Sistemas dinámicos no lineales

Un sistema dinámico no lineal en el plano es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

donde al menos una de las funciones $f(x, y)$ o $g(x, y)$ no es lineal

¿cómo se analizan estos sistemas?

Para encontrar los puntos críticos se resuelve el sistema donde $f(x, y = 0$, y $g(x, y)$=0, y para linealizar el sistema cerca de estos puntos se usa la matriz jacobiana:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{|(x^*, y^*)}$$

Evaluar en el equilibrio y analizar los eigenvalores.

Si el punto es hiperbólico (eigenvalores con parte real distinta de cero), se puede usar el teorema de Hartman-Grobman.

Si la linealización no concluye, usar:

- Funciones de Lyapunov
- El teorema de LaSalle
- El teorema de Poincaré–Bendixson (si estamos en 2D)
- Análisis global con curvas nulas, simetrías, energía, etc

Ejemplos clásicos de sistemas no lineales

1. Sistema Depredador-Presa (Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta x y \\ \dot{y} = \delta x y - \gamma y \end{cases}$$

Donde: $x(t)$ =presas, $y(t) =$ depredadores, y los parámetros; $\alpha,\ \beta, \delta, \gamma$ son propios de la dinámica del sistema, como tasa de reproducción, mortalidad y otras.

- Este sistema tiene dos equilibrios en: (0,0) donde se extinguen ambas especies, y en $\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, las soluciones son órbitas cerradas → centro (requiere análisis no lineal).

2. Oscilador de Van der Pol

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x \end{cases}$$

Si $\mu > 0$, ciclo limite estable (atractor), no se puede deducir con linealización (se usa Lyapunov o análisis de energía)

3. Bifurcación tipo Hopf

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(\mu - x^2 + y^2) \end{cases}$$

Si $\mu < 0$ estable, si $\mu > 0$ aparece el ciclo limite

Teoremas relacionados con sistemas dinámicos no lineales

1. **Teorema de Existencia y Unicidad (Picard–Lindelöf)**

Dado un sistema de EDO:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

si la función $f(t, x)$ es continua en t y Lipschitz en x (es decir, existe una constante $L > 0 \;\; tal\ que \;\; \| f(t, x1) - f(t, x2) \| \leq L \| x1 - x2 \|$, entonces existe una única solución local de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $x(t0) = x0$

- Interpretación:

- Existencia garantiza que sí hay una solución al sistema.
- Unicidad garantiza que esa solución es única, es decir, no se bifurca.

Esto es crucial para entender que las trayectorias del sistema no se cruzan en el espacio de fase.

. Teorema de Hartman–Grobman (Linealización)

- Enunciado:

Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema no lineal con un punto crítico x_0 hiperbólico (todos los eigenvalores de la Jacobiana tienen parte real distinta de cero). Entonces, cerca de x_0, el sistema no lineal es topológicamente conjugado a su sistema linealizado:

$\dot{x} \approx Df(x0)(x - x0)$

Interpretación:

El comportamiento cualitativo (tipo de punto fijo, direcciones de atracción/repulsión) del sistema no lineal cerca del equilibrio es igual al del sistema lineal.

- No aplica si alguno de los eigenvalores tiene parte real cero (punto no hiperbólico).

3. Estabilidad de Lyapunov (Directa)

- Objetivo:

Estudiar la estabilidad sin resolver el sistema explícitamente.

- Idea central:

Se busca una función escalar $V(x,y)$ tal que:

- $V(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$
- $V(0,0) = 0$
- y la derivada de V a lo largo de las $trayectorias$ $(\dot{v} = \nabla V \cdot f)$ sea:
  - $\dot{v} < 0$: el equilibrio es asintóticamente estable.
  - $\dot{v}$ ˙≤0: el equilibrio es estable.
  - $\dot{v} > 0$: el equilibrio es inestable.

- Ventaja:

Permite determinar estabilidad sin necesidad de linealizar.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + xy \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Verificamos que (0,0) es un punto de equilibrio:

