

東京大学工学系研究科システム創成学専攻

CS final report

ダム崩壊現象における
粒子法と浅水方程式に基づく
比較シミュレーション分析

Comparative Simulation Analysis of Dam Break
Phenomena Using Particle Method and Shallow
Water Equation

2024 年 1 月 12 日提出

担当教員 越塚誠一 教授

学籍番号 37236413

瀧野瀬 直人

目次

目次	ii
図目次	iii
表目次	iii
第1章 序論	1
1.1 粒子法とは	1
1.1.1 粒子法の特徴	2
1.2 MPS 粒子法と SPH 粒子法の違い	2
1.2.1 MPS 粒子法	2
1.2.1 SPH 粒子法	2
1.3 MPS 粒子法の研究例	3
1.4 SPH 粒子法の研究例	6
1.5 浅水方程式を用いた粒子法	7
1.5.1 浅水方程式を用いた粒子法とは	7
1.6 本プロジェクトの目的	8
第2章 MPS 粒子法による ダム崩壊シミュレーション	11
2.1 Navier-Stokes 方程式の離散化	11
2.2 ダム崩壊問題	12
2.2.1 シミュレーション環境設定	12
2.2.2 シミュレーション結果と解析解との比較	13
第3章 浅水方程式を組み込んだ粒子法によるダム崩壊シミュレーション	15
3.1 浅水方程式を組み込んだ粒子法	15
3.2 粒子分裂手法を組み込む	17
3.3 シミュレーション結果と解析解との比較	18
第4章 結論	21
4.1 二次元 MPS 法と浅水方程式を組み込んだ粒子法の結果の比較	21
4.2 まとめ	23
参考文献	24

図目次

図 1-1 ダム崩壊問題のシミュレーション環境.....	3
図 1-2 Particle B (陽解法).....	4
図 1-3 Particle C (陽解法).....	5
図 1-4 Particle B (陰解法).....	5
図 1-5 Particle C (陰解法)	6
図 1-6 解析モデル.....	7
図 1-7 解析結果	7
図 2-1 シミュレーション環境設定.....	13
図 2-2 二次元 MPS 粒子法のシミュレーション中の画像 (t=0s).....	14
図 2-3 二次元 MPS 粒子法のシミュレーション中の画像 (t=0.5s).....	14
図 2-4 二次元 MPS 粒子法と解析解の比較.....	14
図 3-1 浅水方程式における粒子の時間変化の様子	17
図 3-2 浅水方程式を組み込んだ粒子法のシミュレーション中の画像 (t=0s).....	19
図 3-3 浅水方程式を組み込んだ粒子法のシミュレーション中の画像 (t=0.5s).....	19
図 3-4 浅水方程式を組み込んだ粒子法と解析解の比較	19
図 4-1 二次元 MPS 粒子法と浅水方程式を組み込んだ粒子法の Ritter 解析解との比較.....	22

表目次

表 1 ダム崩壊問題のシミュレーション設定.....	4
表 2 全体の平均誤差と初期水位 0.25m に対する誤差割合	22
表 3 位置 0~3m を排除した平均誤差と初期水位 0.25m に対する誤差割合	22

第1章

序論

本プロジェクトの主目的は、粒子法を用いた流体解析技術の習得と、浅水方程式を組み込んだ粒子法の適用によるダム崩壊問題のシミュレーションの実施です。粒子法は、流体を個々の粒子として扱い、これらの相互作用を計算することにより、流体の動きをシミュレートするメッシュフリーの数値計算方法です。『明解 粒子法』によると、この手法は特に不規則な地形や境界条件を持つ流体問題に適しております。

さらに、本プロジェクトでは、浅水方程式の利用を目指しています。これは、三次元 Navier-Stokes 方程式を水深方向に積分することにより計算時間を短縮し、特に水深が浅い状況での流体の挙動を詳細に捉えることができます。本プロジェクトでは、MPS 粒子法と浅水方程式の組み合わせた粒子法により、ダム崩壊問題のより正確なシミュレーションを目指します。

本章では、最初に粒子法について述べます。次に MPS 粒子法と SPH 粒子法の違いについて述べます。続いて、MPS 粒子法の関連研究、SPH 粒子法の関連研究を紹介します。その後、浅水方程式を用いた先行研究例を紹介します。最後に本プロジェクトの目的を述べます。

1.1 粒子法とは

粒子法は、流体を個々の粒子としてモデル化し、それらの相互作用をシミュレートすることで流体の挙動を再現する技術です。ここで用いる「粒子」は計算のために導入した仮想的な考え方であり、実際の流体には存在しません。アボガドロ数で表される分子を扱った場合、1mol あたり、 10^{23} スケールの計算が必要になり、極めて少ない流体しか扱えなくなってしまうためです。この方法は、特に複雑な境界条件や自由表面を持つ流体問題に対して適しており、流体の非線形性や乱流などの複雑な特性を捉える能力があります。粒子法は、その柔軟性と適応性により、工学、物理学など多岐にわたる分野で応用されています。

1.1.1 粒子法の特徴

① 格子が不要

従来の有限要素法や有限体積法では格子を配置し、隣り合う格子点同士での離散式を構築していました。そのため、三次元などの複雑形状では格子生成に多くの時間と労力が必要でありました。粒子法は粒子間相互作用モデルを用いているため、格子によって近傍関係を明示する必要がないので格子を用いずに粒子を生成し、空間に配置することができ、格子生成よりも簡単であります。

② ラグランジュ記述を用いている

格子法では、格子を空間に固定しているため、地点によっては、存在率が0から1の間の数値を取ることがあります。この場合、自由表面の動きが不自然であり、複雑な動きをした場合に不合理な自由表面を形成することがあります。しかし、粒子法は流れと共に視点が移動するラグランジュ記述を用いており、精度良く計算することができます。

③ 簡単な離散式

格子法では二次元から三次元に拡張した場合、爆発的に格子の数が増えるため、計算負荷が高まります。しかし、粒子法では、粒子間相互作用モデルなので、粒子間距離の計算で座標が増えることを考慮するだけで良いです。よって、複雑な現象の大規模な三次元計算におけるシミュレーションや可視化に適しています。

1.2 MPS 粒子法と SPH 粒子法の違い

本節ではまず、MPS 粒子法及び、SPH 粒子法それぞれについて、概要とそれぞれの手法のメリットデメリットについて述べる。

1.2.1 MPS 粒子法

MPS 粒子法は、取り扱う対象は非圧縮性流体であり、粒子数密度を利用して非圧縮性を維持しています。そのため、圧力計算が重要になり、半陰解法的に解くことになるので、ループ計算が増えます。よって、特に流体の微細な挙動や急激な変化を捉えるのに優れており、高速流や細かい乱流の分析に適しておりますが、計算コストが高くなる傾向があります。

1.2.1 SPH 粒子法

SPH 粒子法は、取り扱う対象が圧縮性流体であり、圧縮を許容するため、精度が落ちます。その際、衝撃波のような計算の際に、数値拡散を抑制する役割として、しばしば人工

