Combinatorics Problems in Polish

Andrzej "Mathinity" Kukla

1a. Ile dodatnich dzielników ma liczba $x = 2 \cdot 3^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 47^5$?

Każdy dodatni dzielnik x będzie iloczynem liczb pierwszych, które są dzielnikiem x. Stąd:

$$y|x \Leftrightarrow y = 2^{\epsilon_1} \cdot 3^{\epsilon_2} \cdot 7^{\epsilon_3} \cdot 11^{\epsilon_4} \cdot 47^{\epsilon_5}, \quad \epsilon_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad j \in \{1, ..., 5\}$$

z tym, że $\epsilon_1 \leqslant 1, \epsilon_2 \leqslant 4, \epsilon_3 \leqslant 3, \epsilon_4 \leqslant 2, \epsilon_5 \leqslant 5$. Z tego wynika, że x ma $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 720$ dodatnich dzielników.

1b. Ile dodatnich dzielników ma liczba $x = p_1^{\epsilon_1} \cdot p_2^{\epsilon_2} \cdots p_n^{\epsilon_n}$, gdzie p_i to różne liczby pierwsze?

Analogicznie do zadania **1a.** wiemy, że liczba x ma $(\epsilon_1+1\cdot)(\epsilon_2+1)\cdots(\epsilon_n+1)$ dodatnich dzielników.

2a. W pokerze, ile jest możliwości full'a (3+2)?

Wybierzmy najpierw wartość, z której wybierzemy trójkę. Wartości mamy, 13, więc możliwości mamy **13**.

Następnie wybieramy, spośród 4 kart wybranej wartości 3 z nich, więc możliwości mamy $\binom{4}{3} = \mathbf{4}$.

W następnej kolejności wybieramy wartość, z której wybierzemy parę. Musi ona być inna niż poprzednia, więc możliwości mamy **12**.

Na sam koniec wybieramy, spośród 4 kart wybranej wartości 2 z nich, więc możliwości mamy $\binom{4}{2} = \mathbf{6}$.

Ostatecznie mamy $13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = \mathbf{3744}$ możliwości full'a.

2b. W pokerze, ile jest możliwości koloru (5 tego samego koloru)?

Wybierzmy najpierw kolor, możliwości mamy **4**.

Następnie wybieramy 5 kart spośród 13 dostępnych, więc możliwości mamy $\binom{13}{5} = \mathbf{1287}$

Na sam koniec od naszej liczby musimy odjąć ilość możliwych pokerów (ponieważ poker to także kolor), a pokerów jest **40**.

Ostatecznie mamy $4 \cdot 1284 - 40 = \mathbf{5108}$

3. Ile jest możliwości posadzenia 6 mężczyzn i 6 kobiet przy okrągłym stole tak, aby siedzieli na przemian? Miejsca nie mają znaczenia, jedynie kto przy kim siedzi.

Niech $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ to będzie zbiór mężczyzn, a $Y = 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ to będzie zbiór kobiet. Tworząc ciąg:

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5, x_6, y_6$$

i łącząc jego końce (tworząc cykl) stworzymy "wizualizację" okrągłego stołu.

Gdybyśmy nie tworzyli okrągłego stołu, a ludzi sadzalibyśmy przy prostokątnym stole przy jednej krawędzi to sprawa byłaby prosta, możliwości byłoby $6! \cdot 6! = 518400$. W przypadku okrągłego stołu problem komplikuje się. Zauważmy, że ciąg

$$1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5, 11, 6, 12$$

jest równy ciągowi

$$2, 8, 3, 9, 4, 10, 5, 11, 6, 12, 1, 7$$

ponieważ po połączeniu obu końców i lekkim obróceniu "stołu" dostajemy to samo ułożenie (cykl, po przesunięciu cyklicznym jest równy pierwotnemu cyklowi: (123)=(231)). Widać, że takich równych sobie ciągów jest 6, więc dzieląc wynik dla "prostokątnego stołu" przez 6 otrzymamy żądany wynik:

$$\frac{518400}{6} = 259200$$

4. Ile jest możliwości posadzenia 8 osób przy okrągłym stole tak, aby pewne osoby X i Y nie siedziały obok siebie? Miejsca nie mają znaczenia, jedynie kto przy kim siedzi.