$\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, entonces$

$$\begin{cases} 0 = -x + xy \\ 0 = -y \end{cases}$$

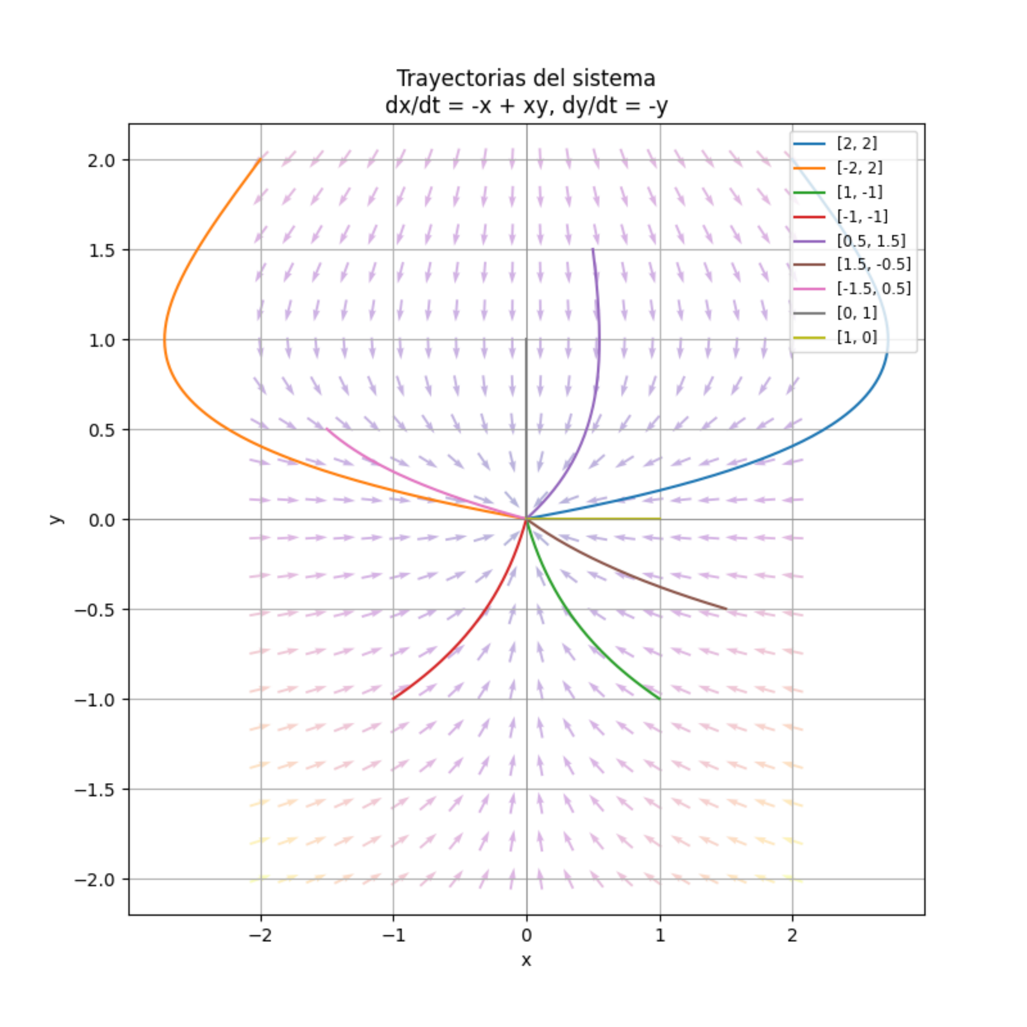
El único punto de equilibrio es (0,0), Probamos la función de energía de Lyapunov

$V(x,y)=\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, esta función siempre es mayor que cero cuando $x \neq 0$, o $y \neq 0$, y vale cer0 solo en (0,0), entonces es positiva.

Calculamos la derivada de V,

$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y}$, entonces $\dot{V} = x(-x + xy) + y(-y)$=$-x^2 + x^2y$-$y^2$=

-$x^2(1-y) - y^2$, si ahora cerca del origen (y) es pequeño, entonces $1 - y > 0$, y por tanto la expresión es negativa demostrando que $\dot{V} < 0$ cerca del origen y $V > 0$. La conclusión que el punto es estable.