粘性を導入する必要があります。また、圧力を考慮しないので、陽解法的に計算を行うことができ、計算コストを抑えることができます。そのため、ゲームや CG 等の高速化が重要視される分野では、主に SPH 粒子法が用いられます。しかし、細かな流れの詳細や断面解析には限界がある場合があります。

1.3 MPS 粒子法の研究例

本節では、MPS 法に関する研究例として、「MPS 陽解法における圧力計算の検証」[1]について紹介します。この研究では、自由表面流れにおける陽解法 MPS 法の圧力計算の精度と安定性が、静水圧問題とダム破壊問題を用いて検証されています。元々、半陰的アルゴリズムである MPS 法に陽的アルゴリズムを加えることで、粒子数 n に対して、圧力計算が $O(n^{1.5})$ 必要であったが、 $O(n^{1.0})$ で行うことが出来るので、大規模な計算体系ほど高速化の効果が期待できるものであります。シミュレーション環境や設定は以下の図 1-1、表 1 のようになっています。

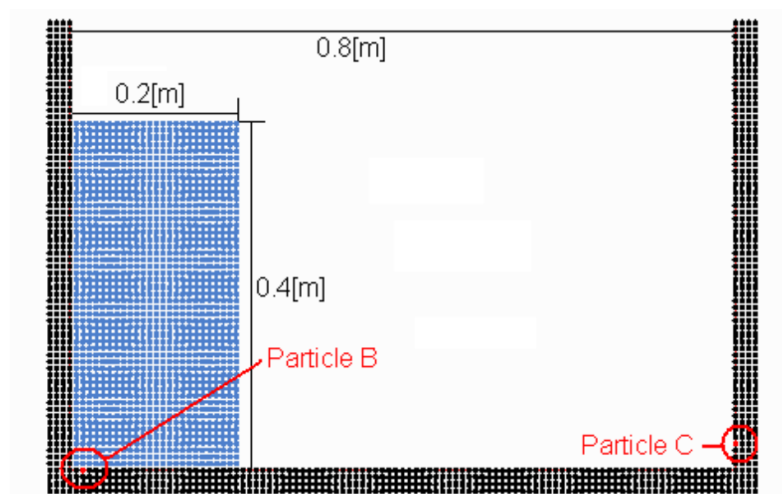


図 1-1 ダム崩壊問題のシミュレーション環境

([1]より引用)

表 1 ダム崩壊問題のシミュレーション設定

Number of Particles	2543
Particle Spacing	8.0×10^{-3} [m]
Time Step	4.0×10^{-4} [s]
Density	1000[kg/m ³]
Gravity	9.8[m/s ²]
Kinematic Viscosity	1.0×10^{-6} [m ² /s]
Sound Speed	19.79[m/s]

([1]より引用)

また、図 1-1 中の Particle B, Particle C の圧力に関するシミュレーション結果は陽解法が図 1-2、図 1-3 のようになっています。

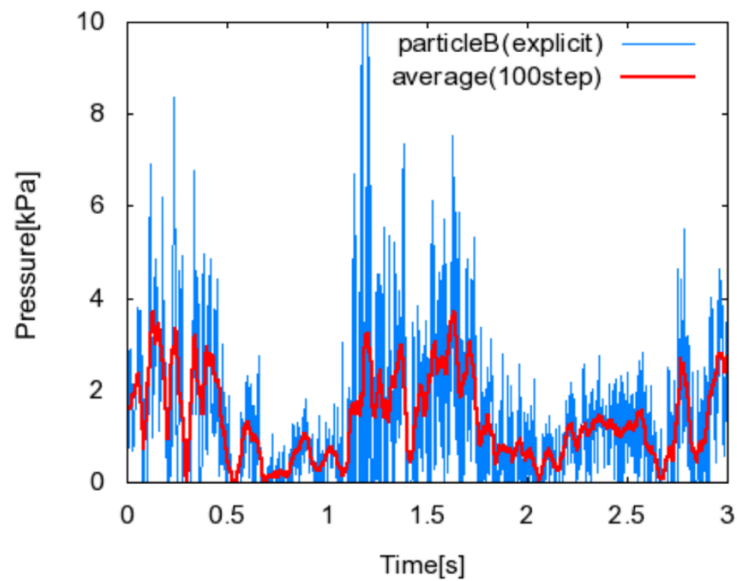


図 1-2 Particle B (陽解法)

([1]より引用)

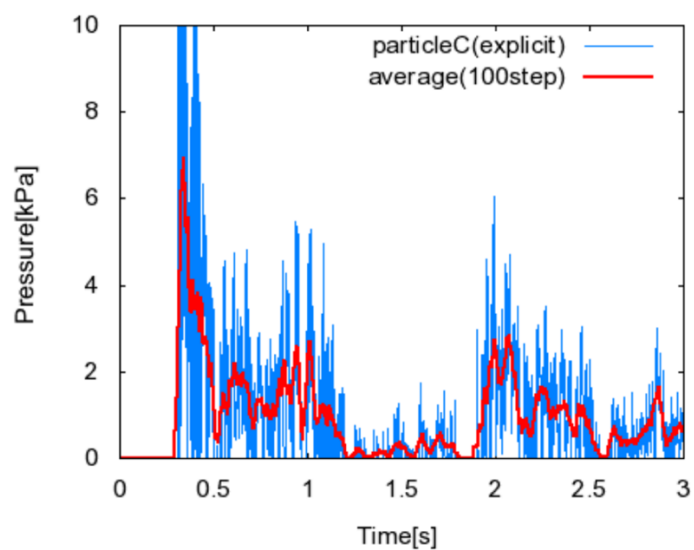


図 1-3 Particle C (陽解法)

([1]より引用)

一方、図 1-1 中の Particle B, Particle C の圧力に関するシミュレーション結果は陰解法が図 1-2、図 1-3 のようになっています。

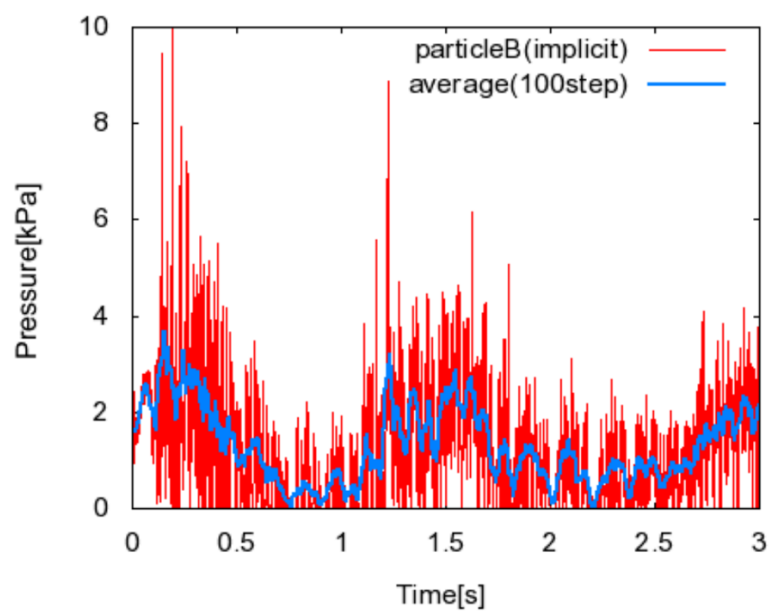


図 1-4 Particle B (陰解法)

