Linear Algebra Problems in Polish

Andrzej "Mathinity" Kukla

1. Udowodnić, że dla dowolnej kwadratowej macierzy A wyznacznik macierzy e^A jest równy e^{trA}

DW.

Ustalmy dowolną kwadratową macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ oraz jej postać Jordana: $A = PJP^{-1}$.

$$det(e^A) = det(e^{PJP^{-1}}) = det(Pe^JP^{-1}) = \underbrace{det(P)det(P^{-1})}_{=1}det(e^J) = det(e^J)$$

Skoro macierz e^J jest macierzą górnotrójkątną, to jej wyznacznik jest iloczynem wyrazów na głównej przekątnej, więc

$$det(e^J) = e^{trJ}$$

Jako że $tr(A) = tr(PJP^{-1}) = tr(P^{-1}PJ) = tr(J)$, to $det(e^A) = e^{trA}$.

$\blacksquare$

2. Wykazać, że jeżeli na przestrzeni wektorowej X nad ciałem $\mathbb{K}$ dwa iloczyny skalarne indukują te same normy, to są one sobie równe.

DW. Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oraz $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ na przestrzeni wektorowej X indukują tą samą normę $||\cdot||$ nad ciałem $\mathbb{K}$. Wtedy $\forall_{x\in X} : \sqrt{\langle x,x\rangle} := ||x|| =: \sqrt{\langle\langle x,x\rangle\rangle}$. Stąd wynika, że $\forall_{x\in X}\langle x,x\rangle = \langle\langle x,x\rangle\rangle$. Teraz niech $x, y \in X$. Mamy:

$$\begin{gathered}
\langle x+y, x+y\rangle = \langle\langle x+y, x+y\rangle\rangle \\
\langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle\langle x, x+y\rangle\rangle + \langle\langle y, x+y\rangle\rangle \\
\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \langle\langle x,x\rangle\rangle + \langle\langle x,y\rangle\rangle + \langle\langle y,x\rangle\rangle + \langle\langle y,y\rangle\rangle
\end{gathered}$$

Skoro $\forall_{x\in X}\langle x,x\rangle = \langle\langle x,x\rangle\rangle$, to:

$$\begin{gathered}
\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} = \langle\langle x,y\rangle\rangle + \overline{\langle\langle x,y\rangle\rangle} \\
\Re\langle x,y\rangle = \Re\langle\langle x,y\rangle\rangle
\end{gathered}$$

Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dowód jest skończony. Gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, to:

· Obserwacja: niech $x, y \in X$. Wtedy:

$$\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} = i\cdot \overline{i\langle y,x\rangle} = i\cdot\overline{\langle iy,x\rangle} = i\langle x,iy\rangle$$

Mamy:

$$\begin{aligned}4\langle x,y\rangle &= 2\langle x,y\rangle + 2\langle y,x\rangle + 2i\langle x,iy\rangle + 2\langle iy,x\rangle = \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle - (\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle) + \\ &+ i(\langle x,x\rangle + \langle x,iy\rangle + \langle iy,x\rangle + \langle iy,iy\rangle - (\langle x,x\rangle - \langle x,iy\rangle - \langle iy,x\rangle + \langle iy,iy\rangle)) = \\ &= ||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2\end{aligned}$$

Analogicznie wychodzi, że $4\langle\langle x,y\rangle\rangle = ||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2$, więc $\langle x,y\rangle = \langle\langle x,y\rangle\rangle$.

■

3. Wyznaczyć iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, względem którego baza $(2,1),(3,2)$ jest ortonormalna.

Załóżmy, że

$$\begin{aligned}g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = ax_1^2 + bx_1y_1 + cx_1x_2 + dx_1y_2 + ey_1^2 \\ + fx_2y_1 + gy_1y_2 + hx_2^2 + ix_2y_2 + jy_2^2, \\ a,b,c,d,e,f,g,h,i,j \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Skoro $g((rx_1,ry_1),(x_2,y_2))$ dla pewnego $r \in \mathbb{R}$, to $a=b=g=h=0$. Skoro $g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = g((x_2,y_2),(x_1,y_1))$ (bo działamy w przestrzeni $\mathbb{R}^2$), to $d=f$. Skrócona wersja działania g:

$$g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = cx_1x_2 + d(x_1y_2 + x_2y_1) + gy_1y_2$$

Skoro baza $(2,1),(3,2)$ jest ortonormalna, to $||(2,1)|| = 1$ oraz $||(3,2)|| = 1$, więc:

$$g((2,1),(2,1)) = 4c + 4d + g = 1 \wedge g((3,2),(3,2)) = 9c + 12d + 4g = 1$$

Z układu równań wnioskujemy, że $d = \frac{3-7c}{4}$ oraz $g = 3c-2$.

