1 ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชัน

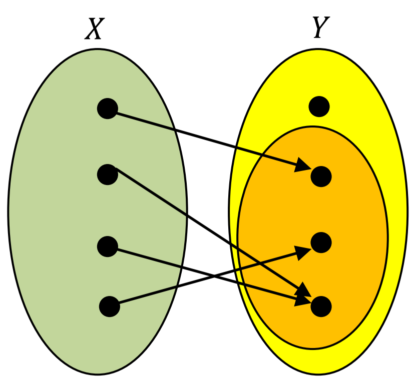
Function and Graph of Function

1.1 นิยามและคุณสมบัติบางประการที่ควรทราบ

นิยาม 1.1 ให้ X และ Y เป็นเซตที่ไม่ว่างของจำนวนจริง ฟังก์ชันจาก X ไป Y คือการส่งแต่ละสมาชิกในเซต X ไปยังสมาชิกเพียงตัวเดียวในเซต Y

ข้อสังเกตุ สมาชิกในเซต X จะต้องถูกใช้หมด และเมื่อพิจารณาสมาชิกของ X แต่ละตัว จะพบว่ามีสมาชิกใน Y เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ถูกส่งมาจากสมาชิกในเซต X

$f: X \to Y$



เซต X ถูกเรียกว่า โดเมน (Domain) ของฟังก์ชัน แต่ละสมาชิก x ในเซต X ที่ส่งไปยังสมาชิก y ในเซต Y จะเรียกสมาชิกใน y ในเซต Y ที่ถูกส่งจาก x ในเซต X ว่า ภาพ (image) ของ x และเรียกเซตของภาพทั้งหมดว่า เรนจ์ (Range) ของฟังก์ชัน

อาจจะมีสมาชิกบางตัวในเซต Y ที่ไม่เป็นภาพ

สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน (Function Notation)

เรามักจะใช้สัญลักษณ์ภาษาอังกฤษเช่น f, F, g, G แทนฟังก์ชัน เมื่อให้ f เป็นฟังก์ชันที่ส่งจำนวน x ในโดเมนไปยังภาพในเรนจ์ เราจะใช้สัญลักษณ์ $f(x)$ อ่านว่า "f ของ x" หรือ "f ที่ x" นั่นคือ การอ้างถึงค่า $f(x)$ ซึ่งเป็นภาพของ f ที่ x

สำหรับฟังก์ชัน $y = f(x)$ เราจะเรียนตัวแปร x ว่าตัวแปรอิสระ (Independent Variable) และเรียกตัวแปร y ว่าตัวแปรตาม (Dependent Variable)

ตัวอย่างของฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 3, f(x) = 10x - x^2, f(x) = 2^x, f(x) = \log x + 2$

อัตราการเปลี่ยนแปลง (Rate of Change)

ถ้า y เป็นฟังก์ชันของ t โดย $y = f(t)$ แล้ว
การเปลี่ยนแปลงของ y ระหว่าง $t = a$ กับ $t = b$ นิยามโดย $\Delta y = f(b) - f(a)$
หน่วยของการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชัน คือ หน่วยของ y

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y ระหว่าง $t = a$ กับ $t = b$ นิยามโดย $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
หน่วยของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชัน คือ หน่วยของ y ต่อหน่วยของ t

ตัวอย่าง 1.1 จากตารางบันทึกอุณหภูมิสูงสุดของกรุงเทพฯ ในช่วงเดือนกุมภาพันธ์ 2551

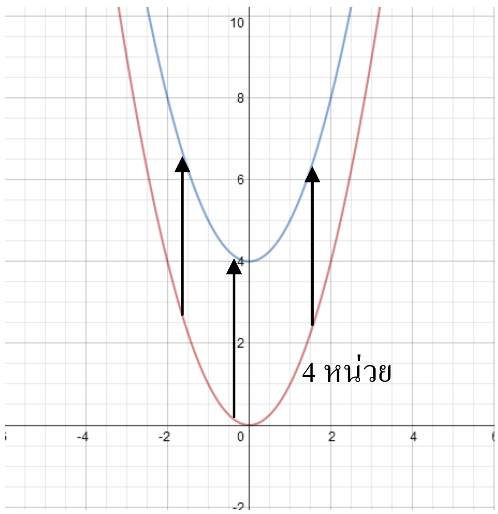
วันที่	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
อุณหภูมิ °C	30	31	33	31	32	30	32	33	32	31	33

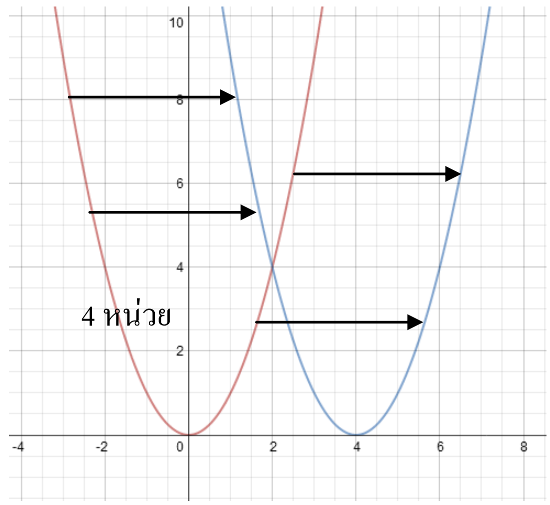
จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของอุณหภูมิสูงสุดระหว่างวันที่ 16 ถึงวันที่ 21 กุมภาพันธ์ 2551

1.2 เทคนิคบางประการในการสร้างและกราฟ

1.2.1 การเลื่อน Shift

สำหรับฟังก์ชัน $y = x^2 + 4$ ค่าของ y ของฟังก์ชันนี้จะมากกว่าค่าของ y ในฟังก์ชัน $y = x^2$ อยู่ 4 หน่วยเสมอ ไม่ว่าค่าของ x จะเป็นค่าใด นั่นเปรียบได้กับการเลื่อนกราฟ $y = x^2$ ไปตามแกน y จำนวน 4 หน่วย





ทำนองเดียวกัน $y = (x-4)^2$ ก็คือการเลื่อนกราฟ $y = x^2$ ไปทางขวามือ 4 หน่วย

<u>สรุป</u>

1. กราฟของ $y = f(x) + k$ คือการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ขึ้นตามแกน y เป็นจำนวน k หน่วย (ลงตามแกน y เป็นจำนวน k หน่วย ถ้า $k < 0$)
2. กราฟของ $y = f(x-k)$ คือการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ไปทางขวาตามแกน x เป็นจำนวน k หน่วย (ไปทางซ้ายตามแกน x เป็นจำนวน k หน่วย ถ้า $k < 0$)

1.2.2 การบวกกันของฟังก์ชัน (Sum of Functions)

ถ้าให้ $m(t)$ คือ จำนวนนิสิตชายของทั้งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$w(t)$ คือ จำนวนนิสิตหญิงของทั้งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เราสามารถนิยาม $n(t)$ เป็นจำนวนนิสิตทั้งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ โดย $n(t) = m(t) + n(t)$

1.2.3 ฟังก์ชันประกอบ (Composite Function)

ฟังก์ชันประกอบ ก็คือ ฟังก์ชันของฟังก์ชัน

เช่น $f(t) = (t+1)^4$

สามารถพิจารณาในรูป ฟังก์ชันภายใน และฟังก์ชันภายนอก

ในที่นี้ฟังก์ชันภายในอาจจะเป็น $t+1$ และฟังก์ชันภายนอกจะเป็นฟังก์ชันกำลัง 4

$$f(2) = (2+1)^4 \underset{\xrightarrow[\text{1st Calculate}]{}}{=} 3^4 \underset{\xrightarrow[\text{2nd Calculate}]{}}{=} 81$$

เราสามารถเขียน $f(t) = (t+1)^4$ ได้ในรูปของฟังก์ชันภายในและภายนอก โดยนิยามตัวแปรใหม่ u เช่น

ให้ฟังก์ชันภายในคือ $u = t+1$ และให้ฟังก์ชันภายนอกคือ $y = u^4$

หรืออาจจะเป็น

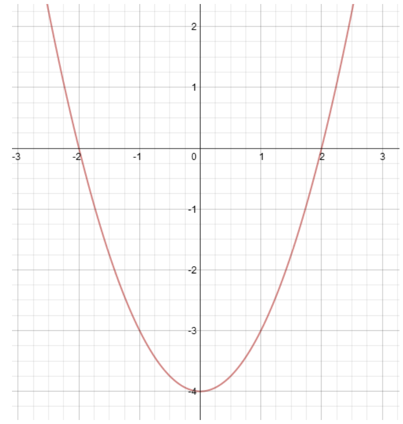
ฟังก์ชันภายในคือ $u = (t+1)^2$ และให้ฟังก์ชันภายนอกคือ $y = u^2$

1.2.4 การตัดแกนของกราฟ (Axis Intercepts from a Graph)

x-intercept(s) ให้แทน $y = 0$ จะได้สมการในตัวแปร x จากนั้นหาค่าของ x

y-intercept(s) ให้แทน $x = 0$ จะได้สมการในตัวแปร y จากนั้นหาค่าของ y

ตัวอย่าง 1.2 จงหาจุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y ของกราฟ $y = x^2 - 4$



1.2.5 สมมาตร (Symmetry)

การรู้สมมาตรจะช่วยให้การเขียนกราฟง่ายขึ้น สมมาตรที่จะพิจารณาคือ สมมาตรแกน x สมมาตรแกน y และสมมาตรจุดกำเนิด

สมมาตรแกน x (Symmetric with respect to the x-axis)

กราฟจะมีสมมาตรแกน x ถ้าทุกจุด (x, y) ที่พบบนกราฟ แล้วจะมีมีจุด $(x, -y)$ อยู่บนกราฟด้วย

<u>วิธีทดสอบสมมาตรแกน x</u> ให้แทน y ด้วย $-y$ ถ้าสมการไม่เปลี่ยน ก็แสดงว่ากราฟนั้นมีสมมาตรแกน x