([1]より引用)

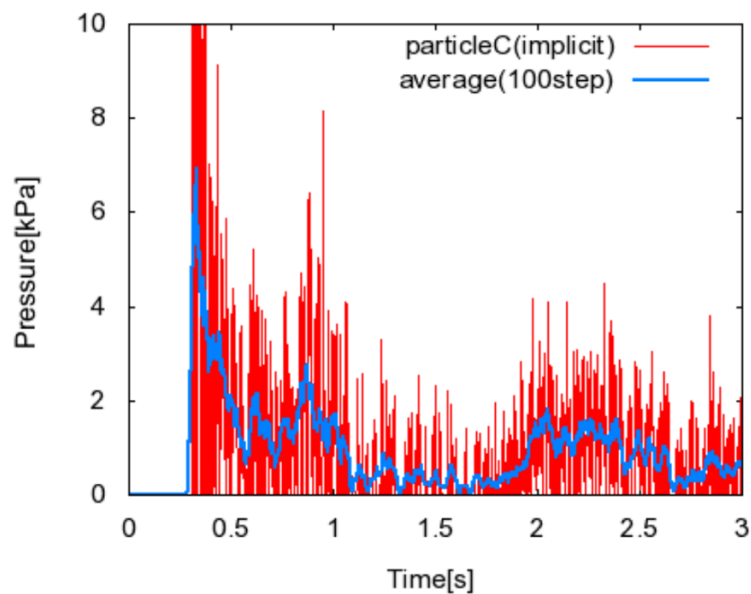


図 1-5 Particle C (陰解法)

([1]より引用)

結果として、陽解法 MPS 法は従来の半陰的 MPS 法に比べて計算コストが低い一方で、圧力計算における精度と安定性を保持していることが示されました。この研究は、MPS 法における圧力計算の改善と流体シミュレーションの効率化に大きく貢献すると期待されています。

1.4 SPH 粒子法の研究例

本節では、石川大地、小野祐輔、酒井久和による 2019 年の研究論文「SPH 法による人工粘性を考慮した荒砥沢地すべりの滑動再現」[2]を紹介します。この研究では、SPH 粒子法を用いて、荒砥沢地すべりの 2 次元再現解析を行っています。特に、人工粘性の影響を感度分析し、地すべりの流動量評価において人工粘性が流動量に与える影響を示しています。研究結果は、SPH 法による地すべりの流動量評価において、人工粘性が重要な役割を果たすことを示唆しており、大規模かつ低角度のすべり面を持つ問題に対してもパラメータの設定に注意を払うことで、SPH 粒子法が適用可能であることを示しています。具体的な解析モデルは図 1-6、解析結果は図 1-7 のようになっております。

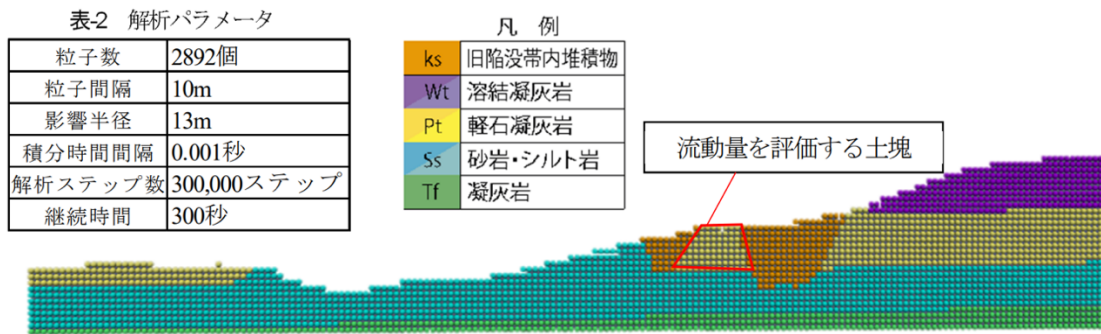


図 1-6 解析モデル

([2]より引用)

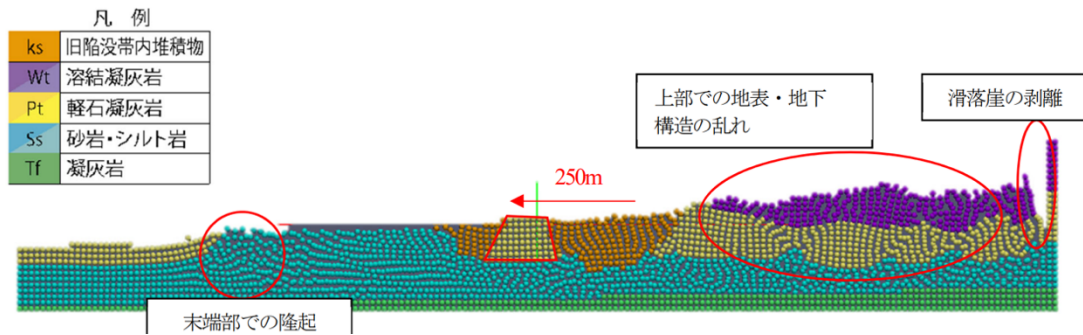


図 1-7 解析結果

([2]より引用)

この研究は、SPH 粒子法の適用可能性と精度を示す重要な事例となり、地すべりやその他の土砂災害の解析において SPH 法の重要性を強調しています。また、地震やその他の自然災害による土砂流動のより正確な予測と評価に貢献していることを示しています。

1.5 浅水方程式を用いた粒子法

本節では浅水方程式を用いた粒子法について詳細に述べます。

1.5.1 浅水方程式を用いた粒子法とは

通常の MPS 粒子法では、三次元の非圧縮性流体の連続の式と Navier-Stokes 方程式を解きます。これは半陰解法的に解く必要があるため、計算時間が多くかかります。そこで、Navier-Stokes 方程式の代わりに浅水方程式を解くことで、計算空間の次元数を削減し、計算時間の短縮を行ったのが、この浅水方程式を用いた粒子法です。まず、三次元の Navier-Stokes 方程式、連続の式は下の式のように表されます。

- Navier-Stokes 方程式: $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{g}$

- 連続の式: $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{u}$

ここで、 $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ はラグランジュ微分、 ρ は密度、 P は圧力、 \mathbf{u} は速度、 \mathbf{g} は重力加速度、 ν は粘性係数を表します。

浅水方程式は三次元の Navier-Stokes 方程式を水深方向に積分した方程式で下の式のように表されます。

- 運動量保存則: $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g\nabla z_s - g\mathbf{S}_f$

