

Nome Cognome:	Naoki Pross
Professione:	Elettronico
Titolo del progetto:	Spectrum Analyzer

Azienda:	CPT Bellinzona Centro Professionale Tecnico Viale S. Franscini 25 6500 Bellinzona		
Formazione approfondita:	S.2 Sviluppare prototipi		
Formatore:	Rinaldo Geiler, Daniele Kamm		
Data d'inizio:	12.04.2018	Ore a disposizione:	83 UD
Data fine lavoro:	15.05.2018	Ore effettive:	– UD

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Contesto	2
1.2	Requisiti	2
1.3	Concetti matematici	2
1.4	Norme di progetto	2
2	Hardware	3
2.1	Schema a blocchi	3
2.2	Selezione delle entrate	3
2.3	Circuito di amplificazione	3
2.4	Microcontroller	3
2.5	Visualizzazione	3
3	Software	4
3.1	Campionamento	4
3.2	Interfaccia al Computer	4
3.3	Interfaccia al Display	4
3.4	Fast Fourier Transform	4
4	Conclusioni	5
4.1	Problemi riscontrati	5
4.2	Commento	5
4.3	Certificazione	5
5	Trasformata di Fourier	7
5.1	Nozioni preliminarie	7
5.1.1	Regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati	7
5.1.2	Funzione armonica	7
5.1.3	Proprietà di ortogonalità del seno e del coseno	8
5.2	Polinomio Trigonometrico	8
5.3	Serie di Fourier	8
5.4	Trasformata di Fourier discreta	9
5.5	Trasformata di Fourier	9
5.6	Fast Fourier Transform	9
5.6.1	Motivazioni e Complessità temporale	9
5.6.2	Proprietà dei numeri complessi	9

1 Introduzione

1.1 Contesto

Per portare a termine il percorso formativo per un attestato di capacità federale presso la Scuola Arti e Mestieri di Bellinzona è richiesto lo sviluppo individuale di un progetto di produzione di un prodotto. Per interesse personale nella matematica della trasformata di Fourier mi è stato assegnato di sviluppare un analizzatore spettrale.

1.2 Requisiti

È richiesto di sviluppare circuito per analizzare lo spettro dei segnali di frequenza fino a 10 kHz. Il dispositivo dovrà avere 3 possibili sorgenti: RCA/Cinch e 2 Audio Jack per un microfono e per una sorgente di audio generica. È inoltre richiesto che il calcolo dei dati dello spettrogramma sia eseguito da un microcontroller della Microchip, collegato a due altri dispositivi quali, una display e ad un computer in RS232, per poter visualizzare lo spettrogramma computato.

1.3 Concetti matematici

Il circuito realizzato si appoggia sul concetto matematico di importanza fondamentale nelle discipline come la fisica e l'elettrotecnica della *Trasformata di Fourier*. Questa operazione matematica è fondata su un principio dimostrato da Joseph Fourier che asserisce che è possibile rappresentare una qualsiasi funzione periodica, in alcuni casi anche non periodica, con una serie di sinusoidi di frequenze multiple ad una di base. L'operazione di *Trasformata* dunque è uno strumento per osservare le frequenze di queste armoniche, esso trasforma una funzione in funzione del tempo $f(t)$ in una funzione rispetto alla frequenza o alla pulsazione $\hat{f}(\omega)$.

Secondariamente, il progetto usufruisce anche di un altro strumento chiamato *Fast Fourier Transform* (FFT) scoperto inizialmente nel 1965 dai matematici J. Cooley e J. Tukey. La FFT è un algoritmo con molte implementazioni che riduce la complessità computazionale della trasformata di Fourier discreta da $\mathcal{O}(n^2)$ a $\mathcal{O}(n \log n)$. Questo è necessario perché le operazioni matematiche da eseguire sono dei prodotti tra numeri complessi, i quali causerebbero dei severi cali di performance.

Tutti i concetti descritti saranno approfonditi nei capitoli seguenti.

1.4 Norme di progetto

2 Hardware

2.1 Schema a blocchi

2.2 Selezione delle entrate

2.3 Circuito di amplificazione

2.4 Microcontroller

2.5 Visualizzazione

3 Software

3.1 Campionamento

3.2 Interfaccia al Computer

3.3 Interfaccia al Display

3.4 Fast Fourier Transform

4 Conclusioni

4.1 Problemi riscontrati

4.2 Commento

4.3 Certificazione

Il sottoscritto dichiara di aver redatto e prodotto individualmente il lavoro di produzione.