สมมาตรแกน y (Symmetric with respect to the y-axis)

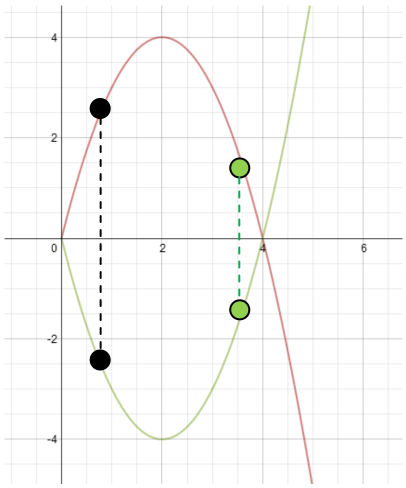
กราฟจะมีสมมาตรแกน y ถ้าทุกจุด (x, y) ที่พบบนกราฟ แล้วจะมีมีจุด $(-x, y)$ อยู่บนกราฟด้วย

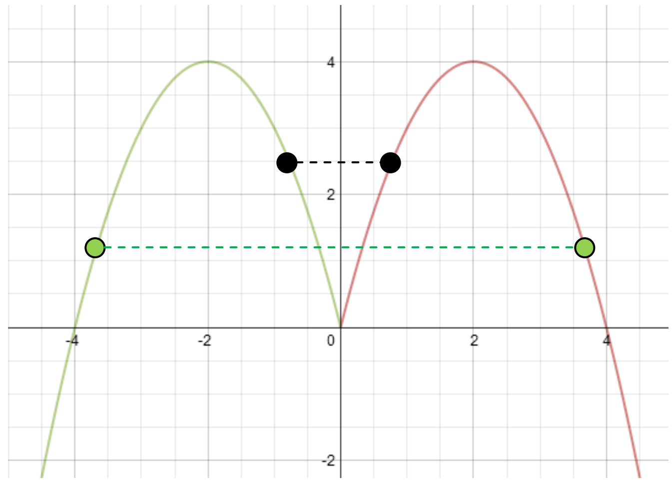
<u>วิธีทดสอบสมมาตรแกน y</u> ให้แทน x ด้วย $-x$ ถ้าสมการไม่เปลี่ยน ก็แสดงว่ากราฟนั้นมีสมมาตรแกน y

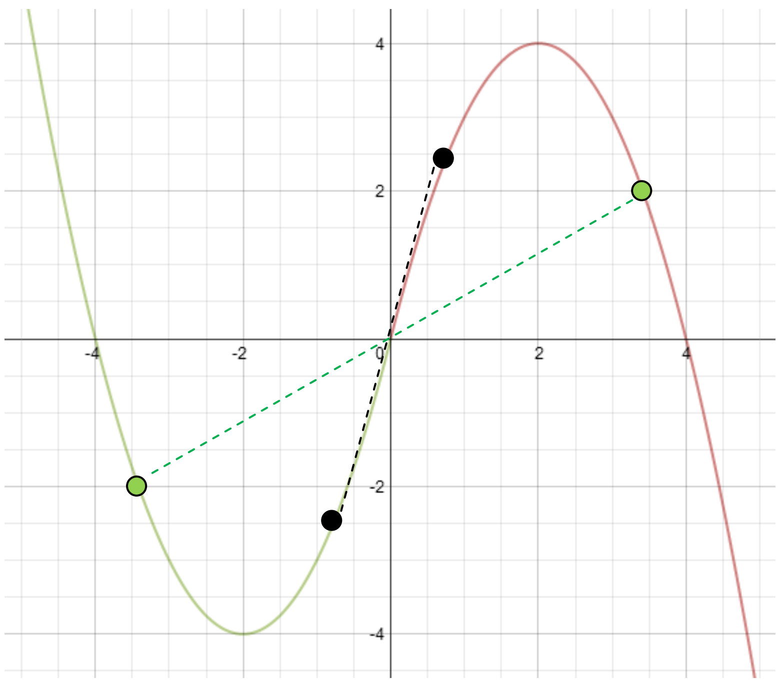
สมมาตรจุดกำเนิด (Symmetric with respect to the origin)

กราฟจะมีสมมาตรจุดกำเนิด ถ้าทุกจุด (x, y) ที่พบบนกราฟ แล้วจะมีมีจุด $(-x, -y)$ อยู่บนกราฟด้วย

<u>วิธีทดสอบสมมาตรแกน y</u> ให้แทน x ด้วย $-x$ และแทน y ด้วย $-y$ ถ้าสมการไม่เปลี่ยน ก็แสดงว่ากราฟนั้นมีสมมาตรจุดกำเนิด







ตัวอย่าง 1.3 จงทดสอบสมมาตรแกน x สมมาตรแกน y และ สมมาตรจุดกำเนิด

a) $x^2 + y - 9 = 0$

b) $4x^2 + y^2 = 4$

1.2.6 ฟังก์ชันคู่ ฟังก์ชันคี่ (Even and Odd Function)

ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า **ฟังก์ชันคู่ (Even Function)** ถ้า ทุกจำนวน x ในโดเมนและจำนวน $-x$ ในโดเมน แล้วพบว่า $f(-x) = f(x)$

ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า **ฟังก์ชันคี่ (Odd Function)** ถ้า ทุกจำนวน x ในโดเมนและจำนวน $-x$ ในโดเมน แล้วพบว่า $f(-x) = -f(x)$

ทฤษฎีบท 1.1 ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันคู่ เมื่อและต่อเมื่อ กราฟของฟังก์ชันมีสมมาตรกับแกน y
ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันคี่ เมื่อและต่อเมื่อ กราฟของฟังก์ชันมีสมมาตรกับจุดกำเนิด

1.2.7 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด (Increasing and Decreasing Function)

ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม เหนือช่วงเปิด I ถ้าสำหรับ x_1 และ x_2 ใดๆ ใน I ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้วเราได้ว่า $f(x_1) < f(x_2)$

ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันลด เหนือช่วงเปิด I ถ้าสำหรับ x_1 และ x_2 ใดๆ ใน I ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้วเราได้ว่า $f(x_1) > f(x_2)$

ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันคงที่ เหนือช่วงเปิด I ถ้าสำหรับทุกค่า x ใน I แล้วเราได้ว่า ค่าของ $f(x)$ เท่ากัน

ตัวอย่าง 1.4 จงทดสอบฟังก์ชันต่อไปนี้ ข้อใดเป็นฟังก์ชันคู่ ข้อใดเป็นฟังก์ชันคี่

a) $f(x) = x^2 - 5$
b) $f(x) = x^3 - 1$
c) $f(x) = 5x^3 - x$
d) $f(x) = |x|$

1.3 ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function)

1.3.1 นิยามทั่วไป

ฟังก์ชันเชิงเส้นเขียนในรูป $y = f(x) = b + mx$

กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น ก็คือ กราฟเส้นตรง ที่มี m เป็นความชัน หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เมื่อเทียบกับ x และมี b เป็นจุดตัดแกน y

เราอาจหาค่าความชัน m ได้จาก $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

สมการเส้นตรงที่มีความชัน m ผ่านจุด (x_0, y_0) คือ $y - y_0 = m(x - x_0)$

Graph of Function (see here)

1.3.2 การสร้างและการกำหนดฟังก์ชันเชิงเส้น

ตัวอย่าง 1.5 ในแต่ละปี กรุงเทพมหานคร จะมีปริมาณขยะเพิ่มขึ้น โดยในปี 2540 มีปริมาณขยะ 65.2 ล้านตัน และในปี 2550 มีปริมาณขยะ 80.6 ล้านตัน

a) สมมุติว่า จำนวนขยะที่เพิ่มขึ้นในกรุงเทพมหานคร เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของเวลา จงหาสูตรของฟังก์ชันนี้ โดยหาจากสมการเส้นตรงที่ผ่าน 2 จุด

b) จงใช้สูตรที่ได้ ทำนายปริมาณขยะของกรุงเทพมหานครในปี 2556

ตัวอย่าง 1.6 จากข้อมูลในตาราง

ราคา(บาท) p	5	10	15	20
จำนวนการสั่งซื้อ q	100	90	80	70

a) จงหา q ในรูปฟังก์ชันของ p

b) จงหา p ในรูปฟังก์ชันของ q

1.3.3 บทประยุกต์ของฟังก์ชันเชิงเส้น

ฟังก์ชันต้นทุน (Cost Function)

ฟังก์ชันต้นทุน $C(q)$ จะให้ค่าต้นทุนรวมของการผลิตสินค้าจำนวน q

ฟังก์ชันรายได้ (Revenue Function)

ฟังก์ชันรายได้ $R(q)$ จะให้ค่ารายได้รวมของการขายสินค้าจำนวน q

ตัวอย่าง 1.7 โรงงานผลิตลูกฟุตบอล มีค่าใช้จ่ายในการเริ่มเดินเครื่องเครื่องจักร จำนวน 24,000 บาท ซึ่งเป็นค่าใช้จ่ายคงที่ และมีค่าใช้จ่ายแปรผันตามจำนวนลูกฟุตบอลที่ผลิต ซึ่งประกอบด้วย ค่าแรง ค่าวัสดุ ในราคาลูกละ 120 บาท จงสร้างฟังก์ชันต้นทุนของการผลิตลูกฟุตบอลนี้

ตัวอย่าง 1.8 ถ้าโรงงานผลิตลูกฟุตบอล ขายลูกฟุตบอลไปในราคาลูกละ 200 บาท จงสร้างฟังก์ชันของรายได้ที่ได้จากการขายนี้

ถ้าเราเขียนกราฟของ $C(q)$ และ $R(q)$ เราจะพบว่า กราฟนั้นจะตัดกัน และจุดตัดของกราฟก็คือ จำนวนลูกบอลที่ผลิตและทำให้รายได้เท่ากับต้นทุน ซึ่งอาจเรียกว่า จุดคุ้มทุน ดังนั้น ถ้ามีการผลิตมากกว่าจุดนี้ไป ก็จะมีกำไรเกิดขึ้น (Se e here)

