Modelo de Examen - Transcripción de Ejercicios

# Ejercicio 1

Dada la siguiente función f(x) = e^x - 3x^2, use el teorema de Bolzano para demostrar que al menos hay una raíz en el intervalo 0 ≤ x ≤ 1.  
  
Hallar una aproximación de la raíz en el intervalo usando un modelo de punto fijo acelerado Aitken, la función auxiliar g(x) iterativa debe cumplir con la condición de Lipschitz en conjuntos compactos para la semilla escogida. (use 6 cifras de precisión).

a) Modele un algoritmo de Newton-Raphson para aproximar la raíz tomando como semilla x0 = 0.5. Pare cuando alcance la convergencia con una tolerancia inferior a 10^-8. Presente los cálculos en una tabla resumen. Y haga un breve análisis de los dos métodos, en cuanto a la velocidad de convergencia, precisión y dificultad. (Grafique la curva y ubique la raíz calculada).

# Ejercicio 2

Dada la siguiente función f(x) = ln(x+1), y los nodos: x0 = 0, x1 = 1, x2 = 2.

a) Construya un polinomio interpolante de Lagrange que le permita aproximar la función; grafique tanto la curva como el polinomio interpolante resaltando dónde son próximos. Calcule el error local para ξ = 0.45, y la cota de error global.

b) Dada la tabla que se construye con los datos discretos que proporciona la función reconstruida, es decir tomando en cuenta sus nodos interpolar el valor de la derivada f’(1.5) usando diferencias finitas centrales.

# Ejercicio 3

Dada la siguiente integral: I = ∫0^1 √2 e^x dx

a) Use la regla de Newton-Cotes del trapecio para aproximar la integral usando n = 4, y n = 10, compare los errores de truncamiento para cada caso. Use ξ = 0.5.

b) Mejore la precisión de la aproximación implementando la regla de Simpson 1/3 para n = 4. Presente los cálculos detallados.

# Ejercicio 4

Dada la integral I = ∫0^1 ∫0^2 e^(2x-y) dy dx

a) Modele una solución usando el método de Montecarlo para aproximar la integral doble del volumen sobre el rectángulo [0,1]×[1,2]. Considere lo siguiente: fijar una semilla con np.random.seed(0) para reproducibilidad en un código Python, la población de la muestra n = 10000, para comprobar su aproximación debe resolver analíticamente la integral (mostrar pasos). También debe presentar una tabla resumen con todos los cálculos de probabilidad como desviación estándar, varianza, error estándar, media muestral, intervalos de confianza para 95%.

b) Demuestre que el error se reduce a medida que se aumenta la muestra n, en una relación inversa dada por 1/√n. Haga la demostración matemática respectiva para el caso que se desee reducir el error a la mitad con una nueva muestra. Simule la estimación con la nueva muestra demostrando que efectivamente el error se halla reducido a la mitad.

# Ejercicio 5

La ecuación diferencial ordinaria dy/dx = y sin(x), se tiene el siguiente problema de Cauchy para condiciones iniciales con y(0) = 1, en el intervalo 0 ≤ x ≤ π.

a) Se requiere encontrar una solución analítica que permita calcular los valores exactos y así poderlos comparar como una simulación calculada por un método numérico de precisión de 10^-1, puede usar el algoritmo de Euler o las reglas de Runge-Kutta, que toma como pendiente inicial para extrapolar a un siguiente paso. Use h = π/10. Los cálculos pueden hacerse en código u otra herramienta informática, pero compruebe que la primera y segunda iteración coincidan con los datos de salida. Grafique la solución obtenida de la aproximación con la real para visualizar la desviación o error para este caso.

b) Ahora para mejorar significativamente la aproximación considere implementar un nuevo algoritmo de error inferior o cercano a 10^-6 (Runge-Kutta 4) porque debe estimar cuatro pendientes una en cada extremo del intervalo a analizar y dos en el punto medio. Para esto las pendientes: k1, k2, k3, k4, presente los cálculos en una tabla donde al final de cada iteración se obtenga una nueva y. Compare de modo gráfico y numérico los resultados obtenidos en este ítem con el anterior.