Korzystając z rozważań z poprzedniego zadania, ustalmy następujący ciąg:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$$

Ustawmy X na pierwszym miejscu (miejsce nie ma znaczenia, bo i tak można cyklicznym przesunięciem przestawić X na pierwsze miejsce). Wtedy na drugim oraz na ostatnim miejscu nie może pojawić się Y, bo Y nie może siedzieć obok X. Możemy więc wybrać **5** miejsc dla Y. Pozostałe osoby mogą siedzieć na dowolnych miejscach, więc mamy $5! =$ **120** możliwości na ich posadzenie. Ostateczny wynik to:

$$5 * 120 = 600$$

5a. Ile jest możliwości ustawienia 8 nierozróżnialnych wież na szachowej planszy tak, aby żadna nie mogła zaatakować żadnej innej?

Ustawiając pierwszą wieżę mamy do dyspozycji $8 \cdot 8$ pól. Po ustawieniu pierwszej wieży zostaje nam $7 \cdot 7$ pól do ustawienia kolejnej wieży. Analogicznie idąc 8 wież (z uwzględnioną kolejnością wież) możemy ustawić na $8!^2$ sposobów. Wynik ten musimy jednak podzielić jeszcze przez liczbę możliwości ułożenia 8 wież w ciągu, ponieważ wieże mają być nierozróżnialne. Stąd ostateczny wynik to:

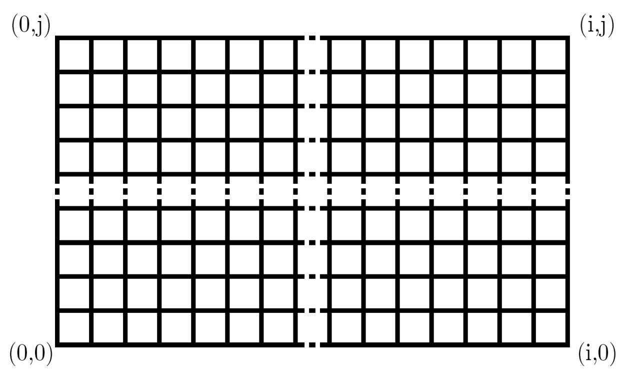
$$\frac{8!^2}{8!} = 8! = 40320$$

5b. Ile jest możliwości ustawienia 8 nierozróżnialnych wież na planszy wymiarów 10×10 tak, aby żadna nie mogła zaatakować żadnej innej?

Rozważając analogicznie do rozwiązania powyższego zadania możliwości będzie $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 9 \cdots 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{10!^2}{4}$, co także musimy podzielić przez liczbę możliwości ułożenia 8 wież w ciągu, więc ostateczny wynik to:

$$\frac{10!^2}{4 \cdot 8!} = 5^2 \cdot 9 \cdot 9! = 81648000$$

6a. Najkrótsza droga z $(0,0)$ do (i,j) jest równa $i+j$. Ile jest takich dróg?



Popatrzmy na drogę jak na funkcję przyporządkowania. Mamy do wykonania $i+j$ ruchów, więc mamy $i+j$ pól do zapełnienia:

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_ \cdots \_\ \_\ \_\ \_}_{i+j}$$

