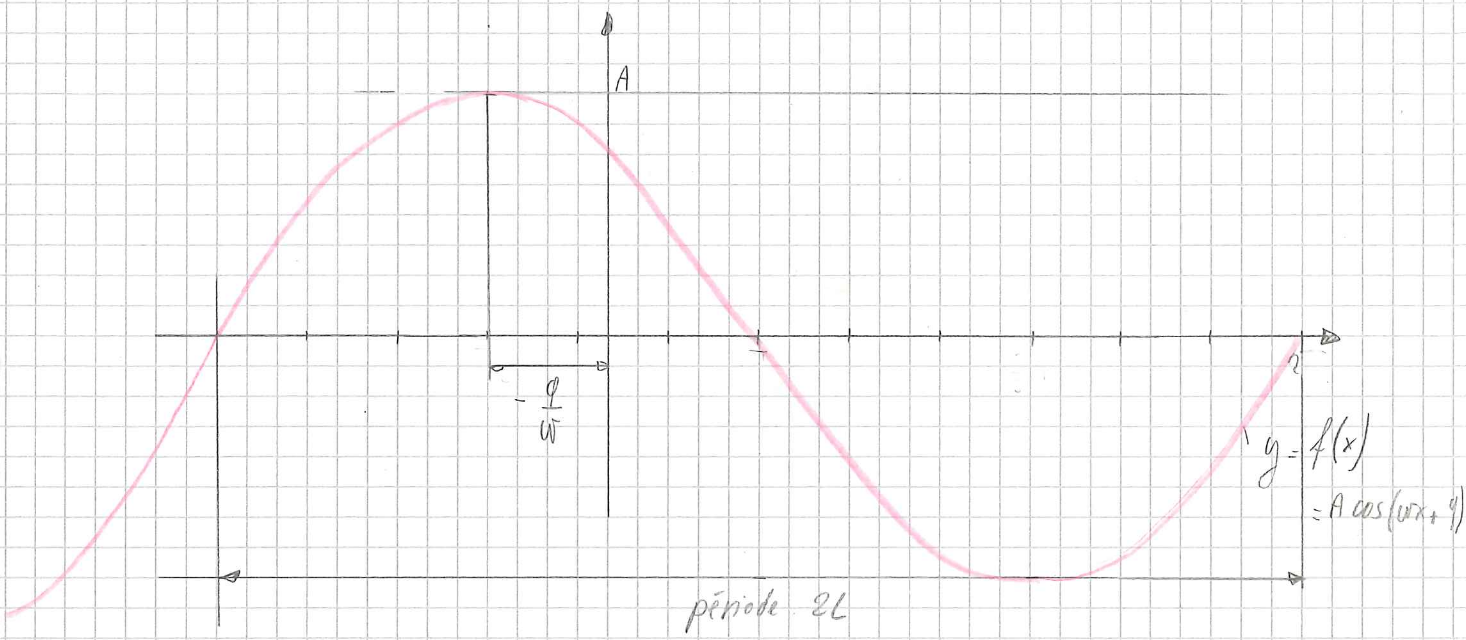
SÉRIES DE FOURIER

1) Représentation d'une oscillation harmonique

oscillation harmonique $\leftrightarrow$ fonction sinusoïdale



$y = f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ [où $A\cos(\omega x - \alpha)$ où $A\sin(\omega x + \beta)$]

$A > 0$: Amplitude

$\omega > 0$: Pulsation liée à la période $2L$ par $\omega = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$

la fréquence ν est liée à la pulsation $\omega = 2\pi\nu$

$\omega x + \varphi$ est la phase

φ est la phase en $x = 0$ (où phase initiale)

NB : φ est défini à $k2\pi$ près. En générale choisit $-\pi \leq \varphi \leq \pi$

Interprétation géométrique de φ :

si $\varphi > 0$ $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ est " $y = A\cos(\omega x)$ décalé de $\frac{\varphi}{\omega}$ à gauche.

si $\varphi < 0$ $\quad y = A\cos(wx + \varphi)$ est "$A\cos(wx)$ décalé de $\dfrac{|\varphi|}{w}$ à droite"

Remarque :

$$y = A\cos(wx + \varphi) = A\cos wx \cos\varphi - A\sin wx \sin\varphi$$
$$= a\cos wx + b\sin wx$$

avec $a = A\cos\varphi$ et $b = -A\sin\varphi$

Problème :

Comment passer de la forme

$$y = a\cos wx + b\sin wx$$

à la forme

$$y = A\cos(wx + \varphi) \ ?$$

Exemple :

$$y = -\sqrt{3}\cos wx + \sin wx = A\cos(wx + \varphi)$$

Comment calculer A et φ ?

$$-\sqrt{3}\cos wx + \sin wx = A\cos(wx + \varphi) = A\cos wx \cos\varphi - A\sin wx \sin\varphi$$

identification des coefficients :

$$\begin{cases} A\cos\varphi = -\sqrt{3} \\ -A\sin\varphi = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cos\varphi = -\sqrt{3} \\ A\sin\varphi = -1 \end{cases}$$

① On élève au carré et on additionne :

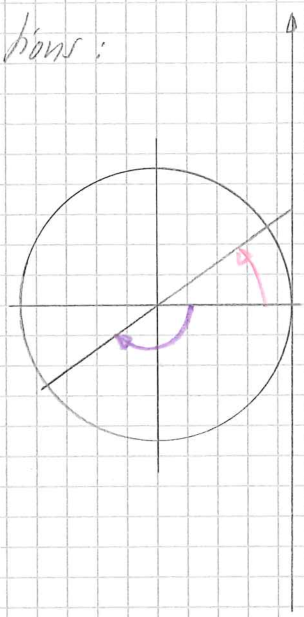
$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = (-\sqrt{3})^2 + (-1)^2$$

$$A^2 = 4 \rightarrow \underline{A = 2} \quad \text{car } A > 0 \text{ toujours}$$

② On divise les 2 équations :

$$\frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{-1}{-\sqrt{3}}$$

$$tg\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow$$



Choix du bon φ :

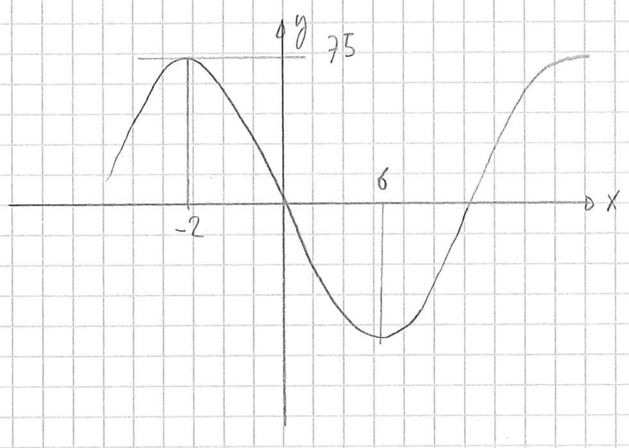
$$A\cos\varphi = -\sqrt{3} \rightarrow \cos\varphi < 0$$

Donc $\underline{\varphi} = Arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \pi = \underline{-5\frac{\pi}{6}}$

Réponse : $\underline{y = 2\cos\left(wx - \frac{5\pi}{6}\right)}$

Exercices :

1)



$$y = A\cos(wx + \varphi)$$

$$A > 0$$

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi$$

$\underline{A = 75}$ $\qquad L = 8 \rightarrow \underline{w} = \frac{\pi}{L} = \underline{\frac{\pi}{8}}$

de plus :

$$\frac{\varphi}{w} = 2 \rightarrow \varphi = 2w = 2\,\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 2

$$y = 6{,}54 \cos(wx) + 10{,}06 \sin(wx) = A \cos(wx + \varphi)$$

$$= A\cos(wx)\cos\varphi - A\sin(wx)\sin\varphi$$

En identifiant les coefficients on a :

$$\begin{cases} A\cos\varphi = 6{,}54 \\ A\sin\varphi = -10{,}06 \end{cases}$$

Calcul de A:

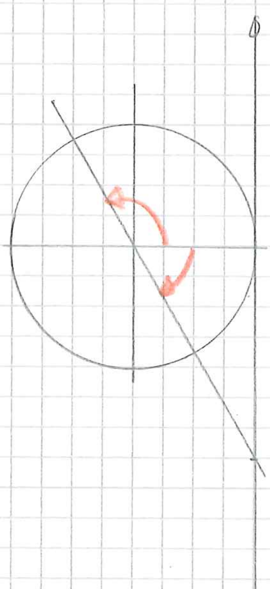
$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = 6{,}54^2 + 10{,}06^2$$

$$A^2 = 143{,}98 \rightarrow A = 11{,}99 \simeq 12$$

Calcul de φ

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{10{,}06}{6{,}54}$$

$$tg\,\varphi = -1{,}54$$



$\sin\varphi < 0 \rightarrow$

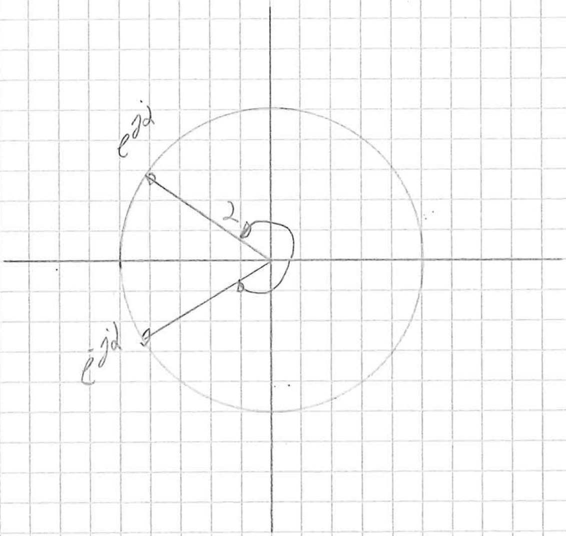
$$\varphi = \mathrm{Arctg}\left(-\frac{10{,}06}{6{,}54}\right) = -1$$

Finalement: $y = 12\cos(wx - 1)$

Forme complexe

Euler : $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$

$$\left(e^{j\alpha}\right)^* = e^{-j\alpha}$$



$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$$
$$e^{-j\alpha} = \cos\alpha - j\sin\alpha$$

en additionant on trouve :

$$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$
$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

1) passage de la forme $y = a\cos(wx) + b\sin(wx)$ à la forme complexe

$$y = a\cos(wx) + b\sin(wx) = a\,\frac{e^{jwx} + e^{-jwx}}{2} + b\,\frac{e^{jwx} - e^{-jwx}}{2j}$$

$$= \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2j}\right)e^{jwx} + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2j}\right)e^{-jwx}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{a - bj}{2}\right)}_{c} e^{jwx} + \underbrace{\left(\frac{a + bj}{2}\right)}_{c^*} e^{-jwx}$$

En posant $c = \frac{1}{2}(a - bj)$ on a :

$$y = a\cos wx + b\sin wx = c\,e^{jwx} + c^* e^{-jwx}$$

NB : c = nombre complexe

2) passage de la forme $y = A\cos(wx + \varphi)$ à la forme complexe

$$y = A\cos(wx + \varphi) = A\,\frac{e^{j(wx+\varphi)} + e^{-j(wx+\varphi)}}{2}$$

$$= \frac{A}{2}\left[e^{jwx}\cdot e^{j\varphi} + e^{-jwx}\cdot e^{-j\varphi}\right] = \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\varphi}}_{c}\,e^{jwx} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\varphi}}_{c^*}\,e^{-jwx}$$

En posant $c = \frac{A}{2}e^{j\varphi}$ on a :

$$y = A\cos(wx + \varphi) = c\,e^{jwx} + c^* e^{-jwx}$$

Oscillation harmonique :

$$y = A\cos(wx + \varphi)$$

$$= a\cos(wx) + b\sin(wx)$$

$$= c\,e^{jwx} + c^* e^{-jwx}$$

$Re(c) = \frac{1}{2}a$ $\qquad |c| = \frac{A}{2}$

$Im(c) = -\frac{1}{2}b$ $\qquad arg(c) = \varphi$

Exercice 1

$y = -\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x)$, écrire sous forme complexe

$$y = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right)e^{j2x} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right)e^{-j2x}$$

Exercice 2

$y = 3\cos(5x - 1)$, écrire sous forme complexe:

$$y = \frac{3}{2}e^{-j}\cdot e^{j5x} + \frac{3}{2}e^{j}e^{-j5x} = \frac{3}{2}e^{j(-1+5x)} + \frac{3}{2}e^{-j(-1+5x)}$$

Exercice 3

$y = (2+3j)e^{j10x} + (2-3j)e^{-j10x}$, écrire sous les 2 formes réelles

$$y = 4\cos(10x) - 6\sin(10x)$$

$$y = 2\sqrt{13}\cos\left(10x + \arctg\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

