec{V}} \circ t_{\vec{U}} = t_{\vec{V}+\vec{U}}$ et $(t_{\vec{V}})^{-1} = t_{-\vec{V}}$

Expressions analytiques

Soit $t_{\vec{V}}$ la translation de vecteur $\vec{V}$ de coordonnées (a , b), M (x ; y) et M'(x' , y')

$M' = t_{\vec{V}}$ (M) équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$

Soit $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

D'où les expressions analytiques de $t_{\vec{V}}$ $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

5.2- Homothétie

<u>Définition géométrique</u>

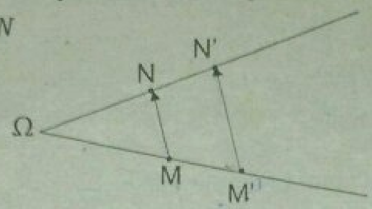
Soit Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie de centre Ω et de rapport k, notée $H_{(\Omega,k)}$ est la transformation qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.

Remarque

Les points Ω, M et M' sont alors alignés.

Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par l'homothétie $H_{(\Omega,k)}$, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$

On en déduit que $M'N' = |k|MN$



Expression complexe

Soit $H_{(\Omega,k)}$ l'homothétie de centre Ω d'affixe z_Ω et de rapport $k \neq 1$.

$H_{(\Omega,k)}$ a pour forme complexe $z' = az + b$ avec $a = k$ et $b = (1-a)z_\Omega$

Réciproquement toute transformation ayant une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, est une homothétie de rapport k = a et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$.

Expressions analytiques

Soit $h = H_{(\Omega,k)}$ l'homothétie de centre Ω(a , b) et de rapport k ; M(x,y) et M'(x',y')

M'=h(M) équivaut à $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

Soit $\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$

D'où les expressions analytiques de h $\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$

<u>Propriétés</u>

(P_1) : Si $k \neq 1$ alors Ω est le seul point invariant par $H_{(\Omega,k)}$.

(P_2) : $H_{(\Omega,1)} = Id$

(P_3) : $H_{(\Omega,-1)} = S_{(\Omega)}$ (Symétrie centrale)

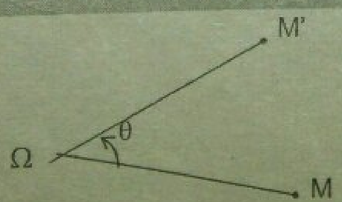
(P_4) : $(H_{(\Omega,-1)})^{-1} = H_{(\Omega,\frac{1}{k})}$

(P_5) : $H_{(\Omega_1,k)} \circ H_{(\Omega_2,k)} = H_{(\Omega,kk')}$

5.3- Rotation

<u>Définition géométrique</u>

Soient Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$ .La rotation de centre Ω et d'angle θ , notée $R_{(\Omega,\theta)}$, est la transformation qui,à tout point M, associe le point M' tel que : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes\,(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$



Expression complexe

Soit $R_{(\Omega,\theta)}$ la rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle θ.

$R_{(\Omega,\theta)}$ a pour forme complexe $z' = az + b$ avec $a = e^{i\theta}$ et $b = (1-a)z_\Omega$

Réciproquement toute transformation du plan ayant une expression complexe de la forme

$z' = az + b$ avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$, est une rotation de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = \arg(a)$

Expressions analytiques

Soit r = R (Ω , θ) la rotation de centre Ω(a , b) et d'angle θ, M(x,y) et M'(x',y')

$$M' = r(M) \text{ équivaut à } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

Soit $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et $arg \frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega} = \theta$

Donc $\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega} = e^{i}\theta$

$$z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$$

$$z' - z_\Omega = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta}) z_\Omega$$

on trouvera après développement $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + (1-\cos\theta)a + b\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + (1-\cos\theta)b - a\sin\theta \end{cases}$

<u>Propriétés</u>

(P_1) : Si θ ≠ 0 [modulo 2 π] alors Ω est le seul point invariant par $R_{(\Omega,\theta)}$

(P_2) : $R_{(\Omega,0)} = Id$

(P_3) : $R_{(\Omega,\pi)} = S_\Omega$ (Symétrie centrale)

(P_4) : $(R_{(\Omega,\theta)})^{-1} = R_{(\Omega,-\theta)}$

(P_5) : Composée de deux rotations de centres distinctes Ω_1 et Ω_2

- Si θ + θ' ≠ 0 [modulo 2 π] alors $R_{(\Omega_1,\theta_1)} o R_{(\Omega_2,\theta_2)} = R_{(\Omega,\theta_1+\theta_2)}$.
- Si θ + θ' = 0 [modulo 2 π] alors $R_{(\Omega_1,\theta_1)} o R_{(\Omega_2,\theta_2)}$ alors est une translation.

Remarque :

- Si θ + θ' = π [modulo 2 π] alors $R_{(\Omega_1,\theta_1)} o R_{(\Omega_2,\theta_2)} = R_{(\Omega,\pi)} = S_\Omega$ est une symétrie centrale.

5.4- Réflexion

<u>Définition géométrique</u>

Soit (D) une droite du plan . La symétrie orthogonale par rapport à la droite (D) ou la réflexion d'axe (D) est la transformation, notée S_D qui, à tout point M, associe le point M' tel que :

- M' = M , si M ∈ (D)
- (D) est la médiatrice de [MM'] , si M ∉ (D) *ainsi* $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à (D) et le milieu I de [MM'] appartient à (D)

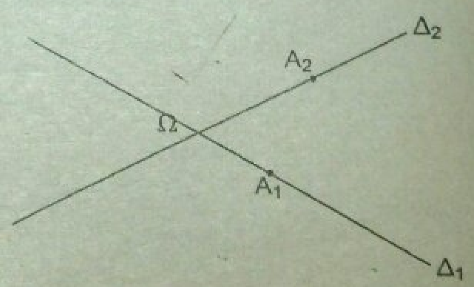
<u>Propriétés</u>

(P_1) : $S_D \circ S_D = Id$

(P_2) : $(S_D)^{-1} = S_D$

(P_3) : La droite (D) est invariante par S_D

(P_4) : Composée de deux reflexions

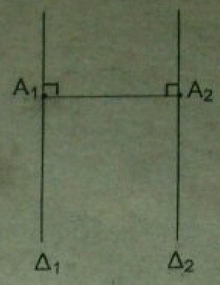


- Composée de deux réflexions d'axes sécants

  Δ_1 et Δ_2 sont deux droites sécantes en Ω.

  $S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1} = R_{(\Omega,\theta)}$ où $\theta = 2(\overrightarrow{\Omega A_1}, \overrightarrow{\Omega A_2})$, A_1 un point quelconque de Δ_1 et A_2 un point quelconque de Δ_2, distincts de Ω.

- Composée de deux réflexions d'axes parallèles
  Δ_1 et Δ_2 sont deux droites parallèles.
  $S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1}$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{A_1, A_2}$.
  où A_1 un point quelconque de Δ_1 et A_2 le projeté orthogonal de A_1 sur Δ_2 .



Expression analytique

Soit S_D la symétrie axiale d'axe (D) : $ax + by + c = 0$

$$M' = S_D(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp (D) \\ M * M' \in (D) \end{cases}$$

Exemple

Soit (D) la droite d'équation $x - y + 1 = 0$

Soient $M(x, y)$ et $M'(x' ; y')$ deux points du plan tels que $M' = S_D(M)$

$$\overrightarrow{MM'} \perp (D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x' - x + y' - y = 0 \ (1)$$

$$M * M' \in (D) \Leftrightarrow \frac{(x + x')}{2} - \frac{(y + y')}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x' + x - y' - y + 2 = 0 \ (2)$$

De (1) et (2) on a : $\begin{cases} x' + y' = x + y \\ x' - y' = -x + y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = +2y - 2 \\ 2y' = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$

CHAPITRE 10 : ISOMETRIE PLANE

1. Généralités

Définition
On appelle isométrie du plan toute transformation plane f qui conserve la distance.
c'est – à – dire : pour tout point M, N, M', N' tels que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$ on a $M'N' = MN$.

Exemples : L'identité : id(M)=M et id(N)=N, on a MN=MN,
les translations : $t_{\vec{v}(M)} = M'$ et $t_{\vec{v}(N)} = N'$, donc $M'N' = \|\vec{V}\| = MN$
les rotations : $R_{(\Omega,\theta)}(M) = M'$ et $R_{(\Omega,\theta)}(N) = N'$, donc $M'N' = MN$,
les réflexions et leurs composées sont toutes des isométries

Contre exemple : Une homothétie de rapport k tel que $|k| \neq 1$ n'est pas une isométrie.

Propriétés
-Toute isométrie plane f est bijective , sa réciproque f^{-1} est aussi une isométrie plane .
- La composée de deux isométries est une isométrie.
-Toute isométrie conserve l'alignement, le milieu ; l'appartenance ; le parallélisme, l'orthogonalité, la mesure des angles géométriques et la forme géométrique.
-Toute isométrie f transforme un cercle C (Ω, r) en un cercle $C'(f(\Omega), r)$.

Classification des isométries
Les isométries sont classées en *isométries planes positives* ou *déplacements* et *isométries planes négatives* ou *antidéplacements*.

2. Les déplacements

Définition
On appelle *déplacement* toute isométrie qui conserve *les angles orientés.*
Les déplacements sont : l'identité, les translations, les rotations et les symétries centrales

Expression analytique
Une transformation f du plan est un déplacement si et seulement si f a une expression analytique de la forme $\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + x_0 \\ y' = \beta x + \alpha y + y_o \end{cases}$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Exemple
Soit f la transformation du plan qui à tout point M(x ;y) associe le point M'(x' ;y') tel que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 \end{cases} \quad avec \ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Classification d'un déplacement selon l'ensemble des points invariants
Soit (Σ) l'ensemble de points invariants par f
- Si $(\Sigma) = (P)$ alors f est une identité
- Si $(\Sigma) = \emptyset$ alors f est une translation de vecteur non nul

Exemple
Soit f l'application affine définie par f : $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$
Soit (Σ) l'ensemble des points invariants par f, M est invariant si et seulement si $\begin{cases} x = x - 2 \\ y = y + 1 \end{cases}$ d'où 0= -2 et 0 = 1 qui est impossible

Donc ; $(\Sigma) = \emptyset$ ce qui signifie que f est une translation

Si $(\Sigma) = \{\Omega\}$ alors f est une rotation ou symétrie centrale de centre Ω

Exemple

Soit f la transformation du plan qui à tout point M(x ;y) associe le point M'(x' ;y') tel que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 \end{cases}$$

M est invariant si

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y - 2 = 0 \\ \sqrt{3}x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2 - 4\sqrt{3} \\ 4y = 2\sqrt{3} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases}$$

Donc $(\Sigma) = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ y - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix}$ f est une rotation

Expression complexe

Soient M et M' les points d'affixes respectives z et z' tels que M' est l'image de M par f

L'expression complexe d'une isométrie positive ou un déplacement est de la forme z' = az + b

Composition de deux déplacements

Si f et g sont deux déplacements, alors gof et fog sont des déplacements.

Détermination du centre Ω de la composée de deux rotations ou de la composée d'une rotation et d'une translation

Méthode 1

On détermine l'image A' d'un point A, alors Ω est le point de la médiatrice de [AA'] tel que $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) = \theta$

Méthode 2

On détermine les images A' et B' de deux points A et B, alors Ω est l'intersection des médiatrices de [AA'] et [BB'] lorsque ces médiatrices ne sont pas parallèles ;

Ω est l'intersection de (AB) et de (A'B'), si ces médiatrices sont parallèles.

3. Les antideplacements

Définition

On appelle antidéplacement toute isométrie qui change les angles orientés en leur opposé.

Une transformation plane f est un antidéplacement si et seulement si f a une expression analytique de la forme $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + x_0 \\ y' = \beta x - \alpha y + y_0 \end{cases}$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Exemple

Description des antidéplacements

Tout antidéplacement f a comme ensemble de points invariants soit une droite (D), soit l'ensemble vide.

Si l'ensemble des points invariants par f est une droite (D), alors f est la réflexion d'axe (D).

Si f n'admet pas de points invariants, alors il existe une droite (D) et un vecteur $\vec{U}$. directeur de (D) tel que $f = t o s = s o t$ où t la translation de vecteur $\vec{U}$. et s la réflexion d'axe (D).

On dit que f est la symétrie glissée de vecteur $\vec{U}$. et d'axe la droite (D) .

Remarque

Pour obtenir $\vec{U}$: on a $f o f = t_{2\vec{U}}$.

Soit O' = f(O). (D) est la droite passant par I milieu de [O,O'] et de vecteur directeur $\vec{U}$.

Corollaires :

Soient f un antidéplacement et A et B deux points distincts.

Si $f(A) = A$ et $f(B) = B$ alors f est la réflexion d'axe (AB).
Soient f un antidéplacement différent de l'identité et A un point du plan.
Si $f(A) = A$ alors f est une réflexion. Pour déterminer son axe, on détermine $O' = f(O)$ puis I milieu de [O,O']. f est donc la réflexion d'axe (IA).

Expression complexe
f est un antidéplacement si et seulement si f a une expression complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où a un complexe tel que $|a| = 1$

Exemple
Ecrivons l'expression complexe de la réflexion s d'axe (D) ; $x - y + 2 = 0$
Choisissons deux points quelconques de la droite (D)
Si $x = 0$ alors $y = 2$ d'où le point A (0 ; 2)
Si $x = -2$ alors $y = 0$ d'où le point B (-2 ; 0)
Ces deux points sont invariants car ils se trouvent sur la droite (D)
$f(A) = A \Leftrightarrow z_A = a\bar{z}_A + b$
$f(B) = B \Leftrightarrow z_B = a\bar{z}_B + b$
Donc, on a : $a = \frac{Z_A - Z_B}{\bar{Z}_A - \bar{Z}_B} = \frac{2i+2}{-2i+2} = i$ et $b = Z_A - a\bar{Z}_A = 2i - i(-2i) = -2 + 2i$
Conclusion : $z' = i\bar{z} - 2 + 2i$

Nature et éléments caractéristiques selon l'expression complexe
Soit f la transformation définie par son expression complexe $z' = a\bar{z} + b$
- Si $a\bar{b} + b = 0$: l'ensemble des points invariants par f est une droite (D), on a alors $f = S_D$.
- Si $a\bar{b} + b \neq 0$: f n'admet pas de points invariants, on a alors $f = S_D \circ t_{\vec{u}}$ (symétries glissées).