Ejemplo 2

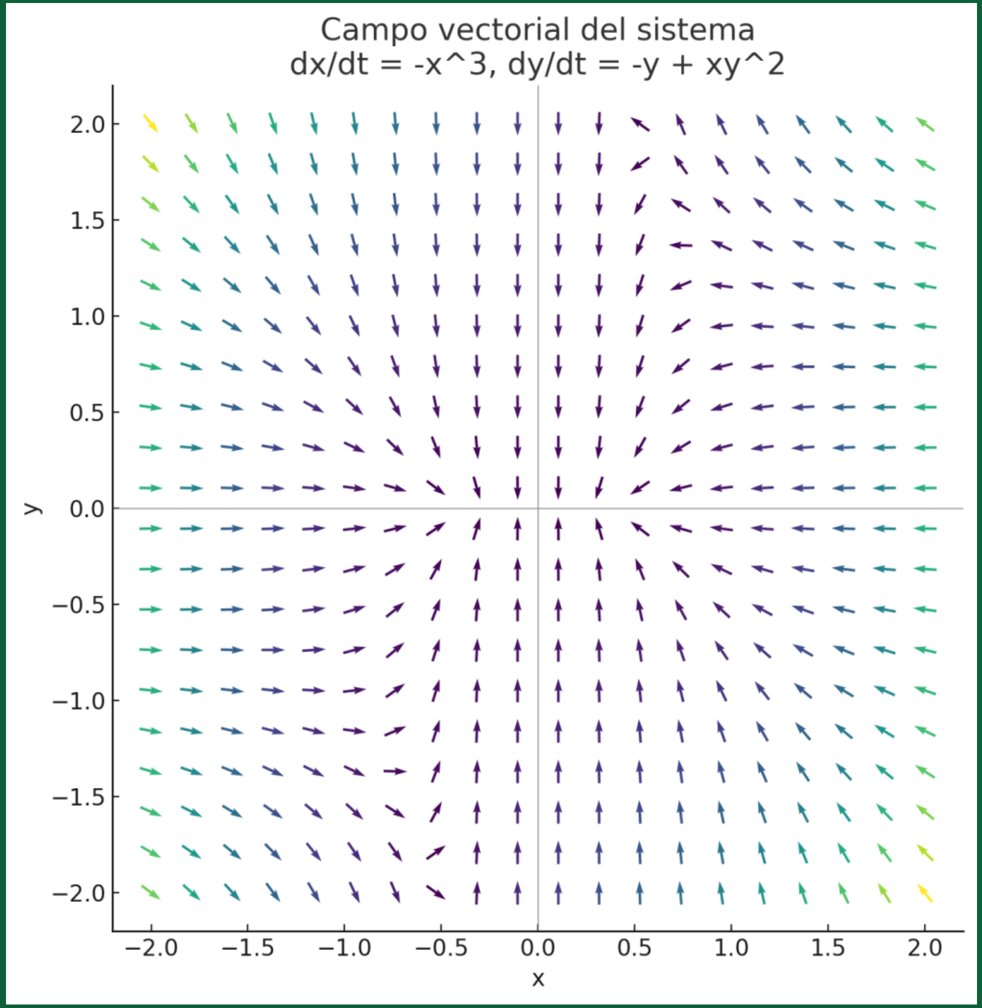
$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y + xy^2 \end{cases}$$

Vamos a estudiar el punto (0,0) y se demuestra que es el único punto de equilibrio, y en su vecindad para valores pequeños estudiemos la función de energía de Lyapunov

$V(x,y)$=$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, calculamos la derivada, entonces: $\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y}$,

$\dot{V} = x(-\dot{x}^3) + y(-y + xy^2)$=$-x^4 - y^2 + xy^3$

Analizamos cada termino)=$-x^4 - y^2$, siempre es negativo y como xy^3, puede ser positivo o negativo pero muy pequeño al estar cerca del origen comparado con el otro termino se puede deducir que $\dot{V} < 0$



4. Teorema de Poincaré–Bendixson

- Enunciado:

En un sistema dinámico en el plano (R^2), si una órbita permanentemente contenida en una región cerrada, acotada y sin puntos fijos en su interior, entonces su límite ω-límite es:

- un punto fijo, o
- una órbita periódica (ciclo límite), o
- una unión finita de órbitas y puntos fijos conectados por separatrices.

- Importancia:

Este teorema descarta el caos en sistemas 2D continuos: no puede haber dinámica caótica en el plano.

5. Teorema de LaSalle (Principio de Invariancia)

- Generaliza el método de Lyapunov:

Si:

- V(x) es una función de Lyapunov tal que $\dot{V}$(x)≤0 en una región invariante D,
- Entonces las trayectorias de D tienden al conjunto más grande donde $\dot{V}(x) = 0$

- Utilidad:

Permite deducir convergencia a conjuntos atractores más generales que un solo punto.

