Anno scolastico 2017-18
Lavoro Professionale Individuale

Nome Cognome:	**Naoki Pross**
Professione:	**Elettronico**
Titolo del progetto:	**Spectrum Analyzer**

Azienda:	**CPT Bellinzona** Centro Professionale Tecnico Viale S. Franscini 25 6500 Bellinzona		
Formazione approfondita:	**S.2 Sviluppare prototipi**		
Formatore:	**Rinaldo Geiler, Daniele Kamm**		
Data d'inizio:	**12.04.2018**	Ore a disposizione:	**83 UD**
Data file lavoro:	**15.05.2018**	Ore effettive:	**– UD**

Indice

1 Introduzione

1.1 Contesto

Per portare a termine il percorso formativo per un attestato di capacità federale presso la Scuola Arti e Mestieri di Bellinzona è richiesto lo sviluppo individuale di un progetto di produzione di un prodotto. Per interesse personale nella matematica della trasformata di Fourier mi è stato assegnato di sviluppare un analizzatore spettrale.

1.2 Requisiti

È richiesto di sviluppare circuito per analizzare lo spettro dei segnali di frequenza fino a 10 kHz. Il dispositivo dovrà avere 3 possibili sorgenti: RCA/Cinch e 2 Audio Jack per un microfono e per una sorgente di audio generica. È inoltre richiesto che il calcolo dei dati dello spettrogramma sia eseguito da un microcontroller della Microchip, collegato a due altri dispositivi quali, una display e ad un computer in RS232, per poter visualizzare lo spettrogramma computato.

1.3 Concetti matematici

Il circuito realizzato si appoggia sul concetto matematico di importanza fondamentale nelle discipline come la fisica e l'elettrotecnica della *Trasformata di Fourier*. Questa operazione matematica è fondata su su un principio dimostrato da Joseph Fourier che asserisce che è possibile rappresentare una qualsiasi funzione periodica, in alcuni casi anche non periodica, con una serie di sinusoidi di frequenze multiple ad una di base. L'operazione di *Trasformata* dunque è uno strumento per osservare le frequenze di queste armoniche, esso trasforma una funzione in funzione del tempo $f(t)$ in una funzione rispetto alla frequenza o alla pulsazione $\hat{f}(\omega)$.

Secondariamente, il progetto usufruisce anche di un altro strumento chiamato *Fast Fourier Transform* (FFT) scoperto inizialmente nel 1965 dai matematici J. Cooley e J. Tukey. La FFT è un algoritmo con molte implementazioni che riduce la complessità computazionale della trasformata di fourier discreta da $\mathcal{O}(n^2)$ a $\mathcal{O}(n \log n)$. Questo è necessario perchè le operazioni matematiche da eseguire sono dei prodotti tra numeri complessi, i quali causerebbero dei severi cali di performance.

Tutti i concetti descritti saranno approfonditi nei capitoli seguenti.

1.4 Norme di progetto

2 Hardware

2.1 Schema a blocchi

2.2 Selezione delle entrate

2.3 Circuito di amplificazione

2.4 Microcontroller

2.5 Visualizzazione

3 Software

3.1 Campionamento

3.2 Interfaccia al Computer

3.3 Interfaccia al Display

3.4 Fast Fourier Transform

4 Conclusioni

4.1 Problemi riscontrati

4.2 Commento

4.3 Certificazione

Il sottoscritto dichiara di aver redatto e prodotto individualmente il lavoro di produzione.

Data: ______________________ Firma: ______________________
Naoki Pross

Bibliografia

[1] *Example item title*, (online), Author and other informations, `https://www.example.com`

5 Trasformata di Fourier

5.1 Nozioni preliminarie

5.1.1 Regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati

La regressione lineare è un'approssimazione di una serie di dati ad una funzione lineare. Questa retta di approssimazione può essere calcolata in molteplici modi, per questo progetto è di interesse utilizzare il *metodo dei minimi quadrati*. Sarà dunque esplicato come trovare i coefficienti di una retta a $m+1$ termini partendo da N punti di riferimento.

$$r(x, a_0, \dots, a_m) = a_0 + x \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{5.1.1.1}$$

Consideriamo di avere gli insiemi X e Y entrambi con N termini di cui si prende le coppie ordinate di valori (x_k, y_k) $x_k \in X$, $y_k \in Y$, ossia i punti dato di cui eseguire la regressione. Il metodo dei minimi quadrati trova i coefficienti della retta minimizzando il quadrato della differenza tra il valore stimato dalla retta $r(x_k)$ e il valore reale y_k.

$$\min((r(x_k) - y_k)^2) \quad \forall x_k \in X,\, y_k \in Y$$

Definiamo quindi la funzione da minimizzare ε

$$\varepsilon(a_0, \dots, a_m) = \sum_{k=1}^{N} \Big[r(x_k, a_0, \dots, a_m) - y_k \Big]^2 \tag{5.1.1.2}$$