$\vec{U}$ et (D) s'obtiennent de la même façon que dans la remarque précédente ou $\vec{u}\left(\frac{a\bar{b}+b}{2}\right)$ et que la droite (D) est définie par (D)= $\left\{M(z)/\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \text{ où } M' = f(M)\right\}$

Exemple
Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f
- $f : z' = i\bar{z} - 2 + 2i$
  $|a| = 1$ et $a\bar{b} + b = i(-2 - 2i) - 2 + 2i = 0$

Donc, f est une symétrie axiale d'axe (D)
(D) = {M(z) / f(M) = M}
$f(M) = M \Leftrightarrow z = i\bar{z} - 2 + 2i$
$\Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) - 2 + 2i$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$
L'axe de la réflexion s est la droite (D) : $x - y + 2 = 0$
- $f : z' = -i\bar{z} + 2i$
  $|a| = 1$ et $a\bar{b} + b = -i(-2i) + 2i = -2 + 2i \neq 0$

f est une symétrie glissée de vecteur
$\vec{u}(-1 + i)$ et d'axe (D)= $\left\{M(z)/\overrightarrow{MM'} = \vec{u}\right\}$
$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ *équivaut* à $z' - z = -1 + i$
équivaut à $z' = z - 1 + i$
Or équivaut à $z' = -i\bar{z} + 2i$
En identifiant on a $-i\bar{z} + 2i = z - 1 + i$
D'où $-i(x - iy) + 2i = x + iy - 1 + i$

En utilisant l'égalité des deux nombres complexes on a

$$\begin{cases} -y = x-1 \\ -x+2 = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

f est la symétrie glissée de vecteur $\vec{u}(-1+i)$ et d'axe (D) : $x+y-1=0$

Composition de deux antidéplacements

Si f et g sont deux antidéplacements, alors gof et fog sont des déplacements.

Décomposition d'une rotation, d'une translation en produit de deux réflexions

a) Décomposition d'une rotation de centre Ω en produit de deux réflexions d'axes sécants en Ω

Soit r une rotation de centre Ω et d'angle θ, et Δ une droite passant par Ω, alors on a :

$r = S_{\Delta_1} o S_{\Delta}$, où Δ_1 est l'image de Δ par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\theta}{2}$

ou $r = S_{\Delta} o S_{\Delta_2}$, où Δ_2 est l'image de Δ par la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\theta}{2}$

b) Décomposition d'une translation en produit de deux réflexions d'axes parallèles

Soit t une translation de vecteur $\vec{U}$, et Δ une droite orthogonale à $\vec{U}$, alors on a :

$t = S_{\Delta_1} o S_{\Delta}$, où Δ_1 est l'image de Δ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{U}$.

ou $t = S_{\Delta} o S_{\Delta_2}$, où Δ_2 est l'image de Δ par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{U}$

c) Applications

- *Détermination du centre de la composée de deux rotations de centres distincts*

Soient donnés $r_1 = R_{(\Omega_1,\theta_1)}$ et $r_2 = R_{(\Omega_2,\theta_2)}$ avec $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ [modulo 2π].

On sait que $r_1 o r_2$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$. Il s'agit de déterminer le centre de $r_1 o r_2$.

On décompose chacune des deux rotations en produit de deux réflexions en utilisant chaque fois la réflexion d'axe $(\Delta) = (\Omega_1\Omega_2)$.

- Décomposer r_1 sous la forme $r_1 = S_{\Delta_1} o S_{\Delta}$ où Δ_1 est l'image de Δ par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\theta_1}{2}$.
- Décomposer r_2 sous la forme $r_2 = S_{\Delta} o S_{\Delta_2}$ où Δ_2 est l'image de Δ par la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\theta_2}{2}$.

  On a donc $r_1 o r_2 = S_{\Delta_1} o S_{\Delta} o S_{\Delta} o S_{\Delta_2} = S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2}$.

Le centre de $r_1 o r_2$ est alors l'intersection des deux droites (Δ_1) et (Δ_2).

- *Détermination du centre de la composée d'une rotation r de centre Ω et d'angle $\theta \neq 0$ et d'une translation t de vecteur $\vec{U}$*. On sait que tor et rot sont des rotations d'angle θ chacune.

  Il s'agit de déterminer le centre de tor ou de rot

  On décompose r et t en produit de réflexions convenablement choisies. Pour le faire : on introduit chaque fois la droite (Δ) passant par Ω et qui est orthogonale à $\vec{U}$.

- *Cas de la composée tor*

Décomposer t sous la forme $t = S_{\Delta_1} o S_{\Delta}$ où Δ_1 est l'image de Δ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{U}$, puis décomposer r sous la forme $r = S_{\Delta} o S_{\Delta_2}$ où Δ_2 est l'image de Δ par la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\theta}{2}$. On a donc $t\, o\, r = S_{\Delta_1} o S_{\Delta} o S_{\Delta} o S_{\Delta_2} = S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2}$.

Le centre de tor est alors l'intersection des deux droites (Δ_1) et (Δ_2).

- *Cas de la composée rot*

Décomposer t sous la forme $t = S_{\Delta}\ o\ S_{\Delta_1}$ où Δ est l'image de Δ_1 par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{U}$; puis

décomposer r sous la forme $r = S_{\Delta_2}\ o\ S_{\Delta}$ où Δ_2 est l'image de Δ par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\theta}{2}$.

On a donc $r\ o\ t = S_{\Delta_2}\ o\ S_{\Delta}\ o\ S_{\Delta}\ o\ S_{\Delta_1} = S_{\Delta_2} o\ S_{\Delta_1}$.

Le centre de rot est alors l'intersection des deux droites (Δ_1) et (Δ_2).

Composition d'un antidéplacement et d'un déplacement

Si f est un antidéplacement et g un déplacement alors gof et fog sont des antidéplacements.

Exemple :

Soit f : $z' = -i\bar{z} + 1$ et g ; $z' = z + 1 + i$

Alors fog ; $z' = -i\,\overline{(z+1+i)} + 1$ et gof ; $z' = -i\bar{z} + 1 + 1 + i$

$= -i\bar{z} - i(1 - i) + 1$ $= -i\bar{z} + 2 + i$

$= -i\bar{z} - i - 1 + 1$

$= -i\bar{z} - i$

EXERCICES

Exercice 1

Soit ABCD un rectangle direct. On considère les réflexions s_1 , s_2 , s_3 et s_4 d'axes respectifs (AB), (DC), (BC) et (AD). Déterminer la nature des applications : $s_1 \circ s_2$, $s_3 \circ s_4$, $s_1 \circ s_3$, et $s_3 \circ s_1$.

Exercice 2

Soit ABC un triangle équilatéral direct.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de :

a) $s_{(BC)} \circ s_{(BA)}$ b) $s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$ c) $s_{(CB)} \circ s_{(CA)}$

Exercice 3

Soit ABCD un carré direct et r la rotation de centre A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer la droite Δ telle que $r = s_{\Delta} \circ s_{(AC)}$.
2. Déterminer la droite Δ' telle que $r = s_{(AC)} \circ s_{\Delta'}$.

Exercice 4

Soit ABCD un carré direct de centre O. Déterminer les droites Δ_1 et Δ_2 telles que :

a) $t_{\overrightarrow{AB}} = s_{(BC)} \circ s_{\Delta_1}$ b) $t_{\overrightarrow{AB}} = s_{\Delta_2} \circ s_{(AD)}$

Exercice 5

Soit ABC un triangle équilatéral direct et r la rotation de centre A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Déterminer la droite Δ telle que $r = s_{(AC)} \circ s_{\Delta}$.
2. On note I le milieu de [BC], déterminer la droite Δ' telle que $r = s_{(AI)} \circ s_{\Delta'}$

Exercice 6

ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

Dans chacun des cas suivants, décomposer la rotation r en deux réflexions s_1 et s_2, $r = s_1 \circ s_2$.

1. r est la rotation de centre A et d'angle plat, s_2 est la réflexion d'axe (AB).
2. r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, s_1 est la réflexion d'axe (AB).
3. r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, s_2 est la réflexion d'axe (AB).

Exercice 7

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC de sens direct. A', B' et C' sont les milieux respectifs de [BC] , [CA] et [AB]. Soit P et Q les points tels que : PA = PC et $(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}) = \frac{\pi}{2}$, QA = QB et $(\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QB}) = -\frac{\pi}{2}$.

1. r_P est la rotation de centre P et d'angle, $\frac{\pi}{2}$, r_Q est la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $s_{A'}$ est la symétrie de centre A'.
   a) Etudier l'image de A par la transformation $f = r_Q \circ s_{A'} \circ r_P$.
   b) Que peut-on dire de f?

2. Quelle est la nature du triangle A'PQ ?

Indication : Introduire P', symétrique de P par rapport à A'.

Exercice 8

Dans le plan orienté, on donne trois points A, B, C, non alignés, se succédant dans le sens direct sur le cercle circonscrit au triangle qu'ils déterminent (on dit que le triangle ABC est « direct »).

On appelle O et O' les points tels que :

Le triangle BAO est isocèle, rectangle en O et direct ;

Le triangle ACO' est isocèle, rectangle en O' et direct.

1. Faites la figure, en justifiant la construction de O et O'.
2. Soit r la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$, et r' la rotation de centre O', d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image de B par $r' \circ r$, puis la nature et les éléments caractéristiques de $r' \circ r$.

Exercice 9

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $AB = AC$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB]. On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On pose $f = r o t$ et $g = t o r$.

1. a) Trouver l'image de K par f et celle de J par g.
   b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.
2. a) Préciser la nature de la transformation $g o f^{-1}$.
   b) Quelle est l'image de A par $g o f^{-1}$? Caractériser alors cette transformation.
3. M est un point quelconque du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g.
   Construire le quadrilatère ACM_2M_1.

Exercice 10

Soit A et B deux points du plan et m un réel non nul et différent de -3. On définit la transformations f_m de la manière suivante : à tout point M ,on associe le point M tel que A soit le barycentre du système $\{(B,1) ;(M, 2) ; (M', m)\}$.

1. On prend $m= -2$; montrer f_{-2} est une translation de vecteur à préciser
2. Pour $m\neq-2$, montrer que f_m admet un point unique invariant G_m .
   Préciser alors la nature et les caractéristiques de f_m .
3. On pose $A_m = f_m (A)$. Quel est l'ensemble décrit par les points A_m lorsque m décrit IR- {0,-3}.

Exercice 11

Le triangle ABC est équilatéral de sens direct.

On désigne par s_1 , s_2 , s_3 les réflexions dont les axes sont les médiatrices Δ_1 du côté BC, Δ_2 du côté AC, Δ_3 du côté AB et par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1. Préciser les images des sommets du triangle par r, s_1 , s_2 et s_3 .
2. Montrer que les transformations suivantes sont des réflexions et préciser leur axe :
   $r o s_1$, $r o s_2$, $r o s_3$, $s_1 o r$, $s_2 o r$, $s_3 o r$.

Exercice 12

Soit ABCD un rectangle direct.

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f dans chacun des cas suivants :

a) $f = t_{\overrightarrow{AC}} o\ s_{(AB)}$
b) $f = t_{\overrightarrow{AC}} o\ s_{(BC)}$
c) $f = s_{(AD)} o\ t_{\overrightarrow{BD}}$

Exercice 13

Le plan étant orienté, on donne A et B deux points distincts, r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et r' la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

En écrivant r et r' comme compôsées de réflexions, déterminer r o r'.

Exercice14

Soit ABC un triangle rectangle isocèle direct en A, r la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$ et s la réflexion d'axe (AB). On pose : $f = r o s$ et $g = s o r$.

1. Déterminer f(B) et g(B)
2. Déterminer la nature de f et celle de g.

Exercice15

Dans un plan orienté, on trace un triangle non isocèle ABC tel que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Soit les points M et N tels que : M est sur le segment [AB], N est sur le segment [AC] et $MB = NC$ avec $M \neq B$.

Justifier l'existence d'une unique rotation r telle que $r(M) = N$ et $r(B) = C$. Préciser son angle et son centre.

Exercice 16

Déterminer l'expression complexe de la symétrie orthogonale s_Δ sachant que :

1. (Δ) passe par les points A et B d'affixes respectives $1+2i$ et $3-i$
2. (Δ) a pour équation $2x+3y-1=0$

Exercice 17

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit f la transformation plane d'écriture complexe : $z' = -i\,\overline{z} + 1 - i$

1. Déterminer les points fixes de f.
2. En déduire la nature et le caractéristique de f.

Exercice 18

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit f la transformation plane d'écriture complexe $z' = -i\,\overline{z} - 2 + i$

1. Démontrer que f n'admet aucun point invariant
2. Soit t la translation de vecteur $\vec{U} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$ sachant que $O' = f(O)$. Montrer qu'il existe une symétrie axiale dont on précisera telle que $f = sot = tos$. En déduire la nature et les caractéristiques de f.

Exercice 19

OIJ est un triangle équilatéral direct tel que le segment [IJ] est supporté par une droite horizontale.

1. Construire à l'extérieur de OIJ le parallélogramme OJKL et le triangle équilatéral direct OLP.
2. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{JO}$.
   a) Préciser la nature de la transformation g définie par g= rot
   b) Déterminer les images par g des points I et K
   c) En déduire les éléments géométriques de g, ainsi que la nature du triangle IKP.
3. En utilisant la décomposition respective de r et t en des symétries orthogonales , retrouver la nature et les éléments géométriques de la transformation g

Exercice 20

ABC est un triangle de centre de gravité G. Soit r la rotation de centre G et d'angle θ quelconque.

On note A' ;B' et C' les images respectives de A, B et C.

Faire une figure en supposant $\theta > 0$.

-Montrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

Exercice 21

Dans le plan orienté, ABC est un triangle rectangle isocèle direct en A. Soit I le milieu du segment [BC].

On note r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

On se propose d'étudier la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $f = r_C o\, t\, o\, r_B$

1ère méthode :

a)En utilisant les propriétés des transformations, déterminer la nature de f

b) Préciser l'image du point B par f

c) Caractériser alors la transformation f

2ème méthode :

On rapporte le plan au repère orthonormal direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Déterminer l'écriture complexe des transformations r_B, r_C et t ;en déduire celle de f

Caractériser alors f

3ème méthode :

Décomposer respectivement r_B, r_C et t en produit de deux symétries orthogonales puis donner la nature et les caractéristiques de la transformation f.

Exercice 22

EFG est un triangle quelconque. On construit respectivement sur les côtés [FG], [GE] et [EF] les triangles équilatéraux directs FE'G, GF'E et EG'F. On désigne par J, K, L les centres de gravité respectifs de ces triangles.

1. a) Représenter les données du problème sur une figure

   b) Conjecturer alors la nature du triangle JKL.

On va démontrer cette conjecture de deux méthodes différentes.