Każde pole zapełniamy ruchem na wschód albo na północ. Aby znaleźć liczbę różnych dróg najpierw przyporządkujmy do konkretnych pól wszystkie ruchy na wschód, czyli wybieramy i pól: $\binom{i+j}{i}$, a do pozostałych, pustych pól przypisujemy ruch na północ. Gdybyśmy najpierw przyporządkowywali do konkretnych pól wszystkie ruchy na północ, to byśmy wybierali j pól: $\binom{i+j}{j}$, ale

$$\binom{i+j}{i} = \binom{i+j}{j},$$

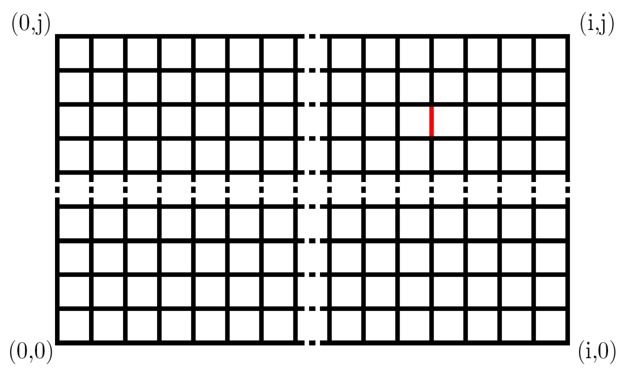
więc nie ma znaczenia które ruchy wybierzemy najpierw.

Ostateczna odpowiedź to:

$$\binom{i+j}{i}$$

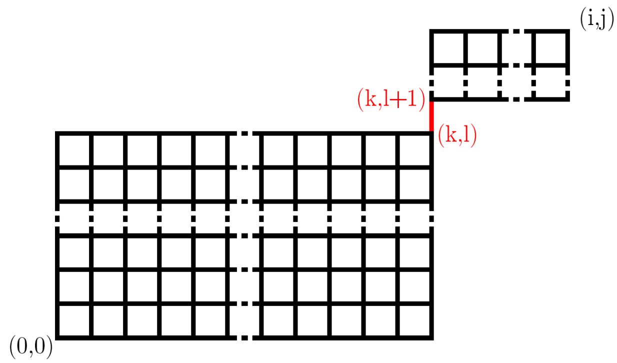
6b. Najkrótsza droga z $(0,0)$ do (i,j) jest równa $i+j$. Załóżmy, że droga pomalowana na czerwono jest zamknięta. Ile jest najkrótszych dróg z $(0,0)$ do (i,j) z pominięciem czerwonej drogi?

[Czerwona droga przebiega od punktu (k,l) do punktu $(k,l+1)$]



Aby policzyć, ile jest takich dróg weźmiemy wynik z 1a, czyli liczba wszystkich możliwych najkrótszych dróg i odejmiemy od niej te drogi, które przechodzą przez czerwoną drogę.

Aby droga przechodziła przez czerwoną drogę musi najpierw dotrzeć do jej dolnego krańca, czyli do punktu (k,l), następnie przejść na punkt $(k,l+1)$ i stamtąd dotrzeć do punktu (i,j). Powstają nam dwa obszary:



Mamy $\binom{k+l}{k}$ możliwych dróg na przejście z $(0,0)$ do (k,l) (na podstawie rozwiązania 1a). Następnie, w trakcie każdej z tych dróg musimy przejść przez czerwoną drogę i ostatecznie mamy kolejnych $\binom{i+j-(k+l+1)}{i-k}$ możliwości przejścia do końca. Ostateczny wynik to:

$$\binom{i+j}{i} - \binom{k+l}{k} \cdot \binom{i+j-(k+l+1)}{i-k}$$

7. Udowodnij kombinatorycznie (dla $m > n, \quad k < m, \quad k \leqslant n$)

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

DW. Wyobraźmy sobie, że musimy wybrać k elementów ze zbioru X, którego moc to $m+n$ (prawa strona tezy). Podzielmy ten zbiór na dwa rozłączne podzbiory X_1 i X_2, których moce to odpowiednio m i n, więc $X_1 \cup X_2 = X$. Aby wybrać k elementów z X możemy wybierać najpierw z X_1 pewną ilość elementów i, a następnie pozostałą ilość elementów $k-i$ wybrać ze zbioru X_2. Jeżeli wybierzemy 0 elementów z X_1 (1 możliwość), to następnie musimy wybrać k elementów z X_2 ($\binom{n}{k}$ możliwości). Jeżeli wybierzemy 1 element z X_1 ($\binom{m}{1}$ możliwości), to następnie musimy wybrać $k-1$ elementów z X_2 ($\binom{n}{k-1}$ możliwości). Analogicznie zwiększając liczbę elementów branych z X_1 otrzymamy k możliwości, które są wyczerpujące oraz rozłączne, a ich suma daje lewą stronę tezy, więc teza jest prawdziwa.

