

参考資料

研究紹介；今回のISへの見解

九州大学大学院 数理学府 数理学専攻 D 2

阿川 真士

作成日：2019年07月17日（水）

目 次

1	研究紹介	2
2	今回の IS への見解	4

1 研究紹介

簡単に言えば

- (1) 圏論に関する数学的事実に与えられる証明の論理的正当性を計算機で自動検証する
- (2) Data Visuallization に関する計算機実装

に関して、自分は現在取り組んでいる。それらについて、実際に取り組んだ結果を交えて、ここでは紹介する。

- (1) 圏論に関する数学的事実に与えられる証明の論理的正当性を計算機で自動検証する：
 - (a) 位相空間の圏と、関係モナド代数の圏の間に成り立つ同型の検証：
[1] で

位相空間の圏と関係モナド代数の圏との同型

という数学的事実 1 が証明され、その証明も（人力（＝査読）による正当性の確認の結果、）正しいことがわかっている。そこでは、関係モナド代数（という関係代数に関連する概念）の諸概念に関して、定義の付与や得られた事実の証明がなされている。しかし、大切なアイデアをより直感的に伝達することを優先した為に、その論理性がかなり欠落している。更に、同様の理由から、位相空間と関連した部分の記述に関してもかなり欠落している。そこで、それらの補填と共に、オリジナルの部分に関しても自動検証への応用を見据えた「補填」（つまり、ある事実から別の事実への論理展開が行える理由の付加）を行なうことで、上述の事実 1 に対する論理的正当性を計算機上で保障できると考えた。（特に、後半の鉤括弧付きの「補填」に関しては、「数学のプロの間では従来省略されてきた部分（例えば、定義などの基本的な事実）でさえも省略せずに証明を記述する」とも言い換えられる。その「キモチ」は例えば以下のようなものだと思はれる：イオンなどのスーパーマーケットでの買い物の終わりにいざ会計となった時に、 $1 + 9 \times 5 + 3 \times 2$ の計算を

$$1 + 9 \times 5 + 3 \times 2 = 52$$

と一気に暗算で片付けて結果を求めずに、

$$\begin{aligned} 1 + 9 \times 5 + 3 \times 2 &= 1 + 45 + 3 \times 2 && (\because 9 \times 5 = 45) \\ &= 1 + 45 + 6 && (\because 3 \times 2 = 6) \\ &= 46 + 6 && (\because 1 + 45 = 46) \\ &= 52 && (\because 46 + 6 = 52) \end{aligned}$$

のように逐次的に理由を言いながらクドク計算して結果を得る.)
現在までに取り組んだ結果を一例として以下に述べる (該当のファイルを, For1 ファイルフォルダーの下に TopReLU ファイルフォルダーに入れている.):

- 17 ページの式 (49) の直下の等式変形
- 18 ページの式 (51) の直上の等式変形
- 13 ページの式 (35) の直下の, 論理的な式変形
- 18 ページの式 (43) の直下の, 論理的な式変形.

(b) 圏論の基本的事実の検証:

[2] で「Beck の定理」という数学的事実 2 が証明され, その証明が (人力 (= 査読) による正当性の確認の結果,) 正しいことがわっている. しかし, 大切なアイデアをより直感的に伝えることを優先した為に, その論理性がかなり欠落している. そこで, それらの補填と共に, オリジナルの部分についても自動検証への応用を見据えた「補填」(つまり, ある事実から別の事実への論理展開が行える理由の付加)を行なうことで, 上述の事実 2 に対する論理的正当性を計算機上で保障できると考えた. 現在までに取り組んだ結果を以下に掲載する: (取り組んだ様子が描かれたファイルを, For1 ファイルフォルダーの下に BeckTheorem ファイルフォルダーに入れている.)

- 圏 (という数学的概念) の定義の実装
- 関手 (という数学的概念) の定義と基本的性質の実装
- 自然変換 (という数学的概念) の定義と基本的性質の実装

(2) Data Visuallization に関する計算機実装:

COI という九州大学の一機関におけるプロジェクトである「燃料電池内部の成分を Visuallize する」の為に取り組み始めた. 本研究では, Mathematica と呼ばれる数学ソフトを使っており, 錯視図形 (= 錯視を引き起こすような図形) の作成や, それらを見た時に錯視が起きないようにする為に (作ったモノに対して, 計算機上で, あるいは, 物理的に, 色付けしたりするなどして) 「錯視解消策」の発見に取り組んでいる. (また, Mathematica では, 機械学習や統計などにも応用できる.) 現在までに取り組んだ結果を以下に掲載する (該当のファイルは別ファイルの For2 ファイルフォルダーの下に MathematicaFor2 ファイルフォルダーに入れている):

- Cuboid
- Necker cube
- Cube (これ 1 個の表面を, 2 色や 3 色に彩色した)

- Penrose triangle
- 屏風もどき錯視
- 京急錯視
- Ebbinghaus illusion
- Delboeuf illusion

また、(印刷に必要な stl ファイル作成も含めて) 3 D プリンターを用いて印刷したモノを以下に掲載する (該当のファイルは別ファイルの For2 ファイルフォルダーの下の 3Dprint ファイルフォルダーに入れている) :

- Cuboid
- Necker cube
- 日本国旗の外側

2 今回の IS への見解

本件に関して更に詳細を伺うと、意見が正反対に変わってしまうかもしれないが、現時点での自分の見解を以下に簡単に二つ述べる :

(1) 機械学習を用いた統計分析の応用可能性 :

人工衛星からのデータを用いて地図を作成するに当たって、位置データに関して、「我々が実際にその場所を歩いた時に見える地理情報」のような既存の実データと、人工衛星から観測されたデータとの誤差を埋めなければならない。その誤差を、統計分析の手法を用いて、より最小限に抑えられると私は考える。更に、統計分析によって得られた数式をより精度良いものにする為に、機械学習が応用可能であると私は考える。

(2) 幾何的解釈の応用可能性 :

例えば目の前に紙があって 2 本の平行線が引かれていたとしよう。この時、その紙面の範囲内では平行線同士は交わらない。しかし、これを地球儀の上で考えると、二本の直線は地球上のどこかで交わってしまう。従って、考える縮尺によって位置情報に関する数式は変わる恐れがある。実は、前者の「世界観」は中学校の数学であり、後者のそれも数学の世界では既に存在している。そして、それら 2 つの学問は現在に至るまで深く研究され、たくさんの結果が残されている。その知見が今回のインターンシップで応用可能であると私は考える。

参考文献

- [1] Michael Barr, *Relational algebra*, Lecture Notes in Math., 137:39-55, 1970.
- [2] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971.