2. *1ère méthode : Point de vue géométrique*

On désigne par r_J, r_K, r_L les rotations de centres respectifs J, K, L et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$. On considère la composée $r_L o\, r_K o\, r_J$.

   a) Montrer que $r_L o\, r_K o\, r_J$ est égale à l'application identique du plan.

   b) Soit $H = r_K(J)$. Montrer que $r_L(H) = J$

   c) En déduire que K et L appartiennent à la médiatrice du segment [HJ] et que (KL) est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{KJ}, \overrightarrow{KH})$

   d) Conclure alors que JKL est équilatéral

3. *2ème méthode : Point de vue complexe*

Soit e, f, g, e', f',g', j, k, l les affixes respectives des points E, F, G, E', F', G', J, K, L.

   a) Calculer e', f', g' puis j, k, l en fonction de e ,f et g

   b) Montrer que $|j-k| = |k-l| = |l-j|$ et retrouver la nature du triangle JKL

Exercice 23 *(extrait du bac série C à Madagascar 2001)*

Dans le plan orienté (P), on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que AB = AC et mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Dans cette question, le plan (P) est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   a) Déterminer les affixes respectives z_A, z_B, z_C des points A, B, C.
   b) Soit T la transformation ponctuelle du plan (P) vers (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M ' d'affixe z ' telle que $z' = -z + 2i$.
   Caractériser géométriquement T.
   c) Donner l'expression complexe de la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   d) On pose f = ToR. Donner l'expression complexe de f.
   En déduire la nature et les éléments géométriques de f.
   e) On note I le centre de f, donner la nature du quadrilatère ABIC. Justifier votre réponse.

   Dans toute la suite, on utilisera une méthode géométrique. On pose AB = AC = a où $a \in IR_+^*$.

2. Soit S la similitude plane directe de centre I qui transforme A en B. On note C' = S(C) ;
   O ' = S(O) où O est le milieu du segment [BC].
   a) Donner le rapport et l'angle de S.
   b) Montrer que $C' \in [IA]$.
   c) Donner l'image par S du segment [IA] et montrer que O' est le milieu du segment [IB].
3. On considère le système de points pondérés {(A ;-1), (B ; 1), (C ; 1)}.
   a) Quel est le barycentre G de ce système ?
   b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que
   $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2$.

Exercice 24 *(extrait du bac série C à Madagascar 2002)*

Dans le plan (P), on considère le rectangle ABCD tel que AD = 2AB = 4 et mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

Soit I le milieu du segment [BC] et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre B passant par A.

1. a) Déterminer le barycentre du système de points pondérés {(A,1), (C,1), (D,-1)}.

   b) On considère l'ensemble (E_k) des oints M du plan (P) tels que $\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 - \|\overrightarrow{MD}\|^2 = k$.
   Calculer le réel k pour que (E_k) soit le cercle $(\mathcal{C})$.

2. Soit la S similitude directe qui transforme A en I et B en D, et σ la symétrie orthogonale d'axe (BD).
On se propose dans cette question de déterminer géométriquement les éléments caractéristiques de S.

   a) Déterminer et construire l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par S.

   b) Soit Ω le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ autre que I. Montrer que (DB) est la médiatrice du segment [ΩI] et que $\Omega = \sigma(I)$.

   c)-En déduire que mes $(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega D})$= mes $(\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IB})$ et que $\frac{\|\overrightarrow{\Omega D}\|}{\|\overrightarrow{\Omega B}\|} = \frac{\|\overrightarrow{ID}\|}{\|\overrightarrow{IB}\|}$.

   d)- En utilisant le triangle rectangle isocèle ICD et le point B, calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IB})$ et le rapport $\frac{\|\overrightarrow{ID}\|}{\|\overrightarrow{IB}\|}$.

   e)- En déduire le centre, le rapport et l'angle de S.

3. On rapporte maintenant le plan (P) au repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

   a)- Déterminer les affixes des points A, B, D et I.

   b)- Donner l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques.

   c)- Donner l'expression complexe de σ et montrer que l'image par σ du point I est le centre Ω de S.

<u>Exercice 25</u> *(extrait du bac série C à Madagascar 2003)*
Dans un plan orienté P soit ABCD un carré direct, de centre J.

<u>PARTIE A</u>

I- On désigne par r : la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

t : la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

h : l'homothétie de centre C, de rapport $\sqrt{3}$.

1. a) Montrer que r' = to r est une rotation dont on précisera l'angle.
   b) Déterminer les images des points A et B par r'.
   c) En déduire le centre de r'.
2. On note f = r'o h.
   a) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera l'angle et le rapport.
   b) Soit I le centre de f. Après avoir déterminé l'image de C par f, prouver que $(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}$ et que ID $=\sqrt{3}$ IC.
   c) En considérant le triangle (ICD), donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CI})$ et placer I sur la figure.
   d) Déterminer et construire l'ensemble : (E) = {M ∈ P / $MD^2 - 3MC^2 = 0$}

II- On note K le milieu de [CD]. On choisit comme repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1. Quelles sont les affixes de A, C, J, K ?
2. On note S la similitude directe qui transforme A en J et C en K.
   a) Ecrire l'expression complexe de S.
   b) Donner ses éléments géométriques.

<u>PARTIE B</u>

E,F,G sont trois points non alignés au plan P, θ un réel donné non nul.

On note : R_F : la rotation de centre F et d'angle θ.

R_E :la rotation de centre E et d'angle θ.

On note : $H = R_F(E)$, $P = R_F(G)$ et $Q = R_E(G)$.

1. Quelle est la nature de $R_E o R^{-1}_F$?
2. En déduire que EHPQ est un parallélogramme.

Exercice 26 *(extrait du bac série C à Madagascar 2004)*

On considère un triangle (ABC) rectangle en A avec mes $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ et AB = 2AC =8cm.

Soient I, J et E les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC].

PARTIE A

1. a) Déterminer et construire le barycentre G du système des points pondérés {(A,-1), (B, 1, (C, 1)}.

   b) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$ et calculer la distance AG.

   c) Montrer que le point E est le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC).

   d) Construire le point D tel que (ABDC) soit un rectangle et déterminer 2 isométries affines qui laissent globalement invariant le rectangle (ABDC).

   e) Déterminer et construire l'ensemble (C) des point m vérifiant : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 20$

   Vérifier que E appartient à (C).

2. Montrer que pour tout point M du plan contenant A, B, et C $-\frac{3}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur fixe $\overrightarrow{W}$ que l'on précisera. Construire le point K tel que $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{AK}$.

PARTIE B

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}, \vec{v} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Soient S_1 la similitude plane directe qui transforme C en C et I en A ; S_2 la similitude plane Directe qui transforme I en I et A en C.

1- Déterminer z_A, z_B, z_C, z_I affixes respectives des oints A , B, C et I

2- a) Déterminer les expressions complexes de S_1 et S_2 .

   b) Préciser les éléments caractéristiques de ces deux similitudes directes.

3- Soit $R = S_2 o S_1$

   a) Préciser l'image de I par R.

   b) Donner l'expression complexe associée à la transformation ponctuelle R.

   c) En déduire ses éléments géométriques.

4- Soit g la transformation ponctuelle réciproque de S_1 .

   Caractériser g et trouver la représentation complexe associée à g.

Exercice 27 *(extrait du bac série C à Madagascar 2005)*

Soit (ABC) un triangle isocèle et rectangle en A avec AB = AC = 4cm et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA] et E le symétrique de A par rapport à J.

PARTIE A

1.a) Montrer que $\overrightarrow{JI} = \frac{\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}}{2}$ et $\overrightarrow{KI} = \frac{\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}}{2}$. En déduire que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{KI} = \frac{\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}}{2}$ et $\overrightarrow{KJ} = \frac{\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}}{2}$. En déduire que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c) Montrer que le quadruplet (AIJK) est un carré. Faite une figure.

2. Soit r la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

a) Déterminer l'image du point I par t et celle de K par r.

b) Déterminer l'image de I par f = rot.

   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

c) Soit g = tor. Déterminer l'image de K par g.

   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

3. Soit S la similitude plane directe qui transforme B en E et J en C.

   Préciser le rapport et l'angle de S. N.B. : Justifier votre réponse.

PARTIE B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ où $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Dans ce repère, on donne les points : A(0,0), B(4,0) et C(0,4).

1. Préciser les coordonnées des ponts E et J.

2. a) Donner l'écriture complexe de S. (S étant la similitude directe donnée dans la partie 1 3).

   b) En déduire les coordonnées du centre Ω de S.

3. Soit la transformation $\bar{S} = SoS_{(AB)}$, où $S_{(AB)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB).

a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\bar{S}$.

b) Déterminer l'écriture complexe associée à $\bar{S}$.

Exercice 28 *(extrait du bac série C à Madagascar 2006)*

Dans le plan orienté (P), on considère le triangle ABC rectangle en A tel que BC=2AB=4cm

Et l'angle $mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$. On note : r_A la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$;

r_B la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

PARTIE A : Méthode géométrique

1. a) Déterminer une mesure de l'angle$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.

b) En décomposant r_A et r_B en deux symétries orthogonales convenablement choisies, Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $f = r_A o r_B$.

2. Soit S la similitude directe de centre B qui transforme A en C.

a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.

b) Faire la construction géométrique du point C_1 image du point C par la similitude S.

c) On note C_2 l'image du point C_1 par la similitude S ; montrer que les points A, B et C_2 sont alignés.

PARTIE B : Utilisation de nombre complexes

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(A,\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$; $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2\sqrt{3}}$

1. Donner les affixes des points A, B et C.
2. a) Donner les expressions complexes des rotations r_A et r_B.
   En déduire celle de $f = r_A o r_B$.
   b) Donner les éléments caractéristiques de f.
3. Donner l'expression complexe de la similitude S définie dans la PARTIE A et en déduire ses éléments caractéristiques ;
4. Soit g la transformation définie par sa forme complexe : $z'=(-1-i)\bar{z}+4+2i\sqrt{3}$
   a) Déterminer les affixes de B' et C' images respectives de B et C par la transformation g.
   b) Vérifier que les points b, C et C' sont alignés.
   c) En déduire les éléments caractéristiques de g.

Exercice 29 *(extrait du bac série C à Madagascar 2007)*

Dans le plan orienté (P), on considère le carré ABCD de centre O tel que la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right) = \frac{\pi}{2}$ Soit E le milieu du segment [CD] ; On considère le carré DEFG de centre O' tel que la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DG}\right) = \frac{\pi}{2}$. On note respectivement (Γ) et (Γ') les cercles circonscrits aux carrés ABCD et DEFG.

1. Faire une figure avec AB = 6cm.
2. Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Préciser l'image du point E par S et en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}\right)$
3. On note I le point d'intersection des droites (AE) et (BF).
   a) Placer le point I sur la figure.
   b) Montrer que le point I est l'intersection des cercles (Γ) et (Γ').

(On rappelle que : quatre points distincts A, B, C et D appartiennent à un même cercle si et seulement si $mes\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = mes\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)[\pi]$

c) En déduire que les droites (ID) et (BF) sont perpendiculaire.

4. On considère la symétrie orthogonale s_{Δ} d'axe $(\Delta) = (OO')$.

Montrer que $s_{\Delta}(D) = I$.

Partie B

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(D; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ avec $\overrightarrow{e^1} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{e^2} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$

Donner les affixes des points A, B, C, D et G.

1. a) Ecrire l'expression complexe de la similitude plane directe S de centre D qui transforme A en B.

b) En déduire les éléments caractéristiques de S.

3. On considère l'application f : (P) $\rightarrow$ (P), qui à tout points M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)\bar{z} + \left(-\frac{6}{5} + \frac{18}{5}i\right)$.

a) Déterminer la nature et les éléments géométriques de f.

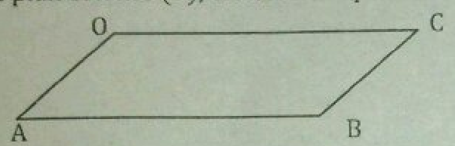
b) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

c) Déterminer l'affixe z_1 du point I tel que $f(D) = I$.

d) Vérifier que les points G, I et C sont alignés.

Exercice 30 *(extrait du bac série C à Madagascar 2009)*

Dans le plan orienté (P), on donne le parallélogramme OABC.



PARTIE A (Construction sur une page entière).

Construire les triangles OCD et OEA, rectangles et isocèles en O, de sens direct.

Puis placer le point G, milieu du segment [DE].

PARTIE B

On se propose de démontrer par deux méthodes différentes que les vecteurs que $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont orthogonaux et que $CA = 2OG$

1. Par les nombres complexes.

On munit le plan (P) d'un repère orthogonal direct d'origine O. On désigne par a et b les affixes respectives des points C et E.

a) Déterminer les affixes respectives des points D et A.

b) Déterminer Z et Z' affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OG}$.

c) Exprimer Z' en fonction de Z.

d) Démontrer que $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont orthogonaux et que $CA = 2OG$.

2. Par les transformations.

On donne : - r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

- h l'homothétie de centre D et de rapport 2 ;

- s la composée r o h.

a) Donner la nature de la transformation s.

b) Déterminer s(G) et s(O).

c) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux et que $CA = 2OG$.

PARTIE C

Dans le repère orthogonal $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, déterminer l'expression complexe de la transformation s ainsi que l'affixe de son centre.

CHAPITRE 11 : SIMILITUDE PLANE

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct$(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.

1. Similitude plane

Définitions

(D_1): Une transformation s du plan est une *similitude plane* si et seulement si
Il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout bipoint (M, N) de transformé (M', N') on a : M'N' = k MN.
Le réel positif k est appelé rapport de la similitude s.

(D_2): Toute similitude plane de rapport 1 est une isométrie et réciproquement toute isométrie est une similitude plane de rapport 1.

(D_3): Toute similitude s de rapport k peut s'écrire sous la forme s = h o f = f o h où f est une isométrie et h une homothétie de rapport k.

Exemples

L'identité, les translations, les rotations, les réflexions et leurs composés sont des similitudes planes de rapport 1.

Une homothétie de rapport k où k est un réel non nul est une similitude plane de rapport | k |.

Propriétés

(P_1) : Si s est une similitude plane de rapport k, alors sa réciproque s^{-1} est une similitude plane de rapport $\frac{1}{k}$

(P_2) : Si s est une similitude plane de rapport k et s' une similitude plane de rapport k', alors s o s' et s' o s sont des similitudes planes de rapport kk'. (en general s o s' $\neq$ s' o s).

2. Similitude plane directe

Définition

On appelle similitude plane directe toute similitude plane s qui conserve les angles orientés.

Exemples :

L'identité, les translations, les rotations, les homothéties et leurs composés sont des similitudes planes directes.

Toute composée d'une homothétie et d'un déplacement est une similitude plane directe.

Propriétés

(P_1) : Soit s une similitude plane directe. Il existe un réel θ tel que pour tous points distincts A et B de transformés respectifs A' et B' on a : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right) = \theta[mod2\pi]$

Le réel θ est appelé angle de la similitude plane directe s.