- 連続の式: $\frac{Dh}{Dt} = -h(\nabla\cdot\mathbf{u})$

- $\mathbf{S}_f = g\frac{n_M|\mathbf{u}|\mathbf{u}}{R^3}$

h は水深、 \mathbf{u} は鉛直方向に平均化した速度、 \mathbf{S}_f は水底から受ける摩擦力ベクトル、 z_s は水面の z 座標、 n_M は Manning の粗度係数、 R は水力半径です。

ここでのポイントは、浅水方程式では、非圧縮性流体を対象としていても、水平面上では流体が圧縮性の性質を示すことを考慮する必要があるということです。浅水方程式では、以下の式が成り立ちます。

$$\rho_{3D} = \frac{m}{V} = \frac{m}{Ah} = \frac{\rho_{2D}}{h} = \text{const.}$$

通常、非圧縮性流体では体積や密度は一定とみなされますが、2次元の浅水波方程式では、水深の変動に応じて水平面上の密度が変化します。これは、2次元モデルでは水深の変化を密度の変化として扱うことにより、3次元の流体の挙動を効果的に2次元で表現していることを意味します。故に、浅水方程式で、圧縮性流体のような挙動を取りますが、実際は非圧縮性流体を扱っているので MPS 法のように精度が良いことがわかります。私の CS 計画では、浅水方程式は圧縮性流体を扱っていると勘違いしていたため、比較対象として、SPH 法の粒子法を挙げていましたが、実際は非圧縮性流体であったため、本プロジェクトでは、MPS 法の粒子法との比較検証を行なっていきます。

1.6 本プロジェクトの目的

本プロジェクトの目的は、粒子法による流体解析実験のスキルを習得し、特にダム崩壊問題への応用を目指すことにあります。ただし、今回扱う対象は、浅水方程式が MPS 粒子法を扱うものであったことから、MPS 粒子法に変更いたしました。粒子法の基本原理を学習し、流体の数値シミュレーションにおける基本的な概念を理解します。また、プログラミング言語 (C++) を用いた MPS 粒子法、および浅水方程式を組み込んだ粒子法の実装と流体シミュレーションの実践スキルの獲得を目指します。さらに、浅水方程式を用いた粒子法では、粒子分裂手法を取り入れることで解像度の向上を図ります。

第2章

MPS 粒子法による

ダム崩壊シミュレーション

本章では本プロジェクトの前半の目標である MPS 粒子法のダム崩壊シミュレーションの基盤となる離散化モデルについて述べた後、結果と解析解の比較検証を行います。

2.1 Navier-Stokes 方程式の離散化

Navier-Stokes 方程式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{g}$$

D/Dt : ラグランジュ微分 ρ : 密度 P : 圧力 ν : 粘性係数 \mathbf{g} : 外力(重力加速度)

半陰解法を用いて離散化します。

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^0} \langle \nabla P \rangle_i^{k+1} + \nu \langle \nabla^2 u \rangle_i^k + g$$

ここで、圧力 p^{k+1} は未知の値であるため、一旦、圧力項を無視します。仮の速度 u^* とおいて以下の式で表します。

$$\begin{aligned} \frac{u_i^* - u_i^k}{\Delta t} &= \nu \langle \nabla^2 u \rangle_i^k + g \\ \Leftrightarrow u_i^* &= u_i^k + [\nu \langle \nabla^2 u \rangle_i^k + g] \Delta t \\ \Leftrightarrow u_i^* &= u_i^k + \left[\nu \frac{2d}{\lambda^0 n^0} \sum_{j \neq i'} (u_j^k - u_i^k) w(|\mathbf{r}_j^k - \mathbf{r}_i^k|) + g \right] \Delta t \end{aligned}$$

最後の変形では、粒子のラプラシアンモデルを用いています。 n^0 は粒子数密度の基準値であり、粒子が等間隔に並んでいる初期時刻で計算されます。以下の式で表されます。

$$n^0 = \sum_{j \neq i'} w(|\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0|)$$

周りの粒子の数に重みをかけて数える重み関数は以下のようにしています。 r_e は影響半径です。

$$w(r) = \begin{cases} \left(\frac{r_e}{r}\right) - 1 & (r < r_e) \\ 0 & (r \geq r_e) \end{cases}$$

また、 λ^0 は影響半径内にある近傍粒子との距離の二乗の重み平均です。

仮の速度が求まったので、仮の位置を計算します。

$$r_i^* = r_i^k + u_i^* \Delta t$$

さて、ここで、先程無視した圧力を計算します。ポアソン方程式から次の時点での圧力のラプラシアン $\langle \nabla^2 P \rangle_i^{k+1}$ を求めることが出来ます。まず、考えるのは連続の式です。

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

非圧縮性条件下では、 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ なので、連続の式は $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ となります。これに、先程無視した Navier-Stokes 方程式の圧力項を用います。ここで、圧力項以外と 2 段階に分けているので、仮の速度 u_i^* を用いることに注意します。

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^0} \langle \nabla P \rangle_i^{k+1}$$

この式と連続の式 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を用いて、変形を行うと、次の式が求まります。

$$\langle \nabla^2 P \rangle_i^{k+1} = -\rho^0 \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{n_i^* - n^0}{n^0}$$

この式は変形すると、行列計算となるので、ガウス–ザイデル法などを用いて、未知の圧力 P_i^{k+1} を求めることが出来ます。最後に、求めた圧力 P_i^{k+1} と仮速度 u_i^* を用います。

$$u_i^{k+1} = u_i^* - \frac{1}{\rho^0} \langle \nabla P \rangle_i^{k+1} \Delta t$$

この式から真の速度を求めることができます。

2.2 ダム崩壊問題

2.2.1 シミュレーション環境設定

本プロジェクトのシミュレーション環境は、Sarkhosh と Jin による研究[3]の手法を基に構築されています。無摩擦の乾燥床上でのダム崩壊テストの初期条件は、図 2-1 に示されており、水の初期高さ h_0 は 0.25m、ダム上流側の長さ L_{up} は 4.65m、ダム下流側の長さ L_{down} は 4.35m と設定しています。ダム崩壊問題の解析解は Ritter による解析解[4]を用いて、位置 x と時間 t の関数として、高さ $h(x, t)$ は次の式で表されます。

$$h(x, t) = \frac{1}{9g} \left(2\sqrt{gh_0} - \frac{x - x_{dam}}{t} \right)^2$$

g は重力加速度、 h_0 はダムの初期水位、 x_{dam} はダムの初期位置です。

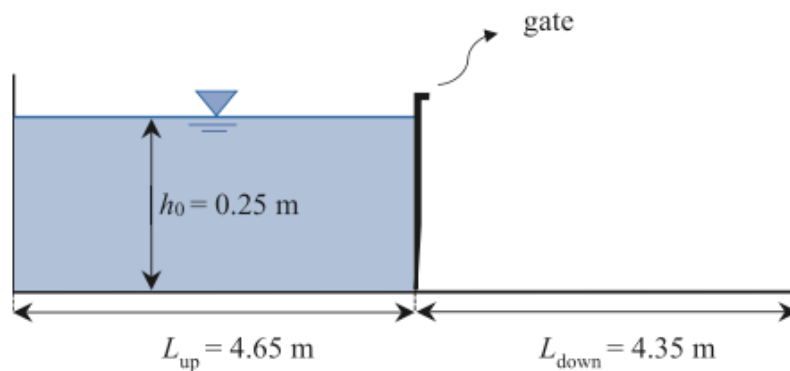


図 2-1 シミュレーション環境設定

([3]より引用)