2) Polynômes trigonométriques

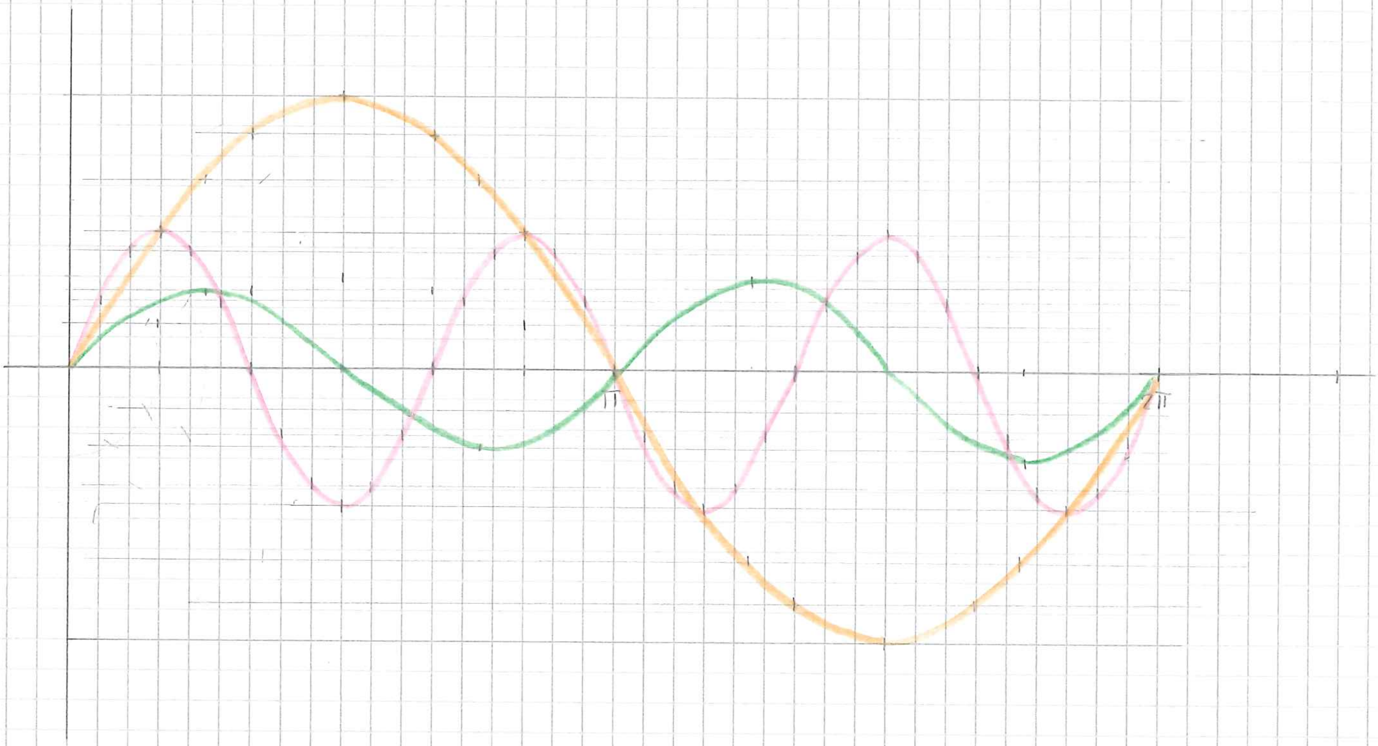
Un polynôme trigonométrique d'ordre N: est la superposition d'une constante et de N oscillation harmoniques de pulsations $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, N\omega$

Donc :

$$y = A_0 + \underbrace{A_1\cos(\omega x + \varphi_1)}_{\text{la fondamentale}} + \underbrace{A_2\cos(2\omega x + \varphi_2)}_{\text{la } 2^{\text{ème}} \text{ harmonique}} + \dots + \underbrace{A_N\cos(N\omega x + \varphi_N)}_{\text{le } N^{\text{ième}} \text{ harmonique}}$$

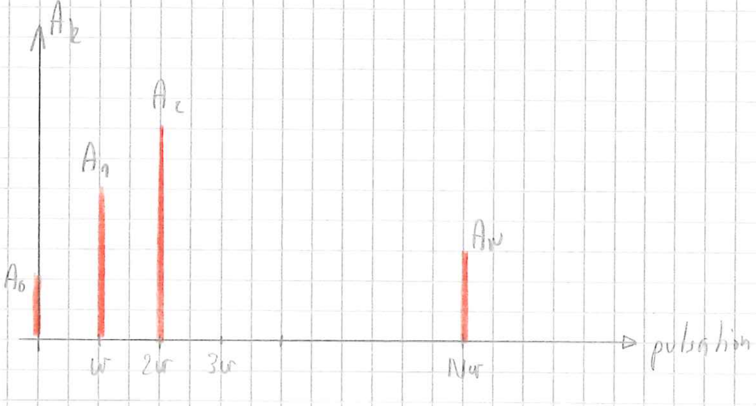
Exemple :

$$y = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

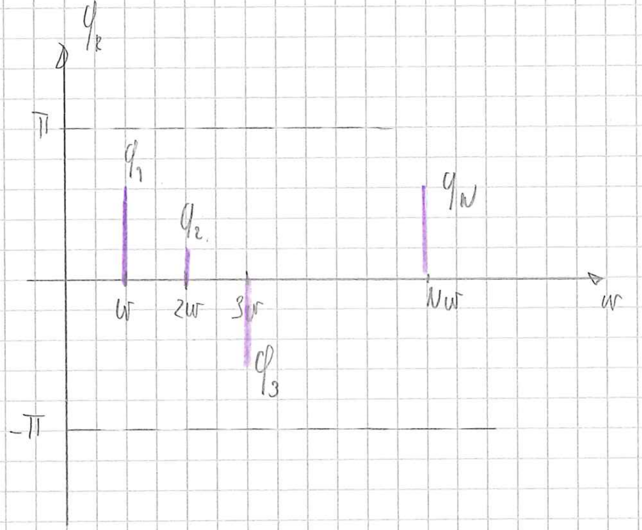


Spectre de f(x)

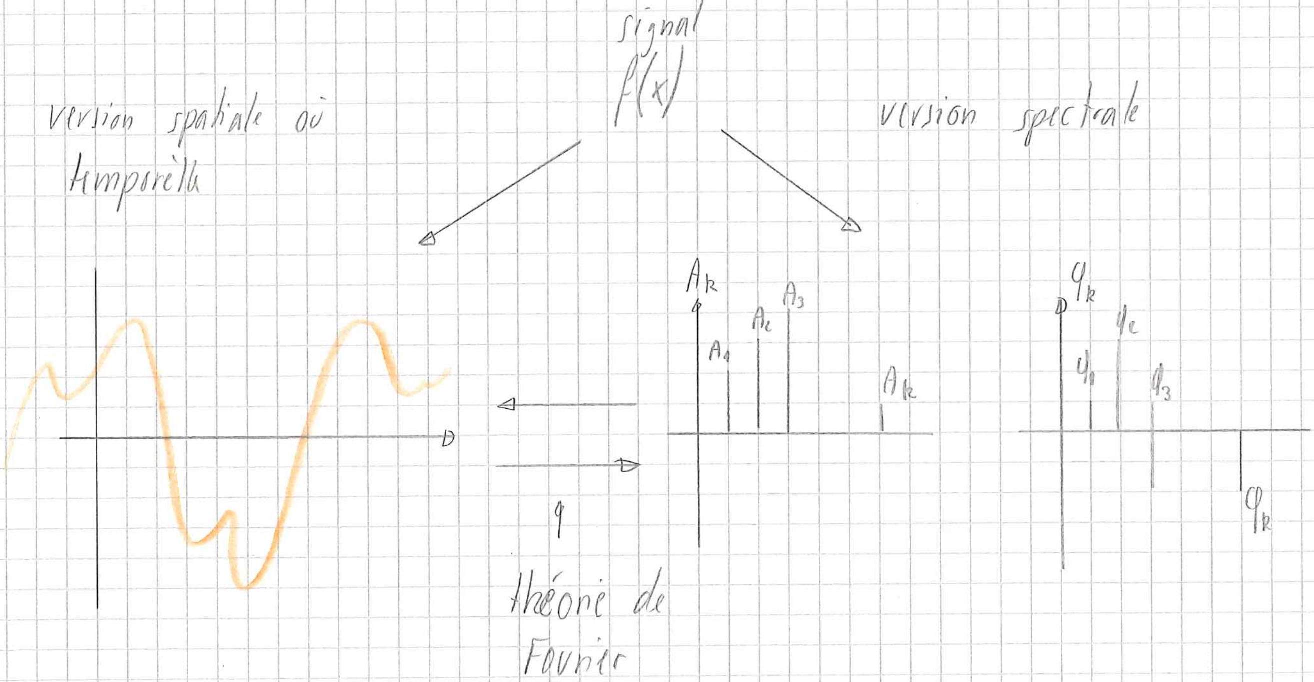
Spectre des amplitudes : $A_0, A_1, \ldots, A_N$



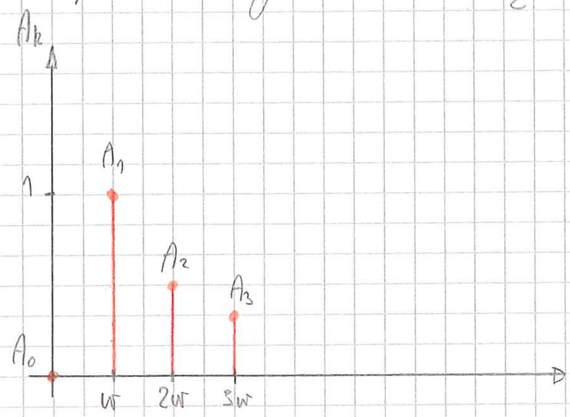
Spectre de phases

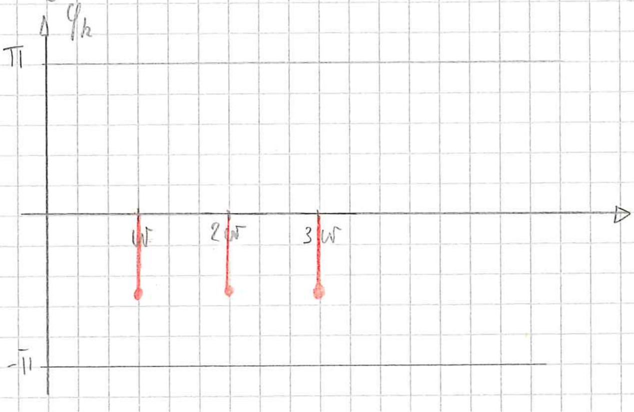


Remarque: Le polynome trigo. $f(x)$ est amplement caractérisé par ses spectres d'amplitudes et de phases



Exemple $\quad y = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin 3x$



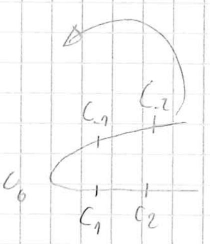


Autre forme d'un pol. trigo.