Podstawiając $c = 5$ otrzymujemy następujące działanie:

$$g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 5x_1x_2 - 8(x_1y_2 + x_2y_1) + 13y_1y_2$$

Sprawdźmy, czy jest to iloczyn skalarny:

1) $g((x,y),(x,y)) = 5x^2 - 16xy + 13y^2$
$\Delta_x = 256y^2 - 260y^2 \leqslant 0\ \forall_{y\in\mathbb{R}}$
$\Delta_y = 256x^2 - 260x^2 \leqslant 0\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$
Z tego wynika, że $\forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}:\ g((x,y),(x,y)) \geqslant 0$ i równość zachodzi jedynie dla $(0,0)$.

2) $g((x_1, y_1) + (x_2, y_2), (x_3 + y_3)) =$
$= 5x_3(x_1 + x_2) - 16((x_1 + x_2)y_3 + x_3(y_1 + y_2)) + 13y_3(y_1 + y_2) =$
$= 5x_1x_3 - 16(x_1y_3 + x_3y_1) + 13(y_1y_3) + 5x_2x_3 - 16(x_2y_3 + x_3y_2) + 13(y_2y_3) =$
$= g((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + g((x_2, y_2), (x_3, y_3)).$

3) $g((rx_1, ry_1), (x_2, y_2)) = rg((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ wynika z założenia.

4) $g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = g((x_2, y_2), (x_1, y_1))$ wynika z założenia.

Baza (2,1) (3,2) jest ortonormalna względem g z założenia.

4. Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym indukującym normę $||\cdot||$. Udowodnić, że wektory $x, y \in X$ są prostopadłe względem tego iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy, gdy $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (twierdzenie Pitagorasa). Wykazać, że nad $\mathbb{C}$ analogiczne twierdzenie nie jest prawdziwe.

DW. Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ będzie danym iloczynem skalarnym, a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
($\Rightarrow$) Skoro $x \perp y$ względem $\langle\cdot,\cdot\rangle$, to $\langle x, y\rangle = 0$. Wtedy

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \underbrace{2\langle x, y\rangle}_{=0} + \langle y, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2$$

($\Leftarrow$) Skoro

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2,$$

to $\langle x, y\rangle = 0$, więc $x \perp y$ względem $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

■

Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ będzie danym iloczynem skalarnym, a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wtedy

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle$$

Jeśli $\langle x, y\rangle = ic$ dla pewnego $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to

$$\langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0$$

W takim wypadku $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$, ale $\langle x, y\rangle \neq 0$, więc teza jest fałszywa.

5. Dana jest symetryczna macierz A o wymiarach $n \times n$ i wyrazach rzeczywistych. Udowodnić, że jeżeli istnieje liczba całkowita dodatnia m taka, że $A^m = I$, to $A^2 = I$

Skoro A jest macierzą symetryczną, to istnieje macierz ortogonalna Q o wymiarach $n \times n$ taka, że $QDQ^T = A$, gdzie D jest macierzą diagonalną z wartościami własnymi λ_i macierzy A na przekątnej. Mamy:

$$A^m = (QDQ^T)^m = QD^mQ^T = I = QQ^T$$

Stąd widać, że $D^m = I$, a więc $\forall i \in \{1, ..., n\} : \ \lambda_i^m = 1$, a skoro A jest macierzą symetryczną to każda jej wartość własna λ_i jest rzeczywista, więc $\forall i \in \{1, ..., n\} : \ \lambda_i \in \{1, -1\}$. Stąd:

$$A^2 = (QDQ^T)^2 = QD^2Q^T = QIQ^T = I$$

■

6. Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią unitarną, zaś $t \neq 1$ liczbą rzeczywistą. Wykazać, że dla wektorów $x, y \in X$ równość

$$(1 + t^2)\|x + y\|^2 = \|tx + y\|^2 + \|x + ty\|^2$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x i y są prostopadłe.

DW. Rozpiszmy prawą część równania:

$$\begin{aligned}
\|tx + y\|^2 + \|x + ty\|^2 &= t^2\langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t\langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \\
&\quad + \langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \\
&= (1 + t^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2) - 4t\langle x, y\rangle = \\
&= (1 + t^2)(\|x + y\|^2 - 2\langle x, y\rangle) - 4t\langle x, y\rangle = \\
&= (1 + t^2)\|x + y\|^2 - 2\langle x, y\rangle(t - 1)^2
\end{aligned}$$

Równość z tezy zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle x, y\rangle = 0$ lub $t = 1$, ale z założenia $t \neq 1$, więc $\langle x, y\rangle = 0$, czyli $x \perp y$.