2.2.2 シミュレーション結果と解析解との比較

本プロジェクトでは、初期粒子間距離を 0.02m、時間刻み幅は 0.001s と設定し、二次元のダム崩壊問題に対する MPS 法による数値シミュレーションを実施しました。計算時間の制約を考慮し、粒子間距離を設定しました。このシミュレーションから得られた流体の流速と高さのデータを、Ritter の解析解と比較し、その妥当性を検証します。シミュレーション中の流体の挙動は図 2-2、図 2-3 のようになりました。また、 $t=0.5s$ の時点において、Ritter 解と比較した結果が図 2-4 のようになりました。シミュレーションから得られた流体の平均高さのデータを Ritter の解析解と比較した結果、平均誤差は 0.007442516 メートル（初期水位 0.25 メートルに対して約 2.977%）という比較的小さな値となりました。特に位置 0~3m は二次元 MPS 粒子法の初期粒子間距離が大きいことによる粒子間相互作用のための誤差であると考えられ、ダム崩壊部の誤差ではないため、排除した場合、平均誤差は 0.005278853 メートル（初期水位 0.25 メートルに対して約 2.112%）という比較的小さな値となりました。この結果は、シミュレーションが Ritter 解を用いた理論値と高い一致を示していることを示唆しており、MPS 法による数値シミュレーションの精度の高さを強調しています。

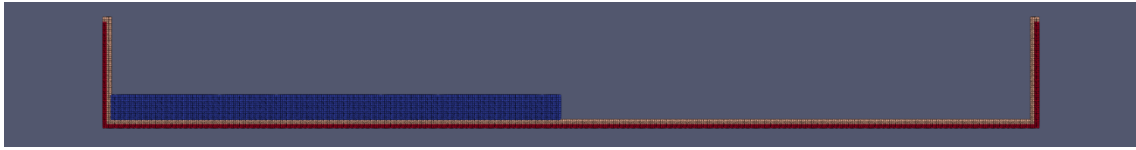


図 2-2 二次元 MPS 粒子法のシミュレーション中の画像 (t=0s)

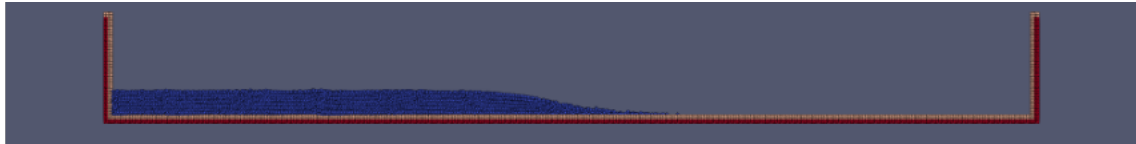


図 2-3 二次元 MPS 粒子法のシミュレーション中の画像 (t=0.5s)

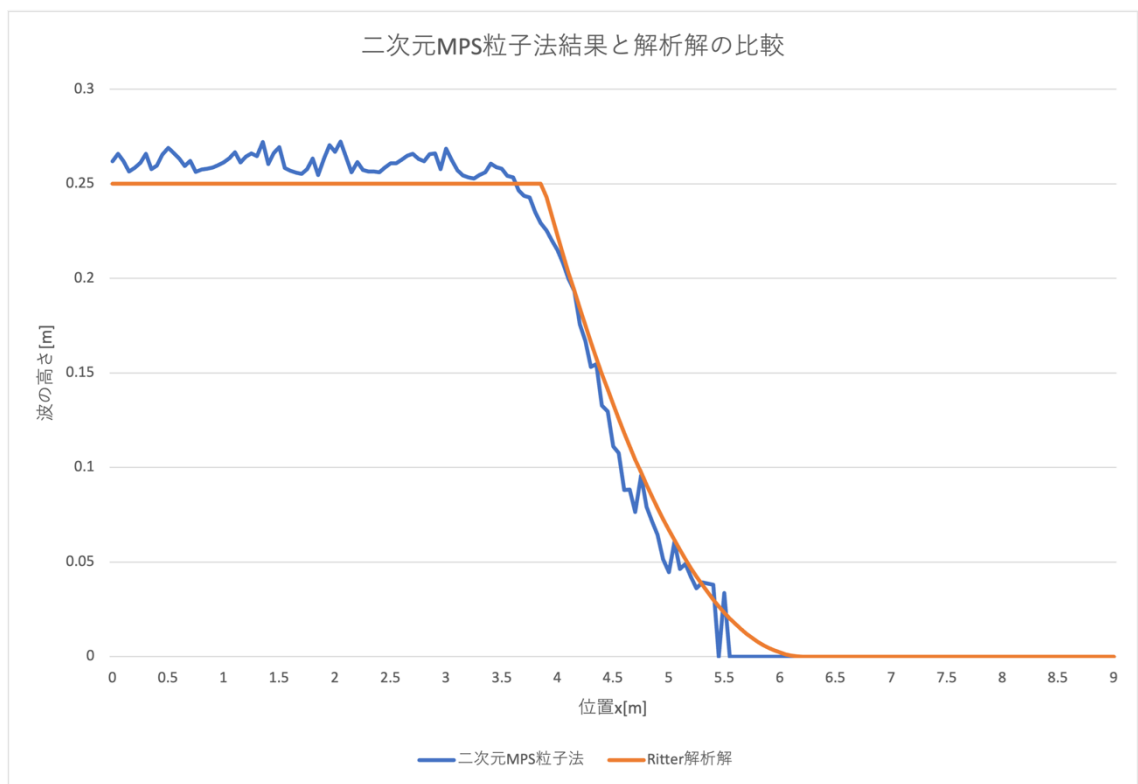


図 2-4 二次元 MPS 粒子法と解析解の比較

第3章

浅水方程式を組み込んだ粒子法による ダム崩壊シミュレーション

本章ではまず、本プロジェクトの後半の目標である浅水方程式を組み込んだ粒子法について述べます。その後、粒子分裂手法について述べます。さらにダム崩壊問題の環境設定、そのシミュレーション結果を示し、解析解との比較検証を行います。

3.1 浅水方程式を組み込んだ粒子法

本プロジェクトでは、まず、浅水方程式を組み込んだ粒子法を詳しく説明します。

浅水方程式は、3次元のNavier-Stokes方程式を水深方向に積分して得られる方程式で、特に浅い水深に適用される流体の二次元的挙動をモデル化するために使用されます。主に2つの主要な方程式から構成されています。本プロジェクトで採用されている方法論は、Sarkhoshらの研究[3]に主に基づいており、特に浅水環境での適用性に焦点を当てています。