Conclusión

Los **sistemas no lineales 2D** muestran una enorme variedad de comportamientos que no pueden capturarse con sistemas lineales. Su análisis combina herramientas algebraicas (Jacobiana), teóricas (Lyapunov, Poincaré–Bendixson) y gráficas (diagramas de fase), siendo uno de los campos más ricos y aplicados de las matemáticas modernas

Tipos de comportamiento

Los sistemas no lineales presentan una **gran variedad de dinámicas.** Algunos de los comportamientos más típicos son:

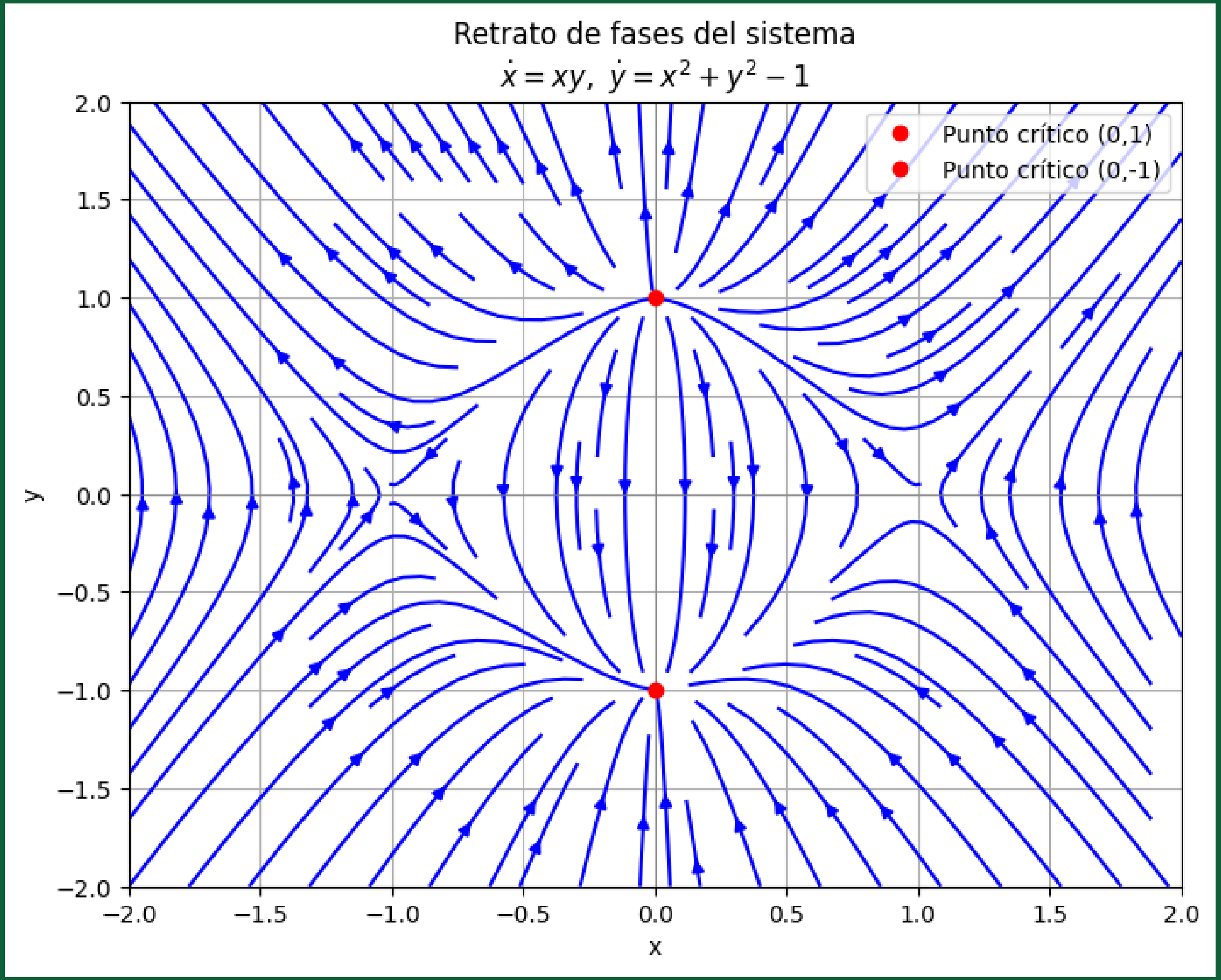
Comportamiento	Descripción	Ejemplo
Estabilidad	Algunas soluciones convergen hacia puntos u órbitas	Péndulo amortiguado
Ciclos límite	Órbitas cerradas estables	Oscilador de Van der Pol
Bifurcaciones	Cambios cualitativos en el sistema al variar un parámetro	Ecuación de pitchfork
Caos	Dinámica impredecible y sensible a condiciones iniciales	Sistema de Lorenz

Ejemplo 1

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

hay cuatro puntos críticos: un nodo inestable, y otro estable, (0,1), (0,-1), y dos puntos silla (1,0), (-1,0). Todos los puntos son hiperbólicos por lo que la linealización nos ofrece suficiente información de la naturaleza de la dinámica.

