幾何学と多様体そして多様体の可微分関数や写像による射影次元削減

Naoki Kitazawa(北澤 直樹)

Postdoctoral researcher, Institute of Mathematics for Industry (IMI), Kyushu University
(九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 学術研究員)

幾何学–図形や空間の形を知る学問–

幾何学 (ジオメトリー)：純粋数学者である発表者の研究分野

- 測量に語源
- ユークリッド (平面幾何: 紀元前), リーマン (多様体や相対性理論の幾何学: 19 世紀)　etc. 多くの学者の貢献で現代に至るまで発展.
- 物理学でも相対論におけるリーマン幾何にはじまりカラビ・ヤウ多様体等基本的で重要で熱い.
- 数学の応用ブームで「(空間内の) データ (セットの) 解析」等への応用も.

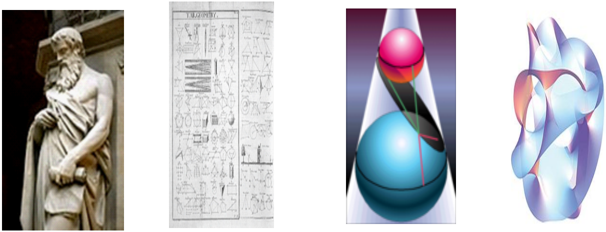

Figure 1: 左から, 平面幾何の父ユークリッド, 18 世紀の初等図形の図, 円錐曲線, カラビ・ヤウ多様体 (https://ja.wikipedia.org/wiki/幾何学より)

多様体とは

多様体：1 次元の直線や曲線, 2 次元の平面や曲面のように決まった成分数 (次元) の座標の入る空間.

Example 1

ユークリッド空間, ユークリッド空間内の単位球面.

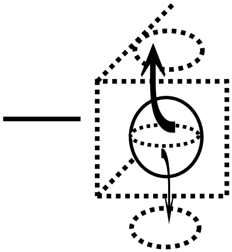

Figure 2: 基本的な多様体 (直線と 3 次元空間内の 2 次元の単位球面:: 後者について上半球下半球は円板とみなせ自然な座標が入ることを矢印で表現したつもり)..

多様体の歴史等

・ ベルンハルト・リーマン (1826–1866) による就職講演 (1854) で導入.
・ 幾何学で基本的な空間, 相対性理論他物理学への応用も盛んになり様々なの物理学の舞台.
・ 近年データ解析への応用 (例えば離散点集合であるデータセットから多様体を見出して射影する等) や他の応用.

Figure 3: ベルンハルト・リーマン：
https://gendai.ismedia.jp/articles/-/57468 より引用.

多様体に関する補足

○閉多様体: 有限の広がりをもちふちがない多様体.

・ 球面やその直積.

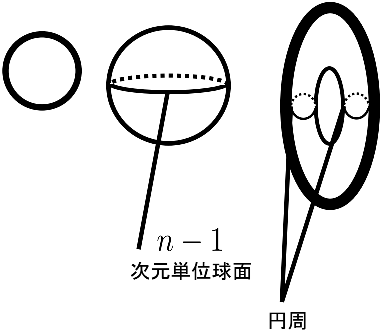

Figure 4: 基本的な閉多様体: 左から円周 (1 次元), $n > 2$ 次元単位球面 (n 次元), 円周の直積 (トーラス: 2 次元).

幾何学数学の基本的な問題
多様体の形 (位相) やより深い幾何的な情報を知ろう

形 (位相)

位相が同じ：つぶさずのばしたり縮めたりくらいではかわらない.

Example 2

ドーナツの表面とマグカップの表面は同じ.

Figure 5: ドーナツとマグカップの表面–トーラスのよくある説明–

どちらも 2 次元トーラス.

不変量

○位相が同じなら変わらない量 (空間の不変量)

- ホモロジー群
- コホモロジー群 (環)

○ (広がりが有限な) 空間 X の i 次ホモロジー群 $H_i(X;\mathbb{Z})$: i 次の空間による穴を簡単な代数で表現する量.
・簡単なものは整数の集合の直和 $\mathbb{Z}\oplus\cdots\mathbb{Z}$ で表され一つの整数 $\mathbb{Z}$ が大体一つの穴.