1. 連続の式

連続の式は、流体の質量保存則を表します。これにより、流入する流体と流出する流体の量が等しいことが保証されます。以下の式で表されます。

$$\frac{Dh}{Dt} = -h(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

2. 運動量保存則

運動量保存則は、流体の運動量の変化が外部からの力によって引き起こされることを示しています。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g\nabla z_s - g\mathbf{S}_f$$

h は水深、 \mathbf{u} は鉛直方向に平均化した速度、 \mathbf{S}_f は水底から受ける摩擦力ベクトル、 z_s は水面の z 座標、 n_M はManningの粗度係数、 R は水力半径です。水底面の z 座標を z_b とすると、 $z_s = h + z_b$ となる。本プロジェクトでは、地面の凹凸は考えていないので、 $z_s = h$ となります。摩擦力ベクトルは、流れが底面との摩擦によってどの程度減速するかを表しており、以下の式で定義されます。

$$S_f = g \frac{n_M |u| u}{R^{\frac{4}{3}}}$$

浅水方程式の粒子法では、連続の式を利用して、流体の各点での水深の時間変化を計算します。図 3-1 のように、粒子は流体の小さな要素を表し、それぞれには水深 h が割り当てられています。各粒子は探索半径内の他の粒子と相互作用し、その結果として水深や速度が更新されます。タイムステップ Δt が進むにつれて、粒子は新しい位置へ移動し、新たな水深が計算されます。三次元の Navier-Stokes 方程式を用いた粒子法では、流体の細かな挙動を捉えるために多数の粒子を用いる必要があり、これが高い計算コストを招きます。一方、浅水方程式を用いた粒子法では、水深方向で平均化しており、二次元平面上で流れをモデル化することで次元数を減らしています。これにより、必要な粒子の数が大きく削減され、全体の計算負荷が下がります。

粒子法を用いた浅水方程式の計算プロセスは、各粒子の位置、速度、水深、水面高度をタイムステップごとに更新することによって、流体の動的な挙動を追跡します。計算プロセスは次の通りです。

1. 前ステップでの速度、位置、水深、水面高度を受け取ります。
2. 各粒子の基礎面積を水深から計算します。
3. 影響半径を求め、粒子の影響範囲を確定します。
4. 新しいタイムステップにおける水深を更新します。

この時、 $\frac{\rho_{2D}}{h} = \text{const.}$ より、密度を求めることで、高さが決定されます。粒子法において、密度の変化は粒子数密度の変化で求められます。

5. 水面の勾配を計算し、それにより流れの方向性を決定します。
6. 粒子の速度と位置を新しい情報に基づいて更新します。
7. 新しい水深と速度の情報を次のタイムステップに引き継ぎます。

この連続的な更新プロセスにより、流体は時間とともに進化し、洪水、津波、河川の流れなどの複雑な流体現象をシミュレートすることが可能になります。各タイムステップの計算は、前のステップから得られる情報を基に行われ、流体の自然な挙動を模倣します。

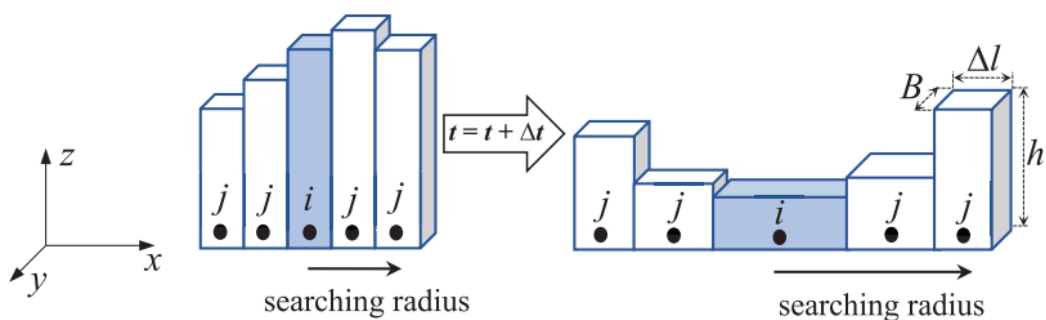


図 3-1 浅水方程式における粒子の時間変化の様子

([3]より引用)

3.2 粒子分裂手法を組み込む

浅水方程式を用いた粒子法において、粒子の三次元的な密度は一定と仮定されます。このため、二次元的な密度が低下するということは水深が減少することを意味し、結果として、その粒子の底面積 $A = \frac{V}{h}$ が増加します。ここで V は粒子の体積、 h は水深です。水深が減少すると粒子は横に広がり、粒子間の距離が増え、結果として粒子同士が離れてしまいます。これにより、粒子が構成する流体の空間解像度が低下し、特に水深が低い領域において詳細な流れのシミュレーションが困難になるという問題が生じます。

この問題に対処するために、粒子分裂手法を導入します。水深が低下して粒子間の距離が広がったとき、一つの粒子を二つに分裂させることで、粒子の数を増やし、空間解像度を維持または向上させることができます。これにより、津波の遡上や河川の流れなど、水深が変化する複雑な現象をより正確にシミュレートすることが可能になります。

分裂処理は、水深が参照値よりも低くなったときにトリガーされます。本プロジェクトでは、閾値を初期粒子面積の 1.5 倍としました。以下のステップで計算されます。

1. 分裂粒子の選定:

流体粒子は、その面積が設定された閾値よりも大きな場合に分裂を行います。これが小さい値を持つ粒子は分裂の対象外となります。

2. 分裂方向の計算:

分裂する粒子の周囲にある他の粒子との相対位置から共分散行列を構築し、それを解析して最も拡散が大きい方向を分裂方向として選択します。この際、固有値解析が用いられ、最大の固有値に対応する固有ベクトルが分裂方向となります。最大

の固有値に対応する固有ベクトルは、データが最も広がっている方向、つまり散らばりが最も大きい方向を示します。粒子法において、これは粒子が最も広がっている方向、つまり粒子分布の主要な軸となる方向を指します。したがって、粒子を分裂させる際には、この方向に沿って新しい粒子を配置することで、元の粒子分布の形状を最も効果的に維持することができます。

3. 新しい粒子の属性の決定:

元の粒子の位置、速度、水深から、分裂後の二つの新しい粒子のそれぞれの位置と速度を計算します。新しい位置は、分裂方向に沿って元の粒子から一定の距離だけ離されます。本プロジェクトでは、スケーリング係数は 0.8 に設定しています。速度は、元の粒子の速度と速度場の勾配によって求められます。

4. 新しい粒子の高さと体積の割り当て:

新しく生成された粒子の水深は、水深の勾配から決定され、体積は元の粒子の体積を二つの粒子の新たな水深に比例して、分割したものが割り当てられます。

5. 粒子リストの更新:

分裂によって生成された新しい粒子を粒子リストに追加し、古い粒子はリストから除去されます。

以上の手順により、粒子分裂処理を通じて、流体シミュレーションの精度を向上させることができます。これにより、流体の挙動をより細かく捉えることが可能になり、実際の物理現象に近いシミュレーション結果を得ることができます。粒子間の距離が広がりがちな低水深領域においても、この手法により粒子数を増やし、空間解像度を維持または向上させることが可能となります。

3.3 シミュレーション結果と解析解との比較

浅水方程式を用いた粒子法においても二次元 MPS 粒子法のシミュレーションと同様に、時間刻み幅は 0.02s としました。また、初期粒子間距離は近い値である 0.025m を用いました。このシミュレーションから得られた流体の流速と高さのデータを、Ritter の解析解と比較し、その妥当性を検証します。シミュレーション中の流体の挙動は図 3-2、図 3-3 のようになりました。また、 $t=0.5s$ の時点において、Ritter 解と比較した結果が図 3-4 のようになりました。シミュレーションから得られた流体の平均高さのデータを Ritter の解析解と比較した結果、平均誤差は 0.002603233 メートル（初期水位 0.25 メートルに対して約 1.041%）という比較的小さな値となりました。二次元 MPS 粒子法と同様に、位置 0~3m

を排除した場合でも、平均誤差は 0.003926543 メートル（初期水位 0.25 メートルに対して約 1.571%）という比較的小さな値となりました。

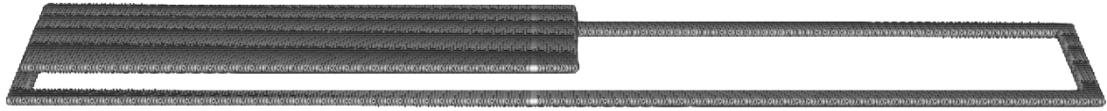


図 3-2 浅水方程式を組み込んだ粒子法のシミュレーション中の画像 (t=0s)

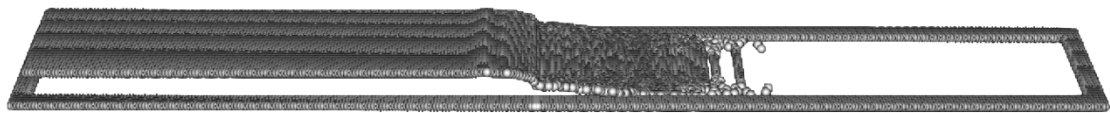


図 3-3 浅水方程式を組み込んだ粒子法のシミュレーション中の画像 (t=0.5s)

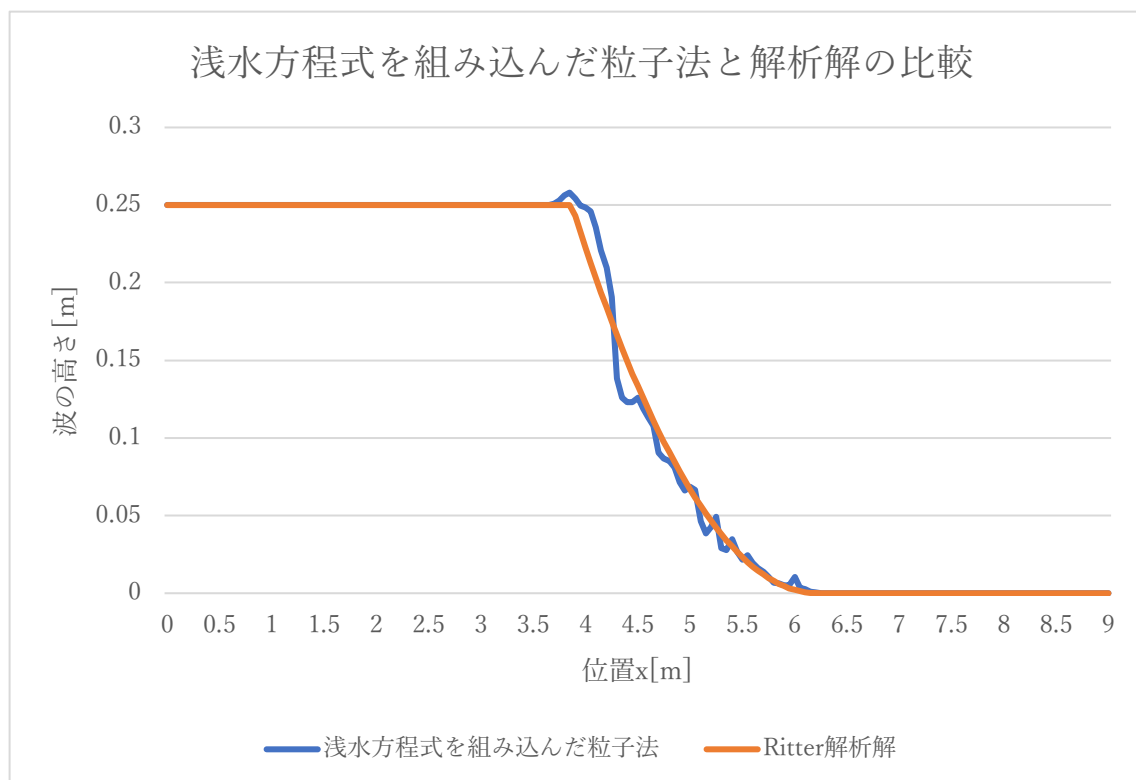


図 3-4 浅水方程式を組み込んだ粒子法と解析解の比較

第4章

結論

4.1 二次元 MPS 法と浅水方程式を組み込んだ粒子法の結果の比較

二次元 MPS 法と浅水方程式を組み込んだ粒子法の結果を Ritter 解析解と比較した結果が図 4-1 です。また、平均誤差と初期水位 0.25m に対する誤差割合の表で全体の結果が表 2 であり、0~3m の誤差を排除した結果が表 3 です。これを見ると、両方の方法において計算された流体の平均高さのデータは Ritter の解析解と比較して比較的小さい誤差を示しています。しかし、浅水方程式を組み込んだ粒子法によるシミュレーションは、二次元 MPS 法よりもさらに精度が高い結果を得ています。

二次元 MPS 法では、位置 0~3m の範囲を除外した場合の平均誤差が 0.005278853 メートル（初期水位 0.25 メートルに対して約 2.112%）であったのに対して、浅水方程式を用いた粒子法では、同じ条件で平均誤差が 0.003926543 メートル（初期水位 0.25 メートルに対して約 1.571%）となりました。この結果から、浅水方程式を用いた粒子法が二次元 MPS 法よりも優れた精度を持っていることが示されています。

浅水方程式を組み込んだ粒子法では、粒子分裂手法が精度向上に大きく貢献していると考えています。水深が低下する際に粒子数を増やすことで、粒子間距離の増大を防ぎ、空間解像度を維持します。これによって、水深が変動しやすい領域での精度を保っていると考えられます。

