ENGLISH EXERCISE

# All of Statistics
# 14章 多変量モデル

B4 漫画班　佃 真次郎

# 目次

# 目次

# 行列の復習

- $|A|$：行列式
- $A^T$：転置行列
  - 転置行列の性質：$(AB)^T = B^T A^T$
- $A^{-1}$：逆行列
- $A^{1/2}$：平方根行列
  - $A$が対象行列で正定値行列のとき$A^{1/2}$が存在する
  - $A^{1/2}A^{1/2} = A$
  - $A^{1/2}$は対象行列

**正定値行列**

0でない任意のベクトル$x$について、$x^T A x > 0$

# 目次

# 確率ベクトルとは

- 確率ベクトル：確率変数を成分に持つベクトル
- 確率ベクトル$X$の平均を$\mu$、共分散行列を$\sum$とするとき

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\left(X_1\right) \\ \vdots \\ E\left(X_k\right) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbb{V}\left(X_1\right) & \mathrm{Cov}\left(X_1, X_2\right) & \cdots & \mathrm{Cov}\left(X_1, X_k\right) \\ \mathrm{Cov}\left(X_2, X_1\right) & \mathbb{V}\left(X_2\right) & \cdots & \mathrm{Cov}\left(X_2, X_k\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}\left(X_k, X_1\right) & \mathrm{Cov}\left(X_k, X_2\right) & \cdots & \mathbb{V}\left(X_k\right) \end{bmatrix}$$

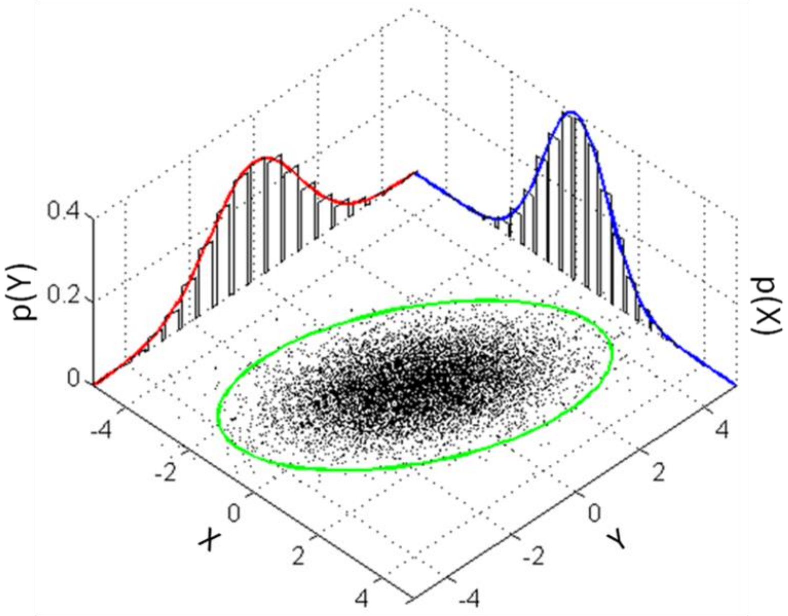
# 共分散行列

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbb{V}(X_1)} & \boxed{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)} & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_k) \\ \boxed{\mathrm{Cov}(X_2, X_1)} & \boxed{\mathbb{V}(X_2)} & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_k, X_1) & \mathrm{Cov}(X_k, X_2) & \cdots & \mathbb{V}(X_k) \end{bmatrix}$$

**定義3.18**

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mu_X\right)\left(Y - \mu_Y\right)\right)$$

- $\Sigma = \mathbb{E}\left(\left(X - \mu\right)\left(X - \mu\right)^T\right)$ とも表せる



# 確率ベクトルの性質

- ベクトルa、確率ベクトルXの次元数をkとする

$$\mathbb{E}\left(a^T X\right) = a^T \mu \qquad \mathbb{V}\left(a^T X\right) = a^T \Sigma a$$

- 行列Aの行がk行とする

$$\mathbb{E}(AX) = A\mu \qquad \mathbb{V}(AX) = A\Sigma A^T$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(AX) &= \mathbb{E}((AX - A\mu)(AX - A\mu)^T)) \\ &= \mathbb{E}(A(X-\mu)(A(X-\mu))^T)) \\ &= \mathbb{E}(A\underbrace{(X-\mu)(X-\mu)^T}_{\Sigma} A^T) \\ &= A\Sigma A^T\end{aligned}$$

転置行列の性質：

$(AB)^T = B^T A^T$

# 標本平均と標本分散行列

N個の確率ベクトル

$$
\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{k1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{k2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \\ \vdots \\ X_{kn} \end{pmatrix}
$$