Remarque :

Les translations et les homothéties de rapport positif ont pour angle $\theta = 0\ [2\pi]$

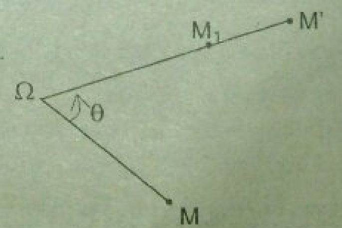
Les homothéties de rapport négatif ont pour angle $\theta = \pi[2\pi]$

Une rotation d'angle θ a pour angle $\theta\ [2\pi]$

(P_2) : Toute similitude plane directe s différente d'une translation a un point invariant unique Ω.
Ω est appelé centre de la similitude plane directe s.

Théorème – Définition

Soit s une similitude plane directe qui n'est pas une translation dont
Ω est son centre, k son rapport et θ son angle.
On notera $s = S_{(\Omega,k,\theta)}$
Alors $s = S_{(\Omega,k,\theta)} = H_{(\Omega,k)} o\ R_{(\Omega,\theta)} = R_{(\Omega,\theta)} o H_{(\Omega,k)}$



Autrement dit : Pour tous points M, M' on a :

$S_{(\Omega,k,0)}$ (M) = M' si et seulement si $\begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$

$S_{(\Omega,k,0)}$ est la similitude plane directe dont les éléments géométriques (ou caractéristiques) sont le centre Ω, le rapport k et l'angle θ.

Cas particuliers

$S_{(\Omega,1,\theta)} = R_{(\Omega,\theta)}$

$S_{(\Omega,k,0)} = H_{(\Omega,k)}$

$S_{(\Omega,k,\pi)} = H_{(\Omega,-k)}$

Propriétés

$(S_{(\Omega,k,\theta)})^{-1} = S_{(\Omega,\frac{1}{k},-\theta)}$

$S_{(\Omega,k,\theta)} o S_{(\Omega,k',\theta')} = S_{(\Omega,kk',\theta+\theta')}$

$S_{(\Omega,k,\theta)} o S_{(\Omega',k',\theta')} = S_{(\Omega'',kk',\theta+\theta')}$

2.1- Expression analytique – Expression complexe

Toute similitude plane directe s de rapport k a une expression analytique de la forme

$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + x_o \\ y' = \beta x + \alpha y + y_o \end{cases}$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$

Soit $S_{(\Omega,k,\theta)}$ la similitude plane directe de centre Ω d'affixe z_Ω , de rapport k et d'angle θ.

$S_{(\Omega,k,\theta)}$ a pour expression complexe $z' = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$ et $b = (1-a)z_\Omega$

2.2- Nature et éléments caractéristiques de la transformation F d'expression complexe : z' = az + b où a ∈ C* et b ∈ C

Premier cas : a ∈ ℝ*

Si a = 1 et $\begin{cases} si\ b = 0\ alors\ F = Id \\ si\ b \neq 0\ alors\ F\ est\ la\ translation\ de\ vecteur \vec{v}[b] \end{cases}$

Si a ≠ 1 alors F est l'homothétie de centre $\Omega\left[z_\Omega = \frac{b}{1-a}\right]$ et de rapport k = a

Deuxième cas : a ∈ ℂ − ℝ

- Si |a| = 1 alors F est la rotation de centre $\Omega\left[z_\Omega = \frac{b}{1-a}\right]$ et d'angle θ = arg (a)
- Si |a| ≠ 1 alors F est la similitude plane directe de centre $\Omega\left[z_\Omega = \frac{b}{1-a}\right]$, de rapport k = |a| et d'angle θ = arg (a)

2.3- Similitude plane directe définie par deux points distincts et de leurs images

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que A ≠ B et A' ≠ B', il existe une unique similitude plane directe s telle que s(A) = A' et s(B) = B'.

Remarque :

- On cherche l'expression complexe de s pour déterminer ses éléments caractéristiques.

- *Résultat direct* : Le rapport de la similitude s est $k = \frac{A'B'}{AB}$, l'angle de cette similitude est $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$

Images de certaines figures

L'mage d'une droite (AB) par une similitude plane directe s est la droite (s(A)s(B))

L'mage d'un cercle C (I, r) par une similitude plane directe de rapport k est le cercle C'(s(I), kr).

3. Similitude plane indirecte

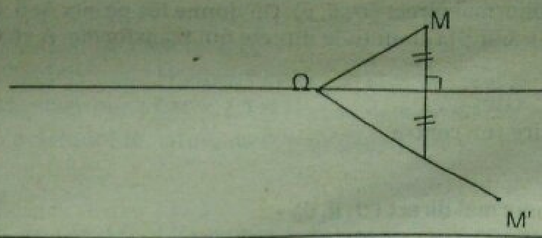
Définition

On appelle *similitude plane indirecte (ou inverse)* toute similitude plane s qui transforme les angles orientés en leurs opposés.

Exemple :

Les réflexions, les symétries glissées sont des similitudes planes indirectes.

Toute composée d'une homothétie et d'un antidéplacement est une similitude plane indirecte.



Théorème

Toute similitude plane indirecte de rapport $k = 1$ est un antidéplacement.

Théorème - Définition

Soit s une similitude plane indirecte de rapport $k \neq 1$.

Il existe une homothétie $h_{(\Omega,k)}$ de centre Ω et de rapport k et une droite (D) contenant Ω, tel que s admet l'unique décomposition commutative : $s = h_{(\Omega k)} o S_D = S_D o h_{(\Omega k)}$

Les éléments caractéristiques de s sont *: le centre* Ω, *le rapport* k *et l'axe* (D).

Ω est le seul point invariant par s.

(D) est appelée aussi première droite invariante par s.

La droite (Δ) orthogonal à (D) en Ω est appelée deuxième droite invariante par s.

(D) = { M ∈ (P) tel que $\overline{\Omega M'} = k\overline{\Omega M}$ où M' = s(M) }

(Δ) = { M ∈ (P) tel que $\overline{\Omega M'} = k\overline{\Omega M}$ où M' = s(M) }

3.1- Expression analytique

s est une similitude plane indirecte si et seulement si s a une expression analytique de la forme :

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + x_o \\ y' = \beta x - \alpha y + y_o \end{cases}$$

Le rapport de la similitude s est $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

3.2- Expression complexe

s est similitude plane indirecte si et seulement si s a une expression complexe de la forme

$z' = a\bar{z} + b$ où a est un complexe non nul.

<u>Nature et éléments caractéristiques de s</u>

Premier cas : $|a| = 1$: s est un antidéplacement

Si $a\bar{b} + b = 0$ alors $S = S_D$ (réflexion d'axe D)

Si $a\bar{b} + b \neq 0$ alors $S = S_D \circ t_{\vec{U}}$ (symétrie glissée)

Deuxième cas : $|a| \neq 1$: s est une similitude plane indirecte de rapport $k = |a|$,

de centre Ω(ω) : $\omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}}$ et d'axe (D) : $a(\bar{z} - \bar{\omega}) = k(z - \omega)$

3.3- Composition de deux similitudes planes indirectes

Si s et s' deux similitudes planes indirectes d'expressions complexes respectives $z' = a\bar{z} + b$ $z' = a'\bar{z} + b'$ Alors sos' est une similitude plane directe de rapport $k = |a||a'|$ et d'angle θ = arg(a)-arg (a').

EXERCICES

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives 2+i, 5+4i,-1+2i et -3+4i. Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en D

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Déterminer le rapport et l'angle de S

c) Etablir l'écriture complexe de S, en déduire son centre

Exercices 2: 2 à 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Donner l'expression complexe des similitudes directes suivantes :

Numéro	Centre d'affixe	Angle	Rapport
2)	1 - 2i	$\frac{\pi}{2}$	2
3)	3 + i	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
4)	2i	π	4
5)	- 3	$\frac{5\pi}{6}$	1
6)	-1 + 3i	$-\frac{\pi}{4}$	4

Exercice 7a12

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations f d'expression complexe suivante :

7) $z' = iz + 2 + 2i$ 8) $z' = 2iz + 5$ 9) $z' = (1-i)z - 3 + i$

10) $z' = \frac{\sqrt{3}}{2}z$ 11) $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ 12) $z' = z + \frac{1+i\cos\theta}{2}$

Exercice 13

On définit dans le plan les similitudes planes directes S_1 et S_2, d'expressions complexes respectives

$$z' = (1-i)z + 1 + i \quad \text{et} \quad z' = \frac{1}{2}(-1+i)z + 1 - 2i.$$

1. a) Caractériser S_1 et S_2.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S_1 o S_2$ et $S_2 o S_1$.
2. Donner alors l'expression complexe de $S_1 o S_2$.
3. Déterminer l'expression complexe de $(S_2)^{-1} o (S_1)^{-1}$
4. Définir analytiquement S_2.

Exercice 14 à 17

Déterminer la nature et les éléments géométriques de chacune des transformations f d'expression complexe suivantes :

14) $z' = 3i\bar{z} - 2 - 2i$ 15) $z' = i\bar{z} + 1 - 7i$ 16) $z' = i\bar{z} + 1 - I$ 17) $z' = \frac{\sqrt{3}+i}{2}\bar{z}$

Exercice 18

CAB est un triangle équilatéral direct du plan orienté. On note J le milieu de [AB], I celui de [BC] et Δ la médiatrice du segment [AB].

On note s la similitude plane directe de centre C transformant le point A en I. Un point M quelconque du plan a pour image M' par s.

1. a) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure (*Prendre* [AB] *horizontal et* AB = 4 cm)
   b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.
   c) Construire le point D tel que s(D) = A. (On *justifiera soigneusement cette construction*).

d) Exprimer AM' en fonction de DM.

2. On note M'' l'image du point M par la réflexion d'axe Δ. On note Γ l'ensemble des points M du plan tels que AM' = AM''.
   a) Montrer que AM'' = BM.
   b) Montrer que : M appartient à Γ si et seulement si DM = 2 BM.
   c) Montrer que : DM = 2 BM si et seulement si $(\overrightarrow{DM} - 2\overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{DM} + 2\overrightarrow{BM}) = 0$
   d) En déduire la nature de Γ, puis construire Γ.

__Exercice 19__

Dans le plan, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : 2+i, 1, -2 +i et -3 +2i.
Soit f la similitude indirecte d'expression complexe $z' = a\bar{z} + b$
,où a et b sont des complexes avec $a \neq 0$

1. a)Déterminer a et b pour que f(A) = C et f(B) = D
   b) Quel est le rapport de f.
2. Déterminer l'ensemble des points fixes de f
3. Montrer que fof est une translation de vecteur $\vec{v}$ à préciser
4. Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' son image par f. Montrer que le milieu I de [MM'] appartient à la droite Δ d'équation y=1
5. Déterminer l'expression complexe de la symétrie orthogonale d'axe Δ.
6. Vérifier que $f = t_{\frac{1}{2}\vec{v}} o s_\Delta = s_\Delta o t_{\frac{1}{2}\vec{v}}$

__Exercice 20__

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm ; la transformation T_m, d'expression complexe z'= (m + i) z + m -1 - i où m est un réel

Partie A :

1. Existe-t-elle une valeur du réel m pour laquelle T_m soit une translation ?
2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation

Partie B :

Dans toute la suite, on pose m =1

1. Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_1
   b) Montrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera ses éléments caractéristiques.
   c) Montrer que : si M est un point distinct de Ω, alors ΩMM' est rectangle isocèle en M

2. On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant M_0= O, $M_1 = T_1(M_0)$,... et pour tout entier naturel non nul n, $M_n = T_1(M_{n-1})$.
   a) Placer les points M_1, M_2 , M_3 et M_4 .
   b) Pour tout entier n, on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que la suite (d_n) est géométrique
   Etudier alors sa convergence

__Exercice 21__

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation f qui, à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que : $\begin{cases} x' = -x - y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$

1. Déterminer l'affixe z' de M'en fonction de l'affixe z de M
2. Démontrer que f est une similitude plane directe dont on précisera ses éléments géométriques
3. Soit g l'application qui, à tout point M, associe l'isobarycentre G des points M, M' =f(M) et M'' = f(M')

a) Calculer en fonction de l'affixe z de M, les affixes des points M'' et G.

b) Démontrer que g est une similitude plane directe. Quel est son centre ?

c) Déterminer l'affixe du point A tel que g(A) soit l'origine O

4. Reporter sur une figure les points A, A'=f(A), A''= f (A'), ainsi que le centre I de f.

Exercice 22

Soit C le cercle de centre O et de rayon a et I un point tel que OI > a.

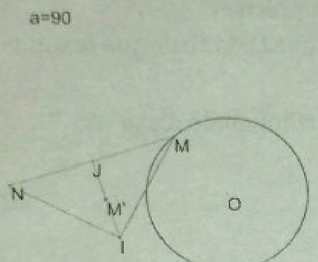
Pour tout point M de C, on note :

- N l image de M par la rotation r de centre I et d angle $\frac{\pi}{2}$.
- J le milieu de $[MN]$;
- M′ le milieu de ;$[IJ]$

1. a) démontrer que $IM' = \frac{1}{2\sqrt{2}} IM$

   b) donner une mesure de l' angle $(\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IM'})$

2. déterminer et construire le lieu géométrique du point M′ lorsque M décrit le cercle C.

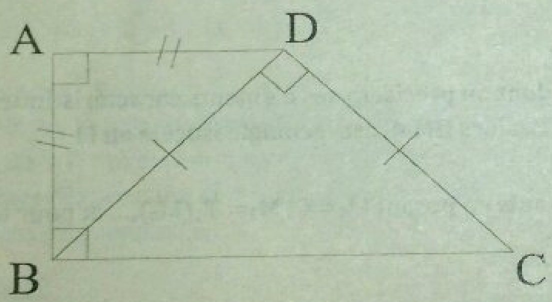


Exercice 23

Soit le trapèze direct ABCD tel que AD = AB ; $mes(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = mes(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}$ et DC = DB

On note s la similitude plane directe par laquelle l'image du triangle ABD est le triangle BCD.

1) Montrer que s(A) = D.
2) Déterminer l image du point B par s.
3) Donner les éléments géométriques de s.



Exercice 24

Le plan (P) est rapporté a un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note s la similitude plane directe définie par son expression complexe : $z` = (1+i)z + 2 - i$

1 Déterminer l'antécédent A du point O par s

2 Montrer que pour tout point M du plan P, on a $OM` = \sqrt{2}AM$ avec $M` = s(M)$

3 A l'aide de la similitude s, trouver l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|(1+i)z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$

4 Retrouver à l'aide d'une autre méthode le résultat précédant

Exercice 25

Soit ABC un triangle équilatéral direct du plan orienté.

D, E, F sont des points respectifs des segments $[AB]; [BC]$ et $[CA]$ tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et G est le centre de gravité du triangle ABC.