それぞれのシミュレーション結果のグラフを詳しく観察すると、浅水方程式を組み込んだ粒子法の結果は、特に波の先端において Ritter の解析解との一致が見られますが、ダム崩壊の位置においてはズレが認められます。このズレは、粒子分裂が連続的なプロセスではなく、突発的なイベントとして生じること起因している可能性があります。シミュレーションでは、ダム崩壊の位置で水深が急激に変化するため、粒子分裂が頻繁に発生し、結果として結果のグラフに盛り上がりや突出が現れることがあります。これは、シミュレーションにおける粒子分裂の局所的な影響を反映していると考えられます。

二次元 MPS 法におけるシミュレーション結果では、相互作用による誤差が顕著ですが、

これは初期粒子間距離が比較的大きいために生じるものだと考えられます。MPS 法では粒子間の相互作用を介して流体の挙動を計算しますが、初期粒子間距離が大きい場合、これらの相互作用はより疎な粒子配置で計算されるため、特にダイナミックな流れの状況下では誤差が増大します。ダム崩壊のような急激な流れの変化を伴うシナリオでは、粒子の分布が流体の挙動に適切に追従できず、理論値からのずれが生じる可能性があります。

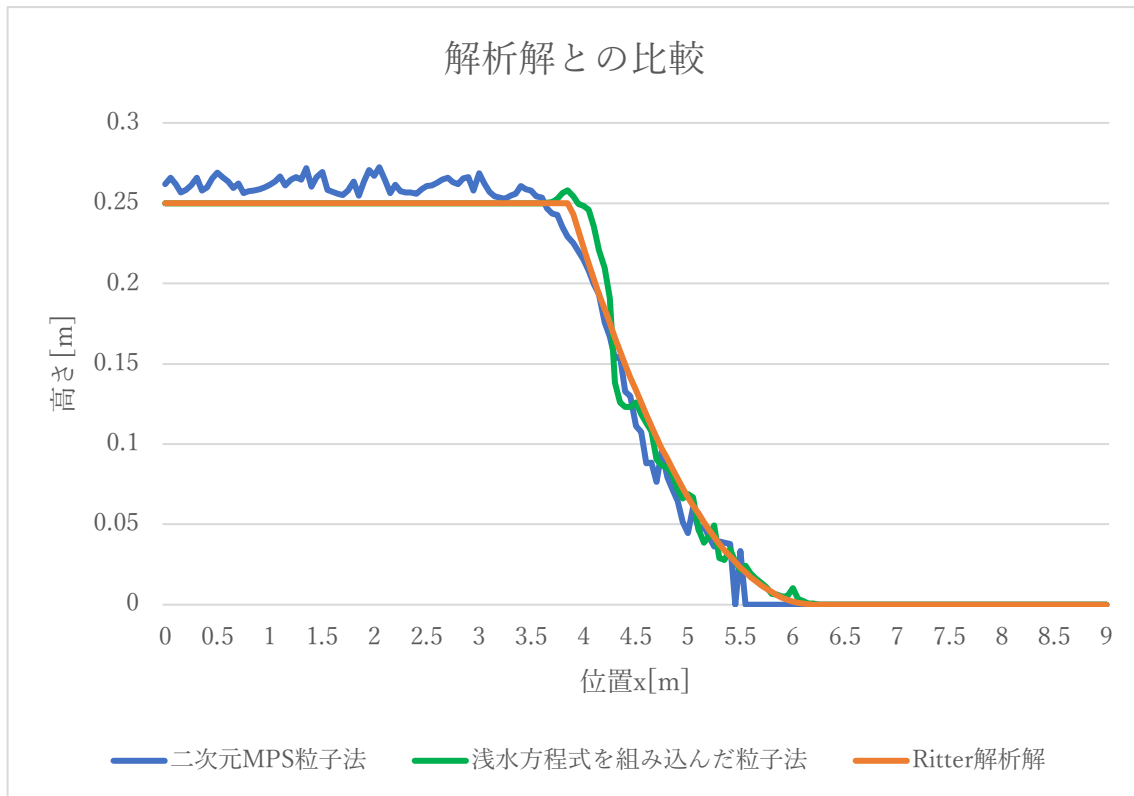


図 4-1 二次元 MPS 粒子法と浅水方程式を組み込んだ粒子法の Ritter 解析解との比較

表 2 全体の平均誤差と初期水位 0.25m に対する誤差割合

	平均誤差	初期水位0.25mに対する誤差割合
二次元MPS粒子法	0.007442516m	約2.977%
浅水方程式を組み込んだ粒子法	0.002603233m	約1.041%

表 3 位置 0~3m を排除した平均誤差と初期水位 0.25m に対する誤差割合

	平均誤差	初期水位0.25mに対する誤差割合
二次元MPS粒子法	0.005278853m	約2.112%
浅水方程式を組み込んだ粒子法	0.003926543m	約1.571%

4.2 まとめ

以上の観察結果を踏まえると、二次元 MPS 法と浅水方程式を組み込んだ粒子法はそれぞれ一長一短があります。二次元 MPS 法は初期粒子間距離が大きいことから生じる相互作用の誤差を抱えており、特に急激な流れの変化をシミュレートする際に精度が低下する可能性があります。これに対して、浅水方程式を組み込んだ粒子法は、粒子分裂手法を通じて精度を維持しつつ、計算の簡素化により高速な計算が可能です。この高速計算は、大規模なシミュレーションやリアルタイムでの解析が求められる場合に特に有利です。

浅水方程式を用いた粒子法は、計算の効率性を大きく向上させることができるため、津波や洪水といった広範囲にわたる現象の迅速な評価や、緊急時の予測モデリングなど、応用の幅が広いと考えられます。また、リソースが限られた環境でも実行可能であり、多くの工業的・学術的应用において実用的な選択肢となり得ます。

総じて、精度と計算速度のバランスを考慮すると、浅水方程式を組み込んだ粒子法は、特に大規模なシミュレーションや時間が制約される状況での使用に適していると思います。このようなシナリオでは、高速な計算が可能であることが重要となるため、浅水方程式に基づくモデルが推奨される場合があると考えています。

参考文献

- [1] 大地雅俊,山田洋徳,越塚誠一,酒井幹夫. MPS 陽解法における圧力計算の検証. 日本計算工学会論文集, Vol. 2011, No. 20110002, 2011.
- [2] 石川大地,小野祐輔,酒井久和. SPH 法による人工粘性を考慮した荒砥沢地すべりの滑動再現. 土木学会論文集 A1 (構造・地震工学) , 75(4), pp.I_720-I_726, 2019.
- [3] Sarkhosh, P., & Jin, Y. MPS-Based Model to Solve One-Dimensional Shallow Water Equations. *Water Resources Research*, 57(3), pp. 1-29, 2021.
- [4] O. Castro-Orgaz and H. Chanson. Ritter's dry-bed dam-break flows: positive and negative wave dynamics. *Environ. Fluid Mech.*, Vol. 17, pp. 665-694, 2017.