Data: _____

Firma: _____
Naoki Pross

Bibliografia

- [1] *Example item title*, (online), Author and other informations,
<https://www.example.com>

5 Trasformata di Fourier

5.1 Nozioni preliminarie

5.1.1 Regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati

La regressione lineare è un'approssimazione di una serie di dati ad una funzione lineare. Questa retta di approssimazione può essere calcolata in molteplici modi, per questo progetto è di interesse utilizzare il *metodo dei minimi quadrati*. Sarà dunque spiegato come trovare i coefficienti di una retta a $m + 1$ termini partendo da N punti di riferimento.

$$r(x, a_0, \dots, a_m) = a_0 + x \sum_{i=1}^m a_i \quad (5.1.1.1)$$

Consideriamo di avere gli insiemi X e Y entrambi con N termini di cui si prende le coppie ordinate di valori (x_k, y_k) $x_k \in X$, $y_k \in Y$, ossia i punti dato di cui eseguire la regressione. Il metodo dei minimi quadrati trova i coefficienti della retta minimizzando il quadrato della differenza tra il valore stimato dalla retta $r(x_k)$ e il valore reale y_k .

$$\min((r(x_k) - y_k)^2) \quad \forall x_k \in X, y_k \in Y$$

Definiamo quindi la funzione da minimizzare ε

$$\varepsilon(a_0, \dots, a_m) = \sum_{k=1}^N \left[r(x_k, a_0, \dots, a_m) - y_k \right]^2 \quad (5.1.1.2)$$

Da cui si computa le derivati parziali rispetto ai coefficienti ricercati, ottenendo un sistema di equazioni lineare. Ciò corrisponde anche ad affermare che il *gradiente* di ε è un vettore $\in \mathbb{R}^{m+1}$ con tutte le componenti a 0.

$$\nabla \varepsilon = \langle 0, \dots, 0 \rangle$$

A questo punto si può procedere risolvendo il sistema con l'algebra lineare definendo la matrice di trasformazione \mathbf{A} e il vettore dei termini noti \vec{u}

$$\nabla \varepsilon = \mathbf{A} \langle a_0, \dots, a_m \rangle + \vec{u} \iff \langle a_0, \dots, a_m \rangle = \mathbf{A}^{-1}(-\vec{u})$$

5.1.2 Funzione armonica

Una funzione armonica, sinusoidale, può essere descritta in molteplici modi. Iniziamo dunque osservando le forme più semplici, ossia la forma trigonometrica.

$$f(x) = a \cdot \sin(\omega x + \varphi) \quad (5.1.2.1)$$

$$f(x) = b \cdot \cos(\omega x + \vartheta) \quad (5.1.2.2)$$

Conoscendo la formula di Eulero (5.1.2.3)

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \quad (5.1.2.3)$$

possiamo riscrivere $f(x)$ nei seguenti modi

$$f(x) = \frac{a}{2i} \cdot (e^{i(x\omega+\varphi)} - e^{-i(x\omega+\varphi)}) \quad (5.1.2.4)$$

$$f(x) = \frac{b}{2} \cdot (e^{i(x\omega+\vartheta)} + e^{-i(x\omega+\vartheta)}) \quad (5.1.2.5)$$

5.1.3 Proprietà di ortogonalità del seno e del coseno

Per avere delle fondamenta solide prima dell'introduzione dell'argomento principale, sarà dimostrata l'ortogonalità delle due funzioni trigonometriche mediante alcune verità matematiche su degli integrali definiti. Per tutti i casi seguenti definiamo T come il periodo della funzione periodica.

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \sin\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) dx &= 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \\
 \int_0^T \cos\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) dx &= 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^* \\
 \int_0^T \sin\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) dx &= 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \\
 \int_0^T \sin\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) \sin\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) dx &= 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \mid m \neq \pm n \\
 \int_0^T \sin^2\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) dx &= \frac{T}{2} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \\
 \int_0^T \cos\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) dx &= 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \mid m \neq \pm n \\
 \int_0^T \cos^2\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) dx &= \frac{T}{2} \quad \forall m \in \mathbb{Z}^*
 \end{aligned}$$

Dimostrazioni

5.2 Polinomio Trigonometrico

5.3 Serie di Fourier

La serie di Fourier, nominata tale in onore a Jean-Baptiste Joseph Fourier, di una funzione è descritta nel modo seguente.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) \right] \quad (5.3.0.1)$$

Con questa equazione Fourier ha teorizzato che è possibile rappresentare qualsiasi funzione come una combinazione lineare di armoniche di frequenze multiple di una frequenza di base. Con la seguente identità trigonometrica è possibile anche descrivere la serie con una notazione più compatta.

$$a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \sin(\alpha) = A \cdot \cos(\alpha - \vartheta)$$

Per $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(\vartheta) = \frac{b}{A}$ e $\sin(\vartheta) = \frac{a}{A}$. Dunque

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\left(\frac{n2\pi x}{T} - \vartheta_n\right) \quad (5.3.0.2)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{n2\pi x}{T} + \varphi_n\right) \quad (5.3.0.3)$$

5.4 Trasformata di Fourier discreta

5.5 Trasformata di Fourier

5.6 Fast Fourier Transform

5.6.1 Motivazioni e Complessità temporale

5.6.2 Proprietà dei numeri complessi