ฟังก์ชันกำไร (Profit Function)

กำไร = รายได้ – ต้นทุน

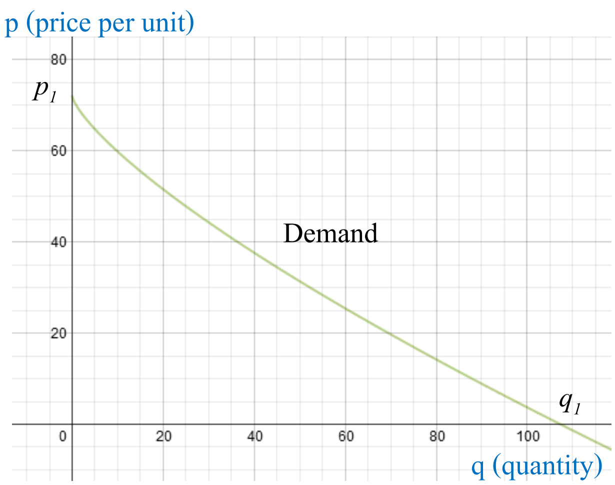
$$\pi(q) = R(q) - C(q)$$

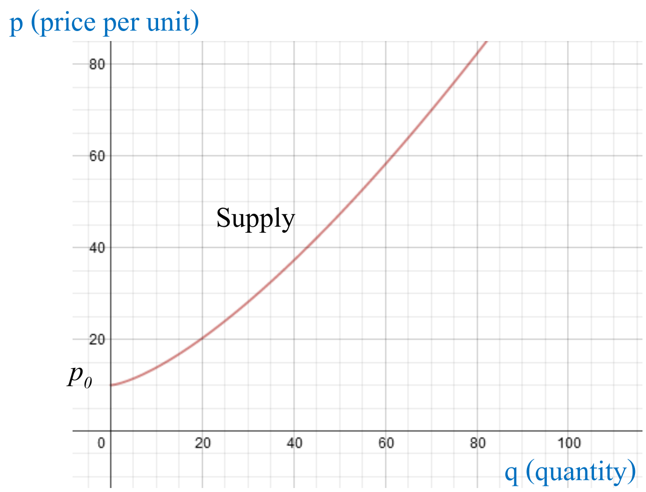
เส้นอุปสงค์และอุปทาน (Demand and Supply Curve)

เส้นอุปสงค์ จะแทน พฤติกรรมของความต้องการสินค้า (จำนวน q) ของผู้ซื้อในช่วงเวลาหนึ่ง ที่ขึ้นกับ ราคาสินค้า (p)

เส้นอุปทาน จะแทน พฤติกรรมของการผลิตสินค้า (จำนวน q) ในช่วงเวลาหนึ่ง ที่ขึ้นกับ ราคาสินค้าที่ขาย (p)

แม้ว่าแนวคิดทางเศรษฐศาสตร์นั้น จำนวนสินค้าของทั้งอุปสงค์และอุปทานนั้น ขึ้นกับราคา แต่ก็มักนิยมให้แกนตั้งเป็นแกนของราคา และแกนนอนเป็นแกนของจำนวนสินค้า ดังรูป





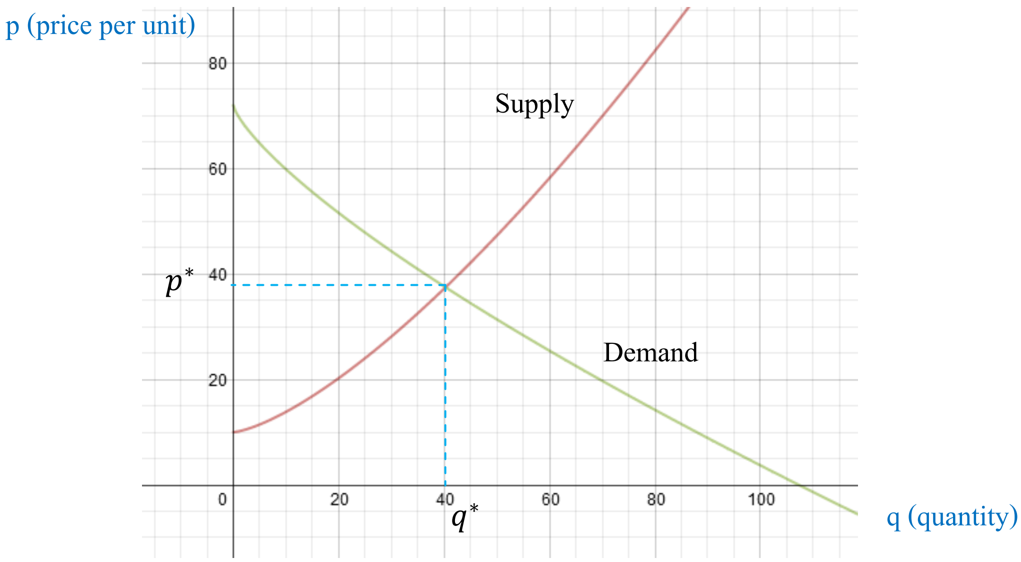
การแปลความหมาย

เส้นอุปสงค์ เมื่อสินค้าราคาสูงกว่า p_1 จะไม่มีผู้ใดซื้อสินค้า แต่เมื่อสินค้ามีราคาน้อยกว่า p_1 เส้นอุปสงค์จะแสดงจำนวนของสินค้นที่ผู้ซื้อต้องการ

เส้นอุปทาน เมื่อสินค้ามีราคามากกว่า p_0 ผู้ขายก็จะเริ่มผลิตสินค้า เมื่อราคาสูงขึ้นก็จะมีการผลิตออกจำหน่ายมากขึ้นตามไปด้วย

จุดสมดุลระหว่างราคาและจำนวนสินค้า (Equilibrium Price and Quantity)

เมื่อวาดกราฟของอุปสงค์และอุปทานบนแกนเดียวกัน จะพบว่ากราฟทั้งสองจะตัดกันที่จุด (q^*, p^*) ซึ่งจุดดังกล่าวจะถูกเรียกว่า **จุดสมดุล** ค่าของ p^* และ q^* ที่จุดนี้จะเรียก **สมดุลราคา** และ **สมดุลจำนวนสินค้า**



ตัวอย่าง 1.9 ถ้าเส้นอุปทานและอุปสงค์เป็นดังสมการต่อไปนี้

$S(p) = 3p - 50$ และ $D(p) = 100 - 2p$

จงหาสมดุลราคาและจำนวนสินค้า

หมายเหตุ กราฟของอุปสงค์และอุปทานอาจเป็นกราฟชนิดอื่นได้ (See More)

ผลกระทบของภาษีต่อจุดสมดุลราคาและจำนวนสินค้า

ปกติแล้วจะมีภาษี 2 ประเภท คือ ภาษีเฉพาะ และภาษีการขาย โดยภาษีเฉพาะจะเรียกเก็บกับผู้ขาย ซึ่งมีค่ากำหนดคงที่ต่อหน่วยการขาย เช่น น้ำมัน เครื่องดื่มแอลกอฮอล์ ฯลฯ ส่วนภาษีการขายจะเรียกเก็บจากผู้ซื้อ ซึ่งคิดเป็นเปอร์เซ็นต์คงที่ของราคาขาย

สมมุติให้ภาษีเฉพาะในการขายสินค้าจากตัวอย่างก่อน มีค่า 5 บาทต่อหน่วยสินค้าถูกกำหนดให้กับผู้ขาย นั่นคือ ผู้ขายจะได้เงิน $p-5$ บาท แทนที่จะเป็น p บาท ทำให้สมการอุปทานเปลี่ยนเป็น $S(p-5)=3(p-5)-50$ ส่วนสมการอุปทานนั้นไม่มีการเปลี่ยนแปลง จะพบว่าจุดสมดุลราคาและจำนวนสินค้าก็จะเปลี่ยนแปลง โดย

$$3(p-5)-50=100-2p$$

$$3p-65=100-2p$$

$$5p=165$$

$$p=33$$

นั่นหมายความว่า สินค้าควรจะขายที่ราคา 33 บาท แต่จากตัวอย่างก่อน เราพบว่าสินค้าขายที่ราคา 30 บาท นั่นแสดงว่า ราคาสินค้าเพิ่มขึ้นเพียง 3 บาท แทนที่จะเป็น 5 บาท ความจริงแล้วรัฐก็ยังคงได้ภาษีต่อหน่วยในอัตรา 5 บาทต่อชิ้น เพียงแต่ผู้ซื้อจะจ่าย 3 บาทจากราคาที่เพิ่มขึ้นและผู้ขายจะจ่ายร่วมอีก 2 บาท

1.4 ฟังก์ชันกำลังและฟังก์ชันพหุนาม (Power Function and Polynomial Function)

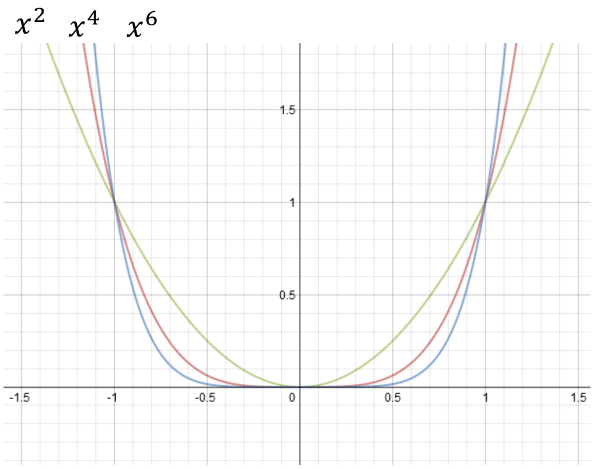
1.4.1 ฟังก์ชันกำลัง (Power Function)