1) Calculer $(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF})$. Donner une conclusion concernant le point G.
2) Montrer que « si s est une similitude plane directe transformant ABC en DEF, alors G est le centre de s ».
3) Soit r la rotation de centre G et qui transforme A en B. Montrer que r laisse invariant le triangle ABC. Déterminer alors l'image par s du triangle DEF.
4) On pose $\frac{GD}{GA} = \lambda$ et $mes(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GD}) = \theta$.
   a) Démontrer que $\frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GC} = \lambda$.
   b) Calculer $mes(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GE})$ et $mes(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GF})$.
   c) Montrer que DEF est l'image de ABC par une similitude plane directe de centre G.
   d) Déterminer le rapport de cette similitude plane directe.

Exercice 27

ABCD et DEFG sont deux carrés directs dans le plan tels que E est le milieu de [CD]

1. Soit s la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B .
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de s.
   b) Déterminer l'image de E par s et préciser la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF})$
2. On désigne par *(C)* le cercle de diamètre [BD] et par K le point d'intersection des droites (AE) et (BF).
   a) Démontrer que K appartient à *(C)*
   b) En déduire que (KD) et (BF) sont perpendiculaires.

3. On désigne par *(C')* le cercle de diamètre [DF].
   a) Démontrer que K appartient à *(C')*
   b) En déduire que les points C, G et K sont alignés.

Exercice 28

Soit s la similitude directe d'écriture complexe définie par : z' = (1+i) z + 2.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de s
2. Soit Ω le centre de s. Quelle est la nature du triangle MΩM' où M' est l'image de M par s ?

O étant l'origine du repère du plan complexe, pour un point M quelconque déterminer et construire l'ensemble :

$a)$ (C) *des points tels que* $OM = MO'$

$b)$ (C') *des points tels que* $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$

Exercice 29

KLMN est un carré direct et de centre I. On désigne par J le milieu du segment [KI] et par s la similitude directe qui transforme K en I et L en J.

1. Déterminer le rapport et l'angle de s
2. Construire s(M) et s(N).
3. Démontrer que le centre Ω de s appartient au cercle de diamètre [KN] et au cercle circonscrit au triangle KLJ. Construire le point Ω avec précision.

Exercice 30

Partie A

Dans le plan orienté (P), l'unité de longueur est le centimètre. Soit OAB le triangle rectangle direct et isocèle en O. On considère le triangle OCB, équilatéral direct de centre de gravité G.

On donne : R_B la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$ et R_O la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$

On pose : $R = R_B o R_O$.

1. a) Faire une figure en prenant OA=OB=8.
   b) Préciser la nature de la transformation R.
   c) En décomposant R_B et R_O, déterminer le centre de R.
2. On désigne par H le barycentre des points pondérés (0,2), (B, 1) et (C, 1).
   Soit I le milieu du segment [CB].
   a) Construire H.
   b) Déterminer l'ensemble (C) des points M du plan (P) tels que : $2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{AO}^2$
   c) Montrer que (C) passe par I. Construire (C).

Partie B

On munit le plan (P) du repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

1. Déterminer l'affixe de chacun des points O, A, B, C, et G.
2. a) Donner une mesure de l'angle$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OA})$ et la valeur du rapport $\frac{OA}{OG}$.
   b) En déduire les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S qui transforme G en A et laisse invariant.
   c) Donner l'expression complexe de S.

Exercice 31 (Bac La Réunion 1999)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{z}$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives –i et i.

1. Soit C_1 le cercle de centre A et de rayon 1, privé du point O.
   a) Pour tout nombre complexe z non nul, démontrer que : $|z' + i| = |z'| équivaut\ |z + i| = 1$
   b) En déduire l'ensemble C'_1, image de C_1 par f.
   c) Tracer C_1 et C'_1 sur une même figure
2. Soit C_2le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$
3. Montrer que : pour tout nombre complexe z non nul, $|z' - i|^2 = 2\ équivaut$ à $|z + i|^2$=2
   b) En déduire l'ensemble C'_2 image de C_2 par f.
   c) Tracer C_2 et C'_2 sur la figure précédente
4. a) Donner l'écriture complexe de la similitude directe s de centre Ω d'affixe 1+i , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Montrer que sof est l'application qui, à chaque point M d'affixe z non nulle, associe le point M'' d'affixe z'' telle que $z'' = \frac{2i+(3-i)\bar{z}}{\bar{z}}$

c) A l'aide des questions précédentes, déterminer les ensembles Γ_1 et Γ_2 ,images respectives de C_1 et C_2 par sof.

d) Tracer les ensembles Γ_1 et Γ_2 sur la figure précédente.

Exercice 32 à 35

On donne, dans un repère orthonormal direct, l'écriture complexe d'une transformation complexe. Trouver l'image des droites ou des cercles donnés.

32) z' = (1+2i)z +2 -5i
   - (D) passe par A(1-2i) et B(-1+i) ;
   - C a pour centre I(1-i) et pour rayon $\sqrt{5}$

33) z' = 2i z -3
   - .C_1 a pour centre I(1+i) et pour rayon 2 ;

- .C_2 a pour centre O(0) et pour rayon 1 ;
- .D est la droite passant par les points communs à C_1 et C_2.

34) $z' = (\sqrt{3} - i)z$;

- $\mathcal{C}$est le cercle passant par O(0) et de rayon 1 ;
- D est la droite passant par A(1+i) et B(-4i).

35) $z' = (3+4i)z - 4 + 2i$;

- D est la droite K(-1+i) et dirigée par le vecteur d'affixe 2+i ;
- $\mathcal{C}$passe par I(1-i) et est tangent en J(2) à la droite passant par J et L(2i).

CHAPITRE 12 : PROBABILITE

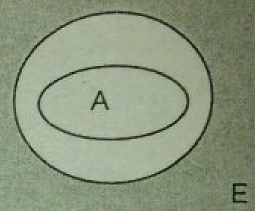
1. Vocabulaire sur les ensembles

1.1- Cardinal d'un ensemble

<u>Définition</u>
Un ensemble E est fini si cet ensemble contient un nombre fini d'éléments.
Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé cardinal de E , et noté $card\,E$.
Exemple : $E = \{a, b, c\}$ est un ensemble fini à 3 éléments.
Card E = 3

1.2- Parties d'un ensemble fini

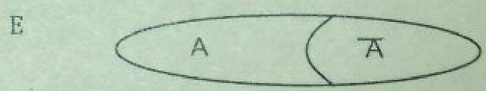
<u>Définition</u>
L'ensemble A est une partie de E si chaque élément de A est élément de E
Notation : $A \subset E$ (A est inclus dans E ou A est un sous ensemble de E)
L'ensemble des parties de E est noté : $P(E)$
$P(E) = \{A \text{ tel que } A \subset E\}$
Card $P(E) = 2^{\text{cardE}}$



Exemple
$E = \{1, 2, 3\}$, card E = 3.
Les parties de E sont : $\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{2,3\}; E$
Donc $P(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{2,3\}; E\}$
card $P(E) = 8 = 2^3 = 2^{\text{cardE}}$

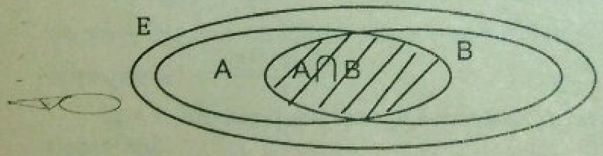
1.3- Le complémentaire de A dans E

A est une partie de E.
Le complémentaire de A dans E, noté C_E^A ou $\overline{A}$
est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A.
$\bar{A} = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}$



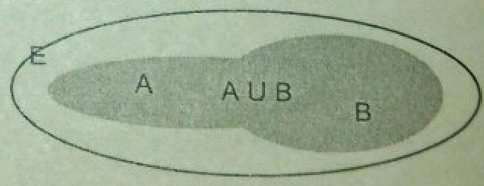
1.4- Intersection et réunion de deux ensembles

<u>Intersection de deux ensembles</u>



L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent **à la fois à A et à B.**

-<u>Réunion de deux ensembles</u>



La réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou B.

1.5- Produit cartésien de deux ensembles

<u>Définition</u>
Soient A et B deux ensembles non vides.
Le produit cartésien de A par B, noté AxB, est l'ensemble des couples (a ; b) où $a \in A$ et $b \in B$.
card AxB = cardA x cardB

Exemple
$A = \{a, b, c\}$ et $B\{1,2\}$
$AxB = \{(a,1); (a,2); (b,2); (c,1); (c,2)\}$
card AxB = 6 = 3 x 2 = card A x card B

Remarque
On note $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n fois A) l'ensemble des n-uplets ($a_1 ; a_2 ; \ldots\ldots ; a_n$) où $a_i \in A$
Card $A^n = (\text{card}A)^n$

1.6- p- listes
Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$.

Définition:
On appelle p-liste de E, tout p-uplet d'éléments de E.

Remarque :
Dans un p-liste, chaque élément peut être répété jusqu'à p fois.

2. Dénombrement

2.1- Nombre de p-listes
Le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à : $\text{card}(E^p) = (\text{card}E)^p = n^p$

2.2- Nombre d' applications d' un ensemble fini dans un autre ensemble fini
a) Application

Définition : Soient E et F deux ensembles finis et f une fonction de E vers F .
f est appelé une application de E dans F si et seulement si tout élément de E a une unique image dans F.

Exemple : E = {a, b, c, d } et F = {1 ; 2 ; 3 }
f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 2 et f(d) = 2

b) Nombre d'applications

Théorème :
E étant un ensemble a « p- éléments » et
F un ensemble a « n- éléments »
Le nombre d'applications de E vers F est égal à $n^p = [\text{Card}(F)]^{\text{Card}(E)}$

Démonstration
Soient $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ et $F = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
Il y a n images possibles pour a_1 , n images possibles pour a_2, ..., n images possibles pour a_p donc $a_1, a_2, \ldots, a_p$ possèdent n^p images possibles

Exemple : E = {a, b, c, d } et F = {1 ; 2 ; 3 }
Le nombre d'applications de E vers F est égal à $3^4 = 81$

Exercice résolu 1
On repartie 5 boules dans 4 cases (Chaque case peut contenir les 5 boules)
Combien y-a-t-il de répartitions possibles ?
E : ensemble des 5 boules Card (E) = 5

F : ensemble des 4 cases Card (F) = 4

Solution

Le nombre de répartitions est le nombre d'applications de E dans F ; soit :

$4^5 = 1024$

2.3- Arrangement

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$.

<u>Définition</u>

On appelle arrangement de p éléments de E, toute disposition ordonnée de p éléments pris parmi les n éléments de E, telle que ces p éléments soient deux à deux distincts.

a) <u>Nombre d'arrangements</u>

Le nombre d'arrangements de p éléments de E est : $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$.

Exemple :

$A_7^5 = 7x6x5x4x3 = 2520$

b) <u>Remarque</u>

Pour calculer rapidement A_7^5, il suffit d'effectuer le produit des 5 entiers consécutifs décroissants à partir de 7

<u>Exercice résolu 2</u>

On dispose de 8 jetons numérotés de 1 à 8. Combien de nombres de 5 chiffres deux à deux différents peut-on former avec ces jetons ?

Solution

	1er chiffre	2è chiffre	3è chiffre	4è chiffre	5è chiffre
Nombre de choix	8	7	6	5	4

$A_8^5 = 8x7x6x5x4 = 6\,720$

Il y a donc 6 720 nombres de 5 chiffres deux à deux différents.

c) <u>Nombre d'applications injectives</u>

- *applications injectives*

<u>Définition</u> : Une application f de E dans F est injective si et seulement si deux éléments distincts de E ont d'images distinctes dans F.

Exemple : E = {a, b, c} et F = {1 , 2 , 3, 4 }
f(a) = 1, f(b) = 2 et f(c) = 3

- *nombre d'applications injectives*

<u>Théorème</u> :
E étant un ensemble a « p- éléments » et
F un ensemble a « n- éléments » avec $p \leq n$
Le nombre d'applications injectives de E dans F est égal à
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n\,(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$

Démonstration

Soient $E = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ et $F = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$

Il y a n images possibles pour a_1, n-1 images possibles pour a_2, ..., n-(p-1) images possibles pour a_p donc $a_1, a_2, ..., a_p$ possèdent $n(n-1)...(n-p+1) = \frac{[n(n-1)...(n-p+1)][(n-p)!]}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p$ images possibles

<u>Exercice résolu 3</u>

Combien y-a-t-il de façons de distribuer les 10 lots d'un tombola pour 13 personnes qui ont chacune 1 billet?

E : ensemble des lots Card E = 10

F : ensemble des personnes Card F = 13

Solution

Le nombre de distributions possibles est le nombre d'applications injectives de E dans F

$N = A_{13}^{10} = 13x12x11 = 1716$

2.4- Permutation

E est un ensemble de cardinal n.

<u>Définition</u>

Une permutation des n éléments de E est un arrangement des n éléments pris n à n.

<u>Nombre de permutations</u>

Le nombre de permutations des n éléments est : $n! = n(n-1)(n-2)...2x1$.

Exemple : $5! = 5x4x3x2x1x = 120$

<u>Exercice résolu 4</u>

On appelle « anagramme d'un mot », tout mot ayant un sens ou non obtenu par permutation des lettres du mot initial.

Quel est le nombre d'anagrammes du mot MATHS ? (THAMS est, par exemple un tel anagramme)

Solution

E = { M, A, T, H, S}

Card E = 5

Les cinq lettres de ce mot sont toutes distinctes.

$N = 5! = 120$

Permutation avec répétition

Soit E un ensemble à n éléments tel que

E = {a, a, ..., a, b, b, ..., b,.....,c,c, ..., c, s, s, ... , s } α lettres a ; β lettres b γ lettres c , σ lettres s.

Une permutation avec répétition des n éléments de E est une disposition ordonnée de tous les n éléments de E, non tous distincts.

Le nombre des permutations avec répétitions des n éléments de E est égale à $\frac{n!}{\alpha! \times \beta! \times \gamma! \times ... \times \sigma!}$

Démonstration :

Posons E = {a, a, ..., a, b, b, ..., b,....,c,c, ..., c, s, s, ... , s} α lettre a ; β lettre b γ lettre c , σ lettre s

- α lettre a : sont permutation est α ! en considérant a est discernable
- β lettre b : sont permutation est β ! en considérant b est discernable

....

