# MODELADO Y SIMULACION
# TRABAJOS PRÁCTICOS
# PARTE I (métodos numéricos)

## Búsqueda Binaria de raíces (Bisección)

1. . Para cada una de las funciones halle un intervalo $[a, b]$
De manera que $f(a) y\ f(b)$ tengan signo contrario.

a) $f(x)=e^x - 2 - x$
b) $f(x)=\cos(x) + x$
c) $f(x) = \ln(x) - 5 - x$
d) $f(x) = x^2 - 10x + 23$

2. Sea $f(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$ aplique el método de búsqueda binaria de raíces en los siguientes intervalos:
a) [-1, 1.5]
b) [-1.25, 2.5]

3. Aplique el método de bisección para encontrar una solución aproximada con tolerancia de $10^{-3}$, para las siguientes funciones en sus intervalos:

a) $\sqrt{x} - \cos(x) = 0$, para $0 \leq x \leq 1$
b) $x - 2^{-x} = 0$, para $0 \leq x \leq 1$
c) $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0.$ para $0 \leq x \leq 1$
d) $2x\cos(x) - (x+1)^2 = 0,$ para $-3 \leq x \leq -2,$ para $-1 \leq x \leq 0$
e) $x\cos(x) - 2x^2 + 3x - 1 = 0,$ para $0.2 \leq x \leq 0.3,$ para $1.2 \leq x \leq 1.3$

4. Aplique el método de bisección para encontrar todas las raíces del polinomio dentro de $10^{-2}$, para $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$, en:

a) [-2, -1]
b) [0,2]
c) [2,3]
d) [-1, 0]

5 sea $f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)^3(x-2)$, ¿a cuál cero la función converge, estudie los siguientes intervalos:

a) [-3, 2.5]
b) [-2.5, 3]
c) [-1.75, 1.5]
d) [-1.5, 1.75]

Use el método del punto fijo para

1. $f(x) = 2e^{x^2} - 5x,\ x^* \epsilon\ [0,1],\ x_0 = 0$
2. $f(x) = \cos(x),\ x^* \epsilon\ [1,2],\ x_0 = 1$
3. $f(x) = e^{-x} - x,\ x^* \epsilon\ [0,1],\ x_0 = 0$
4. $f(x) = x^3 - x - 1,\ x^* \epsilon\ [1,2],\ x_0 = 1$
5. $f(x) = \pi + 0.5\sin\left(\frac{x}{2}\right) - x,\ x^* \epsilon\ [0,2\pi],\ x_0 = 0$

6. Use manejo algebraico para demostrar que las siguientes funciones tienen un punto fijo en $p$, exactamente cuando $f(p) = 0$, donde $f(x)$=$x^4 + 2x^2 - x - 3$:

a. $g(x) = (3 + x - 2x^2)^{\frac{1}{4}}$
b. $g(x) = \left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

7. Demuestre que la función iterativa $g(x) = 2^{-x}$ tiene un punto fijo en $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

8. Use el método de punto fijo para convertir la expresión $\sqrt{3}$, con exactitud de $10^{-4}$

9. ¿En qué intervalo [a,b] convergerá la iteración del punto fijo con exactitud de $10^{-3}$? Para $x = \frac{5}{x^2} + 2$

10. Hallar el intervalo [a, b] donde $g(x) = \sqrt{\frac{e^x}{3}}$, tenga un punto fijo.

## Método de Aceleración Aitken

1. $f(x) = \frac{\pi}{2}x^2 - x - 2,\ x_0 = 1.4$ (halle $g(x)$)
2. $f(x) = \cos(x) - x,\ x_0 = 0.5$ (halle $g(x)$)
3. $g(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 4x + 1},\ x_0 = 0.3$
4. $g(x) = e^{-x},\ x_0 = 1$
5. $g(x) = \sqrt{3x - 2},\ x_0 = 2$
6. $g(x) = Ln(x + 1),\ x_0 = 0.5$
7. $g(x) = 1 - x^3,\ x_0 = 0.5$
8. $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3),\ x_0 = 0.5$
9. $g(x) = \frac{\sin(x)+5}{x^2},\ x_0 = 2$
10. $g(x) = x^2,\ x_0 = 0.4,,\ x_0 = 0.9,,\ x_0 = 1.5$
11. $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x^2},\ x_0 = 0.25$