1/ $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \underbrace{\left[a_1 \cos(wx) + b_1 \sin(wx)\right]}_{\text{fondamentale}} + \left[a_2 \cos(2wx) + b_2 \sin(2wx)\right] + \dots + \left[a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx)\right]$$

2/ <u>forme complexe</u>

$$f(x) = c_0 + \underbrace{\left[c_1 e^{jwx} + c_1^* e^{-jwx}\right]}_{\text{fondamentale}} + \left[c_2 e^{j2wx} + c_2^* e^{-j2wx}\right] + \dots + \left[c_N e^{jNwx} + c_N^* e^{-jNwx}\right]$$



<u>Notations :</u> c_{-1} c_{-2} c_{-N}

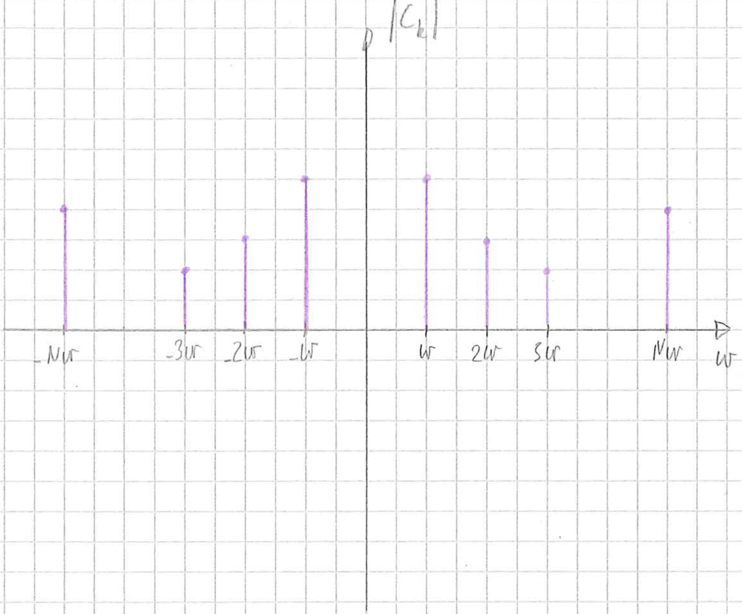
$$= c_{-N} e^{-jNwx} + \dots + c_{-1} e^{-jwx} + c_0 + \dots + c_N e^{jNwx}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jkwx}$$

Rappel : $|c_k| = \frac{1}{2} A_k$

$\arg(c_k) = \varphi_k$

On présente alors le spectre de la façon suivante :

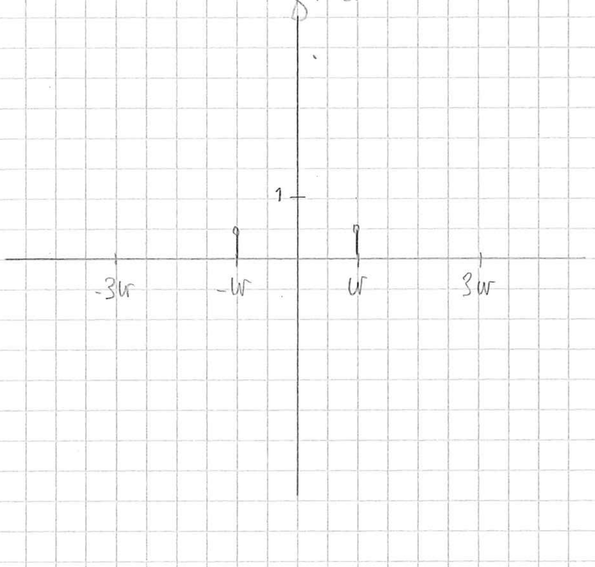


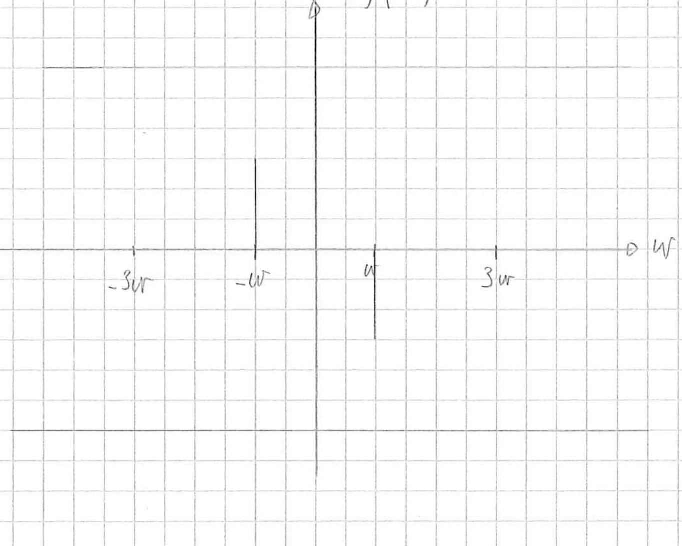
Exercice

$$f(x) = 1 + \sin(x) + \left(6\cos(3x) - 2\sin(3x)\right)$$

Ecrire sous forme complexe et représenter les spectres

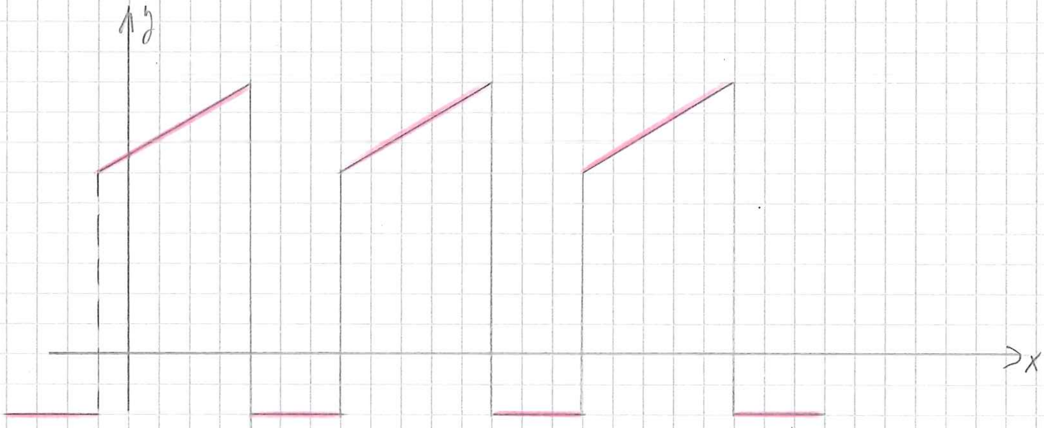
$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} j e^{jx} + \frac{1}{2} j e^{-jx} + (3 + j) e^{j3x} + (3 - j) e^{-j3x}$$



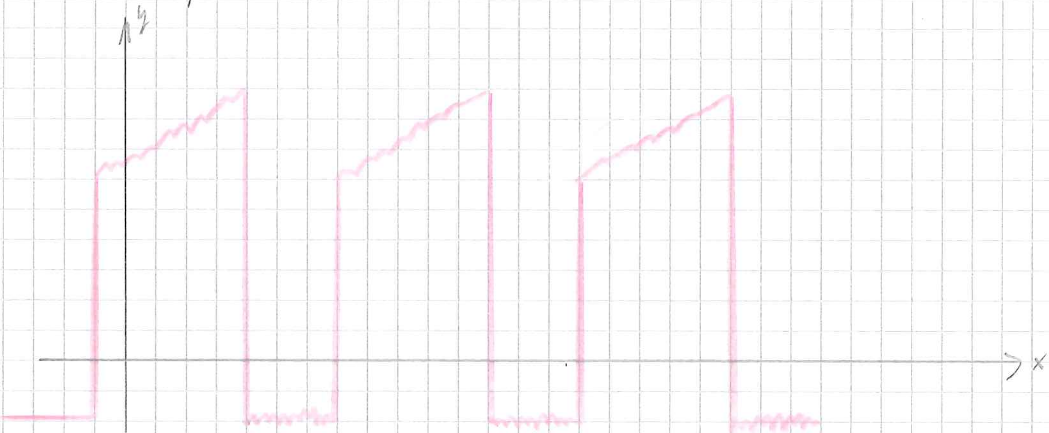


Problème

Donnée : une fonction $y = f(x)$ $2L$-périodique



Cherché : Un polynome trigonométrique d'ordre N, $y = T_N(x)$ qui soit une bonne approximation de $f(x)$



Que veut dire "bonne approximation"?

On choisit la méthode des moindres carrés

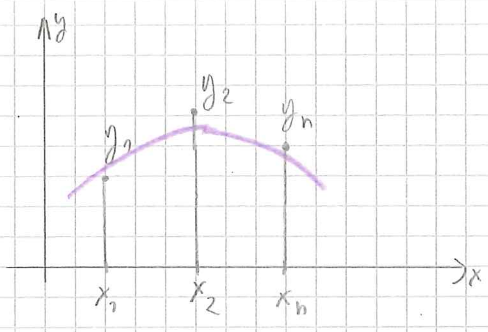
Moindres carrés:

1) Cas discret

Exemple: approximation par un polynome

Donnée : Un tableau de valeurs

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_n	y_n



<u>Cherché:</u> Un polynome de degré d, $y = p(x)$, tel que "la somme des carrés des erreurs soit minimum"

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[p(x_i) - y_i \right]^2$$ doit être minimum.

Les inconnues du problème sont les coéfficients de $p(x)$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_d x^d$$

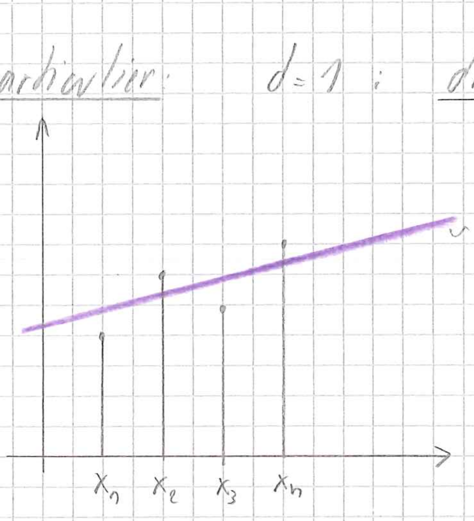
S est une fonction des variables $a_0, a_1 \dots a_d$

On cherche le minimum de S. On résoud:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_d} = 0 \end{cases}$$

$d+1$ équation à $d+1$ inconnues

<u>Cas particulier:</u> $d = 1$: <u>droite des moindres carrés:</u>



$$y = p(x) = a + bx$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[a + b x_i - y_i \right]^2$$

$$S = \left[a + b x_1 - y_1\right]^2 + \left[a + b x_2 - y_2\right]^2 + \dots + \left[a + b x_n - y_n\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\left[a + b x_1 - y_1\right] + 2\left[a + b x_2 - y_2\right] + \dots + 2\left[a + b x_n - y_n\right] = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\left[a + b x_1 - y_1\right] x_1 + 2\left[a + b x_2 - y_2\right] \cdot x_2 + \dots + 2\left[a + b x_n - y_n\right] x_n = 0 \qquad (2)$$

$$(1) \rightarrow \quad n \cdot a + \left(\sum_1^n x_i\right) b = \sum_1^n y_i$$

$$(2) \rightarrow \quad \left(\sum_1^n x_i\right) a + \left(\sum_1^n x_i^2\right) b = \sum_1^n x_i y_i$$

où :

$$\begin{pmatrix} n & \sum_1^n x_i \\ \sum_1^n x_i & \sum_1^n x_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_1^n y_i \\ \sum_1^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_1^n x_i \\ \sum_1^n x_i & \sum_1^n x_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_1^n y_i \\ \sum_1^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n \cdot \sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2} \begin{pmatrix} \sum_1^n x_i^2 & -\sum_1^n x_i \\ -\sum_1^n x_i & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum_1^n y_i \\ \sum_1^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$a = \frac{\left(\sum_1^n x_i^2\right)\left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad b = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Exemple:

x	y	$\hat{y}$
1	2	2,24
3	4	4,12
4	6	5,06
7	7	7,88
10	11	10,7

$\Sigma x_i = 25$ $\qquad (\Sigma x_i)^2 = 625$

$\Sigma y_i = 30$ $\qquad n = 5$

$\Sigma x_i^2 = 175$

$\Sigma x_i y_i = 197$

$\rightarrow \quad a = 1,3 \quad , \quad b = 0,94$ → calculette

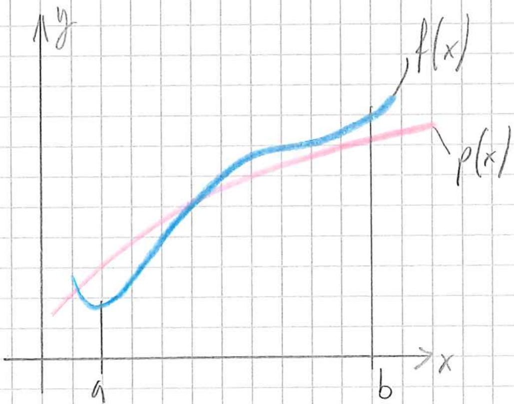
par formule: $a = 1.3 \qquad b = 0,94$

droite des moindres carrés: $y = 1,3 + 0,94x$

2) Cas continu

Exemple: Approximation par un polynome

Donnée: $y = f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$

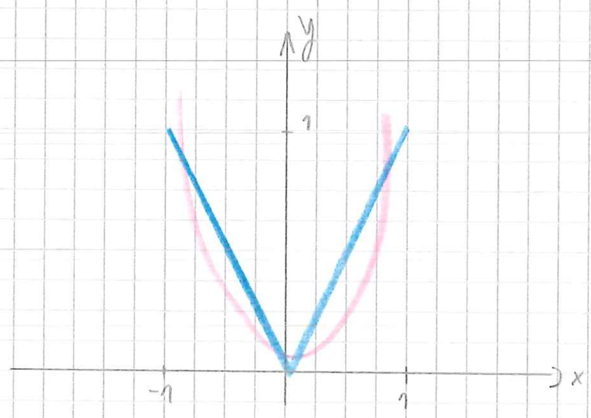


Cherché: Un polynome de degré d, $y = p(x)$, tel que "la somme des carrés des erreurs" soit minimum

$$S = \int_a^b \left[p(x) - f(x) \right]^2 dx \quad \text{doit être min}$$

Même méthode de résolution que dans le cas discret.