- γ lettre c : sont permutation est γ ! en considérant c est discernable
- σ lettre s : sont permutation est σ ! en considérant s est discernable

Notons p_n le nombre des permutations avec répétition.

$$\underbrace{(a, a, \dots, a}_{\alpha}, \underbrace{b, b, \dots, b}_{\beta} \dots \underbrace{c, c, \dots, c}_{\gamma} \underbrace{s, s, \dots, s)}_{\sigma}$$

$P_n \cdot \alpha! \beta! \gamma! .. \sigma! = n!$ donc $p_n = \frac{n!}{\alpha!\beta!\dots\sigma!}$

Exercice résolu 5

Trouver le nombre d'anagrammes du mot : « MATHEMATIQUES »

Solution

C'est une permutation avec répétition de 13 éléments

M 2 lettres

A 2 lettres

T 2 lettres

E 2 lettres

H, I, Q, U, S 1 lettre chacune

$N = \frac{13!}{2!2!2!2!}$

2.5- Combinaison

E est un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$ avec $0 \le p \le n$.

Définition

Une combinaison de p éléments de E est toute partie de E contenant exactement p éléments.

Nombre de combinaisons de p éléments de E

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

a) Propriétés :

Par convention $0! = 1$

$1! = 1$

$n! = n.(n-1)!$

	ARRANGEMENTS	COMBINAISONS
Si $p < n$,	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = C_n^{n-p}$
Si $p = n$,	$A_n^n = n!$	$C_n^n = 1$
Si $p = 1$,	$A_n^1 = n$	$C_n^1 = n$ et $C_n^{n-1} = n$
Si $p = 0$,	$A_n^0 = 1$	$C_n^0 = 1$

b) Formule du binôme de Newton

Pour tout nombre réel a et b et pour tout entier naturel n :

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^p a^{n-p} b^p + \dots + C_n^n b^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p}.b^p$$

Démonstration

- $C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1$
- $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$

$\bullet C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$

$\bullet C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{[n-(n-p)]!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = C_n^{n-p}$

$\bullet C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} = \frac{(n-1)!p+(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$

Exemples

$\bullet (a+b)^7 = C_7^0 a^7 + C_7^1 a^6 b + C_7^2 a^5 b^2 + C_7^3 a^4 b^3 + C_7^4 a^3 b^4 + C_7^5 a^2 b^5 + C_7^6 a b^6 + C_7^7 b^7$

Soit $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

$\bullet (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^p x^p + \cdots + C_n^n x^n$

$\bullet C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^p + \cdots + C_n^n = 2^n$

$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$

$=$

C_n^p

n \ P	0	1	2	3	4	5	......
0	C_0^0						
1	C_1^0	C_1^1					
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				
3	C_3^0	$\boxed{C_3^1}$	$\boxed{C_3^2}$	C_3^3			
4	C_4^0	C_4^1	$\boxed{C_4^2}$	C_4^3	C_4^4		
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	
....	....	....	....	....	....	....	....

$\bullet C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^p C_n^p + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

On remarque que les nombres C_n^p peuvent être déterminés par un triangle appelé triangle de Pascal

3. Probabilité

Introduction

La probabilité est un outil mathématique permettant de mesurer les phénomènes aléatoires (c'est à dire liés au hasard). Il s'agit précisément de mesurer « la chance » de réalisation d'un événement.

3.1- Vocabulaire (ou langage) probabiliste

a) Epreuve

On entend par épreuve une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat précis (on connait seulement l'ensemble de tous les résultats possibles)

L'univers d'une épreuve est l'ensemble de tous les résultats possibles (ou cas possibles ou éventualités).

On note généralement Ω l'univers d'une épreuve.

Exemple1 :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'univers de cette épreuve est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Exemple2

On tire simultanément deux boules d'une urne contenant une boule noire (N) et deux boules blanches (B).

L'univers de cette épreuve est $\Omega = \{\{N,B_1\}, \{N,B_2\}, \{B_1,B_2\}\}$

b) Evénement

Définition :
Toute partie (ou sous-ensemble) de Ω s'appelle événement. On note généralement un évènement à l'aide d'une lettre A, B, C.
Au cours d'une épreuve, un événement est dit réalisé si une de ses éventualités apparaît.

Dans l'exemple 1,
$A = \{1, 2, 3\}$ est un évènement
B : « Tirer un nombre pair » est un évènement.
B est réalisé si 2 ou 4 ou 6 apparaît
Dans l'exemple 2,
C : « Tirer deux boules de même couleur » est un évènement.
Lors d'un lancer de dé « avoir un numéro pair » est réalisé si 2 ou 4 ou 6 apparaît.

Remarque : $P(\Omega)$ qui désigne l'ensemble des parties de Ω est l'ensemble des événements de Ω

Cas particulier :
Les singletons s'appellent « événements élémentaires »:
$\emptyset$ s'appelle « événement impossible » (il n'est jamais réalisé)
Ω s'appelle « événement certain » (il est toujours réalisé)

Remarque
Ne pas confondre « l'événement élémentaire » avec « l'éventualité »
En effet : une éventualité est un élément de Ω tandis qu'un évènement élémentaire est un élément de $P(\Omega)$
Exemple : Pour le lancer de dé $\{1\} \in P(\Omega)$, $1 \in \Omega$

Opérations sur les événements :
Soit Ω un univers
Si A et B sont deux événements de l'univers Ω : $A \in P(\Omega)$ et $B \in P(\Omega)$, alors : $A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A}$ sont des événements

$A \cap B$ est réalisé lorsque A et B sont à la fois réalisés.
$A \cup B$ est réalisé lorsque A est réalisé ou B est réalisé. Autrement dit, lorsque l'un au moins des deux événements A et B est réalisé.

$\overline{A}$ est réalisé lorsque A ne l'est pas.

Exemple
Lors d'un lancer d'un dé
$A = \{2.4.6\}$: « avoir un numéro pair »
$B = \{1, 4\}$: « avoir un carré parfait »
On a : $A \cap B = \{4\}$: « avoir un carré parfait pair »
$A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$: « avoir un numéro pair ou un carré parfait »

$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$: « avoir un numéro non pair » ou « avoir un numéro impair »

Remarque
$A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$.
Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que les deux événements A et B sont incompatibles.
$A \subset B$. signifie : « Tout élément de A appartient à B » : On dit que la réalisation de l'évènement A implique celle de l'événement B

Exemple

A= {2} ; B= {2, 4,6}

On a ici $A \subset B$.

A est réalisé si 2 apparaît. B = {2, 4, 6} est réalisé si un numéro pair apparaît.

3.2- Probabilité d'un événement : Cas général.

Définition

Soit Ω un univers de cardinal fini.

On appelle Probabilité définie sur Ω l'application notée p définie par :

$$p : P(\Omega) \mapsto [0, 1]$$
$$A \rightarrow p(A)$$

telle que : $p(\Omega) = 1$ et pour tout A, B $\in P(\Omega)$; si $A \cap B = \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

p (A) se lit : Probabilité de l'évènement A.

$p(\Omega) = 1$ signifie : on a le maximum de chance de réalisation de Ω.

a) Propriétés

(P_1) : Pour tout $A \in P(\Omega)$, $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

En effet :

On sait que : $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ alors :

$p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) = p(\Omega) = 1$.

D'où $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

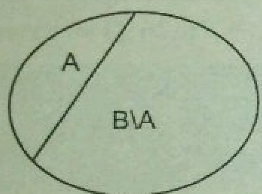
(P_2) : $p(\emptyset) = 0$: le vide n'a aucune chance d'être réalisé

En effet : $\emptyset \cap \Omega = \emptyset$ et $\emptyset \cup \Omega = \Omega$

D'où : $p(\emptyset \cup \Omega) = p(\emptyset) + p(\Omega) = p(\Omega) = 1$

$p(\emptyset) = 1 - p(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(P_3) : Pour tout A, B $\in P(\Omega)$: si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$.



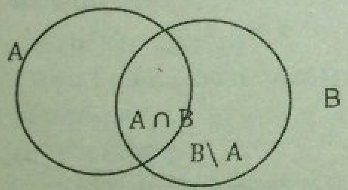
On voit que : $A \cup (B \setminus A) = B$

Et : $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

D'où : $p(A \cup (B \setminus A)) = p(A) + p(B \setminus A) = p(B)$

Alors $p(A) = p(B) - p(B \setminus A) \leq p(B)$

(P_4) : Pour tout A, B $\in P(\Omega)$: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$



On voit que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

Avec $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Alors $p(A \cup B) = p(A \cup (B \setminus A)) = p(A) + p(B \setminus A)$

Calculons $p(B \setminus A)$

On a: $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ avec $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$

D'où: $p(B) = p(A \cap B) + p(B \setminus A)$

$p(B \setminus A) = p(B) - p(A \cap B)$

or $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

(P_5): Par extension, soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements deux à deux incompatibles dans Ω on a

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} Ai\right) = \sum_{i=1}^{n} p(Ai)$$

Cas particulier :

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ sont n évenements deux à deux incompatibles tels que

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \text{ alors } \sum_{i=1}^{n} p(Ai) = 1$$

Dans ce cas on dit que les évenements $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$, forment un système complet d'évenements.

Dans la pratique, A et B sont indépendants si la réalisation de A ne dépend pas de la réalisation de B et réciproquement.

b) Equiprobabilité

Définition

Deux événements A et B sont dits équiprobables si $p(A) = p(B)$.

c) Probabilité d'un événement élémentaire.

$$\Omega = \{e_1, e_1, \ldots\ldots, e_n\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{e_1\} \text{ alors } \sum_{i=1}^{n} p(\{e_i\}) = 1$$

Si tous les évenements élémentaire sont équiprobables, alors $p(\{e_i\}) = \frac{1}{Card\Omega}$

Exemple

Lors d'un lancer de dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 .

$p(\{1\}) = p(\{2\}) = \ldots\ldots = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$

d) Propriété

Lorsqu'il y a équiprobabilité des événements élémentaires, alors pour tout événement A:

$$\boxed{p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega}}$$

$$\boxed{p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable(s) à } A}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

Exemple 1 : Lors d'un lancé de dé normal, déterminer la probabilité de l'événement A : « avoir un numéro pair».

Card A = 3

Card Ω = 6

Alors $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Exemple 2 :

Lors d'un tirage au hasard d'une boule de l'urne contenant 3 boules rouges, 2 vertes, et 4 noires, *toutes indiscernables au toucher*

A : « avoir une boule rouge » = {R1, R2, R3}

Alors : $p(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ CardA = 3 ; Card B= 9.

Remarque

L'hypothèse d'équiprobabilité est suggérée par les conditions de l'expérience.

4. Probabilité binomiale

4.1- Epreuve de Bernoulli (Hollandais du XVIIIe S)

Définition
On appelle Epreuve de Bernoulli toute épreuve à *deux résultats possibles*

Exemples :
(VRAI – FAUX) ; (OUI - NON) ; (PILE – FACE) ; (PAIR – IMPAIR) ; (SUCCES - ECHEC) ;(0 – 1)
Donc l'univers est Ω={s, e} (notation générale)

Formule
Dans une épreuve de Bernoulli, notons : p: *la probabilité d'avoir un succès*
q: *la probabilité d'avoir un échec*
On a : p+q =1 car l'un est le contraire de l'autre dans les événements {s}, {e}

4.2- Loi binomiale

- La *loi binomiale* s'applique lorsqu'il y *a répétition de l'épreuve de Bernoulli de façon indépendante.*
- Supposons répétée n fois la même épreuve de Bernoulli. On s'intéresse au nombre k de succès (on a : $0 \leq k \leq n$)

Une série de n épreuves :	E1	E2	E3	...............En
Un exemple de résultats :	s	e	e	..................s (contenant k succès)
Un autre exemple de résultat :	s	s	s	....................e (contenant k succès)

Il y a C_n^k séries possibles de n épreuves contenant k succès.

Chaque épreuve étant indépendante l'une de l'autre, la probabilité d'avoir k succès pour une série de n épreuves est : $p^k.\, q^{n-k}$

Ainsi, pour toutes les séries, la probabilité d'avoir k succès est : $C_n^k p^k.\, q^{n-k}$

p(k succès)= $C_n^k p^k.\, q^{n-k}$: C'est la FORMULE DE PROBABILITÉ BINOMIALE

Définition d'une probabilité binomiale
$p : \{0,1,......n\} \longrightarrow [0,1]$
$k \longrightarrow p(k)= C_n^k p^k.\, q^{n-k}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $p+q=1$

4.3- Remarque

On a vu que : $p(k)=C_n^k p^k.\, q^{n-k}$
Alors : p (0 ou 1 ou 2 ... ou n succès) $=C_n^0 p^0.\, q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots\ldots + C_n^n p^n q^0 = (p+q)^n$: formule de binôme
Or : Ω= {succès, échec}
Donc : p (Ω)= p(s) + p(e) =p+q = 1
Alors : p (0 succès ou 1 ou 2 ou .... ou n) = $(p + q)^n = 1^n = 1$
« 0 succès ou 1 succès ou .....ou n succès » est un événement sûr car au cours de n répétitions de l'épreuve on a 0 ou 1 ou...n succès.

EXERCICES

Dénombrement

Exercice 1 :

Soient $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $F = \{y_1, y_2, y_3\}$

1. Donner le nombre d'application de E dans F
2. Existe-t-il des injections de E dans F ?
3. Existe-t-il des surjections de E sur F ?

Exercice 2 :

E est un ensemble de p éléments et F un ensemble à n éléments. F est une application de E dans F.

Comparer n et p si

1. f est une injection ?
2. f est une surjection ?
3. f est une bijection ?

Exercice 3 :

De combien de façon différente est il possible de ranger 4 objets dans 10 boites, chaque boite pouvant contenir au plus un objet ?

Exercice 4 :

Dans le système décimal, combien y a-t-il d'entiers naturels de 3 chiffres, le chiffre des unités étant strictement inférieur à 7, celui des dizaines premier et celui des centaines impair ?

Exercice 5 :

Combien l'ensemble {a, b, c, d, e} comporte-t-il de parties ?

Exercice 6 :

Soit cinq points A, B, C, D, E d'un plan, tels qu'il n'y en ait pas trois alignés. On appelle figures géométriques les points, les segments et les triangles.

Combien, avec les points A, B, C, D, E, peut-on former de telles figures géométriques ?

Exercice 7 :

Si on augmente de 1 le nombre des éléments d'un ensemble fini, le nombre de ses parties double. Vrai ou faux ? Pourquoi ?

Exercice 8 :

Un magasine propose, pour un jeu- sondage, une liste de 7 chanteurs. On demande au lecteur d'entourer les noms des chanteurs qu'il aime bien. Il peut donc entourer de 0 nom, s'il n'en aime aucun, à 7 noms, s'il les aime tous. Combien y a-t-il de réponses possibles ?

Exercice 9:

On dispose de six plaquettes sur les quelles sont inscrits les chiffres 2, 4, 5, 6, 8 et 9.Combien de nombres distincts peut- on former en les utilisant toutes une fois et une seule ?

Exercice 10 :

Dans un jeu de 32 cartes combien y a-t-il de façon de choisir 3 cartes qui soient :

1. des as ?
2. de même valeur (3 as ou 3 rois ou ...) ?
3. des cœurs toutes les trois ?