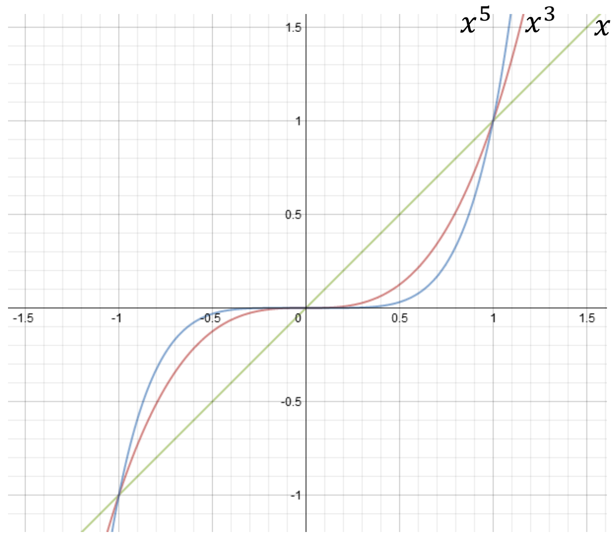
นิยาม 1.2 $Q(x)$ จะถูกเรียกว่า ฟังก์ชันกำลังของ x ถ้า $Q(x)$ แปรผันตรงกับกำลังคงที่ของ x ถ้า k คือค่าคงที่ของการแปรผัน และ p เป็นเลขชี้กำลังของ x แล้ว

$$Q(x)=kx^p$$

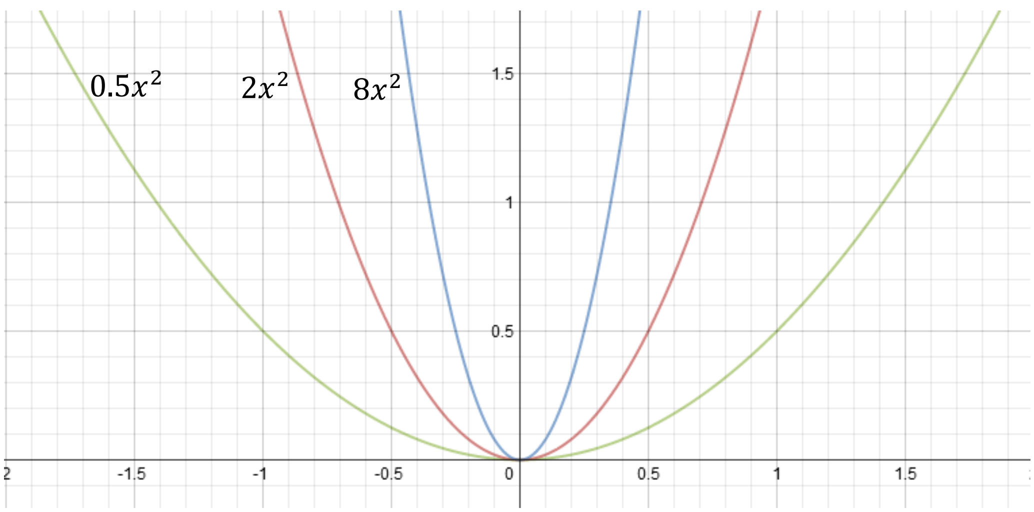
กรณี เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก จะได้รูปกราฟ 2 ลักษณะคือ

1. ถ้าเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกคู่ จะได้รูปกราฟตัวยู (U-shape)
2. ถ้าเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกคี่ จะได้รูปกราฟเก้าอี้ (Seat-shape)

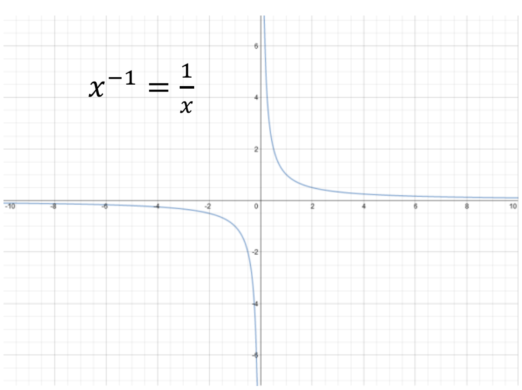


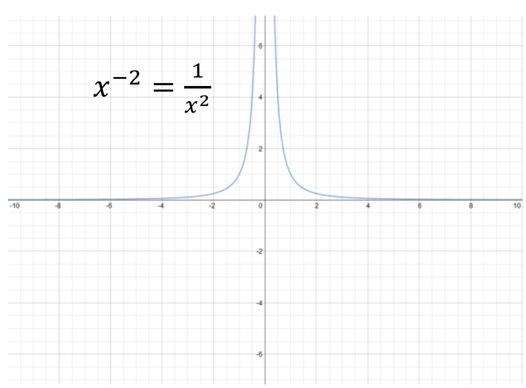


ผลของค่า k

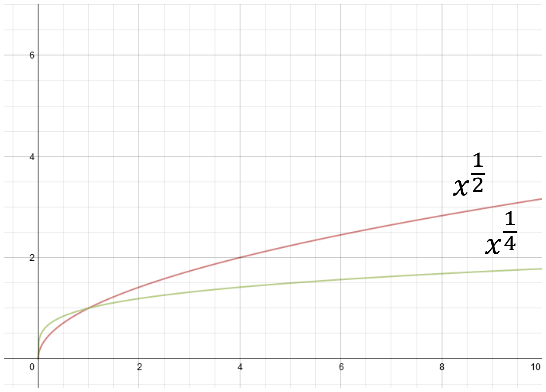


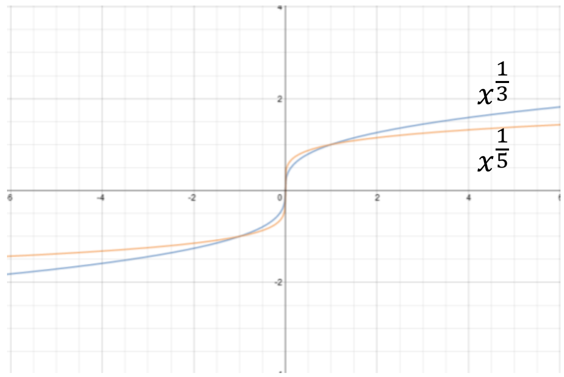
กรณี เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบ

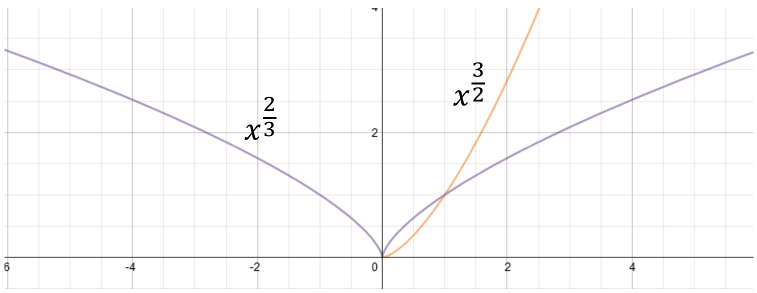




กรณี เลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะบวก

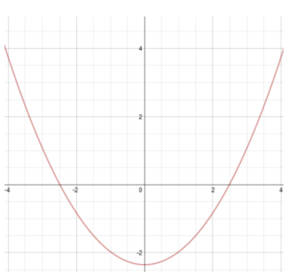


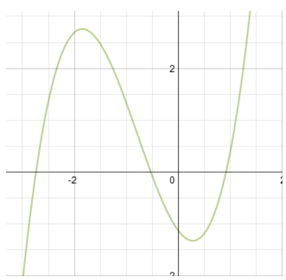


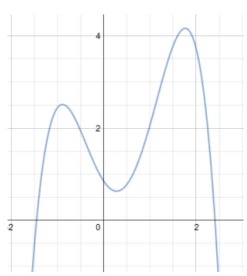


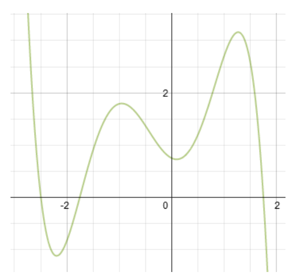
1.4.2 ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)

รูปทั่วไปของฟังก์ชันพหุนามคือ $y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$









Quadratic	Cubic	Quartic	Quinic
$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 4$

สำหรับฟังก์ชันพหุนามดีกรีสอง (Quadratic Function) ซึ่งอยู่ในรูป $y = f(x) = P_2(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ และ c เป็นจำนวนจริง มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง กราฟของพหุนามดีกรีสอง จะถูกเรียกว่า พาราโบลา (Parabola) ที่มีจุดยอดที่ $x = -\frac{b}{2a}$ เมื่อ $a > 0$ จุดยอดจะเป็นจุดต่ำสุด กราฟจะมีลักษณะเว้าขึ้น เมื่อ $a < 0$ จุดยอดจะเป็นจุดสูงสุด กราฟจะมีลักษณะเว้าลง

ตัวอย่าง 1.10 บริษัทท่องเที่ยวทางเรือแห่งหนึ่ง พบว่า จำนวนผู้โดยสารเฉลี่ยนิยมรับประทานอาหารเย็นที่ห้องอาหารหลักของเรือสำราญเป็น 75 คน ถ้าราคาอาหารอยู่ที่ 50 ยูโรต่อคน แต่ถ้าราคาอาหารเย็นต่อคนมีราคา 35 ยูโร จำนวนผู้โดยสารเฉลี่ยที่จะรับประทานอาหารเย็นจะเป็น 120 คน

a) สมมุติว่ากราฟอุปสงค์เป็นเส้นตรง จงสร้างฟังก์ชันอุปสงค์ q ในรูปของของตัวแปรอิสระ p

b) จงใช้คำตอบในข้อ a) สร้างฟังก์ชันรายได้ โดยมีตัวแปรอิสระเป็นราคา p

c) จงใช้กราฟของฟังก์ชันรายได้ เพื่อหาราคาของอาหารที่ควรจะตั้ง เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ

a) ใช้จุดสองจุด หาค่าความชัน และสร้างสมการเส้นตรง

b) รายได้ = (ราคาอาหารต่อคน)*(จำนวนคนที่รับประทานอาหาร)

c) จากฟังก์ชันรายได้ นำมาหาค่าสูงสุด ในข้อนี้ ค่าสูงสุดอยู่ที่ 37.5 ยูโร

การวาดกราฟพาราโบลา มีขั้นตอนดังนี้

1 จัดสมการให้อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ แล้วพิจารณาค่า a ถ้า $a > 0$ กราฟจะเว้าขึ้น แต่ถ้า $a < 0$ กราฟจะเว้าลง

