Indice

Parte I

Trasformata di Fourier

1 Introduzione

1.1 Funzione armonica

Una funzione armonica, sinusoidale, può essere descritta in molteplici modi. Iniziamo dunque osservando le forme più semplici, ossia la forma trigonometrica.

$$f(x) = a \cdot \sin(\omega x + \varphi) \tag{1.1.1}$$
$$f(x) = b \cdot \cos(\omega x + \vartheta) \tag{1.1.2}$$

Conoscendo la formula di Eulero (1.1.3)

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \tag{1.1.3}$$

possiamo riscrivere $f(x)$ nei seguenti modi

$$f(x) = \frac{a}{2i} \cdot (e^{i(x\omega+\varphi)} - e^{-i(x\omega+\varphi)}) \tag{1.1.4}$$
$$f(x) = \frac{b}{2} \cdot (e^{i(x\omega+\vartheta)} + e^{-i(x\omega+\vartheta)}) \tag{1.1.5}$$

1.2 Regressione Lineare

Nel nuovo spazio Hermitiano possiamo definire la regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati per una funzione continua. Inizialmente però sarà mostrata una regressione con N termini ad una retta r di $m+1$ termini.

Il metodo dei minimi quadrati trova i coefficienti della retta minimizzando il quadrato della differenza tra il punto della curva e la sua proiezione ortogonale sulla retta di regressione.

Si ha dunque la retta di regressione

$$r : y = a_0 + x \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{1.2.1}$$

e la differenza dei quadrati

$$E(a_0, \ldots, a_m) = \sum_{k=0}^{N} \Big[r(x_k, a_0, \ldots, a_m) - y_k \Big]^2 \tag{1.2.2}$$

impostando il gradiente di E a zero

$$\nabla E(a_0, \ldots, a_m) = \Big(\frac{\partial E}{\partial a_0}, \ldots, \frac{\partial E}{\partial a_m} \Big) = \Big(0, \ldots, 0 \Big)$$

si ottiene un sistema lineare risolvibile con delle matrici.

$$\nabla E = \mathbf{A} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \mathbf{B} \iff \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}(-\mathbf{B})$$

dove **A** è la matrice dei coefficienti e **B** è il vettore dei termini noti.

1.3 Regressione lineare di una funzione continua ad serie

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo $[\alpha; \beta]$ e $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$v(x) = a(x)x + a_0 - f(x)$$

si ha i minimi quadrati

$$E(a) = \int_\alpha^\beta \langle s, s\rangle \,\mathrm{d}x$$

minimizzando

$$\nabla E = \nabla \int_\alpha^\beta \langle v, v\rangle \,\mathrm{d}x$$

1.4 Serie di Fourier

La serie di Fourier, nominata tale in onore a Jean-Baptise Joseph Fourier, di una funzione è descritta nel modo seguente.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(\frac{n2\pi x}{T}) + b_n \cdot \sin(\frac{n2\pi x}{T}) \right] \tag{1.4.1}$$

Con questa equazione Fourier ha teorizzato che è possibile rappresentare qualsiasi funzione come una combinazione lineare di armoniche di frequenze multiple di una frequenza di base. Con la seguente identià trigonometrica è possibile anche descrivere la serie con una notazione più compatta.

$$a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \sin(\alpha) = A \cdot \cos(\alpha - \vartheta)$$

Per $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(\vartheta) = \frac{b}{A}$ e $\sin(\vartheta) = \frac{b}{A}$. Dunque

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(\frac{n2\pi x}{T} - \vartheta_n) \tag{1.4.2}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(\frac{n2\pi x}{T} + \varphi_n) \tag{1.4.3}$$

2 Trasformata di Fourier discreta

3 Trasformata di Fourier

4 Fast Fourier Transform

4.1 Motivazioni

4.2 Complessità temporale

4.3 Proprietà dei numeri complessi