## Newton-Raphson

1. $f(x) = (x-1)^2, \quad x_0 = 0$
2. $f(x) = x^3 - 2x - 5,\ x_0 = 1.5$
3. $f(x) = x^5 - x - 1,\ x0 = 1$
4. $Aproximar\ 6\sqrt{2}\ \ (con\ precisión\ de\ 8\ cifras)$
5. $f(x) = e^x + x^2 - 4,\ \ x_0 = 0.5$
6. $f(x) = x^2 - 3x - 4,\ x_0 = 8$
7. $f(x) = \ln(x) - 1,\ \ x_0 = 2$
8. $f(x) = x^4 - 16,\ x_0 = 2$
9. $f(x) = x^3 - 2x + 1,\ x_0 = -1.5$
10. $f(x) = e^{\{3x\}} - 4,\ x_0 = 0$
11. $f(x) = x^2 - 2x + 1,\ x_0 = 0$
12. $(x) = xe^{-x},\ x_0 = -1$

## Polinomios interpolantes y derivación numérica

Para los siguientes construir un polinomio interpolante de Lagrange, para los casos donde haya una función a la que comparar calculo los errores globales y locales, y grafique la función y su polinomio interpolante:

1. Hallar el polinomio que pasa por los puntos $(1,1), (2,4), (3,9)$
2. Reconstruir la función que pasa por los puntos $(0,1), (1,3), (2,2), (3,5)$
3. Dado el siguiente el siguiente conjunto de puntos, hallar el valor de $(b)$: : $x = [0,1,2,3,4]$, $y = [1,2,b,2,3]$
4. Hallar el polinomio interpolante de Lagrange para: $x = [0,1,2,3,4], f(x) = [1,2,0,2,3]$
5. Hallar el polinomio interpolante de Lagrange para: $[0,1,2], y = [1,3,0]$
6. Hallar el polinomio de segundo grado que pase por: $x = [1,2,3], y = [10,15,80]$
7. Construir un polinomio con los datos: $x = [2,4,5], f(x) = [5,6,3]$
8. Construir un polinomio que interpole: $x = [-2,0,2], f(x) = [0,1,0]$
9. Aproximar $f(x) = sin(x)$, con , $x \in [0, \pi]$, use un polinomio de Lagrange de 2 grado
10. Construir el polinomio interpolante de Lagrange para: $x = [0,1,2], f(x) = [1,2,7]$
11. Usar los nodos $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4.5$, para construir el polinomio interpolante de Lagrange que aproxime $f(x) = \frac{1}{x}$
12. Sea $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, use los nodos $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$, use interpolación de Lagrange de grado 2 para aproximar:

a) $f(4)$
b) $f(1.5)$

13. Use los siguientes nodos $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 0.9$, construir que aproxime $f(0.45)$

a) $f(x) = \cos(x)$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$
c) $f(x) = ln(x + 1)$

## Diferencia Finitas

1. Use diferencias finitas centrales para hallar la derivada aproximada de $f(x) = \sin(x)$, en cada punto de $x = [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]$, con $h = 0.1$
2. Hallar la derivada de $f(x) = e^x$ en cada punto $x = [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]$, con $h = 0.1$
3. Sea $f(x) = x^3 - x$, calcular la derivada primera y segunda en $x = 1$, con $h = 0.1$
4. Sea $f(x) = e^x \sin(x)$,
a) Halle $f'(1)$ usando diferencias finitas centrales y un paso de $h = 0.01$
b) Halle el error absoluto
c) Halle $f''(1)$ usando diferencia finitas centrales
5. Comparar la aproximación por diferencias finitas de segundo orden exactas hacia adelante, atrás y centrales de $f(x) = e^{-2x} - x$, para $x = 2$

6 calcule la velocidad y la aceleración en cada punto usando el método de diferencias finitas centrales salvo en los extremos donde pueda usar progresiva o regresiva. Completar la tabla de valores

| t(seg) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(m)$ | 0 | 1.5 | 4 | 7.5 | 12 | 17.5 | 24 | 31.5 | 40 |
| $v(m/s)$ | | | | | | | | | |
| $a(m/s^2)$ | | | | | | | | | |