Exercice 11 :

1. De combien de manières peut-on garer 2 voitures dans un parking à 5 places ?
2. De combien de manières peut-on garer 5 voitures dans un parking à 5 places ?
3. De combien de manières peut – on garer 5 voitures dans un parking à 2 places ?

Exercice 12 :

1. Calculer $A_{11}^3, A_{12}^4, C_7^3, C_6^6$
2. Calculer $\sum_{p=0}^{5} C_5^p$; $\sum_{p=0}^{6} C_6^p$
3- Développer $(1+x)^5$, $(1+x)^6$, $f(x) = (1+x)^n$.

En déduire $\sum_{p=0}^{n} C_n^p$; $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p$

Exercice 13 :

1. Simplifier $\frac{C_{n+1}^p}{C_n^p}$

Résoudre dans IN les équations :

2. $C_n^3 = 220$
3. $A_n^3 = 90n$
4. $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$
5. $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7}{2}n$
6. $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7}{2}n$
7. $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$

Exercice 14 :

Résoudre le système $\begin{cases} C_y^x = C_y^{x+1} \\ 4\,C_y^x = 5C_y^{x-1} \end{cases}$

Exercice 15 :

Démontrer que

1. $A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}$
2. $C_{n+2}^{k+1} = C_n^{k+1} + 2C_n^k + C_N^{k-1}$

Exercice 16 :

Exprimer en fonction de n et sans factorielle, les nombres : $a = \frac{(n+2)!}{n!}$; $b = \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$; $c = \frac{(2n+2)!}{(2n-1)!}$

Exercice 17 :

Développer $(1+x)^n$ puis dériver les deux membres. En déduire une expression simplifier de la somme : $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n$

Exercice 18 :

1. Montrer que $C_n^p C_{n-p}^{k-p} = C_k^p C_n^k$
2. En utilisant ce résultat, démontrer que :

$\sum_{p=0}^{k} (-1)^p C_n^p C_{n-p}^{k-p} = 0$ Où n et k sont des entiers tels que $n \geq k$.

Exercice 19 :

Calculer le quotient $A_n = \frac{C_n^1 C_{2n}^2}{C_{3n}^3}$ et trouver sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 20 :

Soit a et n deux nombres entier strictement positifs. On pose $B_n = (a+1)^n - na - 1$

1. Calculer B_1, B_2 et B_3
2. Démontrer par récurrence que B_n est divisible par a^2
3. Retrouver ce résultat en utilisant la formule du binôme.

Probabilité uniforme

Exercice 21 :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une « main » de 8 cartes. Calculez la probabilité d'obtenir :

1. Un as et un seul.
2. Exactement deux as.
3. Aucun as.
4. Au moins un as.
5. Exactement deux trèfles et un as
6. Exactement deux trèfles.
7. Exactement trois trèfles et deux rois.
8. Un carré et un seul.

Exercice 22 :

Dans un sac, on a mis cinq jetons verts numérotés de 1 à 5 et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4.
On prend simultanément trois jetons dans le sac.
On fait l'hypothèse que tous les tirages possibles ont la même probabilité.

1. Calculez.
   a) la probabilité d'obtenir trois jetons verts.
   b) la probabilité d'obtenir trois jetons rouges.
   c) la probabilité d'obtenir trois jetons de la même couleur.
2. Calculez les probabilités des évènements suivants :
   A : « On a sorti le jeton vert n°1 »
   B : « On a sorti le jeton rouge n°1 »,
   C : « On a sorti le jeton vert n°1 et le jeton rouge n°1 »
   D : « On a sorti un et un seul jeton portant le numéro 1 »
3. Calculez la probabilité pour qu'on ait deux numéros identiques. En déduire la probabilité pour qu'on ait trois numéros différents.

Exercice 23 :

Deux boules de couleurs différentes (rouge, noire) sont reparties dans trois cases de couleurs différentes (rouge, noire, jaune).

1. a) On suppose que chaque case ne peut contenir plus d'une boule. Combien y a-t-il de répartitions possibles de deux boules dans les trois cases ?
   b) On suppose toutes les répartitions équiprobables. Calculez les probabilités des évènements suivants :
   A : « Chaque boule est dans la case ayant sa couleur ».
   B : « La case jaune est vide »
   C : « La boule rouge est la seule qui soit dans la case ayant sa couleur »
2. a) On suppose que chaque case peut contenir plus d'une boule. Combien y a-t-il de répartitions possibles de deux boules dans les trois cases ?
   b) On suppose toutes les répartitions équiprobables. Calculez les probabilités des évènements B et C.

Exercice 24 :

Vous jouez avec deux dés.

1. Si la somme des points obtenus est strictement supérieur à 7, vous gagnez. Sinon, c'est votre adversaire. Qui est favorisé ?
2. Nouvelle règle : si la différence entre les points marqnés est 1 ou 2, vous gagnez. Sinon c'est votre adversaire. Qui est favorisé ?

Exercice 25:

1. On lance simultanément 3 dés. Quelle est la probabilité d'obtenir le 421 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir (au moins) un 6 en jetant un dé ? 2 dés ? 3 dés ? ... n dés ?

Exercice 26 :

On dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées 1, 1, 1, 1, 2,3.

1. Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro lors d'un lancer de ce dé
2. On lance ce dé 2 fois de suite. On note u le numéro apparu pour le premier lancer et v pour le second

On considère l'équation (E) : $x^2 + ux + v = 0$ dans IR. Calculer la probabilité pour que

a) (E) ait une racine double

b) (E) ait pour racines -2 et -1

Exercice 27 :

Une urne contient 2 boules rouges et 4 boules vertes. Les boules rouges portent respectivement le numéro 0 et 1 ; les boules vertes portent respectivement les numéros 2, 3,4 et 5. L'épreuve (E) consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne ; on appelle « succès » l'obtention de 3 boules de même couleur

On effectue une fois l'épreuve (E). Calculer la probabilité de l'événement suivant :

A « avoir un succès »

B « avoir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 6 »

Exercice 28 :

1. On utilise d'abord un dé cubique D1 dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. Ce dé est pipé de telle sorte que toutes les faces portant un numéro pair aient la même probabilité p d'apparition et toutes les faces portant un numéro impair aient aussi

La même probabilité q d'apparition ; de plus $q = 2p$

a)Montrer que $p = 1/9$

b) On jette une fois ce dé. Calculer la probabilité de l'événement

E « Le numéro apparu est pair »

c) On lance 3 fois de suite ce dé. Calculer la probabilité de l'événement

A « Le numéro 6 apparaît au moins ne fois au cours des 3 lancers »

B « On obtient le numéro 6 dès le premier lancer »

C « On obtient exactement un numéro pair au cours des 3 lancers »

2. On utilise un dé cubique D2 bien équilibré. Ses six faces portent respectivement les numéros 1, 2, 3, 4,5 et 6

On lance une fois ce dé. Calculer la probabilité de l'événement

F « le numéro apparu est pair »

Exercice 29 :

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant deux boules identiques, indiscernables au toucher dont l'une est blanche et l'autre noire, et d'un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Le jeu consiste à :

- tirer une boule de l'urne et, on note sa couleur
- lancer le dé et on note le nombre obtenu

On considère les événements A, B et C suivants :

A « La boule tirée est noire et le dé affiche le numéro 4 ou 6 »

B « la boule tirée est blanche et le dé affiche le numéro 1ou 2 ou 3 ou 5 »

C « les autres cas »

1. Un joueur joue une fois. Calculer les probabilités d'avoir ces événements
2. Le joueur joue maintenant 3 fois de suite et dans les mêmes conditions

a)Calculer la probabilité de réaliser A au $2^{ème}$ jeu et C aux deux autres

b) Calculer la probabilité de réaliser B au 1^{er} jeu et A au $2^{ème}$

c)Calculer la probabilité de réaliser C aux trois jeux

Exercice 30 :

On dispose de 2 urnes A et B. A contient 2 boules rouges, 1 boule blanche et 2 boules noires B contient 3 boules blanches et 1 boule noire

On lance un dé cubique normal ayant 6 faces numérotées de 1 à 6

Si on obtient 1 ou 2, on extrait une boule de A et dans le cas contraire on extrait une boule de B

1. Calculer la probabilité p de tirer une boule rouge dans A
2. Calculer la probabilité q de tirer une boule noire dans B
3. Calculer la probabilité de tirer un boule blanche
4. sachant qu'on tiré une boule blanche, quelle est la probabilité pour qu'elle soit issue de A

<u>Exercice 31 :</u> On dispose de deux boîtes de stylos : A et B. La boite A contient 6 stylos rouges et 4 stylos bleus marqués A, la boite B contient 7 stylos rouges et 8 stylos bleus marqués B.

On range le tout dans un même sac.

1. On tire au hasard et simultanément 3 stylos du sac .Quelle est la probabilité d'obtenir :
   - A. : « 3 stylos bleus »
   - B. : « 3 stylos de même couleur »
   - C. : « 1 stylo bleu et 2 rouges »
   - D. : « 2 stylos marqués A et 1 stylo marqué B »

2. On tire successivement 3 stylos sans remettre dans le sac après tirage le stylo qui vient d'être tiré. Quelle est la probabilité d'obtenir :

   E : « 3 stylos de même couleur provenant d'une même boîte »

   F : « 2 stylos bleus et un stylo rouge »

   G : « 3 stylos d'une même marque »

<u>Exercice 32:</u>

Dans une ville il y a 3 médecins .Quatre habitants de cette ville, malades le même jour, appellent au hasard un de ces trois médecins.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un même médecin soit appelé.
2. Quelle est la probabilité pour que les trois médecins soient appelés.

<u>Exercice 33</u>

On lance simultanément trois dés.

Quelle est la probabilité d'obtenir à la fois les numéros : 1, 2, 4.

<u>Exercice34</u>

On dispose de deux cages A et B.

La cage A renferme 2 souris mâles et 8 souris femelles

La cage B renferme 5 souris mâles et 5 souris femelles.

On tire au hasard une souris de A et successivement sans remise 2 souris de B.

1. Calculer la probabilité pour que les trois souris soient 2 femelles et 1 mâle.
2. Les souris de la cage A sont numérotées selon leur couleur : deux portent le numéro 20, quatre portent le numéro 10, et quatre portent le numéro 5.

On tire simultanément trois souris d'A. Calculer la probabilité pour que la somme des points marqués sur les trois souris soit au moins égale à 30.

<u>Exercice35</u>

On tire successivement au hasard 4 lettres du mot STATISTIQUE.

Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre le mot SITE dans les conditions suivantes :

1. Si on replace les lettres après chaque tirage.
2. Si on ne replace pas les lettres après chaque tirage.

PROBABILITE BINOMIALE

<u>Exercice 36</u>

On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ? Deux fois face ?

Exercice 37

Un lot de vaccin contre le choléra est efficace à 55%, c'est-à-dire sur 100 personnes vaccinées, 55 sont sûres d'être protégées contre la maladie.

On vaccine 10 personnes avec ce produit, quelle est la probabilité pour que :

1. Aucune des 10 personnes ne soit protégée ?
2. Les 10 personnes soient protégées ?
3. La moitié des personnes soit protégée ?

Exercice 38

Deux personnes crient en même temps un chiffre compris entre 0 à 9.

1. Quelle est la probabilité pour que les deux personnes crient au moins une fois le même chiffre au cours de 5 expériences ?
2. Combien de fois faut-il répéter l'expérience pour qu'elles crient au moins une fois le même chiffre avec une probabilité supérieure à 0,5 ?

On donne $\ln 2 = 0{,}7$; $\ln 5 = 1{,}6$; $\ln 3 = 1{,}1$.

Exercice 39

Un tireur a la probabilité p d'atteindre le cible .Il effectue des tirs successifs indépendants les uns des autres On suppose que les tirs sont équiprobables.

1. Le tireur effectue 4 tirs.

Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne 3 fois la cible ? Prendre $p = 0{,}1$.

2. Le tireur effectue n tirs.

Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne la cible au moins une fois ? Calculer cette probabilité si $p = 0{,}2$.

3. Trouver le nombre minimal de tirs que doit effectuer le tireur pour que la probabilité d'atteindre au moins une fois le cible dépasse 0,9.

On donne $\ln 2 = 0{,}7$; $\ln 5 = 1{,}6$.

Exercice 40

On suppose que dans un pays, il naît en moyenne 52 garçons pour 50 filles.

1. Un enfant va naître. Quelle est la probabilité pour que :
   a) Cet enfant soit un garçon ?
   b) Cet enfant soit une fille ?
2. Dans une famille de 5 enfants, quelle est la probabilité pour que :
   a) Il y ait 3 filles et 2 garçons ?
   b) Il y ait 5 filles ?

SUJET BAC C Madagasikara

Exercice 41 (Bac C 1996)

Une urne contient n jetons ($n \in \mathbb{N}$; $n > 5$) dont 5 blancs et les autres noirs. On tire au hasard et successivement sans remise k jetons dans l'urne, avec $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n-4$.

Chaque jeton a la même probabilité d'être tiré. On note par E_k l'évènement : « on n'obtient aucun jeton blanc qu'au $n^{\text{ième}}$ tirage » et $P_k(n)$ sa probabilité.

1. Calculer $P_k(n)$ en fonction de n et k.
2. On prend $k = 2$, $P_2(n)$ désigne alors la valeur de $P_k(n)$ pour $k = 2$.
   a)Calculer $P_2(n)$ en fonction de n.
   b) Déterminer les valeurs de n pour que $P_2(n)$ soit maximale.
3. Déterminer l'ensemble I décrit par n pour que $P_2(n) < \frac{1}{5}$.

Exercice 42 (Bac C 1997)

Soit n un nombre entier tel que $n \geq 2$. Un sac contient n boules blanches et 2n boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément et au hasard trois boules du sac. On considère les évènements :
   A : « On n'obtient qu'une seule boule blanche »
   B : « on obtient au moins une boule blanche »
   a) Calculer les probabilités suivantes : $P_n = P(A)$ et $Q_n = P(B)$ en fonction de n.
   b) Déterminer :
   $p = \lim_{n \mapsto +\infty} (P_n) et\ q = \lim_{n \mapsto +\infty} (Q_n)$
2. On tire successivement et au hasard trois boules du sac en remettant dans le sac la boule tirée avant le tirage suivant.
   a) Calculer P(A) et P(B).
   b) Vérifier alors que : $p = P(A)$ et $q = P(B)$.

Dans toute la suite, on prend $n = 2$ et on ajoute 6 boules rouges dans le sac.

3. On tire successivement et au hasard trois boules du sac sans remettre dans le sac la boule tirée. On considère les évènements :
   C : « on a exactement une seule couleur »
   D : « on a exactement deux couleurs distinctes »
   E : « on a trois couleurs différentes »

Calculer les probabilités P(C), P(D) et P(E).