Exemple :



$f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$

$p(x) =$ pol de degré ② $\rightarrow$ on le choisit toujours

$p(x) = a + bx + cx^2$.

On cherche à déterminer a, b, c pour que

$$S = \int_{-1}^{1} (f(x) - a - bx - cx^2)^2 \, dx \text{ soit minimum}$$

Méthode : On considère S comme une fonction de a, b, c

$$S = \varphi(a, b, c)$$

Pour trouver en quel point elle atteint son minimum, on résout le le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

NB : Par symétrie de $|x|$ par rapport à $\{Oy\}$, on peut dire que $b = 0$

$$S = \int_{-1}^{1} (\underbrace{f(x)}_{|x|} - a - cx^2)^2 \, dx \underset{\text{parité}}{\overset{\uparrow}{=}} 2 \int_{0}^{1} (x - a - cx^2)^2 \, dx$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}(x-a-cx^2)^2\,dx = 2\int_0^1 2(x-a-cx^2)\cdot(-1)\,dx$$

$$= -4\int_0^1 (x-a-cx^2)\,dx = -4\left[\frac{x^2}{2} - ax - c\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= -4\left(\frac{1}{2} - a - \frac{c}{3}\right) = \underline{-2 + 4a + \frac{4}{3}c = 0} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2\int_0^1 2(x-a-cx^2)\cdot(-x^2)\,dx = -4\int_0^1 (x^3 - ax^2 - cx^4)\,dx$$

$$= -4\left[\frac{x^4}{4} - a\frac{x^3}{3} - c\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = -4\left(\frac{1}{4} - a\frac{1}{3} - \frac{1}{5}c\right)$$

$$= \underline{-1 + \frac{4}{3}a + \frac{4}{5}c = 0} \qquad (2)$$

Solution : $\underline{a = \frac{3}{16}}$, $\underline{b = \frac{15}{16}}$

donc : $\underline{p(x) = \frac{3}{16} + \frac{15}{16}x^2}$

<u>Problème</u>

Donnée : Une fonction $2L$ - périodique $y = f(x)$

Cherché : Le polynome trigonométrique d'ordre N, $y = T_N(x)$, qui approxime le mieux $y = f(x)$ au sens des moindres carrés

$$y = T_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left[a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right]$$

$$\omega = \frac{\pi}{L}$$

Donc on considère

$$S = \int_0^{2L} \left[f(x) - T_N(x) \right]^2 dx$$

$$S = \int_0^{2L} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(k w x) + b_k \sin(k w x) \right) \right]^2 dx$$

S est une fonction des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_N$, $b_1, b_2, \ldots, b_N$ (il y en a $2N+1$).

Pour trouver le minimum de S on résout le système de $2N+1$ équations à $2N+1$ inconnues

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \ \ldots \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0 \ \ldots$$

Si $N = 2$:

$$S = \int_0^{2L} \overbrace{\left[f(x) - \frac{a_0}{2} - a_1 \cos wx - b_1 \sin wx - a_2 \cos 2wx - b_2 \sin 2wx \right]}^{[\quad]}{}^2 dx$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \int_0^{2L} 2 \left[\quad \right] \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) dx = 0$$

$$= -\int_0^{2L} f(x)\, dx + \frac{a_0}{2} \int_0^{2L} dx + a_1 \underbrace{\int_0^{2L} \cos wx\, dx}_{=0} + a_2 \underbrace{\int_0^{2L} \sin 2wx\, dx}_{=0}$$

$$+ \underbrace{b_1 \int_0^{2L} \sin wx\, dx}_{0} + b_2 \underbrace{\int_0^{2L} \cos 2wx\, dx}_{0} = 0$$

d'où : $a_0 L = \int_0^{2L} f(x)\,dx$

$\rightarrow$ $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\,dx$ = 2 x moyenne de la fonction sur un intervalle période

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \int_0^{2L} 2.\left[\quad\right](-\cos wx)\,dx = 0$$

$$= -\int_0^{2L} f(x)\cos(wx)\,dx + \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^{2L}\cos(wx)\,dx}_{=0} + a_1\underbrace{\int_0^{2L}\cos^2(wx)\,dx}_{=L}$$

$$+ b_1\underbrace{\int_0^{2L}\sin(wx)\cos(wx)\,dx}_{=0} + a_2\underbrace{\int\cos(2wx)\cos(wx)\,dx}_{=0}$$

$$+ b_2\underbrace{\int_0^{2L}\sin(2wx)\cos(wx)\,dx}_{=0}$$

Relations d'ortogonalité des fonctions sin et cos

<u>Relations d'orthogonalité</u>

1) $\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(px)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi & \text{si } p = n \end{cases}$

2) $\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(px)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi & \text{si } p = n \end{cases}$

3) $\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(px)\,dx = 0$ quels que soient p et n

Voir table Schaum 16 - 347 / 353 / 377 / 383 / 400

où : Utiliser $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$ etc.

Revenons maintenant à notre calcul.

$$a_1 L = \int_0^{2L} f(x) \cos wx \, dx$$

$$a_1 = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos(wx) \, dx$$

<u>Résultat:</u> Les coéfficiants de $T_N(x)$ sont:

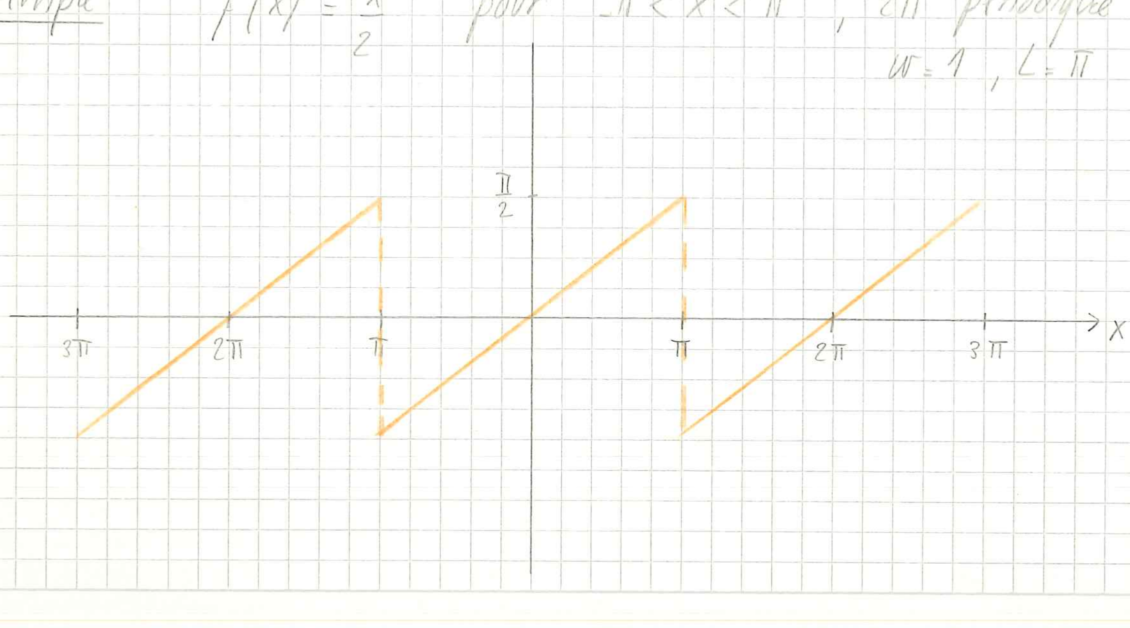
$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x)\,dx \\ a_k &= \frac{1}{L} \int_0^{2} f(x) \cos(kwx)\,dx \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin(kwx)\,dx \\ &\text{pour } k = 1, 2, \ldots N \end{aligned}}$$

Ce sont les coéfficiants de Fourier de $y = f(x)$

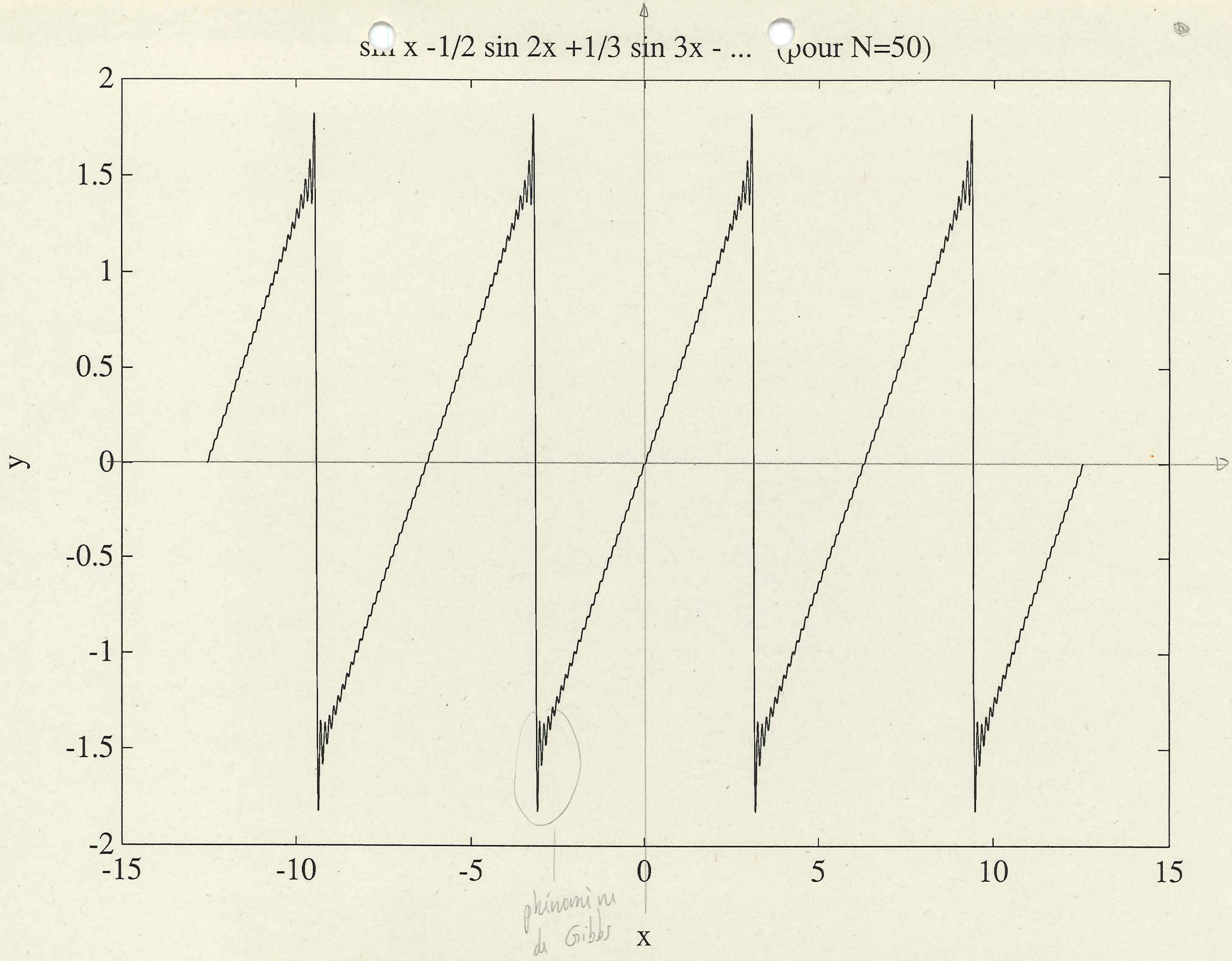
$y = T_N(x)$ est le développement de Fourier d'ordre N de $y = f(x)$

<u>Exemple</u> $f(x) = \frac{x}{2}$ pour $-\pi < x < \pi$, 2π périodique

$w = 1$, $L = \pi$

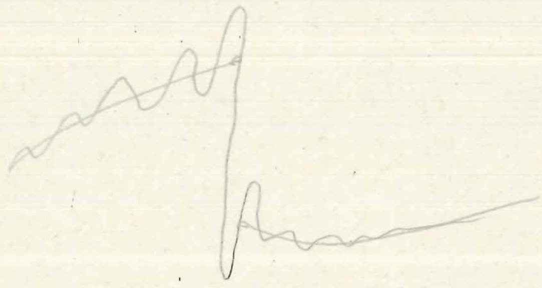


sin x -1/2 sin 2x +1/3 sin 3x - ...   (pour N=50)



phénomène de Gibbs:

Au voisinage d'un saut, le comportement de $T_N(x)$ est particulier

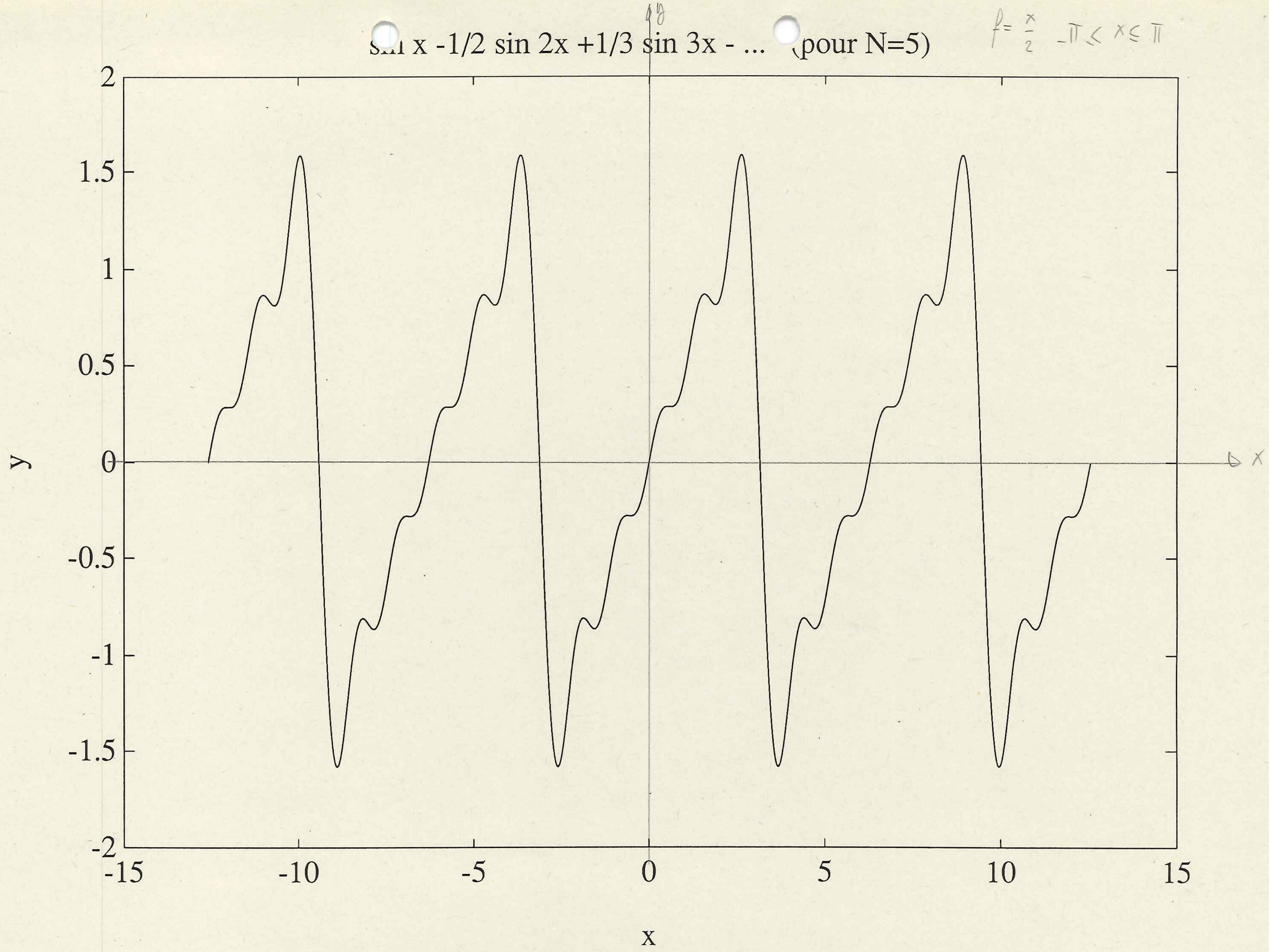


juste avant et après le saut

$T_N(x)$ dépasse la fonction d'une

grandeur qui dépend du saut ($\approx \frac{1}{10}$ du saut)

mais pas de N


sin x -1/2 sin 2x +1/3 sin 3x - ... (pour N=5)
f = x/2 -π < x ≤ π
y
x
-15
-10
-5
0
5
10
15
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

paire : $f(-x) = f(x)$

imp. : $f(-x) = -f(x)$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{x}{2}}_{\text{impaire}} \underbrace{\cos(kx)}_{\text{paire}}\,dx = 0$$

Les coefficients a_k d'une fonction $f(x)$ impaire sont tous nuls.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin kx\,dx$$

Intégration par parties : $u = x \quad u' = 1$

$v' = \sin kx \quad v = -\dfrac{\cos kx}{k}$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{ \left. -\frac{x\cos kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx \right\}$$

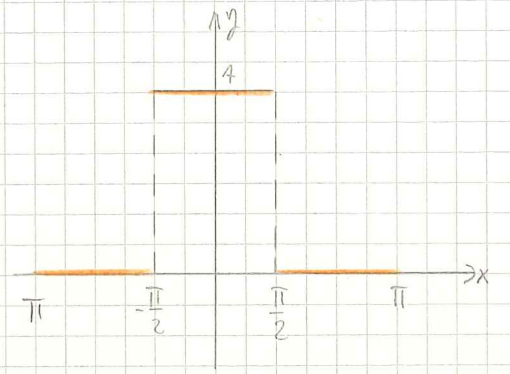
$$= -\frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{k}\underbrace{\left.\frac{\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}}_{=0}$$

$$b_k = -\frac{\cos(k\pi)}{k} = -\frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$

Conclusion :

$$T_N(x) = \frac{1}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x \pm \dots + (-1)^{N+1}\frac{\sin Nx}{N}$$

Exercice 2



$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \qquad 2\pi \text{ périodique}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} 1.\,dx = 1$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos(kwx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen} kx}{k} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(k\frac{\pi}{2})}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{k\pi} & \text{si } k = 1, 5, 9 \\ -\frac{2}{k\pi} & \text{si } k = 3, 7, 11 \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin(kwx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(kx)\,dx = 0$$

donc $T_N(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(wx) + b_1 \sin(1 wx) + a_n \cos(Nwx)$

$+ b_n \sin(Nwx)$

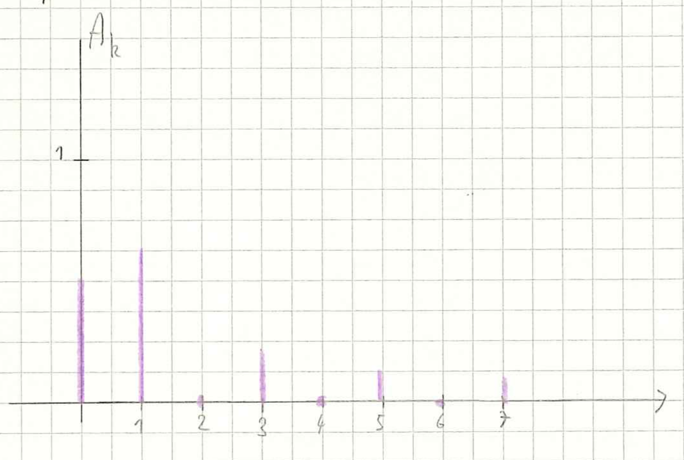
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos x + 0 - \frac{2}{3\pi} \cos(3x) \ldots + \frac{2}{N\pi} \cos Nx$$

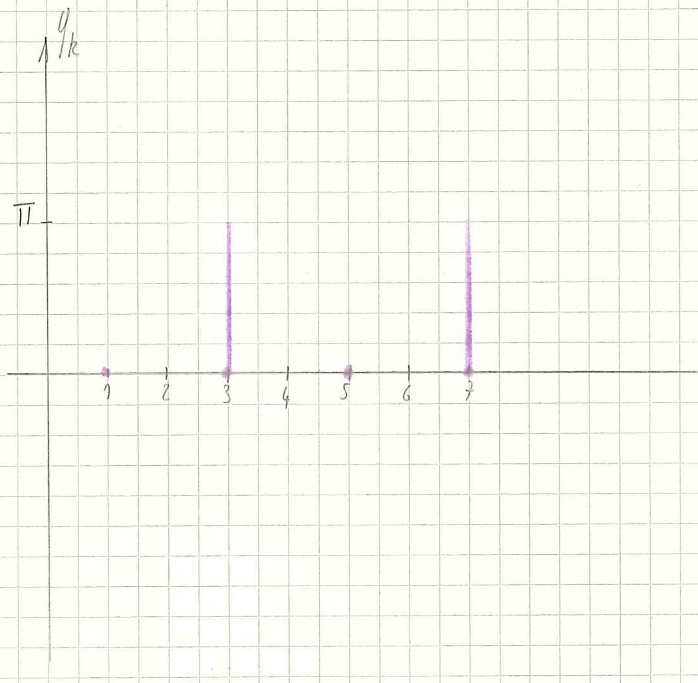
donc $T_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos x$

$T_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi} \cos 3x + \frac{2}{\pi} \cos x$

$T_5(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{2}{3\pi} \cos 3x + \frac{2}{5\pi} \cos 5x$

Spectres





Exercice :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < -1 \\ 20 & -1 < x < 0 \\ -10 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases} \qquad \text{période } 4$$

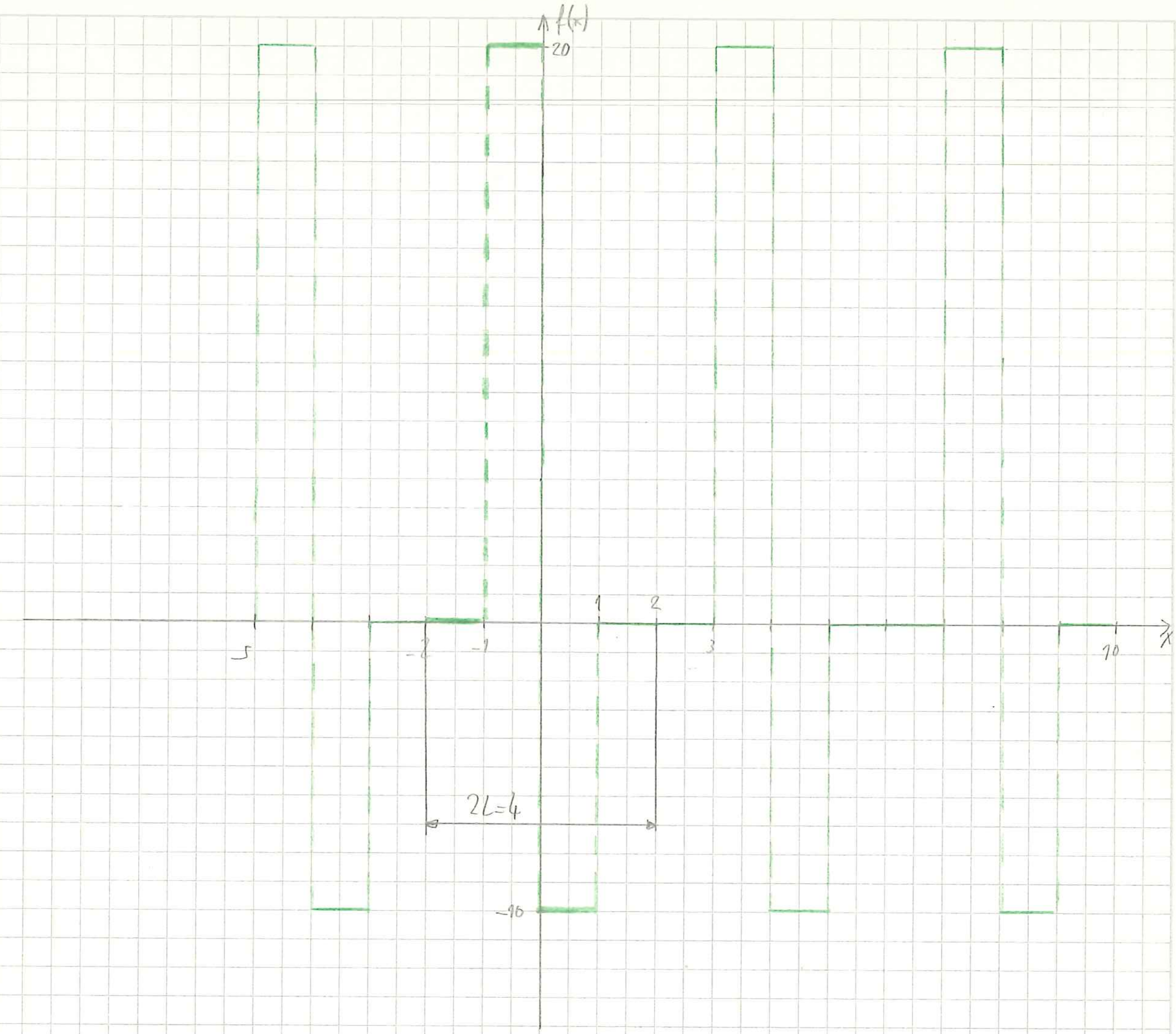
a) Dessiner le graphe pour $-5 \leq x \leq 10$

b) Calculer les coefficients de Fourier

c) Expliciter les 5 premières harmoniques (3 décimales)

d) Spectres (A_k, φ_k, $N = 0 \ldots 5$)

a)



b)

$$\underline{a_0} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} 20\,dx + \int_{0}^{1} -10\,dx\right] = \frac{1}{2}\left(20 - 10\right) = \underline{5}$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(k\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} 20\cos(kx)\,dx + \int_{0}^{1} -10\cos(kx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[20\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-1}^{0} + 10\,\frac{\cos kx}{}\right.$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ pair} \\ \frac{10}{k\pi} & k = 1, 5, 9 \ldots \\ -\frac{10}{k\pi} & k = 3, 7, 11 \ldots \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} -\frac{30}{k\pi} & k = 1, 3, 5, 7 \\ -\frac{60}{k\pi} & k = 2, 6, 10 \ldots \\ 0 & k = 4, 8, 12 \end{cases}$$

$$T_5(x) = \frac{5}{2} + \left[\frac{10}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{30}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$
$$+ \left[0 - \frac{60}{2\pi}\sin\left(2\,\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$
$$+ \left[-\frac{10}{3\pi}\cos\left(3.\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{30}{3\pi}\sin\left(3.\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$
$$+ \left[0 + 0\right]$$
$$+ \left[\frac{10}{5\pi}\cos\left(5.\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{30}{5\pi}\sin\left(5.\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$