7. Igual al anterior

| t(seg) | 0 | 2 | 4.2 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(m)$ | 0 | 0.7 | 1.8 | 3.4 | 5.1 | 6.3 | 7.3 | 8.0 | 8.4 |
| $v(m/s)$ | | | | | | | | | |
| $a(m/s^2)$ | | | | | | | | | |

Analice el comportamiento de la velocidad y la aceleración

## Integracion Numérica
## Reglas de Newton Cotes

1. Sea $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(6+3\cos(x))dx$:

a) Use la regla del trapecio para aproximar la solucion con $n=2, n=4$
b) Use la regla de Simpson (1/3) con $n=4$
c) Use la regla de Simpson (3/8) con $n=3, y\ n=6$

2. Sea $\int_1^2\left(x+\frac{2}{x}\right)^3 dx$

a) Use la solucion analitica para calcular los errores ralativos porcentuales para la regla del trapacio.

3. Sea $\int_{-3}^{3}(4x-3)^3\,dx$

a) Integre de forma analitica y use la regla de Simpson con $n=3, y\ n=6$ para comparar la aproximacion (use 3/8)

4. Sea $\int_0^3(x^2e^x)\,dx$:

a) Integre de forma analitica y numerica, emplee la regla del trapecio con $n=4$
b) Use la regla de Simpson (1/3) con $n=4$
c) Calcules los errores de truncamiento

5. Sea $\int_0^4(1-e^{-2x})\,dx$:
a) Integre con la regla del trapecio con $n=4$
b) Integre usando la regla de Simpdon (1/3) con $n=4$

6. Sea $\int_0^{\pi}(\sin(x))\,dx$

a) Integre con la regla del trapecio con $n=10$
b) Integre usando la regla de Simpdon (1/3) con $n=4$

7. Sea $\int_0^1 e^{x^2}dx$

a) Integre con la regla de Simpson (1/3) con, $n=4,\ n=10$
b) Integre usando la regla del rectángulo con $n=5$

8. Sea $\int_0^2 x^2dx$

a) Integre con la regla del rectangulo punto medio con, $n=4$

9. Sea $\int_0^2 \sqrt[4]{1+x^2}dx$

a) Integre usando la regla del rectángulo izquierdo con, $n = 8$

10. Sea $\int_1^6 \frac{x^2}{6} dx$

a) Integre usando la regla del trapecio con, $n = 5$

11. Sea $\int_{-1}^1 e^{x^4} dx$

a) Integre usando la regla del trapecio con, $n = 5$

12. Sea $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$

   a) Integre usando la regla del trapecio con, $n = 5$

## Ejercicios de Montecarlo

1. Cree un modelo matemático que aproxime $\pi$ usando un código para generar $n = 10000$ números aleatorios para simular un modelo Montecarlo. (muestreo por rechazo), puntos de éxito dentro de un cuadrado de lado 2.

2. Use Estimación por muestreo aleatorio (Random Sampling Estimation), para aproximar la integral; $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ con un intervalo de confianza del 99,7% y un máximo de error de ${}^1\!/_{100}$.

3. Estimar la integral $I = \int_2^5 Ln(x)\, dx$, usando Montecarlo con un intervalo de confianza del 95% y un error máximo permitido de 0,01.

4. Estimar $I = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx$, con una muestra de $n = 5000$.

   a) Calcule la desviación y error estándar.
   b) Calcule el intervalo de confianza para 99%, use $z_{0.05} = 2{,}576$.

5. Estimar la integral, $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$, usando Montecarlo con una muestra uniforme de $n = 10000$, y un intervalo de confianza del 95%.

6. Estimar la integral doble $I = \int_0^2 \int_1^3 e^{x+y}\, dy\, dx$, usando Montecarlo con una muestra de $n = 50000$ y un intervalo de confianza del 90%.

7. Estimar la integral doble $I = \int_0^1 \int_0^1 x^2 + y^2\, dy\, dx$, usando Montecarlo con $n = 100000$ y un intervalo de confianza del 95%.