- 標本平均

$$
\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_k \end{pmatrix} \qquad \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}
$$

- 標本共分散行列

$$
S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{1k} & s_{2k} & \cdots & s_{kk} \end{bmatrix}
$$

$$
s_{ab} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{aj} - \bar{X}_a\right)\left(X_{bj} - \bar{X}_b\right)
$$

# 目次

# 相関係数の推定

$$\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \end{pmatrix}$$

- 相関係数$\rho$の信頼区間を求める

$$\rho = \frac{\mathbb{E}\left(\left(X_1 - \mu_1\right)\left(X_2 - \mu_2\right)\right)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

- プラグイン推定量$\hat{\rho}$

$$s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_{ji} - \bar{X}_j\right)^2$$

$$\widehat{\rho} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)\left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)}{s_1 s_2}$$

# フィッシャーのz変換

- 母相関係数$\rho$を求めるための変換

$$f(x) = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x))$$

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

- フィッシャーのz変換の流れ

$$\hat{\rho} \xrightarrow{\ f\ } \hat{\theta} \xrightarrow{\widehat{se}\text{の導出}} \theta\ \boxed{\text{信頼区間}} \xrightarrow{\ f^{-1}\ } \rho\ \boxed{\text{信頼区間}}$$

# フィッシャーのz変換の計算

① $\hat{\theta}$を計算する

$$\widehat{\theta} = f(\widehat{\rho}) = \frac{1}{2}(\log(1+\widehat{\rho}) - \log(1-\widehat{\rho}))$$

- より正規分布に近い分布を持つ$\theta$で近似できる

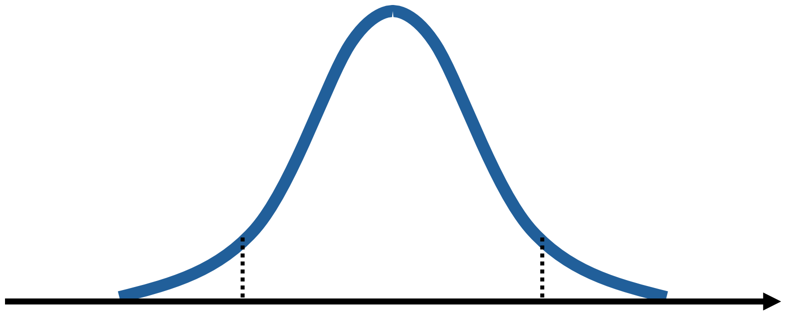
② $\hat{\theta}$の標準誤差を計算する

$$\widehat{\mathrm{se}}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

- この値が経験的に精度が良いとされている

# フィッシャーのz変換の計算

③ $\theta$の信頼区間を求める




- $\hat{\theta} \sim N(\theta, \frac{1}{n-3})$より、信頼区間を$(a, b)$とすると

$$(a, b) = \left(\hat{\theta} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}, \hat{\theta} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right)$$

④ 逆関数$f^{-1}(x)$を用いて$\rho$の信頼区間を求める

$$\left(\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}, \frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}\right)$$

# 目次

# 多変量正規分布とは

- 1変量の場合　$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- 多変量の場合　$X \sim N(\mu, \Sigma)$

$$f(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^k$$

このとき$X, \mu$は次元数$k$で、$\Sigma$は$k \times k$ 対象行列で正定値行列

# 多変量正規分布の変換

$$X = \mu + \Sigma^{1/2} Z$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$X \sim N(\mu, \Sigma)$$

$$Z = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(X - \mu)$$

$$X' = a^T X$$

$$X' \sim N(a^T \mu, a^T \Sigma a)$$

# 多変量正規分布の性質

- 確率ベクトル$X$の次元数が$k$のとき以下の確率変数$V$は$V \sim \chi_k^2$

$$V = (X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu)$$

$$\begin{aligned} V &= (X-\mu)^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (X-\mu) && \leftarrow \text{平方根行列は対象行列} \\ &= (X-\mu)^T \Sigma^{-\frac{1}{2}T} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (X-\mu) && \leftarrow (AB)^T = B^T A^T \\ &= (\Sigma^{-\frac{1}{2}} (X-\mu))^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (X-\mu) && \leftarrow \text{多変量標準正規分布への変換} \\ &= Z^T Z && Z = \Sigma^{-\frac{1}{2}} (X-\mu) \\ &= Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2 && \leftarrow \text{カイ二乗分布の定義} \end{aligned}$$