2 หาจุดยอด ซึ่งจุดยอดจะอยู่ที่ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

3 หาจุดตัดแกน y ซึ่งจุดตัดแกน y คือ $(0, f(0))$ สำหรับจุดตัดแกน x พิจารณาจากค่ารากของสมการพหุนามกำลังสอง โดย

   a. ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ แล้ว กราฟจะมีจุดตัด 2 จุดบนแกน x

   b. ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ แล้ว กราฟจะมีจุดตัด 1 จุดบนแกน x (คือ จุดยอด)

   c. ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้ว กราฟจะไม่มีจุดตัดแกน x

4 วาดรูปกราฟ

ตัวอย่าง 1.11 จงวาดกราฟของ $f(x) = x^2 + 2x - 8$

ลักษณะของกราฟพาราโบลา $a = 1 > 0$ กราฟเว้าขึ้น

จุดยอดของกราฟพาราโบลา $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{2}{2(1)}, f(-1)\right) = (-1, -9)$

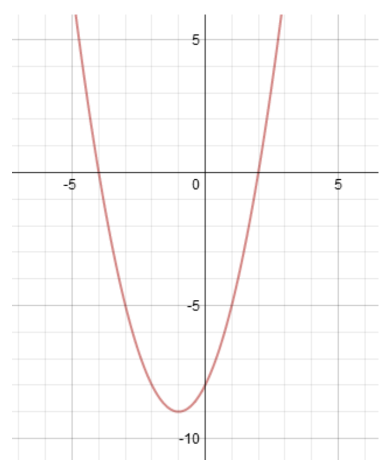
จุดตัดแกน x เนื่องจาก $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(-8) = 36 > 0$ ดังนั้นมีจุดตัดแกน x จำนวน2 จุด

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4)(x - 2) = 0$

$x = 2$ หรือ $x = -4$

จุดตัดแกน x คือ $(2,0)$ และ $(-4,0)$



ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational Function)

ฟังก์ชันตรรกยะคือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

เมื่อ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m และ $P(x)$ กับ $Q(x)$ ไม่มีตัวประกอบร่วม

1.5 ฟังก์ชันชี้กำลัง (Exponential Function)

นิยาม 1.3 ฟังชันชี้กำลัง (Exponential Function) ฐาน a คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

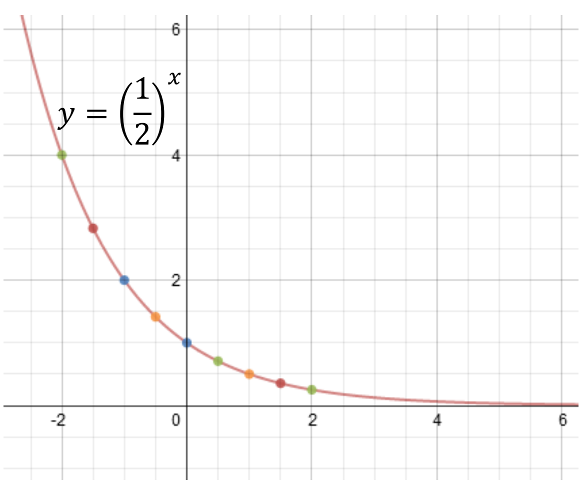
$$f(x) = a^x$$

เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก และ $a \neq 1$ โดเมนของฟังก์ชันจะเป็นจำนวนจริง

สมบัติของเลขชี้กำลัง เมื่อ m และ n เป็นจำนวนจริง a และ b เป็นจำนวนบวก

1. $a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ (จำนวน n ครั้ง)
2. $a^0 = 1$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
4. $a^m a^n = a^{m+n}$
5. $(a^m)^n = a^{mn}$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
7. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
8. $(ab)^m = a^m b^m$
9. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad n \neq 0$

1.5.1 กราฟของฟังก์ชันชี้กำลัง



For the graph of $f(x) = a^x$ with $0 < a < 1$

Domain: $(-\infty, \infty)$ Range: $(0, \infty)$

x-intercept: None y-intercept: $(0,1)$

Horizontal asymptote: x-axis, as x increase without bound

f is a decreasing function passing through $(0,1)$ and $(1, a)$

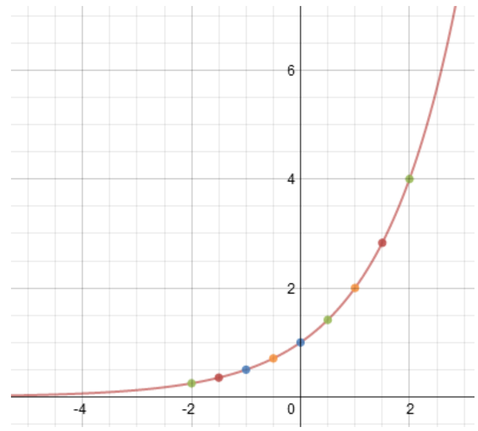
For the graph of $f(x) = a^x$ with $1 < a$

Domain: $(-\infty, \infty)$ Range: $(0, \infty)$

x-intercept: None y-intercept: $(0,1)$

Horizontal asymptote: x-axis, as x decrease without bound

f is a decreasing function passing through $(0,1)$ and $(1, a)$



1.5.2 การเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากร (Population Growth)

จากข้อมูลการเพิ่มขึ้นของประชากรในเม็กซิโกช่วงต้นปี 1980 จะพบว่าการเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากรจากปีหนึ่งไปยังปีถัดไปมีการเพิ่มขึ้นเสมอ (ดูในหลักที่ 3) ถ้าการเพิ่มขึ้นของประชากรเป็นเชิงเส้น ค่าในหลักที่ 3 จะเป็นค่าคงที่

ปี ค.ศ.	จำนวนประชากร (ล้านคน)	จำนวนประชากรที่เพิ่มขึ้น (ล้านคน)
1980	67.38	
1981	69.13	1.75
1982	70.93	1.80
1983	72.77	1.84
1984	74.66	1.89
1985	76.00	1.94
1986	78.59	1.99

ถ้าเราเปรียบเทียบอัตราการเพิ่มของประชากรในแต่ละปี จะพบว่า

$$\frac{Population\ in\ 1981}{Population\ in\ 1980} = \frac{69.13}{67.38} = 1.026$$

$$\frac{Population\ in\ 1982}{Population\ in\ 1981} = \frac{70.93}{69.13} = 1.026$$

ผลที่ได้นี้ทำให้เราทราบว่า การเพิ่มขึ้นของประชากรคิดเป็น 2.6 % ระหว่างปี 1980 กับปี 1981 และปี 1981 กับปี 1982 ถ้าการเพิ่มขึ้นนี้เป็นเช่นนี้ทุกปี เราอาจใช้ค่า 1.026 เป็นค่าการเติบโต (Growth Factor) ซึ่งก็คือ เลขชี้กำลังของฟังก์ชันชี้กำลัง โดยมี t เป็นตัวแปรอิสระ แทนจำนวนปี นับตั้งแต่ปี 1980

เราได้ $$P(t) = 67.38(1.026)^t$$

เมื่อ $t = 0$ จะได้ $$P(t) = 67.38(1.026)^0 = 67.38$$

เมื่อ $t = 1$ จะได้ $$P(t) = 67.38(1.026)^1 = 69.13$$

เมื่อ $t = 2$ จะได้ $$P(t) = 67.38(1.026)^2 = 70.93$$

เมื่อ $t = 3$ จะได้ $$P(t) = 67.38(1.026)^3 = 72.77$$

1.5.3 การสลายตามธรรมชาติ (Decay in Nature)

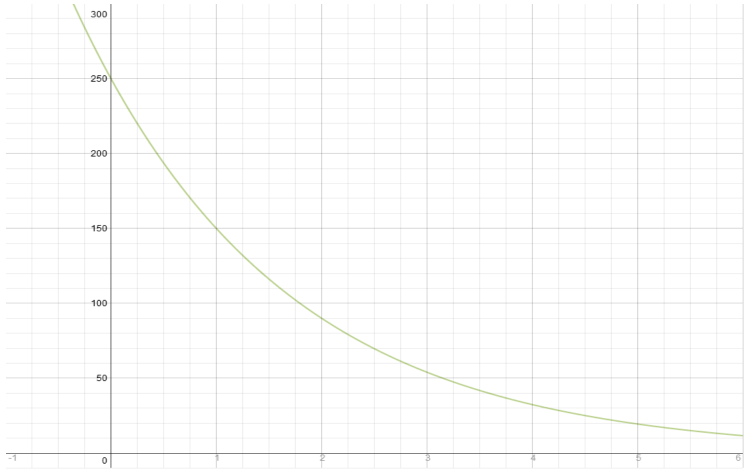
ในหลายสถานการณ์จะเกี่ยวกับการลดปริมาณของสารหรือจำนวนบางอย่าง เช่น การให้ยา ซึ่งตัวยาก็จะเข้าสู่กระแสเลือด เมื่อยาผ่านเข้าไปยังตับและไต ก็จะมีกระบวนการขับตัวยาออกจากร่างกาย ซึ่งก็จะขึ้นอยู่กับตัวยา สำหรับยาปฏิชีวนะ Ampicillin จะถูกขับออกประมาณ 40% ในทุกชั่วโมง ปกติแล้ว Ampicillin จำนวน 1 โดส จะมีปริมาณ 250 มิลลิกรัม ดังนั้นเราอาจจะสร้างฟังก์ชันเพื่อคำนวณหาปริมาณยา Ampicillin ที่เหลือในร่างกาย โดยเริ่มที่ $t = 0$ ซึ่งมีปริมาณยา $Q = 250$ มิลลิกรัม และทุกๆ ชั่วโมงจะมีปริมาณยาเหลือในร่างกาย 60% ของชั่วโมงก่อน เราได้

$$f(0) = 250$$
$$f(1) = 250(0.6)$$
$$f(2) = \big(250(0.6)\big)(0.6) = 250(0.6)^2$$
$$f(3) = \big(250(0.6)\big)^2(0.6) = 250(0.6)^3$$