8. Estimar la integral $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$, usando una muestra de $n = 5000$, calculo los intervalos de confianza para 95%.

9. Estimar $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$, use una muestra de $n = 10000$, intervalo de confianza 95%.

10. Use un método grafico para modelar el rechazo por muestreo para Montecarlo que permita aproximar el área contenida en las curvas: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, en el intervalo $x \in [0,1]$.

## Ecuaciones Diferenciales
## Métodos Runge Kutta

Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales de valores iniciales:

a) resolver analíticamente si es posible.
b) Simular la solución exacta usando un código Python
c) Simular las soluciones aproximadas por los métodos de Euler, Heun y runge Kutta 4. Y compararlas con la solución particular exacta (presentar tabla resumen de las iteraciones y gráficos)
d) Dibujar los campos directores (use el método de las isoclinas)

| Ecuación Diferencial | Condiciones Iniciales | Intervalo | Paso |
|---|---|---|---|
| 1. $\frac{dy}{dt} = y + t^2$ | $y_{(0)}$=1 | $0 \le t \le 1$ | $h = 0.1$ |
| 2. $\frac{dy}{dt} = y \sin(t)$ | $y_{(0)}$=2 | $0 \le t \le \pi$ | $h = \pi/10$ |
| 3. $\frac{dy}{dt} = 2t + 3y$ | $y_{(0)}$=0 | $0 \le t \le 1$ | $h = 0.2$ |
| 4. $\frac{dy}{dt} = t - y^2$ | $y_{(0)}$=1 | $0 \le t \le 2$ | $h = 0.2$ |
| 5. $\frac{dy}{dt} = e^{-t} - y$ | $y_{(0)}$=0 | $0 \le t \le 1$ | $h = 0.1$ |
| 6. $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2} - y$ | $y_{(0)}$=1 | $0 \le t \le 2$ | $h = 0.5$ |
| 7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{y^2}$ | $y_{(0)}$=2 | $0 \le x \le 2$ | $h = 0.5$ |
| 8. $\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1$ | $y_{(0)}$=0.5 | $0 \le t \le 1$ | $h = 0.2$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9. $\frac{dy}{dx} = y + x$ | $y_{(0)}$=1 | $0 \leq x \leq 1$ | $h = 0.2$ |
| 10. $\frac{dy}{dx} = y - x$ | $y_{(0)}$=0.5 | $y_{(1)}$ | $h = 0.1$ |
| 11. $\frac{dy}{dx} = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$ | $y_{(2)}$=2 | $y_{(2.5)}$ | $n = 10$ |
| 12. $\frac{dy}{dx} = 0.4xy$ | $y_{(1)}$=1 | $y_{(2)}$ | $h = 0.1$ |

A continuación, se presentan algunas ecuaciones diferenciales ordinarias de valor inicial:

a) Resolver analíticamente
b) Dibujar sus campos directores
c) Resolver usando el modelo de Runge kutta4 (presente los cálculos para cada pendiente y todas las iteraciones.

| Ecuación Diferencial | Condiciones Iniciales | Intervalo | Paso |
|---|---|---|---|
| 1. $\frac{dy}{dx} = xy$ | $y_{(1)}$=1 | $1 \leq x \leq 1.2$ | $h = 0.1$ |
| 2. $\frac{dy}{dx} = 2xy$ | $y_{(1)}$=1 | $1 \leq x \leq 1.5$ | $h = 0.1$ |
| 3. $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y}$ | $y_{(1)}$=3 | $1 \leq x \leq 1.2$ | $h = 0.1$ |

## PARTE 2 (SISTEMAS DINÁMICOS)

## Sistemas Autónomos

Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales:

e) Resolver analíticamente si es posible.
f) Calcular puntos de equilibrio
g) Dibujar su diagrama de fase
h) Gráfico de soluciones

1. $\frac{dx}{dt} = 2x, \qquad x \geq 0$
2. $\frac{dx}{dt} = x^2 - 4$
3. $\frac{dx}{dt} = 3x - x^2$

