

Nome Cognome:	Naoki Pross
Professione:	Elettronico
Titolo del progetto:	Spectrum Analyzer

Azienda:	CPT Bellinzona Centro d'arti e mestieri Viale S. Franscini 25 6500 Bellinzona		
Formazione approfondita:	S.2 Sviluppare prototipi		
Formatore:	Rinaldo Geiler, Daniele Kamm		
Data d'inizio:	12.04.2018	Ore a disposizione:	83 UD
Data fine lavoro:	15.05.2018	Ore effettive:	– UD

Indice

1	Trasformata di Fourier	2
1.1	Introduzione	2
1.1.1	Funzione armonica	2
1.1.2	Regressione Lineare	2
1.1.3	Regressione lineare di una funzione continua ad serie	3
1.1.4	Serie di Fourier	3
1.2	Trasformata di Fourier discreta	3
1.3	Trasformata di Fourier	3
1.4	Fast Fourier Transform	3
1.4.1	Motivazioni	3
1.4.2	Complessità temporale	3
1.4.3	Proprietà dei numeri complessi	3

1 Trasformata di Fourier

1.1 Introduzione

1.1.1 Funzione armonica

Una funzione armonica, sinusoidale, può essere descritta in molteplici modi. Iniziamo dunque osservando le forme più semplici, ossia la forma trigonometrica.

$$f(x) = a \cdot \sin(\omega x + \varphi) \quad (1.1.1.1)$$

$$f(x) = b \cdot \cos(\omega x + \vartheta) \quad (1.1.1.2)$$

Conoscendo la formula di Eulero (1.1.1.3)

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \quad (1.1.1.3)$$

possiamo riscrivere $f(x)$ nei seguenti modi

$$f(x) = \frac{a}{2i} \cdot (e^{i(x\omega+\varphi)} - e^{-i(x\omega+\varphi)}) \quad (1.1.1.4)$$

$$f(x) = \frac{b}{2} \cdot (e^{i(x\omega+\vartheta)} + e^{-i(x\omega+\vartheta)}) \quad (1.1.1.5)$$

1.1.2 Regressione Lineare

Nel nuovo spazio Hermitiano possiamo definire la regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati per una funzione continua. Inizialmente però sarà mostrata una regressione con N termini ad una retta r di $m + 1$ termini.

Il metodo dei minimi quadrati trova i coefficienti della retta minimizzando il quadrato della differenza tra il punto della curva e la sua proiezione ortogonale sulla retta di regressione.

Si ha dunque la retta di regressione

$$r : y = a_0 + x \sum_{i=1}^m a_i \quad (1.1.2.1)$$

e la differenza dei quadrati

$$E(a_0, \dots, a_m) = \sum_{k=0}^N \left[r(x_k, a_0, \dots, a_m) - y_k \right]^2 \quad (1.1.2.2)$$

impostando il gradiente di E a zero

$$\nabla E(a_0, \dots, a_m) = \left(\frac{\partial E}{\partial a_0}, \dots, \frac{\partial E}{\partial a_m} \right) = (0, \dots, 0)$$

si ottiene un sistema lineare risolvibile con delle matrici.

$$\nabla E = \mathbf{A} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \mathbf{B} \iff \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}(-\mathbf{B})$$

dove \mathbf{A} è la matrice dei coefficienti e \mathbf{B} è il vettore dei termini noti.

1.1.3 Regressione lineare di una funzione continua ad serie

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo $[\alpha; \beta]$ e $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$v(x) = a(x)x + a_0 - f(x)$$

si ha i minimi quadrati

$$E(a) = \int_{\alpha}^{\beta} \langle s, s \rangle dx$$

minimizzando

$$\nabla E = \nabla \int_{\alpha}^{\beta} \langle v, v \rangle dx$$

1.1.4 Serie di Fourier

La serie di Fourier, nominata tale in onore a Jean-Baptiste Joseph Fourier, di una funzione è descritta nel modo seguente.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) \right] \quad (1.1.4.1)$$

Con questa equazione Fourier ha teorizzato che è possibile rappresentare qualsiasi funzione come una combinazione lineare di armoniche di frequenze multiple di una frequenza di base. Con la seguente identità trigonometrica è possibile anche descrivere la serie con una notazione più compatta.

$$a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \sin(\alpha) = A \cdot \cos(\alpha - \vartheta)$$

Per $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(\vartheta) = \frac{b}{A}$ e $\sin(\vartheta) = \frac{a}{A}$. Dunque

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\left(\frac{n2\pi x}{T} - \vartheta_n\right) \quad (1.1.4.2)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{n2\pi x}{T} + \varphi_n\right) \quad (1.1.4.3)$$

1.2 Trasformata di Fourier discreta

1.3 Trasformata di Fourier

1.4 Fast Fourier Transform

1.4.1 Motivazioni

1.4.2 Complessità temporale

1.4.3 Proprietà dei numeri complessi

Bibliografia

- [1] *Example item title*, (online), Author and other informations,
<https://www.example.com>