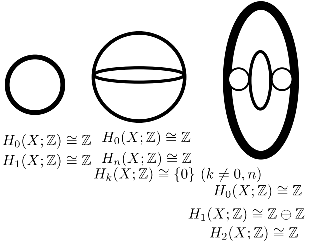

Figure 6: いくつかの多様体のホモロジー群.

形(位相)に関する補足.–1 or 2 次元の閉多様体–

1 次元 (の連結つまりつながっている) 閉多様体：円周のみ
2 次元 (の連結つまりつながっている) 閉多様体：種数という穴の数を表す非負の整数と向きが入るかで決まる (向きが入るといくつかの穴のあいた浮き輪).

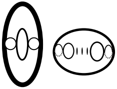

Figure 7: 2 次元で向きの入る種数 1 の閉多様体 (トーラス: 円周の直積) と種数 $g > 0$ のもの (g 個の穴の開いた浮き輪)

向き: 表裏がある $\leftrightarrow$ 向きが入る.
1 次元 $\rightarrow$ 必ず入る.　2 次元 $\rightarrow$ メビウスの帯がなければ入る.

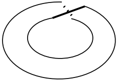

Figure 8: メビウスの帯

$\Rightarrow$ 境界に 2 次元球体を貼ると種数 0 の向きが入らない閉多様体

位相おまけ.–ポアンカレ予想–

20 世紀頭に提唱され最近解かれた多様体の位相に関する大問題.
<u>基本群</u>：ループを可換でないかもしれない群で代数的に表現したもの. 1 次ホモロジー群 H_1 より複雑で精密な不変量.

Fact 1 (Poincaré's conjecture (1904), solved by Perelman (2006).)

基本群が自明な 3 次元の閉多様体は球面になる.

→ 他次元でも (次元に応じて仮定を変えた) 主張があり先に証明.
→ 1 次元 2 次元は古典的, その後 5 次元以上のバージョンが自由度の高さから解かれ 4, 3 ときた.

Figure 9: Poincaré(1854–1912) と Perelman(1966–) そして Poincare 予想の 2 次元版を示す絵 (https://ja.wikipedia.org/wiki/ポアンカレ予想より)

より深い幾何的な構造 (可微分構造) と可微分関数–微積分へ–

○可微分構造：座標のうち微 (積) 分ができるようなもの
・ 前で上げたもの含め殆どのものには入る.
・ 1–3 次元では**一意的に必ず**入るが, 4 次元以上ではそうとは限らない.
○可微分 (滑らかな)写像: 微分のできる写像.
・ たくさん存在.
○特異点 $\leftrightarrow$ 可微分写像で微分の退化する点 (関数で高さの変化の仕方が変わる点).
○正則値 $\leftrightarrow$ 逆像が特異点を含まないような値域の点.

・ 実はごく簡単なもの以外に良い可微分写像を構成することと具体的にとらえることは難.
・ 同時に構成することは基本的で面白い問題.
・ 多様体も写像を介して幾何的に具体的に表現できることになる.
$\rightarrow$ 一般にこれも難しいが幾何学の基本的な重要問題,

簡単な可微分関数写像

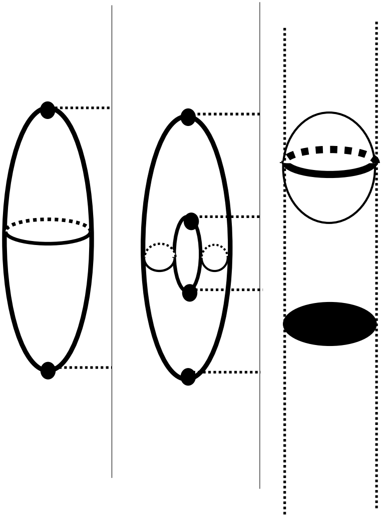

Figure 10: 適当に高さを考えて得られる可微分関数 (2 次元とは限らない 2 次元以上の単位球面のと 2 次元トーラスのもの: 黒い丸が特異点) そして単位球面 (2 次元以上) の平面への射影 (太い線が特異点の集合).