9. $\frac{dx}{dt} = 4x - x^2$
10. $\frac{dy}{dt} = 3y(y - 2)$
11. $\frac{dy}{dt} = y^2 - 4y - 12$

4. $\frac{dy}{dx} = 3y - 9$
5. $\frac{dy}{dx} = 4 - 2y$
6. $\frac{dy}{dx} = 3 - 2y$
7. $\frac{dy}{dx} = y^{2} - 6y + 5$
8. $\dot{x} = \sin(x)$
12. $\frac{dy}{dt} = y^2 - y$
13. $\frac{dy}{dx} = (y-1)^2$
14. $\frac{dy}{dx} = y(y+1)(y-2)$
15. $\frac{dy}{dx} = y + 2$
16. $\frac{dy}{dx} = y(4 - y)$

## Bifurcaciones

Dado los siguientes sistemas unidimensionales:

i) Encontrar los puntos fijos
j) Determinar la estabilidad lineal en función del parámetro
k) Identificar el valor donde ocurre la bifurcación y clasificarla
l) Dibujar el diagrama de bifurcación (use un código phyton)

1. $\dot{x} = r + x^2$
2. $\dot{x} = rx - x^2$
3. $\dot{x} = rx - x^3$
4. $\dot{x} = r + 3x - x^3$
5. $\dot{x} = r - e^x$
6. $\dot{x} = r - x^2$
7. $\dot{x} = rx + x^3$
8. $\dot{x} = x^3 - rx$
9. $\dot{x} = (r-1) - (x-1)^2$
10. $\dot{x} = (r-2)x - x^2$
11. $\dot{x} = (r-3)x - x^3$
12. $\dot{x} = r - (x-2)^2$
13. $\dot{x} = (r-1)(x-1) - (x-1)^2$
14. $\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - h$

Variables ejercicio 14:

$x = Tamaño\ de\ la\ poblacion\ (peces\ en\ in\ lago)$

$r = tasa\ de\ crecimiento\ intrinseca$

$k = Capacidad\ de\ carga\ del\ ecosistema$

$h = tasa\ de\ cosecha (pesca)$

## Sistemas dinámicos lineales 2D

Dadas los siguientes sistemas dimanamos:

m) Resolver analíticamente si es posible.
n) Calcular puntos de equilibrio
o) Calcular los autovalores y autovalores asociados
p) Dibujar su diagrama de fase manualmente
q) Graficar de soluciones (use algún software para simular el campo vectorial y algunas soluciones).

1. $\begin{cases}\dot{x}=x\\ \dot{y}=y\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dot{x}=-y\\ \dot{y}=x\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dot{x}=x\\ \dot{y}=-y\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dot{x}=y-x\\ \dot{y}=-y-x\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dot{x}=x+y\\ \dot{y}=x+y\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dot{x}=-y\\ \dot{y}=x\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dot{x}=2y\\ \dot{y}=2x\end{cases}$

8. $\begin{cases}\dot{x}=-y+x\\ \dot{y}=x+y\end{cases}$

9. $\begin{cases}\dot{x}=x-2y\\ \dot{y}=-2x+y\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dot{x}=x+2y\\ \dot{y}=3y+4x\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dot{x}=x-2y\\ \dot{y}=x+y\end{cases}$