# 目次

# 二項分布

- 確率変数$X$が二項分布に従うときの例

確率p 表：$X_j = 1$

確率1-p 裏：$X_j = 0$

$\times n$

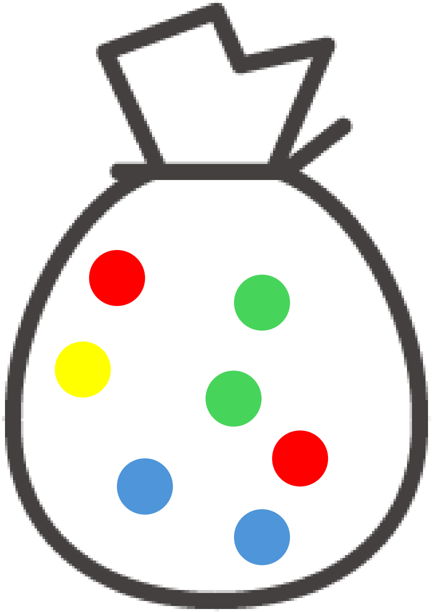
$$\mathrm{X} = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$\mathbb{E}(X_j) = p \qquad \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\textstyle\sum_{j=1}^{n} X_j) = \boxed{np}$$

$$\mathbb{V}(X_j) = p(1-p) \qquad \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(\textstyle\sum_{j=1}^{n} X_j) = \boxed{np(1-p)}$$

# 多項分布

- 確率変数$X$が多項分布に従うときの例



$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{赤を引く回数} \\ \leftarrow \text{黄を引く回数} \\ \\ \leftarrow \text{青を引く回数} \end{matrix} \qquad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{赤を引く確率} \\ \leftarrow \text{黄を引く確率} \\ \\ \leftarrow \text{青を引く確率} \end{matrix}$$

$X_j$に着目すると、確率$p_j$で$n$回試行を行う二項分布である

**多項分布は二項分布を多変量に拡張したもの**

# 多項分布の期待値と共分散行列

- $X_j \sim Binomial(n, p_j)$より

$$\mathbb{E}(X_j) = np_j \quad \mathbb{V}(X_j) = np_j(1-p_j)$$

$$\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} np_1 \\ \vdots \\ np_k \end{pmatrix} \quad \mathbb{V}(X) = \begin{pmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 & \cdots & -np_1p_k \\ -np_1p_2 & np_2(1-p_2) & \cdots & -np_2p_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -np_1p_k & -np_2p_k & \cdots & np_k(1-p_k) \end{pmatrix}$$

- 非対角成分の計算

$$\underbrace{\mathbb{V}(X_i + X_j)}_{\boxed{n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)}} = \mathbb{V}(X_i) + \mathbb{V}(X_j) + 2\,\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$\therefore \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j$$

# 確率pの最尤推定量

- ボールを引く回数：$n$回
- それぞれの色を引いた回数：$X = (X_1, \dots, X_k)$
- それぞれの色を引く確率：$p = (p_1, \dots, p_k)$　←**推定**
  - 確率質量関数

$$f(X) = \frac{n!}{X_1! \dots X_k!} p_1^{X_1} \dots p_k^{X_k}$$

  - 対数尤度関数

$$\ell(p) = \sum_{j=1}^{k} X_j \log p_j$$

# ラグランジュの未定乗数法の利用

- 条件 $$\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$$

まず

$$A(p) = \sum_{j=1}^{k} X_j \log p_j + \lambda \left( \sum_{j} p_j - 1 \right)$$

微分して

$$\frac{\partial A(p)}{\partial p_j} = \frac{X_j}{p_j} + \lambda$$

左辺が0になるので

$$\widehat{p}_j = -\frac{X_j}{\lambda}$$

条件より$\lambda = -n$であるため

$$\widehat{p} = \begin{pmatrix} \widehat{p}_1 \\ \vdots \\ \widehat{p}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X_1}{n} \\ \vdots \\ \frac{X_k}{n} \end{pmatrix} = \frac{X}{n}$$

# 推定量$\widehat{p}$の共分散行列

$$\mathbb{V}(\widehat{p}) = \mathbb{V}(X/n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(X) = \frac{1}{n}\Sigma$$

分散の定義より2乗が前に出てくる

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & \cdots & -p_1p_k \\ -p_1p_2 & p_2(1-p_2) & \cdots & -p_2p_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -p_1p_k & -p_2p_k & \cdots & p_k(1-p_k) \end{pmatrix}$$

- $n \to \infty$で多変量正規分布に従う

$$\sqrt{n}(\widehat{p} - p) \rightsquigarrow N(0, \Sigma)$$

# 目次

# まとめ

- 行列の復習
- 確率ベクトルとその性質
- フィッシャーのz変換
- 多変量正規分布
- 多項分布

ENGLISH EXERCISE

# All of Statistics
# 14章 多変量モデル

B4 漫画班　佃 真次郎

# 確率ベクトルとは

- 数列の場合