Séries de Fourier

$f(x)$ $2L$ périodique

$T_n(x)$ développement de Fourier d'ordre N de $f(x)$

On fait tendre N vers l'infini : $N \to \infty$

$T_N(x)$ devient une série :

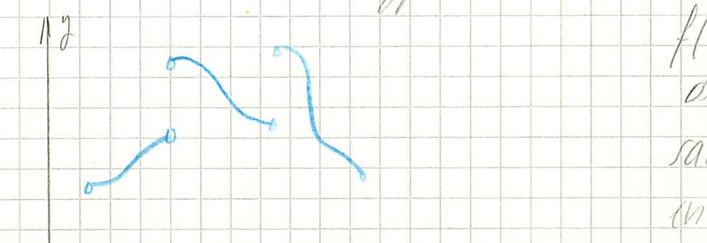
$$T_\infty(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right]$$

C'est la série de Fourier de $f(x)$

Question : 1) La série est-elle convergente ?
2) Si oui, quelle est sa somme ?

La réponse est donnée par le théorème de DIRICHLET

Si la fonction $f(x)$ est du type suivant :

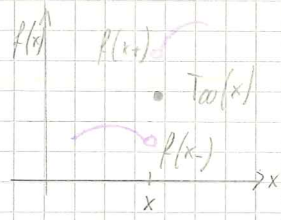


$f(x)$ est continue et dérivable sur $[0, 2L]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

En ces points particuliers $f(x)$ et $f'(x)$ ont des limites à gauche et à droite finie.

Alors 1) la série de Fourier converge en tout x

2) $T_\infty(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{1}{2}\left[f(x_-) + f(x_+)\right] \end{cases}$



Exercice $f(x) = x^2$ pour $0 < x < 2\pi$ 2π périodique

1) Dessiner le graphe
2) Calculer la série de Fourier
3) Le théorème de Dirichlet s'applique-t-il ? Que dit-il ?
4) Calculer $T_\infty(0)$. En déduire

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots =$$

1)

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos(k\pi x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underset{v}{\underbrace{x^2}}\underbrace{\cos(kx)\,dx}_{du = d(\sin kx)\frac{1}{k}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2 \left.\frac{\sin kx}{k}\right|_0^{2\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{2\pi} x\sin(kx)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[x^2\left.\frac{\sin kx}{k}\right|_0^{2\pi} - \frac{2}{k}\left[-x\left.\frac{\cos kx}{k}\right|_0^{2\pi}\right.\right.$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[0 + \underbrace{\frac{2}{k}\,x\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{2\pi}} + 0\right] = \frac{2}{k\pi}\,x\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{2\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{k\pi}\cdot 2\pi\,\frac{\cos k.2\pi}{k} = \frac{4}{k^2}\cos(k.2\pi)$$

$$b_k = -\frac{4\pi}{k}$$

$$a_k = \frac{4}{k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\,\sin(k\omega x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,\overbrace{\sin(kx)\,dx}^{-d\cos kx/k} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{k}\int_0^{2\pi} x\cos(kx)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{k}\left(x\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{2\pi} - 0\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{k} + \frac{2}{k}\cdot 0\right] = -\frac{4\pi}{k}$$

en fin:

$$T_\infty(x) = \frac{8}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4}{k^2}\cos(kx) - \frac{4\pi}{k}\sin(kx)\right]$$

Exercice :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases} \qquad 2\pi \text{ périodique}$$

1) Représenter graphiquement $f(x)$
2) Calculer la série de Fourier, 3 formes, 6 harmoniques
3) Représenter les spectres des amplitudes et des phases

Solution:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\cos(k\omega x)\,dx}_{dv} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{k}\,\text{sen}(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi}\text{sin}(kx)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}\,\text{sin}(k\pi) + \frac{2}{k^2}\cos(kx)\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{k}\,\text{sin}(k\pi) + \frac{2}{k^2\pi}\left(\cos(k\pi) - \cos(0)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k}\,\text{sen}(k\pi)}_{=0} + \frac{2}{k^2\pi}\cos(k\pi) - \frac{2}{k^2\pi}$$

Identité de Parseval

Donnée : Une fonction $y = f(x)$ $2L$ périodique et qui est égale à sa série de Fourier

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \right] \\ A_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(k\omega x + \varphi_k) \right] \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega x} \end{cases}$$

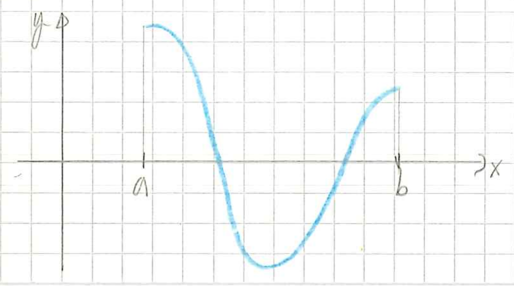
Résultat

$$\frac{1}{2L} \int_0^{2L} f(x)^2 \, dx = \begin{cases} \left(\dfrac{a_0}{2}\right)^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k^2 + b_k^2}{2} \\ A_0^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{A_k^2}{2} \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \end{cases}$$

Interprétation

Rappel : Valeur efficace d'une fonction sur un intervalle

$y = f(x)$ sur $[a, b]$



$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est paire} \\ -\frac{4}{k^2\pi} & \text{si } k \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\, sen(k\omega x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\, sen(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{-x}{k}\cos kx\right|_0^{\pi} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) + \left.\frac{2}{k^2}\, sen(kx)\right|_0^{\pi}\right] = -\frac{1}{k}\cos(k\pi)$$

$$b_k = \begin{cases} -\frac{1}{k} & \text{si } k \text{ est paire} \\ \frac{1}{k} & \text{si } k \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$T_6(x) = \frac{\pi}{2} + \left[-\frac{4}{\pi}\cos(x) + 1\, sen(x)\right] + \left[-\frac{1}{2}\, sen(2x)\right] + \left[-\frac{4}{9\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\, sen\, 3x\right]$$

$$+ \left[-\frac{1}{4}\, sen\, 4x\right] + \left[-\frac{4}{25\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\, sen\, 5x\right] + \left[-\frac{1}{6}\, sen\, 6x\right]$$

$$+ \left[-\frac{4}{49\pi}\cos 7x + \frac{1}{7}\, sen\, 7x\right]$$

Forme complexe:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - j b_k) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi k^2} - \frac{1}{2k}j & \text{si } k \text{ impaire} \\ \frac{1}{2k}j & \text{si } k \text{ impaire} \end{cases}$$

forme A, φ

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2|c_k| = \begin{cases} \frac{1}{k}\sqrt{1 + \frac{2}{(k\pi)^2}} & k \text{ imp.} \\ \frac{1}{k} \rightarrow k \text{ paire} \end{cases}$$

$$\varphi_k = \arg(c_k)$$

$$\varphi_k = \begin{cases} -\pi + \operatorname{Arctg}\left(\frac{k\pi}{2}\right) & k \text{ impair} \\ +\frac{\pi}{2} & k \text{ paire} \end{cases}$$

valeur moyenne de f sur $[a,b]$ $\quad v_m(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

valeur efficace $\quad v_e(f) = \sqrt{v_m(f^2)} = \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx\right]^{1/2}$

NB: Si $f(x)$ courant ou tension, $v_e(f)^2$ est proportionnelle à l'énergie

Exemples:

1/ $f(x) = \cos x$ sur $[0, 2\pi]$

$$v_m(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\,dx = \frac{1}{2\pi}\sin x\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$v_e^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{4\pi}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[2\pi\right] = \frac{1}{2}$$

2) $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ sur $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$, $A > 0$

$$v_e^2 = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{2\pi/\omega} A^2\cos^2\underbrace{(\omega x+\varphi)}_{t}\,dx = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_\varphi^{\varphi+2\pi} A^2\cos^2 t\,\frac{dt}{\omega}$$

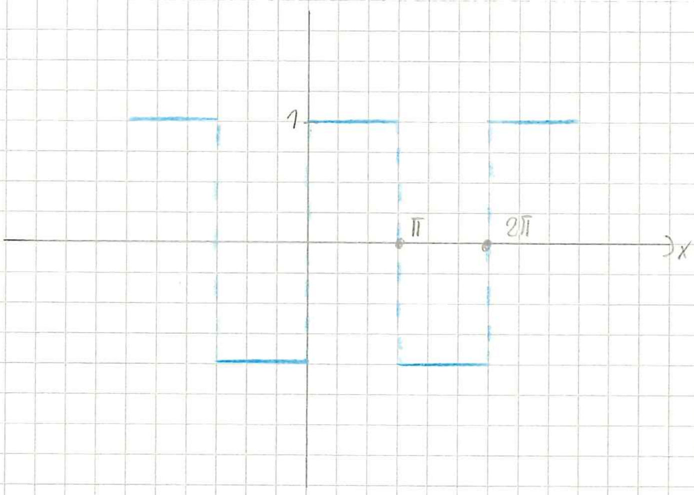
$$= \frac{A^2}{2\pi}\underbrace{\int_\varphi^{\varphi+2\pi}\cos^2 t\,dt}_{\pi} = \frac{A^2}{2}$$

Interprétation de l'identité de Parseval:

$$v_e^2(f(x)) = v_e^2(A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} v_e^2(A_k \cos(k\omega x + \varphi_k))$$

Le carré de la valeur efficace du signal (sur un intervalle période) = la somme des carrés des valeurs efficaces des harmoniques composant le signal.

Exemple



$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{2L}\int_0^{2L} f(x)^2\,dx = v_e(f)^2 = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1$$

Valeurs efficace des harmoniques.