■

7. Udowodnić, że jeżeli symetryczna macierz rzeczywista A o wymiarach $n \times n$ jest nieujemnie określona, to istnieje dokładnie jedna symetryczna, rzeczywista i nieujemnie określona macierz B o wymiarach $n \times n$ taka, że $A = B^2$.

DW. Istnienie macierzy B jest całkiem oczywiste. Skoro A jest symetryczna, to jest diagonalizowalna, więc niech $A = PDP^{-1}$ dla pewnej macierzy ortogonalnej P ($P^{-1} = P^T$) i macierzy diagonalnej D składającej się z wartości własnych A na głównej przekątnej. Skoro A jest nieujemnie określona, to każda wartość własna A jest nieujemna, więc istnieje rzeczywista symetryczna macierz $D^{\frac{1}{2}}$ taka, że $D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}} = D$. Wtedy

$$B = PD^{\frac{1}{2}}P^T.$$

$\cdot\ B^2 = PD^{\frac{1}{2}}P^TPD^{\frac{1}{2}}P^T = PD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}P^T = PDP^T = A$

$\cdot$ B jest symetryczna, bo $(PD^{\frac{1}{2}}P^T)^T = (P^T)^T(D^{\frac{1}{2}})^TP^T = PD^{\frac{1}{2}}P^T$

$\cdot$ B jest rzeczywista oraz nieujemnie określona, bo A jest rzeczywista i nieujemnie określona.

Udowodnijmy, że istnieje tylko jedna taka macierz. Niech B będzie symetryczną, rzeczywistą i nieujemnie określoną macierzą taką, że $B^2 = A$ dla danej macierzy A. Wtedy B jest diagonalizowalna, więc $B = QWQ^T$. Skoro $A = B^2 = QW^2Q^T$, to wartości własne A są kwadratami wartości własnych B. Skoro B jest nieujemnie określona, to każda wartość własna B jest nieujemna, więc wartości własne B, a nawet postać diagonalna B, są określone jednoznacznie przez wartości własne A i postać diagonalną A.

Załóżmy nie wprost, że istnieją dwie macierze rzeczywiste, symetryczne i określone nieujemnie: $B_1,\ B_2$ takie, że $B_1^2 = A = B_2^2$. Niech $B_1 = PDP^T$ i $B_2 = QDQ^T$ dla Q i P ortogonalnych. Wtedy:

$$PD^2P^T = QD^2Q^T$$
$$D^2 = P^TQD^2Q^TP = UD^2U^T$$

Jako że D^2 jest macierzą diagonalną, to $U = P^TQ$ musi być równa $k \cdot I_n$, a jako że U musi być ortogonalna, to $P^TQ = I \Rightarrow Q = P$, więc $B_1 = B_2$

■

8. Dana jest symetryczna, rzeczywista i nieujemnie określona macierz A o wymiarach $n \times n$. Wykazać, że jeśli $x \in \mathbb{R}^n$ jest takim wektorem, że $x^TAx = 0$ to $Ax = 0$

DW. Skoro A jest symetryczna to jest diagonalizowalna, więc niech $A = PDP^{-1}$ dla pewnej macierzy ortogonalnej P ($P^{-1} = P^T$) i macierzy diagonalnej D składającej się z wartości własnych A na głównej przekątnej. Skoro A jest nieujemnie określona, to każda wartość własna A jest nieujemna, więc istnieje rzeczywista symetryczna macierz $D^{\frac{1}{2}}$ taka, że $D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}} = D$. Stąd

$$A = PDP^{-1} = PD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}P^{-1} = PD^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}})^TP^T,$$

więc $A = B^TB$ dla $B = P^T(D^{\frac{1}{2}})^T$. Wtedy

$$x^TAx = x^TB^TBx = (Bx)^TBx = U^TU = 0.$$

Skoro $U^TU = 0$, to $U = Bx = 0$, więc

$$A = B^TB \Rightarrow Ax = B^TBx = B^T \cdot 0 = 0$$

■

9. Macierz A wymiaru $n \times n$ spełnia równość $A^2 = A$. Dowieść, że rząd macierzy A jest równy śladowi macierzy A.

DW. Niech λ będzie wartością własną A oraz $x \neq 0$ wektorem własnym odpowiadającym λ. Wtedy:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow AAx = \lambda Ax \Rightarrow A^2x = Ax = \lambda x = \lambda^2 x \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)x = 0,$$

a skoro $x \neq 0$, to $\lambda = 1$ lub $\lambda = 0$.