可微分構造の不思議–実は一通りかわからない–

- 7 次元の (球面などの) 閉多様体の場合は, (向きを考えて) 可微分構造 28 通り.
- 8 次元以上の閉多様体の場合は有限通り, 5, 6 では 1 通り.
- 4 次元の場合は難.

特別な可微分関数写像と多様体の位相や可微分構造

Fact 2

1. 特異点をちょうど 2 個, 最大最小値を与えるもっとも自然な特異点を有する可微分関数は, 球面を (だいたい) 位相的に特徴づける.
   → Morse 関数と呼ばれるものの中でもっとも簡単なもの.
   → 前の最初二つの高さ関数は Morse 関数.
2. Special generic 写像という, 前の特異点の高次元版といえるようなものしか特異点として有さない可微分写像は, しばしば定義域の多様体の位相や可微分構造を強く制限する.
   → (1990s–: 佐伯, 佐久間, Wrazidlo) 単位球面と可微分構造の異なる球面はしばしばこういう写像を許容しない.
   → 単位球面の射影を最も簡単なものとして含むこのクラスの写像の多様体の位相や可微分構造の観点からの面白さ.

折り目写像とその具体的なものと多様体の位相や可微分構造

折り目写像: Morse 関数の高次元版.
→ 紙をたるませ平面へ射影するときたるみの部分に, 輪郭の部分にうつされる点として現れる特異点.
→ 紙を折ったときに折り目として現われる.

Theorem 1 (北澤, 2013–4)

可微分構造の入った 7 次元球面は, 向きをこめ 28 種類あるが, 4 次元ユークリッド空間への折り目写像で, 特異点の集合が 3 個の同心円状に埋め込まれた 3 次元の球面であり, 正則値の逆像が 3 次元球面の非交和であるようなものを許容する.
さらに, 特異点の集合の成分が 1, 2 個にしたものも考えられるが, 1 個のものを許容するのは単位球面のみ, 2 個のものは, (ある構造に関する条件をみたすものは) 28 種類中 16 種類の可微分構造が入ったもの (含単位球面) のみ許容する.

→ 写像の特異点の集合の像のトポロジーが可微分構造を制限することを special generic 写像とは別のクラスにて発見.

続講演者の結果

前の結果を通じ, 基本的な多様体上でも難しいとされる, 折り目写像の構成に, いくらか成功した.

問題

可微分写像を具体的に構成せよそしてそれを通し (定義域に出てくる) 多様体を手に入れよ！

Res 1 (北澤, 2019.)

適切な有限生成可換群の有限列や有限生成な次数付き環を与えたとき, それらをホモロジー群やコホモロジー環としたある多様体上の**ある程度単純な構造を有した**折り目写像がある**構成的な手法**で構成できる.

→ 代数系がある程度の条件を満たせば OK.
→ 代数系の満たすべきいくつかの条件が発見されておりまだ発見できそう.

今後やりたいこと (幾何学数学から学際的な応用まで)

- 写像の構成を通じ多様体を構成, 様々な多様体を幾何学的に入手 (?), 表現する.
  → 基本的であるが難しい. 特に一般次元の場合.
  → 自由度が高くて (ポアンカレ予想含め) ある意味簡単で解決したとされる高一般次元の多様体に関する理論の手つかずの部分.
  → 忘れられそうな部分もあるがそれでも重要であることに変わりはないこの古典を現在に蘇らせたい.
- データ解析や機械学習への応用.
- 人間の知覚の説明への挑戦.
  → なぜ我々は低次元の情報から高次元の情報を, 少ない情報から複雑な情報を把握することができるのか.
  → AI にはできない予測を人間はできているはず (例えば AI は過去のデータから人間により与えられたプログラムに基づき適切な関数を与えることしかできないが人間はそこに「何か」を介在させることができる).

ありがとうございました！