$A_k = 0$ si $k \to$ pair

$A_k = \frac{4}{k\pi}$ si k impair

NB: inutile de calculer les φ_k pour la valeur efficace !

$$A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{5\pi}\right)^2 + \dots\right]$$

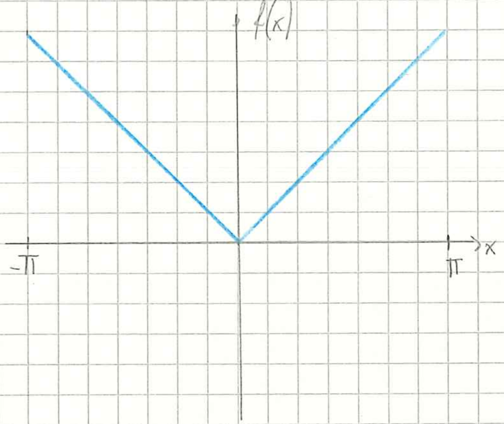
$$= \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)$$

L'identité de Parseval s'écrit $1 = \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right)$

On en déduit que $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + = \frac{\pi^2}{8}$

Exercice : même travail avec $f(x) = |x|$ 2π périodique

$-\pi < x < \pi$



$$\underline{V_e^2} = \frac{1}{2L}\int_0^{2L} f(x)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi} = \underline{\frac{\pi^2}{3}}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \right)$$

Utilisation pratique :

On veut transmettre un signal 2L-périodique $y = f(x)$

On ne peut que transmettre que l'approximation de Fourier

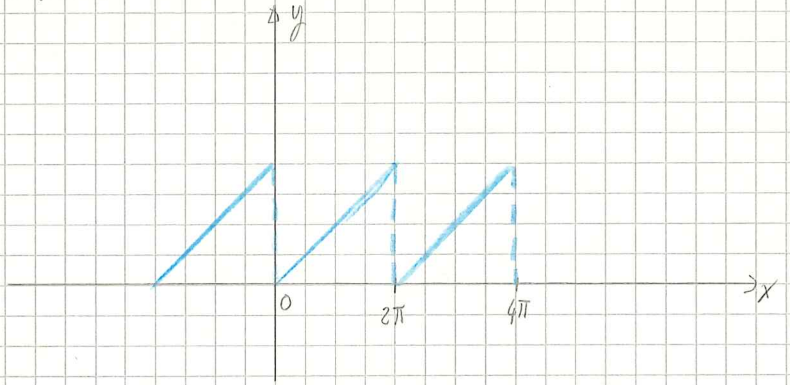
$$y = T_N(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(k\omega x + \varphi_k)$$

On cherche à estimer "l'erreur" commise. On introduit comme mesure de l'erreur, le rapport

$$\lambda_N = \frac{\text{Energie de } T_N(x)}{\text{Energie de } f(x)} = \frac{V_e^2\{T_N(x)\}}{V_e^2\{f(x)\}}$$

donc $$\boxed{\lambda_N = \frac{A_0^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k^2}{2}}{\frac{1}{2L}\int_0^{2L} f(x)^2\,dx}}$$

Exemple :



$$\begin{cases} f(x) = x & 0 < x < 2\pi \\ 2\pi \text{ périodique} \end{cases}$$

$$f(x) = \pi - 2\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\right]$$

1) Calcul de $V_e^2\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^{3}}{6\pi} = \frac{4}{3}\pi^2$

2) Valeur efficace de T_N $\quad v_e^2\{T_N(x)\}$

$A_0 = \pi$

$A_1 = +2$

$A_2 = +1$

$A_3 = +\frac{2}{3}$

$A_4 = +\frac{1}{2}$

$A_5 = +\frac{2}{5}$

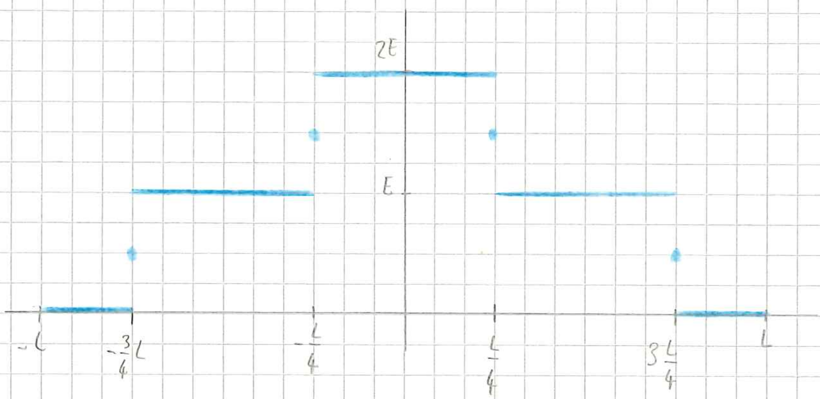
$A_k = \frac{2}{k}$

$$v_e^2\{T_N(x)\} = \pi^2 + \frac{2}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{N^2}$$

$$\lambda_N = \frac{3}{4\pi^2}\left\{\pi^2 + \frac{2}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{N^2}\right\}$$

N	λ_N [%]
1	90,2
2	94,0
3	95,7
4	96,6
5	
6	
7	

Exercice



$$f(x) = E + \frac{4E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(k.\frac{\pi}{4}\right)}{k}\cos(k\omega x) \qquad k \text{ impaire}$$

Question : Combien de termes faut-il prendre dans le développement de Fourier pour avoir 99% de l'énergie du signal?

Réponse

N	λ_N
1	93,7%
2	96,7%

§ Opérations sur les séries de Fourier

Notations a_k^f, b_k^f, c_k^f : coeff. de Fourier de $f(x)$

1) Linéarité ① si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions $2L$ périodiques

alors $f(x) + g(x)$ est une fonction $2L$-périodique

et

$$a_k^{f+g} = a_k^f + a_k^g$$

$$b_k^{f+g} = b_k^f + b_k^g \qquad \text{et} \qquad c_k^{f+g} = c_k^f + c_k^g$$

② si $f(x)$ est $2L$-périodique

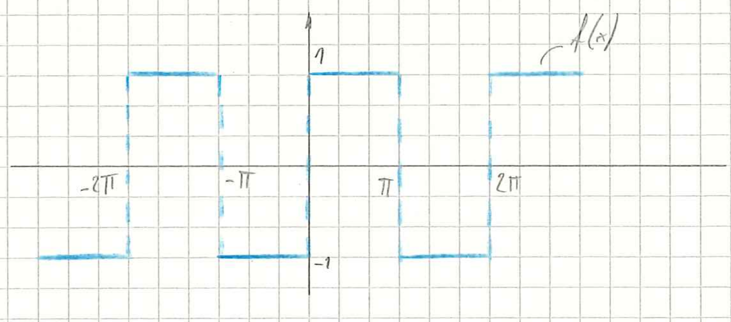
alors $\lambda f(x)$ est $2L$-périodique

et

$$a_k^{\lambda f} = \lambda\, a_k^f \ , \qquad b_k^{\lambda f} = \lambda\, b_k^f \ , \qquad c_k^{\lambda f} = \lambda \cdot c_k^f$$

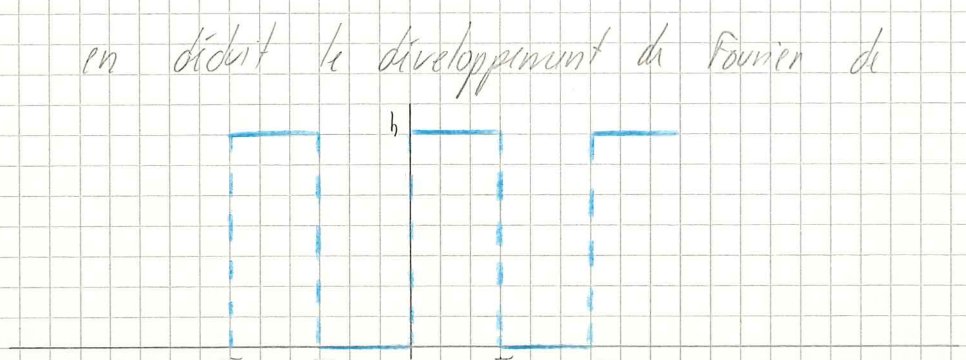
Exemples

1) Schaum (23.7)



$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\cdots + \right)$$

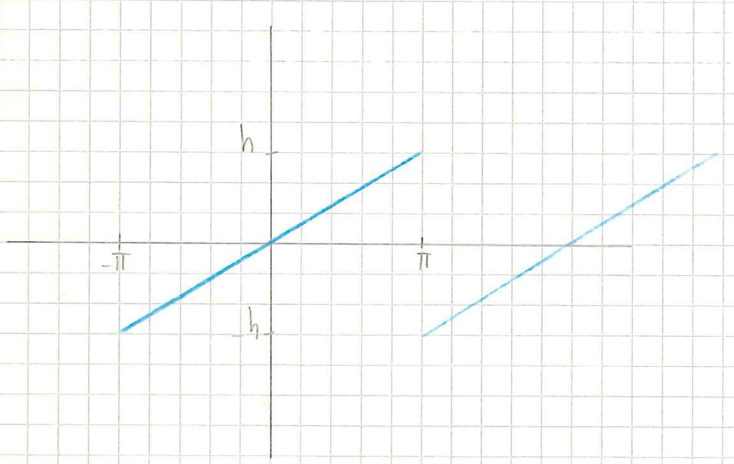
On en déduit le développement de Fourier de



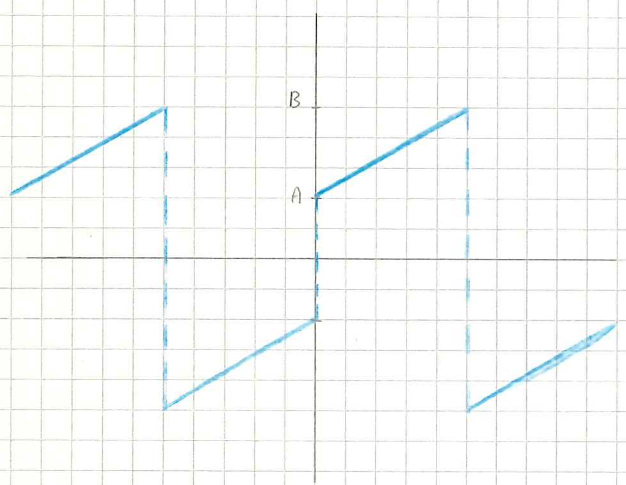
on a : $g(x) = \frac{h}{2}(1 + f(x)) = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{4}{\pi}\left[\qquad \right]\right)$

$= \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} \dots\right)$

2) À partir de Scharm (23.9)



et



$f(x) = A.(23\text{-}7) + \frac{BA}{\pi}(23\text{-}9)$

2) Décalage

$f(x)$ = fonction $2L$-périodique
r = const
$f(x-r)$ fonction décalé de r

Question : que deviennent les coefficients de Fourier

Notons, a_k , b_k , c_k les coeff. de Fourier de $f(x)$

a_{kr} , b_{kr} , c_{kr} " " " " " $f(x-r)$

On obtient

$$\begin{cases} a_{kr} = a_k \cos(k\omega r) - b_k \sin(k\omega r) \\ b_{kr} = a_k \sin(k\omega r) + b_k \cos(k\omega r) \\ c_{kr} = e^{-jk\omega r} c_k \end{cases}$$

Justification :

$$a_{kr} = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x-r)\cos(k\omega x)\,dx = \dots$$

on pose $t = x - r$
$dt = dx$

$$= \frac{1}{L}\int_{-r}^{2L-r} f(t)\cos(k\omega(t+r))\,dt = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\cos(k\omega t + k\omega r)\,dt$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\left[\cos(k\omega t)\underbrace{\cos(k\omega r)} - \sin(k\omega t)\underbrace{\sin(k\omega r)}\right]dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{L}\left[\int_0^{2L} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right]}_{a_k}\cos(k\omega r) - \frac{1}{L}\sin(k\omega r)\underbrace{\int_0^{2L} f(t)\sin(k\omega t)\,dt}_{b_k}$$

$$= a_k\cos(k\omega r) - b_k\sin(k\omega r)$$

Cas particulier : $r = L = \frac{1}{2}$ période $\quad k\omega r = k\pi$

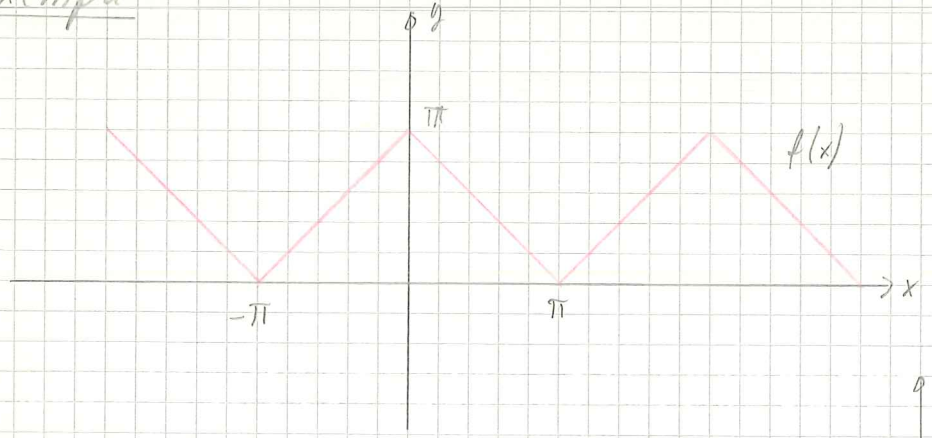
$$a_k^{(L)} = (-1)^k a_k$$

$$b_k^{(L)} = (-1)^k b_k$$

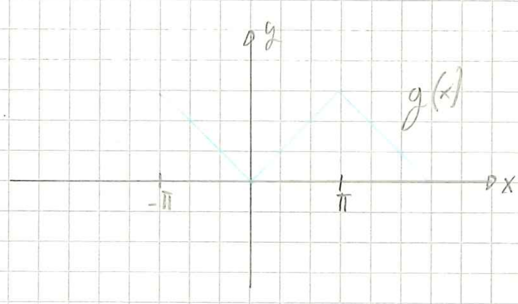
$$c_k^{(L)} = (-1)^k c_k$$

Exemple

1)