ทำให้ได้ฟังก์ชันที่เวลา t ใดๆ เป็น $$Q = f(t) = 250(0.6)^t$$

สำหรับการลดปริมาณของตัวยา $Q = 250$ เหลือครึ่งหนึ่งของปริมาณเริ่มต้น ($Q = 125$) เราจะเรียกว่า “ครึ่งชีวิต (half-life)” ซึ่งครึ่งชีวิตของ Ampicillin ในร่างกาย ก็จะอยู่ประมาณ 1.4 ชั่วโมง

t (hours)	Q (mg)
0	250
1	150
2	90
3	54
4	32.4
5	19.4



1.5.4 ฟังก์ชันชี้กำลังทั่วไป (The General Exponential Function)

นิยาม 1.4 ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันชี้กำลังของ t พร้อมด้วยฐาน a ถ้า

$$f(t) = P_0 a^t$$

เมื่อ P_0 เป็นปริมาณเริ่มต้น (เมื่อ $t = 0$) และ a เป็นแฟคเตอร์ของการเปลี่ยนแปลงของ f เมื่อ t เพิ่มขึ้นทีละหนึ่ง ถ้า $a > 0$ เราเรียก เลขชี้กำลังการเติบโต (Exponential Growth) แต่ถ้า $0 < a < 1$ เราเรียก เลขชี้กำลังการสลาย (Exponential Decay)

ตัวอย่าง 1.12 ถ้ามูลค่าการขายหนังสือของสำนักพิมพ์หนึ่ง เพิ่มขึ้นจาก 35 ล้านบาท ในปีพ.ศ. 2550 เป็น 142 ล้านบาทในปีพ.ศ. 2555 สมมุติว่ามูลค่าการขายนี้มีการเติบโตแบบ exponential จงหาฟังก์ชันชี้กำลังนี้ เมื่อให้ตัวแปรอิสระเป็นเวลา (มีหน่วยเป็น ปี) และตัวแปรตามเป็นมูลค่าในการขาย

วิธีทำ เราทราบว่ามูลค่าการขายเติบโตแบบ exponential ดังนั้นฟังก์ชันจะอยู่ในรูป $f(t) = P_0 a^t$

จากข้อมูล ค่าเริ่มต้นในปีพ.ศ. 2550 เป็น 35 ล้านบาท ดังนั้น $P_0 = 35$

ในปีพ.ศ. 2555 มูลค่าการขายเป็น 142 ล้านบาท ($t = 2555 - 2550 = 4$)

ดังนั้นเราจะได้ $142 = 35a^5$ หรือ $a^5 = \frac{142}{35}$ ทำให้ได้ว่า $a = 1.32325$

ทำให้เราได้ฟังก์ชันชี้กำลังแทนการเติบโตของมูลค่าการขายเป็น $f(t) = 35(1.32325)^t$

ตัวอย่าง 1.13 จากตารางต่อไปนี้ ฟังก์ชันที่แทนข้อมูลนี้เป็น ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันชี้กำลัง หรือไม่ใช่ทั้งสองกรณีที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นหรือฟังก์ชันชี้กำลัง จงสร้างฟังก์ชันเพื่อใช้แทนข้อมูล

a)

x	$f(x)$
0	16
1	24
2	36
3	54
4	81

b)

x	$g(x)$
0	14
1	20
2	24
3	29
4	35

c)

x	$h(x)$
0	5.3
1	6.5
2	7.7
3	8.9
4	10.1

1.5.5 ฟังก์ชันชี้กำลังฐานธรรมชาติ (Exponential Function with Base e)

นิยาม 1.5 จำนวน e ถูกนิยามจากนิพจน์ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่จำกัด นั่นคือ $e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718$ สำหรับค่า n ที่มีค่ามากๆ

สูตรทางวิทยาศาสตร์จำนวนไม่น้อยที่เกี่ยวกับการเติบโตและการสลายแบบ exponential ถูกนิยามในรูปกำลังของ e ในระบบซึ่งอัตราการเติบโตหรืออัตราการสลายของปริมาณแปรผันตรงกับขนาดของปริมาณนั้นเอง เราจะคำนวณปริมาณนั้น ณ เวลาใดๆ ได้จากเลขชี้กำลังฐานธรรมชาติ $y = Ae^{kt}$ เมื่อ t แทนเวลา A แทนจำนวนประชากรเริ่มต้น ณ เวลา $t = 0$

ตัวอย่าง 1.14 ถ้าสัดส่วนของคนที่ดูโฆษณาสินค้าชิ้นใหม่หลังจากโฆษณาได้เผยแพร่ทางโทรทัศน์เป็นเวลา t วัน นิยามโดย $p(t) = 1 - e^{-0.2t}$ ถ้าในตลาดมีผู้ที่ใช้สินค้าประเภทนี้อยู่ 10,000,000 คน และถ้าผู้ใช้สินค้าเหล่านี้ตอบสนองต่อโฆษณา เขาก็จะซื้อสินค้า บริษัทก็จะได้กำไร 0.70 ดอลลาร์ กำไรนี้เป็นคนละส่วนกับค่าโฆษณา ค่าโฆษณาเริ่มต้นเท่ากับ 30,000 ดอลลาร์ การออกอากาศในแต่ละวันจะมีค่าใช้จ่ายอีกวันละ 5,000 ดอลลาร์

a) จงหาค่าของ $p(t) = 1 - e^{-0.2t}$ เมื่อ t มีค่ามากๆ
b) จงหาเปอร์เซ็นต์ของลูกค้าที่ตอบสนองต่อโฆษณา หลังจากโฆษณาออกอากาศได้ 10 วัน
c) จงสร้างฟังก์ชันต้นทุนของการโฆษณา
d) หลังจากโฆษณาออกอากาศได้ 28 วัน จงหากำไรสุทธิ

a) เมื่อ t มีค่ามากๆ ค่าของ $e^{-0.2t} = \frac{1}{e^{0.2t}}$ จะมีค่าเข้าใกล้ 0
ดังนั้น เมื่อ t มีค่ามากๆ $p(t) = 1 - e^{-0.2t}$ จะมีค่าเข้าใกล้ 1 ซึ่งหมายถึงผู้ชมโฆษณาทุกคนตอบสนองต่อโฆษณาดังกล่าว

b) เมื่อผ่านไป 10 วัน จะมีผู้ตอบสนองต่อโฆษณาเท่ากับ $p(t) = 1 - e^{-0.2(10)} = 1 - 0.135 = 0.865$
นั่นหมายความว่า 86.5% ของลูกค้าตอบสนองต่อโฆษณาหลังจากโฆษณาออกอากาศได้ 10 วัน

c) ฟังก์ชันต้นทุนของการโฆษณา คือ $C(t) = 30{,}000 + 5{,}000t$

d) กำไรสุทธิที่เพิ่มจากการโฆษณา หาได้จากผลกำไรที่เพิ่มขึ้นต่อชิ้นในการขายสินค้า คูณ จำนวนคนที่ซื้อสินค้า (ถ้า 1 คนซื้อสินค้า 1 ชิ้น) ลบด้วย ค่าใช้จ่ายจากการโฆษณา ดังนั้นฟังก์ชันรายได้จะเป็น

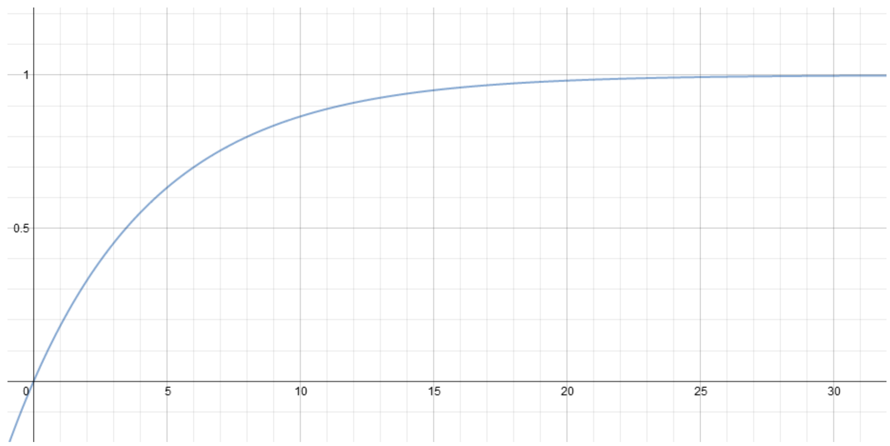
$$R(t) = 10{,}000{,}000(1 - e^{-0.2t})(0.70)$$

ฟังก์ชันกำไรสุทธิจะเป็น

$$P(t) = R(t) - C(t) = 10{,}000{,}000(1 - e^{-0.2t})(0.70) - (30{,}000 + 5{,}000t)$$

เมื่อโฆษณาออกอากาศได้ 28 วัน จะได้ว่า

$$P(28) = 10{,}000{,}000\left(1 - e^{-0.2(28)}\right)(0.70) - \left(30{,}000 + 5{,}000(28)\right) = 6{,}804{,}100$$



1.5.6 บทประยุกต์ทางการเงิน (Financial Applications)

1.5.6.1 ดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest)

สมมุติว่า การลงทุน(เงินต้น) P ให้ผลกำไรในรูปดอกเบี้ยต่อปีเป็น r ซึ่งการคิดดอกเบี้ยหรือผลกำไรที่ได้นี้เกิดขึ้น n ครั้งต่อปี และถ้าแต่ละครั้งของการมีกำไรหรือคิดดอกเบี้ย ดอกเบี้ยจะถูกรวมเข้ากับทุน(เงินต้น) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $P \cdot \left(\frac{r}{n}\right)$ จำนวนเงินทั้งหมดใน 1 ปี จะคำนวณได้โดย