Interpréter le résultat de la somme de ces trois probabilités.

4. On tire successivement et au hasard des boules du sac sans remettre dans le sac la boule tirée.

Calculer la probabilité pour que « la première boule blanche n'apparaisse qu'au quatrième tirage ».

Exercice 43 (Bac C 1998)

Une urne contient :

Une boule numérotée 1

Deux boules numérotées 2

Trois boules numérotées 3

------------//-------------------

------------//-------------------

------------//-------------------

.n boules numérotées n

Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On prend $n = 4$. L'épreuve consiste à extraire à la fois trois boules de l'urne. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   B : « Avoir 3 boules de numéros distincts deux à deux »
   I : « Le produit des trois numéros obtenues est inférieur ou égale à 9 »
2. On suppose qu'il y a 55 boules dans l'urne.

a) Déterminer la valeur de n.

b) On tire une boule de l'urne. Déterminer la probabilité pour que cette boule porte un numéro pair.

3. Dans cette question, on prend n impair. On tire une boule de l'urne.
   a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
   b) Exprimer en fonction de n, la probabilité des évènements suivants :
      E : « Avoir une boule de numéro impair »
      N : « Avoir une boule portant un numéro strictement supérieur à $\frac{n}{2}$ ».

Exercice 44 (Bac C 1999)

Une urne contient trois jetons blancs et n jetons rouges ($n \in \mathbb{N}^*$) indiscernables au toucher.

On choisit simultanément, au hasard, deux jetons de l'urne.

1. on appelle « succès » l'obtention de deux jetons blancs.

Calculer en fonction de n, la probabilité P_n d'un succès et déterminer $\lim_{n \mapsto +\infty} P_n$

2. On appelle « gain » l'obtention de deux jetons de même couleur.

Calculer, en fonction de n, la probabilité q_n d'un gain et déterminer $\lim_{n\to+\infty} Q_n$

3. a)Trouver une solution particulière (u, v) de ZxZ, de l'équation entière d'inconnues (x, y) Définie par : $5x - 4y = 1$.

   b)En déduire une solution particulière$(x_0,y_0) \in$ ZxZ de l'équation $5x - 4y = 6$ (1).

   c)Montrer alors que $5(x-x_0) - 4(y-y_0) = 0$.

En déduire que $x-x_0$ et $y-y_0$ sont divisible par 4 et 5 respectivement.

4. a)Donner les solutions générales de l'équation (1).

   b) Trouver dans ZxZ les solutions (x,y) de (1) vérifiant : $-18 \leq x \leq 0$ et $-24 \leq y \leq 0$.

Exercice 45 (Bac C 2000)

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher. Cinq boules sont blanches dont une porte le numéro 0 , une le numéro 1 et trois le numéro 2. Cinq boules sont noires dont quatre portent le numéro 2 et une le numéro 3.

1. On tire au hasard, simultanément trois boules du sac. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : « Toutes les boules sont blanches »
   B : «Les boules sont de couleur différentes ».
   C : « On obtient la boule numérotée 0 ».
   D : « Les numéro des boules sont pairs ».
2. Dans cette partie, on enlève du sac la boule numérotée 0. L'épreuve est maintenant la Suivante : du sac contenant les neuf boules restantes, on tire au hasard, successivement et avec remise deux boules. On note par a le numéro apparu sur la première boule, b le numéro apparu sur la deuxième et d = PGCD(a,b) le plus grand commun diviseur de a et b.
   a) Démontrer que l'ensemble des valeurs prises par d est $D = \{1,2,3\}$.
   b) Pour tout $k \in D$, on désigne par E_k l'ensemble des couples (a,b) tels que d = k, c'est-à-dire : $E_k = \{ (a,b)/PGCD(a,b) = k\}$. On note par p_k la probabilité de E_k. Montrer que $p_1 = \frac{31}{81}$; puis déterminer p_2 et p_3.
   c) Calculer la probabilité de l'évènement E : « l'équation $ax + by = 2$, d'inconnues (x,y) de ZxZ admet des solutions ».
   d) Résoudre dans ZxZ l'équation : $3x + 2y = 2$.

Exercice 46 (Bac C 2001)

1. On considère deux dés cubiques parfaitement équilibrés D_1 et D_2 tels que :
   - D_1 porte sur ses six faces les chiffres 1,1,2,3,3,4.
   - D_2 porte sur ses six faces les chiffres 1,2,3,4,5,6.

   On simultanément ces deux dés. On note a le chiffre lu sur D_1 et b le chiffre lu sur D_2.
   Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « obtenir un couple (a,b) tel que a = b. »
   B : « obtenir un couple (a, b) de nombre impairs ».
2. On prend le dé D_2 dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.
   On lance une fois ce dé. A chaque entier n obtenu ($1 \leq n \leq 6$), on associe le couple d'entiers (A, b) tels que $a = 5n + 3$ et $b = 3n + 1$.
   a) Pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5,6\}$, donner le couple (a, b) correspondant ainsi que leur plus grand commun diviseur d (d = PGCD(a, b)).
   b) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
      C : « a et b sont des nombres premiers ».
      D : « a et b sont premiers entre eux ».
3. Résoudre l'équation $13x - 7y = 11$, d'inconnues $(x,y) \in$ INxIN

Exercice 47 (Bac C 2002)

1. a) Résoudre dans Z x Z l'équation $11x - 8y = 1$.

b) Calculer PGCD (319,232,145) puis résoudre dans Z x Z l'équation $319x - 232y = 145$.

2. Une urne contient 81 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 81. L'épreuve E consiste à tirer au hasard et successivement deux boules de l'urne, sans remettre dans l'urne la boule tirée.

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Tirer deux boules portant deux numéros pairs ».

B : « Tirer deux boules portant deux numéros multiples de 3 ».

C : « Tirer deux boules portant deux numéros qui sont des nombre premiers ».

3. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé . On donne les deux droites (D_1) d'équation $11x - 8y - 1 = 0$ et (D_2) d'équation $319x - 232y - 145 = 0$. (On ne demande pas de construire ces deux droites). A l'épreuve E décrit précédemment, on associe le point M(x ;y) du plan où x est le numéro porté par la première boule tirée et y par la seconde.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

D : « Le point M appartient à la droite (D_1) ».

E : « Le point M n'appartient pas à la droite (D_2) ».

__Exercice 48__ (Bac C 2003)

I. Une roue est divisée en douze secteurs identiques : trois rouges, quatre blancs, quatre vert et un noir. Quand on fait tourner la roue, chaque secteur à la même probabilité d'être pointé par un index fixe lorsque la roue s'arrête.

1. Setra tourne la roue une fois. Déterminer les probabilités des évènements suivants :

   A : « l'index pointe sur un secteur noir ».

   B : « l' index pointe sur un rouge ou un blanc ».

2. On adopte la règle suivante : lors d'une partie, le joueur marque 10 points si l'index pointe sur un secteur noir ; 5points sur un rouge ; 1 point sur un vert et (-3) point sur un blanc. Naivo joue trois parties successives d'une manière indépendante. Déterminer les probabilités des évènements :

   C : « Naivo totalise 25 points »

   D : « Naivo totalise au moins 21 points ».

II. 1. Pour $\dot{x}$ dans Z / 6Z ,donner toutes les valeurs de $\dot{x}^2$

2. Donner alors les quatre éléments de Z / 6Z qui sont solutions de l'équation $\dot{x}^p = \dot{x}$, p étant un entier naturel non nul.

3. Montrer que pour tout $\dot{x}$ de Z / 6Z on a $\dot{x}^3 = \dot{x}$.

4. En déduire que pour tout entier naturel : $n^3 - n$ est divisible par 6.

__Exercice 49__ (Bac C 2004)

I. Un dé cubique a quatre faces numérotées 0 et deux faces numérotées 1. quand on lance ce dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.

1. On lance ce dé une fois. Calculer les probabilités des évènements suivants :

   A « La face supérieure du dé porte le numéro 0 ».

   B « La face supérieure du dé porte le numéro 1 ».

2. On lance ce dé cinq fois de suite ; les lancers étant indépendants, calculer les probabilités des évènements suivants :

   C : «Le numéro 0 apparaît exactement une fois »

   D : «Le numéro 1 apparaît exactement cinq fois ».

   E : « Le numéro 0 apparaît au moins une fois ».

II. 1. a) Convertir dans la base 10 l'entier x écrit dans le système binaire : $x = (\overline{10101})_2$,

b) Convertir dans le système binaire l'entier naturel y = 23 de la base 10.

2. a) Dresser la table de multiplication et la table d'addition de Z/2Z.

b) Résoudre dans Z/2Z l'équation à une inconnue x : $x^2 + x + \bar{2} = \bar{0}$

c) Résoudre dans Z/2Z x Z/2Z le système de deux équations à deux inconnues x et y $\begin{cases} \bar{2}x + y = \bar{0} \\ x + \bar{3}y = \bar{0} \end{cases}$

Exercice 50 (Bac C 2005)

1. On donne l'équation : $2x - y = 1$ (1), x et y sont des entiers relatifs.
   a) Trouver une solution particulière (x_0, y_0) de cette équation.
   b) Résoudre dans Z/ x Z/ l'équation (1).
2. Un entier naturel A est tel que :
   - dans la base 10, A s'écrit : A = b+6.
   - dans le système binaire, A s'écrit : $A = \overline{(1a1)}_2$

Trouver une relation qui lie a et b.

3 .Résoudre dans IN^2 le système à deux inconnue x et y suivant : $\begin{cases} x + y = 60 \\ PGCD\ (x, y) = 12 \end{cases}$

4 . Deux urnes identiques U_1 et U_2 contiennent chacune :
- deux boules numérotée chacune 0.
- trois boules numérotée chacune 1.
- une boule numérotée 2

On tire au hasard une boule de U_1 puis on extrait au hasard et simultanément deux boule de U_2.

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « Les boules obtenues portent le même numéro ».
   B : « La somme des numéros notés est égale à 4 ».

b) Soient x le numéro de la première boule tirée et y la somme des numéros des boules obtenues au deuxième tirage. Calculer la probabilité de l'évènement :
   C : « Le couple (x,y) est solution de l'équation $2x - y = 1$ ».

Exercice 51(Bac C 2006)

I. Dans un système de numération de base n, on considère les nombres $a = \overline{211}$, $b = \overline{312}$ et $c = \overline{133032}$

1. a) Sachant que c = ab, montrer que n divise 8.
   b) En déduire la valeur de n.
   c) Ecrire a et b dans le système décimal.
2. Résoudre dans Z x Z, l'équation : $37x + 54y = 3$

II. Une urne contient 4 jetons portant respectivement les numéros 0, 1, 2, 3.On tire un à un sans remise des jetons jusqu'à ce que l'urne soit vide.

1. combien y a-t-il des résultats possibles ?
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   E : « Le numéro du 3ème jeton tiré est égale à 3 ».
   F : « Le numéro du 3ème jeton tiré est compris entre les numéros des deux premiers ».
   G : « Le produit des numéros des deux derniers jetons est non nul ».

Exercice 52(Bac C 2007)

I. 1. Montrer par récurrence que $9^n - 2^n$ Est divisible par 7 pour tout $n \in IN^*$.
   2. Montrer que pour tout entier naturel non nul, $3n - 2$ et $5n - 3$ sont premiers entre eux.
   3. On considère dans Z / 7Z , l'équation(E) : $x^2 - x + \dot{1} = \dot{0}$
   a) Vérifier que $\dot{5}$ est une solution de (E).
   b) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à $(x - \dot{4})^2 = \dot{1}$.
   c) En déduire l'ensemble S des entier relatifs x vérifiant $\begin{cases} |x| < 7 \\ x^2 - x + \dot{1} = \dot{0} \end{cases}$

II. Une urne contient dix boules blanches numérotées de 1 à 10, six boules noires numérotées de 11 à 16 et quatre boules vertes numérotées de 17 à 20.

1. On tire au hasard et successivement sans remise deux boules de l'urne ; calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
B : « les numéro des boules tirées sont des nombre premiers ».

2. On tire au hasard et successivement avec remise deux boules de l'urne ; calculer la probabilité des évènements suivants :
C : « une au moins des boules tirées est blanche »
D : « les numéros des boules tirées sont divisibles par 7 ».
(N .B. : Mettre les résultats sous forme de fractions irréductibles)

<u>Exercice 53</u> (Bac C 2008)

A. Probabilité

Une urne contient six billes indiscernables au toucher, dont quatre numérotées 12 et deux numérotées 13. Pour commencer, le jeu consiste à extraire simultanément et au hasard trois billes de l'urne.

1. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E : « la somme des trois nombres inscrit sur les trois billes extraites est supérieure à 36» .
F : « les trois billes extraites portent le même numéro »
2. Maintenant, le jeu consiste à extraire successivement et sans remise, deux billes de l'urne.

Calculer la probabilité de l'évènement :
G : « Le produit de deux nombres inscrits sur les deux billes est un carré parfait »

3. Enfin, le jeu consiste à extraire successivement et avec remise, sept billes de l'urne.

Calculer la probabilité de l'évènement.
H : « Obtenir au moins une bille numéro 13 ».

<u>N.B.</u> : On donnera tous les résultats à 10^{-2} près.

Arithmétique

1. On considère le nombre A définie pour tout entier naturel n par $A = 9^{n+1} + 2^{6n+1}$. Démontrer que A est divisible par 11 pour tout n de IN :
a) en utilisant les congruences
b) en raisonnant par récurrence.
2. Déterminer tout les entiers relatifs x vérifiant le système $\begin{cases} 3x - 2 \equiv 0\ [5] \\ |x| < 10 \end{cases}$

<u>Exercice 54</u> (Bac C 2009)

A. Probabilité

Chaque lettre du mot « FLEURS » est écrite sur chaque face d'un dé cubique normal (une seule lettre sur chaque face). Un enfant lance trois fois successives ce dé d'une manière indépendante. Il obtient ainsi un « mot » de trois lettres (un mot peut avoir un sens ou non).

1. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A « L'enfant obtient un mot commençant par une consonne ».
B « L'enfant obtient un mot commençant et se terminant par la même lettre ».
2. Soit C l'évènement « l'enfant obtient un mot ayant des lettres toutes différentes ».
a) Définir l'évènement $\overline{C}$, évènement contraire de C.
b) Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{C}$.

NB : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

B. Arithmétique

1. Dans cette question *a* désigne un élément de Z / 6Z.
2. Calculer $a^2 + 3a + 2$ pour $a = 4$.
3. a) Résoudre dans Z^2, l'équation (E) : $7x - 3y = 0$.
b) Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, une solution particulière de l'équation (F) : $7x - 3y = 2$.
Résoudre dans Z^2, l'équation (F).

Collection

Unité

Maths Term C

Première Edition 2010 - UCEMS

Impression : SEDICO