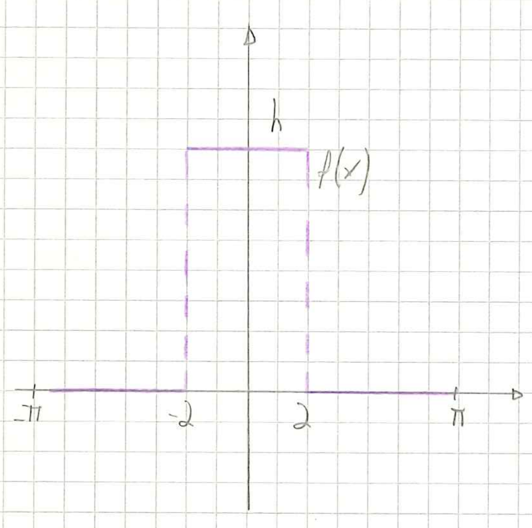
dans la table on trouve (23.8)



$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots\right]$$

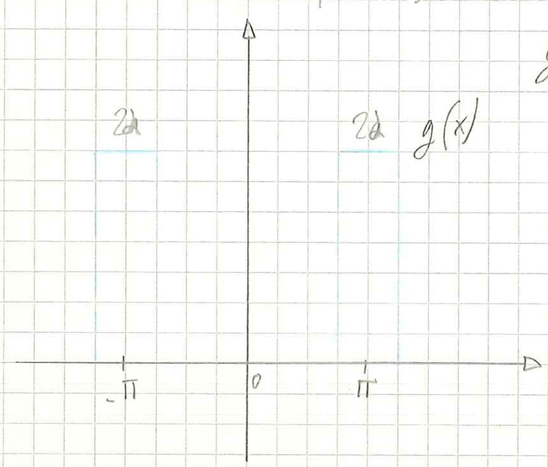
$$f(x) = g(x - \pi) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \right]$$

2)



$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\alpha \\ h & -\alpha < x < \alpha \\ 0 & \alpha < x < \pi \end{cases}$$

La table donne (23.17)



$$g(x) = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha\cos x}{1} - \frac{\sin 2\alpha\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3\alpha\cos 3x}{3} - \dots\right)$$

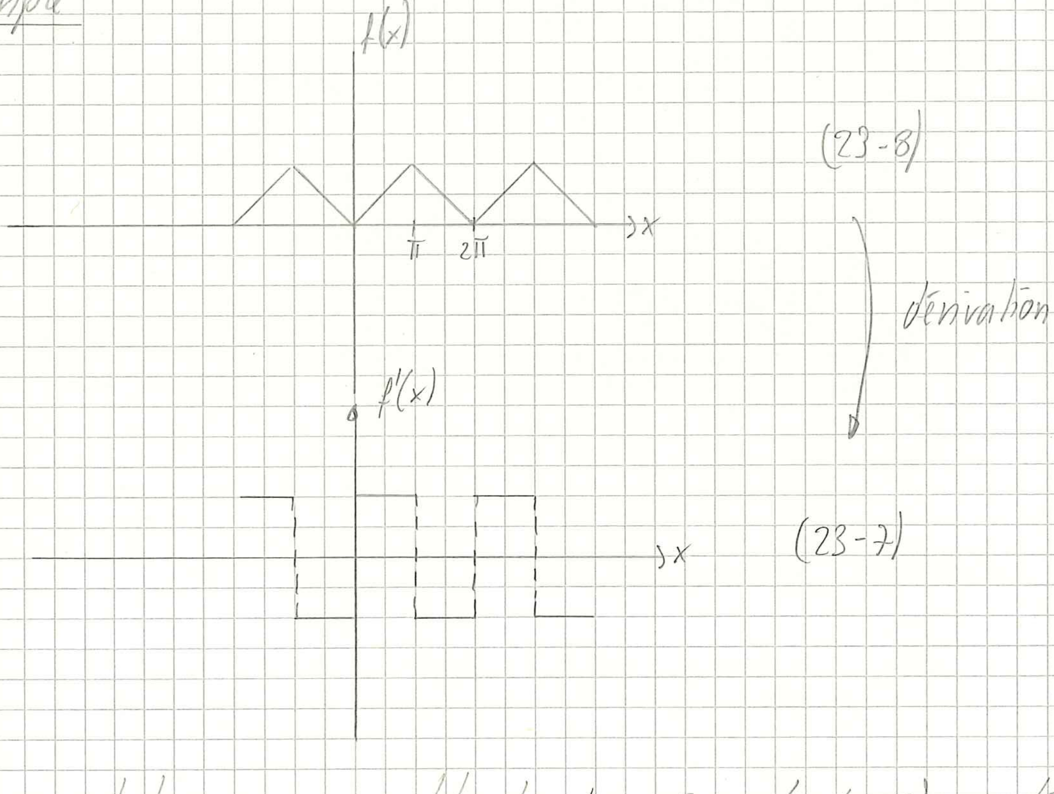
décalage : $r = \pi$

il vient $$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{2h}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha\cos x}{1} + \frac{\sin 2\alpha\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3\alpha\cos 3x}{3} + \cdots\right)$$

3/ <u>Dérivation</u>

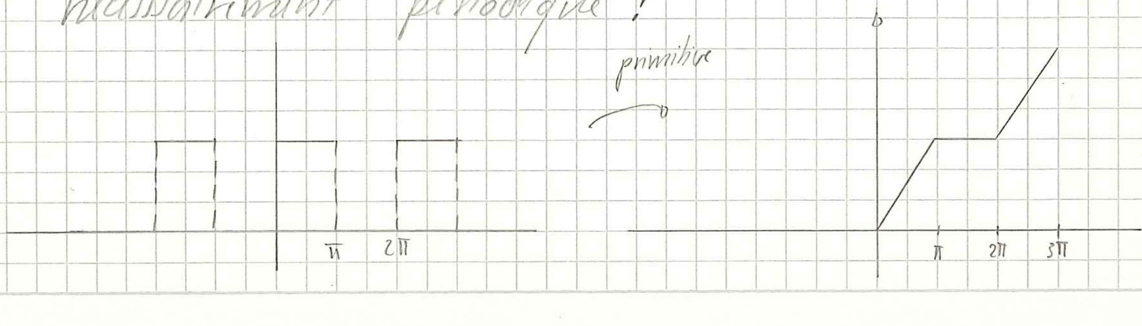
Résultat : Si $f(x)$ est dérivable (sauf en un nombre fini de points par intervalle période)
et si $f'(x)$ vérifie la condition de Dirichlet, alors on obtient le développement de $f'(x)$ en dérivant terme à terme le développement de $f(x)$

<u>Exemple</u>



on constate qu'on obtient la série de (23-7) en dérivant celle de (23-8)

<u>NB</u> : Une primitive d'une fonction périodique n'est pas nécessairement périodique !



pour qu'une fonction périodique $f(x)$ possède une primitive périodique il faut que

$$\int_0^{2L} f(x)\,dx = 0$$

exemple : (23-7), (23-9)

Problème de Propé :

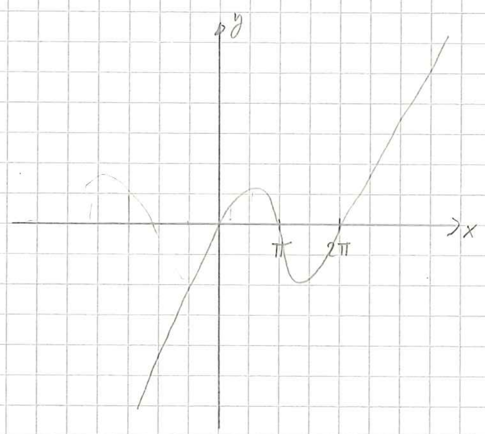
fonction de période 2π valable entre 0 et 2π

$$f(x) = \frac{1}{12}\, x\,(x-\pi)(x-2\pi)$$

elle est nulle pour les valeurs de x : $x_1 = 0$

$x_2 = \pi$

$x_3 = 2\pi$

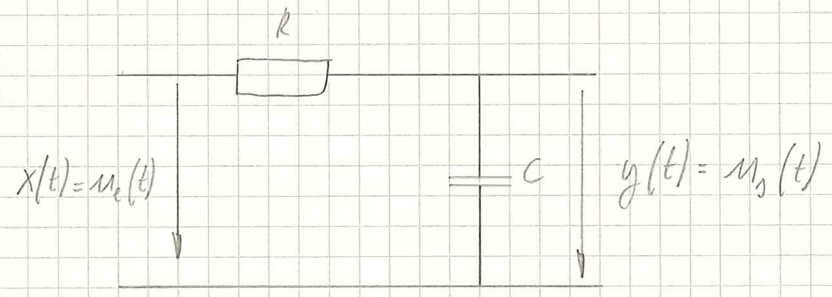


si une fonction est impaire on a $f(-x) = -f(x)$

on a : $$-f(x) = -\frac{1}{12}\, x\,(x-\pi)(x-2\pi)$$

$$f(-x) = f(x+2\pi) = \frac{1}{12}(x+2\pi)(x+\pi)\,x$$

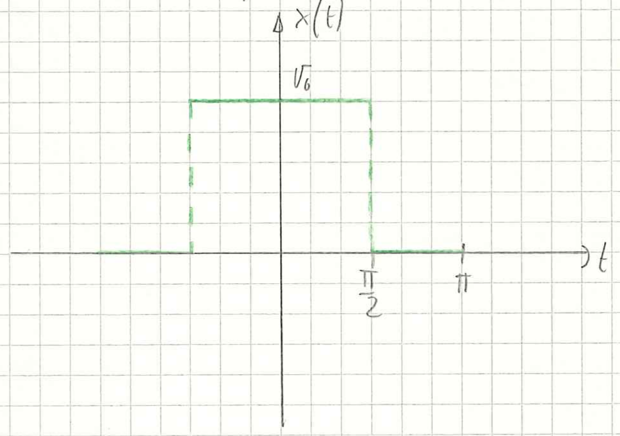
Filtre RC



$x(t)$ = oscillation harmonique de puls. ω

$y(t)$ = Réponse en régime permanent

$x(t)$ donné par



on cherche $y(t)$ (régime permanent), $y(t)$ 2π pér

Equation différentielle du filtre

$$RC\, y'(t) + y(t) = x(t) \qquad (1)$$

Plan de travail

1) on décompose le signal d'entrée $x(t)$ en série de Fourier, forme complexe

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k^{(x)} e^{jk\omega t}$$

2) "On passe chaque harmonique à travers le filtre" Voir $H(j\omega)$

3) Principe de superposition : on obtient la série de Fourier de $y(t)$ en superposant les réponses obtenues en 2)

1^{re} forme : $x(t) = a\cos(wt) + b\sin(wt)$ a et b données

On essaie pour $y(t)$ une fonction du même type

$y(t) = D\cos(wt) + E\sin(wt)$

Il faut déterminer D et E. On introduit dans l'équation (1)

$$RC\{-Dw\sin(wt) + Ew\cos(wt)\} + D\cos(wt) + E\sin(wt)$$

$$= [+RCwE + D]\cos(wt) + [-RCwD + E]\sin(wt) = a\cos(wt) + b\sin(wt)$$

Identification des coefficiants :

$$\begin{cases} D + RCwE = a \\ -RCwD + E = b \end{cases}$$

$$D + (RCw)^2 D = a - RCwb$$

$$D = \frac{a - RCwb}{1 + (RCw)^2}$$

$$(RCw)^2 E + E = aRCw + b \Rightarrow E = \frac{aRCw + b}{1 + (RCw)^2}$$

Conclusion : la réponse harmonique est :

$$y(t) = \frac{a - RCwb}{1 + (RCw)^2}\cos(wt) + \frac{RCwa + b}{1 + (RCw)^2}\sin(wt)$$

2ème forme $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

On essaie pour $y(t)$ une fonction du type $y(t) = B\cos(\omega t + \theta)$

Il faut déterminer B et θ

On introduit dans (1)

$$RC\{-B\omega \sin(\omega t + \theta)\} + B\cos(\omega t + \theta) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

On développe, on identifie, on résout $B\cos\theta = \ldots$
$B\sin\theta = \ldots$

3ème forme forme complexe $x(t) = Z e^{j\omega t}$

On cherche une solution de la forme $y(t) = W e^{j\omega t}$
On doit déterminer W. On introduit dans (1)

$$RC\,W j\omega e^{j\omega t} + W e^{j\omega t} = Z e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad jRC\omega W + W = Z$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{1 + jRC\omega} Z$$

Conclusion : La reponse est $y(t) = \underbrace{\frac{1}{1 + j\omega RC}}_{H(j\omega)} \underbrace{Z e^{j\omega t}}_{x(t)}$