12. $\begin{cases}\dot{x}=x-y\\ \dot{y}=3x+3y\end{cases}$

13. $\begin{cases}\dot{x}=-4x+3y\\ \dot{y}=-6x+5y\end{cases}$

14. $\begin{cases}\dot{x}=6x-y\\ \dot{y}=5x+4y\end{cases}$

15. $\begin{cases}\dot{x}=x+2y\\ \dot{y}=2x-4y\end{cases}$

16. $\begin{cases}\dot{x}=2x-5y\\ \dot{y}=4x-2y\end{cases}$

17. $\begin{cases}\dot{x}=-5x+2y\\ \dot{y}=-10x+3y\end{cases}$

18. $\begin{cases}\dot{x}=-2x+3y\\ \dot{y}=-6x+4y\end{cases}$

19. $\begin{cases}\dot{x}=5x-4y\\ \dot{y}=x+y\end{cases}$

20. $\begin{cases}\dot{x}=3x+y\\ \dot{y}=x+3y\end{cases}$

21. $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=6x+y\end{cases}$

22. $\begin{cases}\dot{x}=2x-2y\\ \dot{y}=4x-2y\end{cases}$

23. $\begin{cases}\dot{x}=x+2y\\ \dot{y}=2x+y\end{cases}$

24. $\begin{cases}\dot{x}=2x+3y\\ \dot{y}=2x+y\end{cases}$

25. $\begin{cases}\dot{x}=-3x-4y\\ \dot{y}=2x+y\end{cases}$

26. $\begin{cases}\dot{x}=3x-y\\ \dot{y}=9x-3y\end{cases}$

27. $\begin{cases}\dot{x}=-2x+y\\ \dot{y}=x-2y\end{cases}$

28. $\begin{cases}\dot{x}=x+3y\\ \dot{y}=x-y\end{cases}$

29. $\dot{\mathrm{X}}=\begin{pmatrix}\mathrm{a} & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\mathrm{X}$

29. Hallar a$\in R$, tal que:

a). El sistema tenga un equilibrio silla-nodo

b) Nodo estable

c) Espiral

## Sistemas lineales no homogéneos: preservación o ruptura de comportamientos

a) Resolver si es posible analíticamente
b) Hallar autovalores y autovectores
c) Solución general del sistema en forma matricial
d) Análisis del cambio o preservación de la dinámica al introducir la perturbación f(t)
e) Resolver el sistema usando los métodos de coeficientes indeterminados o variación de parámetros
f) Simular con un software la dinámica de cada sistema

1. $\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} X + \binom{1}{9}$
2. $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \binom{x}{y} + \binom{-5}{-7}$
3. $\dot{X} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \binom{0}{-6}$
4. $\dot{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \binom{3}{2}$
5. $\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$
6. $\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X + \binom{3}{5}$
7. $\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X + \binom{\cos t}{0}$
8. $\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X + \binom{e^t}{0}$
9. $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X + \binom{e^t}{0}$
10. $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \binom{t}{-t}$

Identificar cuales dinámicas cambian bruscamente si comportamiento con la función forzada f(t).

## Conversión de un sistema (EDO) de orden superior a un sistema de primer orden

a. $\ddot{y} - 4y = 2$
b. $\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y$=6

Deducir un algoritmo que permita realizar la transformación para este tipo de ecuación diferenciales de segundo orden:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t)$$

$$\frac{\overrightarrow{dx}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \vec{x} + f(t)$$

## Sistemas dinámicos no lineales

Dadas los siguientes sistemas dimanamos

a) Calcular puntos de equilibrio
b) Linealizar el sistema en los puntos críticos
c) Calcular los autovalores y autovectores asociados si son hiperbólicos (Hartman-Grobman), simular las trayectorias similares lineales.
d) Analizar los puntos no hiperbólicos si es el caso (coordenadas polares o Lyapunov)
e) Dibujar su diagrama de fase manualmente
f) Graficar (use algún software para simular el campo vectorial y algunas soluciones).

1. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x(3-x) \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 - x \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = x^2 - 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = y - x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x - y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y \\ \dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(3 - 2x - y) \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y + 1 \\ \dot{y} = x(y + 3) \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = -x + xy \\ \dot{y} = -2x + xy \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2 \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 14x - 0.5x^2 - xy \\ \dot{y} = 16y - 0.5y^2 - xy \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x) - 2xy \\ \dot{y} = y(2 - y) - xy \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x) - xy \\ \dot{y} = -y + xy \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2) \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = x + y^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin y \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3xy \\ \dot{y} = 3y - y^2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2xy + 3(x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x - 3y + xy - 3(x^2 - y^2) \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 + 2 \\ \dot{y} = x^2 - xy \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x) - 2xy \\ \dot{y} = xy + (x - 3) \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = ax + bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = 1 - y \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + xy^3 \\ \dot{y} = x - y + y^3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^2 - 1 \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y^2) \\ \dot{y} = y(x^2 - 1) \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$

## Aplicaciones

1. Analice el modelo de romance entre Romeo y Julieta dado por el sistema

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = bR + aJ \end{cases}$$

$a < 0$, $b > 0$, a ambos le va a atraer que el otro demuestre interés, donde $a = cautela$, y $b = responsividad$

2. Analizar el sistema depredador/presa

$$\begin{cases} \dot{x} = (a - by)x \\ \dot{y} = (dx - c)y \end{cases}$$

3. Oscilador armónico simple: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, demuestre que es conservativo y halle la función de energía de Hamilton.