Da cui si computa le derivati parziali rispetto ai coefficienti ricercati, ottenendo un sistema di equazioni lineare. Ciò corrisponde anche ad affermare che il *gradiente* di ε è un vettore $\in \mathbb{R}^{m+1}$ con tutte le componenti a 0.

$$\nabla\varepsilon = \langle 0, \dots, 0 \rangle$$

A questo punto si può procedere risolvendo il sistema con l'algebra lineare definendo la matrice di trasformazione $\mathbf{A}$ e il vettore dei termini noti $\vec{u}$

$$\nabla\varepsilon = \mathbf{A}\langle a_0, \dots, a_m \rangle + \vec{u} \iff \langle a_0, \dots, a_m \rangle = \mathbf{A}^{-1}(-\vec{u})$$

5.1.2 Funzione armonica

Una funzione armonica, sinusoidale, può essere descritta in molteplici modi. Iniziamo dunque osservando le forme più semplici, ossia la forma trigonometrica.

$$f(x) = a \cdot \sin(\omega x + \varphi) \tag{5.1.2.1}$$

$$f(x) = b \cdot \cos(\omega x + \vartheta) \tag{5.1.2.2}$$

Conoscendo la formula di Eulero (5.1.2.3)

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \tag{5.1.2.3}$$

possiamo riscrivere $f(x)$ nei seguenti modi

$$f(x) = \frac{a}{2i} \cdot (e^{i(x\omega+\varphi)} - e^{-i(x\omega+\varphi)}) \tag{5.1.2.4}$$

$$f(x) = \frac{b}{2} \cdot (e^{i(x\omega+\vartheta)} + e^{-i(x\omega+\vartheta)}) \tag{5.1.2.5}$$

5.1.3 Proprietà di ortogonalità del seno e del coseno

Per avere delle fondamenta solide prima dell'introduzione dell'argomento principale, saranno dimostrate le proprietà di ortogonalità del seno e coseno. Considerando il periodo T, dunque di frequenza $2\pi/T$.

Intuizione geometrica

Dimostrzioni algebriche

1.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin(\frac{m2\pi x}{T})\,\mathrm{d}x &= 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \\
\int_0^T \sin(\frac{m2\pi x}{T})\,\mathrm{d}x &= \Big[-\frac{T}{2\pi m}\cdot\cos\big(\frac{2\pi}{T}mx\big)\Big]_0^T \\
&= -\frac{T}{2\pi m}\cdot\cos\big(2\pi m\big) + \frac{T}{2\pi m}\cdot\cos\big(0\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \cos(\frac{m2\pi x}{T})\,\mathrm{d}x &= 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^* \\
\int_0^T \cos(\frac{m2\pi x}{T})\,\mathrm{d}x &= \Big[\frac{T}{2\pi m}\cdot\sin\big(\frac{2\pi}{T}mx\big)\Big]_0^T \\
&= \frac{T}{2\pi m}\cdot\sin\big(2\pi m\big) + \frac{T}{2\pi m}\cdot\sin\big(0\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nota: Se $m = 0$

$$\int_0^T \cos(\frac{m2\pi x}{T})\,\mathrm{d}x = T$$

3.

5.2 Polinomio Trigonometrico

Analogamente a come è definito un polinomio P "normale" di grado N, è possibile definire anche un polinomio trigonometrico T.

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \qquad a_n \in \mathbb{R},\ a_N \neq 0$$

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n e^{i\omega n x} \qquad c_n \in \mathbb{C},\ \omega \in \mathbb{R},\ c_N \neq 0$$

Questo polinomio è detto *trigonometrico* perchè utilizzando la formula di eulero $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ si può espandere nel seguente modo.

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \left[a_n \cdot \cos(\omega n x) + i b_n \cdot \sin(\omega n x)\right] \qquad a_n, b_n \in \mathbb{C}$$

È definito inoltre il polinomio trogonometrico *reale* come

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \left[a_n \cdot \cos(\omega n x) + b_n \cdot \sin(\omega n x)\right] \qquad a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

Quest'ultimo mediante delle identità trigonometriche può essere riscritto anche nel modo seguente.

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n \cdot \cos(\omega n x - \varphi)$$

In tutti i casi possiamo osservare che il polinomio trogonometrico è una somma di sinusoidi di frequenze multiple ad una base $\omega = 2\pi f$. Se descritto mediante la terminologia dell'algebra lineare, si può anche osservare che un polinomio trigonometrico è una combinazione lineare nello spazio funzionale ortonormato dalle basi $\sin(\omega n x)$ e $\cos(\omega n x)$.

5.3 Serie di Fourier

5.4 Trasformata di Fourier discreta

5.5 Trasformata di Fourier

5.6 Fast Fourier Transform

5.6.1 Motivazioni e Complessità temporale

5.6.2 Proprietà dei numeri complessi