Wiemy (przez postać Jordana macierzy A), że $tr(A)$ jest równa sumie wartości własnych, więc dla pewnych $a, b \in \mathbb{N} : a, b \leqslant n,\ a + b = n$:

$$tr(A) = 0 \cdot a + 1 \cdot b = b$$

Twierdzenie o rzędzie mówi, że $rank(A) = n - \dim(\ker(A))$. Jądro A to wektory własne A, których odpowiadające wartości własne to zera (plus wektor zerowy), więc $\dim(\ker(A)) = a$, stąd:

$$rank(A) = n - a = b = tr(A)$$

■

10. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb rzeczywistych, dla których istnieje dokładnie jedna macierz symetryczna macierz M o wyrazach rzeczywistych i wymiarach 2×2 taka, że $\mathrm{tr} M = a$ oraz $\det M = b$.

Niech $M = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że:

$$trM = x + z = a,\ \det M = xz - y^2 = b$$

Przekształcając i łącząc ze sobą te dwa równania otrzymujemy:

$$y^2 = x(a - x) - b$$

$$y = \pm\sqrt{x(a - x) - b}.$$

Chcemy, aby y było wyznaczone jednoznacznie, więc y musi być równe 0. Stąd:

$$x^2 - ax + b = 0.$$

Chcemy, aby x był wyznaczony jednoznacznie, więc $\Delta_x = a^2 - 4b$ musi być równa 0. Wtedy:

$$b = \frac{a^2}{4}, \quad x = \frac{a}{2}.$$

Ostatecznie, dla każdej pary $(a, \frac{a^2}{4})$ liczb rzeczywistych istnieje dokładnie jedna macierz symetryczna M o wyrazach rzeczywistych, taka że $\mathrm{tr} M = a$ i $\det M = \frac{a^2}{4}$, a dla każdej pary (a, b) liczb rzeczywistych innej postaci niż $(a, \frac{a^2}{4})$ nie istnieje dokładnie jedna taka macierz.

11. Niech A będzie macierzą o wymiarach $n \times n$ i wyrazach zespolonych, która spełnia równość $A^3 = 0$. Udowodnić, że rząd macierzy A nie przekracza $\frac{2n}{3}$.

Najpierw zauważmy, że

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}/\{0\}} : (a+ib)^3 \neq 0. \tag{1}$$

Istotnie, gdyby dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}/\{0\} : (a+ib)^3 = 0$, to $a^2 - 3b^2 = 0$ i $3a^2 - b^2 = 0$, z czego wynika, że $a = 0 = b$. Przejdźmy do macierzy.

Niech $PJP^{-1} = A$ będzie postacią Jordana macierzy A. Wtedy

$$A^3 = PJ^3P^{-1} = 0 \Rightarrow J^3 = 0.$$

Prawa równość wynika z tego, że jedyna macierz podobna do macierzy zerowej jest ona sama (m.in. dlatego, że macierz zerowa jest jedyną macierzą rzędu 0, a macierze podobne muszą mieć te same rzędy). Przyjrzyjmy się potęgowaniu macierzy Jordana: ($J_1, ..., J_k$ to klatki Jordana)

$$J^3 = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} J_1^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k^3 \end{bmatrix} = 0$$

Widać, że $\forall_{i \in \{1,...,k\}} : J_i^3 = 0$, a zachodzi (1), więc wartością własną odpowiadającą każdej klatce Jordana jest 0 (w szczególności jedyną wartością własną A jest 0). Zauważmy, że podnosząc klatkę Jordana do pewnej potęgi $a \in \mathbb{N}$, której odpowiadającą wartością własną jest 0, tak naprawdę przesuwamy przekątną z "jedynkami" o $a-1$ miejsc w górę, np.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd widać, że każda klatka Jordana macierzy J musi być maksymalnie wymiaru 3×3 (bo gdyby klatka Jordana J_i macierzy J miała wymiar większy niż 3×3, to $J_i^3 \neq 0$), więc w macierzy J jest co najmniej $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ klatek Jordana. Wiemy, że liczba klatek Jordana odpowiadająca jednej wartości własnej jest równa liczbie liniowo niezależnych wektorów odpowiadających tej samej wartości własnej. Stąd wiemy, że macierz A ma co najmniej $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ liniowo niezależnych wektorów odpowiadających wartości własnej 0, więc

$$\dim(\ker A)) \geqslant \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

Ostatecznie, z tw. o rzędzie:

$$rank(A) = n - \dim(\ker A)) \leqslant n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \leqslant n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$$

■