$\blacksquare$

(a) Jeśli $m = n$, to
· dla k parzystego niech $l = \frac{k}{2}$
Wtedy wzór można zapisać w ten sposób:

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{l-1} \binom{m}{i} \binom{m}{k-i} + \binom{m}{l}^2 = \binom{2m}{k}$$

· dla k nieparzystego niech $l = \frac{k-1}{2}$
Wtedy wzór można zapisać w ten sposób:

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{l} \binom{m}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{2m}{k}$$

(b) Jeśli $m = n = k$, a wiemy, że

$$\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i}$$

to wzór można zapisać w ten sposób:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 = \binom{2k}{k}$$

8. Załóżmy, że w pudełku mamy 18 piłek, gdzie każda z nich ma przypisany numerek, od 1 do 6, po 3 piłki na jeden numer. Ile jest możliwych rezultatów?

(a) Załóżmy, że kolejność wyciągania piłek ma znaczenie. Podzielmy to na przypadki:
(1) Pierwsze dwie piłki są takie same:

- Trzecia piłka jest taka sama jak poprzednie dwie. Wtedy mamy $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5$ możliwości.
- Trzecia piłka jest inna niż dwie poprzednie. Wtedy mamy $6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6$ możliwości.

(2) Pierwsze dwie piłki są różne. Wtedy mamy $6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6$ możliwości.
Ostatecznie mamy $30 + 180 + 1080 = 1290$ możliwości.
(b) Załóżmy, że kolejność wyciągania piłek nie ma znaczenia. Podzielmy to na przypadki:

(1) Wyciągnęliśmy 3 takie same piłki. Wtedy możliwości mamy $6 \cdot 5$
(2) Wyciągnęliśmy 2 pary piłek. Wtedy mamy $6 \cdot 5$ możliwości.
(3) Wyciągnęliśmy parę piłek, a pozostałe piłki się od nich różnią, a także różnią się miedzy sobą. Wtedy mamy $6 \cdot 5 \cdot 4$ możliwości.
(4) Każda piłka jest inna. Wtedy mamy $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ możliwości.
Ostatecznie mamy $30 + 30 + 120 + 360 = 540$ możliwości.

9. Ile jest permutacji słowa "Mississippi"?

W słowie "Mississippi" mamy jedno "m", po cztery "s" i "i" i dwa "p". Permutacja musi się składać z 11 znaków. Zacznijmy od umieszczenia litery "m" w jednym z tych miejsc, mamy **11** możliwości. Następnie umieśćmy litery "s", mamy $\binom{10}{4} = \mathbf{210}$ możliwości. Następnie umieśćmy litery "i", mamy $\binom{6}{4} = \mathbf{15}$ możliwości. Litery "p" wstawiamy w pozostałe miejsca. Tym sposobem otrzymujemy $11 \cdot 210 \cdot 15 = \mathbf{34650}$ permutacji.

10. Znajdź liczbę całkowitych rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$$

dla $x_1 \geqslant -3, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 4, x_4 \geqslant 2, x_5 \geqslant 12.$

Przekształćmy to równanie tak, aby dolne granice naszych równań były równe 0:

$$y_1 = x_1 + 3, y_2 = x_2, y_3 = x_3 - 4, y_4 = x_4 - 2, y_5 = x_5 - 12$$

Podstawiając "igreki" za "iksy" otrzymujemy następujące równanie:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 35$$

dla $y_i \geqslant 0$, gdzie $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Otrzymujemy następującą liczbę całkowitych rozwiązań "igrekowego" równania:

$$\binom{35 + 5 - 1}{35} = \binom{39}{35},$$

która jest także liczbą całkowitych rozwiązań oryginalnego równania.