4. Demostrar que el siguiente sistema se conserva la energía y simular el sistema con un software

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - x^3 \end{cases}$$

5. Halle la función de Hamilton de:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

6. Halla la función de Hamilton si existe para el siguiente sistema, sino demostrar que el sistema pierde o gana energía.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

7. Potencial de doble pozo simular la dinámica del sistema y graficar, demuestra que el sistema es conservativo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

8. Analizar el siguiente sistema conservativo no línea, demostrar que no pierde energía y halla la función de energía Hamiltoniana correspondiente

$$\begin{cases} \dot{x} = y(1 + x^2) \\ \dot{y} = -x(1 + y^2) \end{cases}$$

## Parametrización y Estructura Orbital

1. $\dot{x} = -x, \dot{y} = -y$ (parametrízalo con respecto al tiempo)
2. $\dot{x} = x, \dot{y} = x + y$ (solución temporal)
3. $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ (curvas de nivel)
4. $\dot{x} = x^2, \dot{y} = -y$ (eliminación del parámetro) $\frac{dy}{dx}$
5. $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin(x)$, (conservativo)
6. $\dot{x} = x + t, \dot{y} = -y + \cos(t)$, (no autónomo)
7. $\dot{x} = -x + t^2, \dot{y} = y + \sin(t)$ (no autónomo)
8. $\dot{x} = x, \dot{y} = xy$, derivada $\frac{dy}{dx}$
9. $\dot{x} = y, \dot{y} = -x + \sin(t)$ (sistema forzado no autonomo)
10. $\dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2), \dot{y} = x + ay(x^2 + y^2)$, analice y use coordenadas polares
11. Analice y simule el siguiente sistema $\dot{x} = y,\ \dot{y} = 2y + y^2$
12. Determinar la estructura orbital para los siguientes sistemas:
    a) $\dot{x} = x + \mu y,\ \dot{y} = \mu x - y$
    b) $\dot{x} = -x, \dot{y} = -2y$, condición inicial $(x_0, y_0) = (1,1)$
    c) $\dot{x} = x, \dot{y} = 2y$, condición inicial $(x_0, y_0) = (1,1)$
    d) $\dot{x} = -x - y, \dot{y} = x - y$
    e) $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$
    f) $\dot{x} = x(1 - y), \dot{y} = y(x - 1)$
    g) $\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2), \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$
    h) $\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2), \dot{y} = y(1 - x^2 - y^2)$

## Ejercicios Adicionales

Analizar los sistemas con bifurcación: Grafique con un software y compare sus cálculos y análisis manuales

**Unidimensionales**

a) $\dot{x} = \mu + x - x^3$
b) $\dot{x} = \mu - 2x^2$
c) $\dot{x} = \mu x^2 - x^3$
d) $\dot{x} = \mu + 2x^2$

e) $\dot{x} = \mu x^2 - 2\mu x + 1$
f) $\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5$
g) $\dot{x} = 1 + \mu x - x^3$

**Sistemas 2d**

1. $\dot{x} = x + y - \mu, \;\; \dot{y} = 2x + 2y + 1 - \mu,$

a). Analizar su estructura orbital, demostrar que hay una bifurcación en $\mu = -1$, y que el sistema tiene una línea de puntos de equilibrios sobre la recta $x + y = -1$

b). Demostrar que las soluciones se comportan como: $X(t) = c_1\binom{1}{-1} + c_2\binom{1}{2}e^{3t}$

2. $\dot{x} \; = \; \mu x + \; \mu y + 1, \; \dot{y} \; = x + y - \; \mu$
3. $\dot{x} = \; y + 2, \; \dot{y} = x \; - y - \; \mu$
4. $\dot{x} \; = \; x + \; \mu y, \; \dot{y} \; = \; \; \mu x - \; y$
5. $\dot{x} \; = \; \; \mu x - \; x^2, \; \dot{y} \; = - y$