กรณี คิดดอกเบี้ย 1 ครั้งต่อปี $\quad A = P + P \cdot \left(\frac{r}{1}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{1}\right)$

กรณี คิดดอกเบี้ย 2 ครั้งต่อปี $\quad A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right) + P \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right) \cdot \left(\frac{r}{2}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right)$

$$= P \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$$

2 ครั้งแรก คิดเหมือนดอกเบี้ย 2 ครั้งต่อปี แต่ n=3

กรณี คิดดอกเบี้ย 3 ครั้งต่อปี $\quad A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{3}\right)^2 + P \cdot \left(1 + \frac{r}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{r}{3}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{3}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{r}{3}\right)$

$$= P \cdot \left(1 + \frac{r}{3}\right)^3$$

กรณี คิดดอกเบี้ย 4 ครั้งต่อปี $\quad A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{4}\right)^3 + P \cdot \left(1 + \frac{r}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{r}{4}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{4}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{r}{4}\right)$

$$= P \cdot \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4$$

กรณี คิดดอกเบี้ย n ครั้งต่อปี $A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$

สูตรดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest Formula)

จำนวนเงินใน 1 ปีที่ได้จากการฝากเงินต้น P โดยมีดอกเบี้ยต่อปีเป็น r และมีการคำนวณดอกเบี้ยให้ n ครั้งต่อปี จะคำนวณได้จาก $A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$

เมื่อให้ $P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = P\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r$

เพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้น เราให้ $k = \frac{n}{r}$ ดังนั้น $\frac{1}{k} = \frac{r}{n}$

เมื่อนำไปแทนค่าจะได้ $P\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r = P\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^r$

ถ้า k มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่จำกัดเหมือนกับ n เราจะได้ $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ ก็จะมีค่าเช่นเดียวกับค่า e

นั่นคือ เราได้ $P\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^r \to P[(e)]^r = Pe^r$

สูตรดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest Formula)

จำนวนเงินใน t ปีที่ได้จากการฝากเงินต้น P โดยมีดอกเบี้ยต่อปีเป็น r และมีการคำนวณดอกเบี้ยทบต้นอย่างต่อเนื่อง จะคำนวณได้จาก $A = Pe^{rt}$

ตัวอย่าง 1.15 ถ้าการคำนวณดอกเบี้ยทบต้นเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง จงคำนวณดอกเบี้ยที่แท้จริงที่ได้จากการฝากเงินต้น P ในอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี

ใน 1 ปี จะได้ $A = Pe^{0.06} = P(1.0618365)$

นั่นคือ ดอกเบี้ยที่แท้จริงที่ได้รับใน 1 ปี จะเป็น 6.18365

ตัวอย่าง 1.16 สมมุติว่าคุณต้องการฝากเงินเพื่อการศึกษาสำหรับเด็ก ซึ่งธนาคารได้กำหนดดอกเบี้ยให้การฝากเงินประเภทนี้ในอัตราร้อยละ 9 ต่อปี โดยมีการคิดดอกเบี้ยให้ปีละ 4 ครั้ง ถ้าใน 10 ปีข้างหน้า คุณต้องการผลตอบแทนจากการฝากเงินนี้เป็นจำนวน 1,200,000 บาท คุณจะต้องฝากเงินต้นเท่าไร

เนื่องจากธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ปีละ 4 ครั้ง และมีดอกเบี้ยต่อปีในอัตราร้อยละ 9

ดังนั้นใน 1 ปีจะได้รับผลตอบแทนจริงเป็นจำนวน $\left(1+\frac{0.09}{4}\right)^4 = 1.0930833$

จากสูตรดอกเบี้ยทบต้นใน 1 ปี เราได้ $A = P \cdot \left(1+\frac{r}{n}\right)^n$

สูตรดอกเบี้ยทบต้นใน 10 ปี จะได้ $A = P \cdot \left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right]^{10}$

เมื่อ $A = 1{,}200{,}000$ จะได้ $P \cdot (1.0930833)^{10} = 1{,}200{,}000$

เพราะฉะนั้น $P = \frac{1{,}200{,}000}{(1.0930833)^{10}} = 487{,}883.59$

นั่นคือ ต้องฝากเงินต้น $487{,}883.59$ บาท เพื่อที่จะได้เงินใน 10 ปีข้างหน้าเป็น $1{,}200{,}000$ บาท

1.5.6.2 มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต (Present and Future Value)

ในทางธุรกิจ การจ่ายเงินอาจทำได้ในอนาคต เช่น เมื่อเราซื้อรถยนต์ ก็อาจจะแบ่งชำระตามงวด แน่นอนว่าการจ่ายในอนาคตย่อมจะไม่เท่ากับในปัจจุบัน ในฐานะผู้ขายที่ต้องรอคอยการจ่ายในอนาคต เขาจะต้องได้รับการชดเชยความเสียโอกาสจากการมีรายได้ ซึ่งโจทย์ในที่นี้ก็คือ มูลค่าในอนาคตนั้นควรจะเป็นเท่าไร

นิยาม 1.6 มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

มูลค่าปัจจุบัน P ของการจ่ายในอนาคต B คือจำนวนเงินที่ต้องฝากจากธนาคารในวันนี้เพื่อจะใช้ให้เกิดมูลค่า B ตามระยะเวลาในอนาคต

มูลค่าอนาคต B ของการจ่ายในปัจจุบัน P คือจำนวนเงินที่ต้องได้จากธนาคารจากการเติบโตของฝากเงินมูลค่า P

ถ้าการคิดดอกเบี้ยเป็นแบบทบต้นทุกปีในเวลา t ปี ที่อัตราดอกเบี้ยร้อยละ r และถ้า B คือมูลค่าในอนาคต (Future Value - FV) ของเงินมูลค่า P หลังจากเวลาผ่านไป t ปี และ P คือ มูลค่าปัจจุบัน (Present Value PV) ของเงินมูลค่า B แล้ว

$$B = P(1+r)^t \text{ หรือ } P = \frac{B}{(1+r)^t}$$

กรณีการทบต้นเป็นไปอย่างต่อเนื่อง $B = Pe^{rt}$ หรือ $P = Be^{-rt}$

ตัวอย่าง 1.17 สมมุติว่าคุณถูกล็อตเตอรี่และได้รับข้อเสนอจากผู้ขายว่า จะจ่ายเงินให้ปีละ 250,000 บาทเป็นเวลา 4 ปี หรืออาจจะเลือกรับเงินก้อนจำนวน 920,000 บาทในวันนี้ ถ้าดอกเบี้ยเงินฝากอยู่ในอัตราร้อยละ 6 ต่อปีมีการคิดอย่างต่อเนื่อง ไม่มีการหักภาษี คุณควรจะเลือกรับเงินรางวัลแบบใด

วิธีทำ เราอาจคิดได้สองวิธี คือ

วิธีที่ 1 เปรียบเทียบมูลค่าปัจจุบัน

ถ้าเลือกเงื่อนไขการรับเงินที่มากกว่า คือ ปีละ 250,000 บาทเป็นเวลา 4 ปี

รับเงินงวดแรกเป็นจำนวน 250,000 บาท

รับเงินงวดแรกเป็นจำนวน 250,000 บาท แต่ในปีที่ 2 นั้น มูลค่าจะเป็นมูลค่าเงินในอนาคต ซึ่งเมื่อเทียบเป็นมูลค่าปัจจุบันจะได้ $P = Be^{-rt} = 250{,}000e^{-0.06(1)}$ บาท

ทำนองเดียวกันในปีที่ 3 และ 4 เมื่อเทียบเป็นมูลค่าปัจจุบันจะได้ $250{,}000e^{-0.06(2)}$ บาทและ $250{,}000e^{-0.06(3)}$ บาทตามลำดับ

เมื่อรวมมูลค่าทั้งหมด เงินจำนวนดังกล่าวคิดเป็นมูลค่าในปัจจุบันเท่ากับ

$250{,}000 + 250{,}000e^{-0.06(1)} + 250{,}000e^{-0.06(2)} + 250{,}000e^{-0.06(3)} \approx 915{,}989$ บาท

ซึ่งจะเห็นว่าน้อยกว่าการรับเงินรางวัลมูลค่า 920,000 บาททันที

วิธีที่ 2 เปรียบเทียบมูลค่าอนาคต

เงินรางวัลจำนวน 920,000 บาท มีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $920{,}000e^{0.06(3)} \approx 1{,}101{,}440$ บาท

กรณีที่แบ่งรับเป็นงวดๆ จะได้ว่า เงินงวดแรกมีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $250{,}000e^{0.06(3)}$

เมื่อรวมทุกงวดแล้ว จะมีมูลค่าเท่ากับ

$250{,}000e^{0.06(3)} + 250{,}000e^{0.06(2)} + 250{,}000e^{0.06(1)} + 250{,}000 \approx 1{,}096{,}637$ บาท

จากการคำนวณทั้งสองแบบ ทำให้เราสามารถตัดสินใจได้ว่า การเลือกรับเงินรางวัลในงวดเดียวทันทีนั้น เป็นทางเลือกที่เหมาะสมกว่า

1.6 ฟังก์ชันลอการิธึม (Logarithm Function)

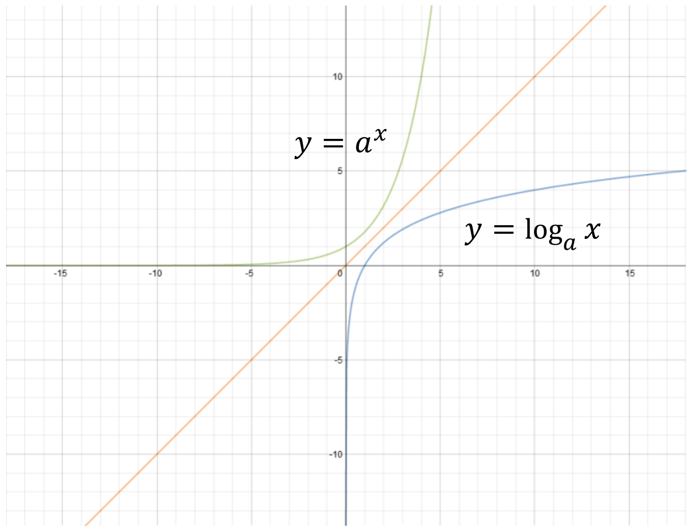
ฟังก์ชันลอการิธึม

ถ้า $x = a^y, a > 0, a \neq 1$ และถ้าเราต้องการหาค่า y ในรูปของค่า x เราสามารถใช้ฟังก์ชันลอการิธึม $y = \log_a x$ อ่านว่า "y เท่ากับค่า log ของ x ฐาน a ดังนั้น

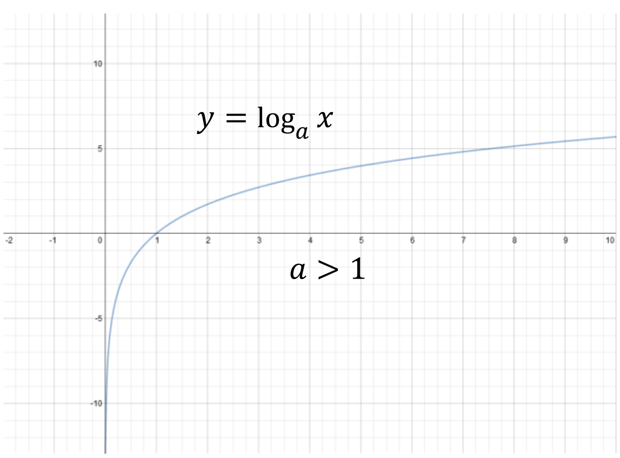
$$y = \log_a x \quad \text{หมายถึง} \quad a^y = x$$

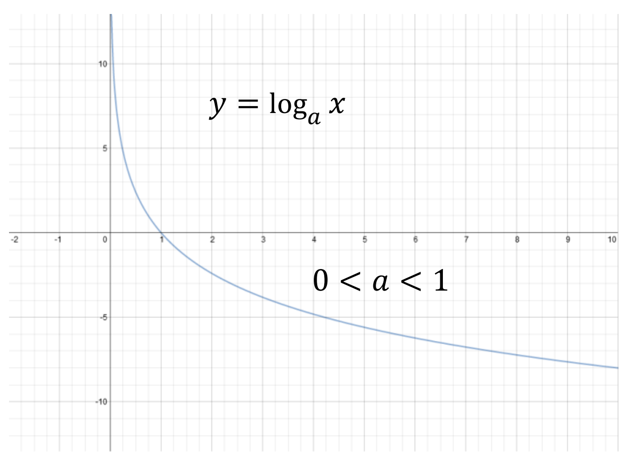
สมบัติทั่วไปของลอการิธึม

สมบัติของ $\log_a x$	เหตุผล
$\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$
$\log_a a = 1$	$a^1 = a$
$\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$
$a^{\log_a x} = x$	$y = \log_a x \rightarrow x = a^y$ ดังนั้น $x = a^{\log_a x}$



เนื่องจากฟังก์ชัน $y = f(x) = \log_a x$ สามารถเขียนได้ในอีกรูปคือ $a^y = x$ ดังนั้นกราฟของ $a^y = x$ ถูกนิยามเหนือช่วง $x > 0, -\infty < y < \infty$ ทำให้โดเมนของลอการิธึมฟังก์ชันเป็นจำนวนจริงบวกและเรนจ์เป็นจำนวนจริง ถ้า $a > 1$ กราฟจะสูงขึ้นจากซ้ายไปขวา ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 0 จะทำให้ค่าของฟังก์ชันจะลดลงอย่างไม่มีขอบเขต รูปกราฟจะเข้าใกล้แกน y ขึ้นเรื่อยๆ นั่นคือ แกน y เป็น เส้นกำกับแนวตั้ง (Vertical Asymtote) ของกราฟ แต่ถ้าค่า $0 < a < 1$ กราฟจะลดความสูงจากซ้ายไปขวา ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 0 จะทำให้ค่าของฟังก์ชันจะเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต รูปกราฟจะเข้าใกล้แกน y ขึ้นเรื่อยๆ นั่นคือ แกน y เป็น เส้นกำกับแนวตั้ง (Vertical Asymtote) ของกราฟ





ลักษณะของกราฟ

1. จุดตัดแกน x ของกราฟคือ $(1,0)$ และไม่มีจุดตัดแกน y
2. แกน y จะเป็นเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟ
3. ฟังก์ชันลอการิธึมจะเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $a > 1$ และเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $0 < a < 1$
4. กราฟจะมีความเรียบ ไม่มีมุมและช่องว่าง

คุณสมบัติของลอการิธึม

เมื่อ M และ N เป็นจำนวนจริงบวก และ r เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1. $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^r = r \log_a M$

1.6.1 ลอการิธึมฐานธรรมชาติ (Natural Logarithm)

ถ้าฐานของฟังก์ชันลอการิธึมเป็นฐานธรรมชาติ เราจะใช้สัญลักษณ์ ln แทน ดังนั้น

$$y = \ln x \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad x = e^x$$

โดยเราได้คุณสมบัติบางประการเป็น $\ln 1 = 0$ และ $\ln e = 1$

นอกจากนี้ เมื่อ u และ v เป็นฟังก์ชันใดๆ ถ้า $\ln u = \ln v$ แล้ว $u = v$

ตัวอย่าง 1.18 จงหาผลเฉลยของฟังก์ชันชี้กำลัง $7 + (2)3^{x+1} = 10$ เมื่อกำหนดให้ $\ln 2 = 0.693$ และ $\ln 3 = 1.0986$

ตัวอย่าง 1.19 จะใช้เวลานานเท่าไรที่จะทำให้เงินต้นมูลค่า P มีค่าเป็นสองเท่า ถ้าดอกเบี้ยอยู่ในอัตราร้อยละ 8 โดยเป็นดอกเบี้ยทบต้นแบบต่อเนื่อง

วิธีทำ จากสูตรดอกเบี้ยทบต้นแบบต่อเนื่อง คือ $A = Pe^{rt}$

ตัวอย่าง 1.20 ถ้าฝากเงิน 100,000 บาทโดยไม่ถอนออกในธนาคารซึ่งจ่ายดอกเบี้ยร้อยละ 5 ต่อปี จะต้องใช้เวลาฝากกี่ปี จึงจะได้เงินทั้งหมด 150,000 บาท ถ้า

a) ธนาคารคิดดอกเบี้ยให้อย่างต่อเนื่อง

b) ธนาคารคิดดอกเบี้ยปีละครั้ง

วิธีทำ a) สูตรดอกเบี้ยต่อเนื่อง $A = Pe^{rt}$

วิธีทำ b) สูตรดอกเบี้ยต่อปี $A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ เมื่อ $n = 1$ ได้ว่า $A = P \cdot (1 + r)^t$

ตัวอย่าง 1.21 ประชากรในเคนย่าในปี 1984 มีจำนวน 19.5 ล้านคน และมีจำนวน 21.2 ล้านคนในปี 1986 สมมุติว่า ประชากรเพิ่มขึ้นแบบ Exponential จงหาสูตรในการคำนวณจำนวนประชากรที่ขึ้นกับเวลา(ปี)

วิธีทำ จาก $P = P_0 e^{kt}$ จะได้ $21.2 = 19.5e^{k(2)}$ หรือ $P = P_0 a^t$

1.6.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง a^t และ e^{kt}

จากฟังก์ชันการเติบโต (Growth Function) หรือ ฟังก์ชันการสลาย (Decay Function) ซึ่งอาจจะเขียนได้ 2 แบบ คือ $P = P_0a^t$ หรือ $P = P_0e^{kt}$ ซึ่งอาจเทียบได้ว่า $a = e^k$ เมื่อ a คือ จำนวนเท่าของการเติบโตต่อหน่วยเวลา และ $a > 1$ (จาก $a = e^k$ นั่นทำให้เราทราบว่า $a > 1$ เมื่อ $k > 0$) จะทำให้เกิดการเติบโตแบบ Exponential และ $k < 0$ จะทำให้เกิดการสลาย (ในที่นี้ $0 < a < 1$)

ถ้าค่า a ได้จากร้อยละของอัตราความเติบโต (r) นั่นคือ $a = 1 + r$ ดังนั้นอัตราความเติบโตอย่างต่อเนื่อง $k = \ln(1 + r)$ จะมีค่าค่อนข้างน้อยกว่า(แต่ก็ใกล้เคียง)กับค่า r เมื่อคือ r มีค่าน้อยๆ

ตัวอย่าง 1.22 จงแปลงค่า $P = 1000e^{0.05t}$ ให้อยู่ในรูป $P = P_0a^t$ และแปลงค่า $P = 500(1.06)^t$ ให้อยู่ในรูป $P = P_0e^{kt}$

วิธีทำ จาก $P = 1000e^{0.05t}$ เราได้ว่า $P_0 = 1000$ ดังนั้น $P = 1000e^{0.05t} = 1000a^t$ ทำให้ได้ว่า

$(a)^t = (e^{0.05})^t$ หรือ $a = e^{0.05} = 1.0513$ นั่นคือเราได้ $P = 1000(1.0513)^t$

ความหมายคือ การเติบโตอย่างต่อเนื่องด้วยอัตรา 5% จะเท่ากับอัตราการเติบโตต่อปี 5.13%

จาก $P = 500(1.06)^t$ เราได้ว่า $P_0 = 500$ ดังนั้น $P = 500(1.06)^t = 500e^{kt}$ ทำให้ได้ว่า

$(1.06)^t = (e^k)^t$ หรือ $1.06 = e^k$ หรือ $k = \ln 1.06 = 0.0583$ นั่นคือเราได้ $P = 500e^{0.0583t}$

ความหมายคือ อัตราการเติบโตต่อปี 6% จะเท่ากับการเติบโตอย่างต่อเนื่องด้วยอัตรา 5.83%