**Modelos de combate**

a) Explicar el signo de cado de los coeficientes positivos $a, b$ en el modelo lanchesteriano de combate de dos fuerzas convencionales $x \; e \; y,$ y analizar su dinámica (en el primer cuadrante), determinando la ecuación de las orbitas para cada $X_0$. Rehacer, ahora considerando una tasa de refuerzo constante para cada fuerza $\alpha, \beta.$ $\dot{x} \; = - \, ay, \; \dot{y} \; = -bx.$

b) Si en el modelo lanchesteriano la fuerza $x$ es no convencional, analizar su dinamica (en el primer cuadrante), determinando la ecuacion de las orbitas para cada $X_0$. Rehacer, ahora considerando una tasa de refuerzo constante $\alpha, \beta$ para cada fuerza. $\dot{x} \; = \; axy, \; \dot{y} \; = \; bx$

c) Interpretar los coeficientes positivos $ab, cd$ y analizar la dinamica del sistema de Lotka-Volterra en espacios limitados de recursos sin interacciones intra-especies, especificando hipótesis sobre el depredador y la presa consistentes con el modelo y resolverlo. Analizar las modificaciones introducidas por una intervencion externa de tasa constante. $\dot{x} = (a - \; by)x, \; \dot{y} \; = \; -(d - cx)y$

d) Interpretar los coeficientes positivos ab cd, $\alpha, \beta$ y analizar la dinamica del sistema de Lotka-Volterra en espacios limitados de recursos con interaciones intra-especies (conviene considerar dos casos distintos,segun que las nulclinas se intersequen o no en el primer cuadrante: en el primer caso se tendra una extincion del depredador con una estabilizacion de la presa en a , mientras que en el segundo una estabilizacion asintotica en la interseccion, para cualquier condicion inicial en el primer cuadrante). $\dot{x} = (a - by -, \alpha x)x, \; \dot{y} \; = \; -(d - \; cx - \; \beta y)y$

e) El principio de exclusión competitiva afirma que si dos especies similares $xy$ compiten en un espacio que puede albergar más miembros de $x$ que de $y$, entonces y termina extinguiendose y todo el espacio saturado de $x$. Probarlo interpretando el siguiente sistema con $a \; > \; b$. $\dot{x} \; = (a - x - y)x, \; \dot{y} \; = (b - \; x - \; y)y$

f) Un modelo epidemiológico de propagación de una enfermedad que identifica con $x$ a la población contagiosa (tasa de infección constante $r > 0$) y con $y$ a la contagiada, tomando como constante $\gamma > 0$ la tasa de retiro se representa por el siguiete sistema. Probar que existe un umbral epidemiológico $\rho = \frac{\gamma}{r}$, que siempre quedan sin contraer la enfermedad algunos individuos $\dot{x} = -rxy,\ \dot{y} = rxy - \gamma y$

**Sistemas conservativos**

Probar que es un centro o una silla

a) $\dot{x} = x - 2xy,\ \dot{y} = x - y + y^2$
b) $\dot{x} = 2xy,\ \dot{y} = 1 + 3x^2 - y^2$

Sistema de orden 2 (analizar el sistema transformar a un sistema 2d)

a) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0 \ \ x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$
b) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0, x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$

**Sistemas no homogéneos resolver para condiciones iniciales**

a) $\dot{x} = 2x - y + 1,\ \dot{y} = -x + 2y - 5,\ X(0) = \binom{2}{3}$
b) $\dot{x} = -x + 4y - 2,\ \dot{y} = x - y - 1,\ \ X(0) = \binom{3}{1}$

**Conjuntos limites unidimensionales**

En cada uno de los siguientes casos, efectuar un análisis cualitativo completo, incluyendo consideraciones acerca de los conjuntos límite.

a) $\dot{x} = x^2 - x - 2$
b) $\dot{x} = x^3 - 4x^2 + 4x$
c) $\dot{x} = x - x^3$
d) $\dot{x} = x^4 - x^2$
e) $\dot{x} = -x^4 + x^2$