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

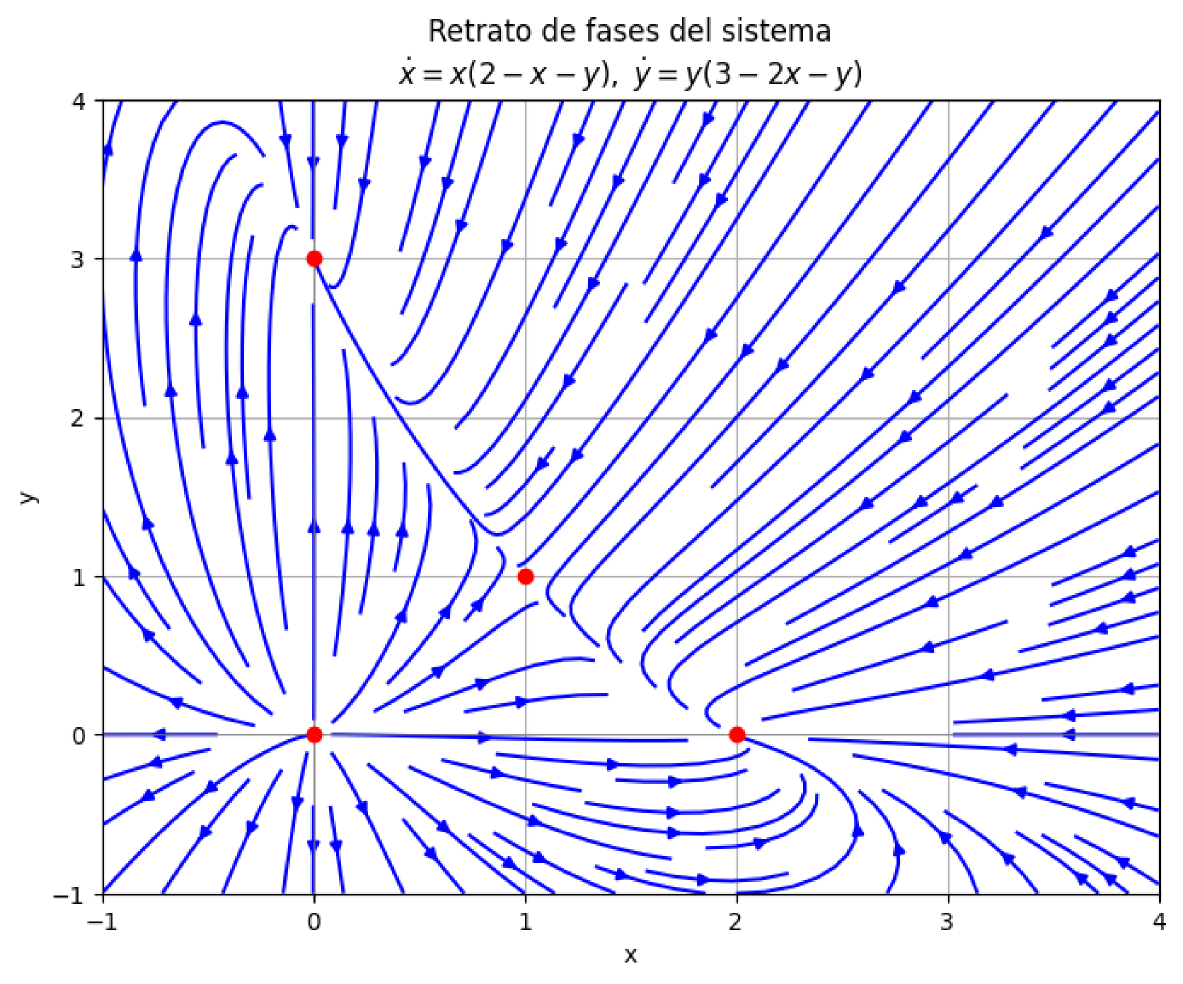


Ejemplo 2

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(3 - 2x - y) \end{cases}$$

hay cuatro puntos críticos: (0,0) fuente, (0,3) nodo estable, y (1,1) silla, (2,0) nodo estable. Todos los puntos son hiperbólicos por lo que la linealización nos ofrece suficiente información de la naturaleza de la dinámica.

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 2 - 2x & -x \\ -2y & 3 - 2x - 2y \end{bmatrix}$$



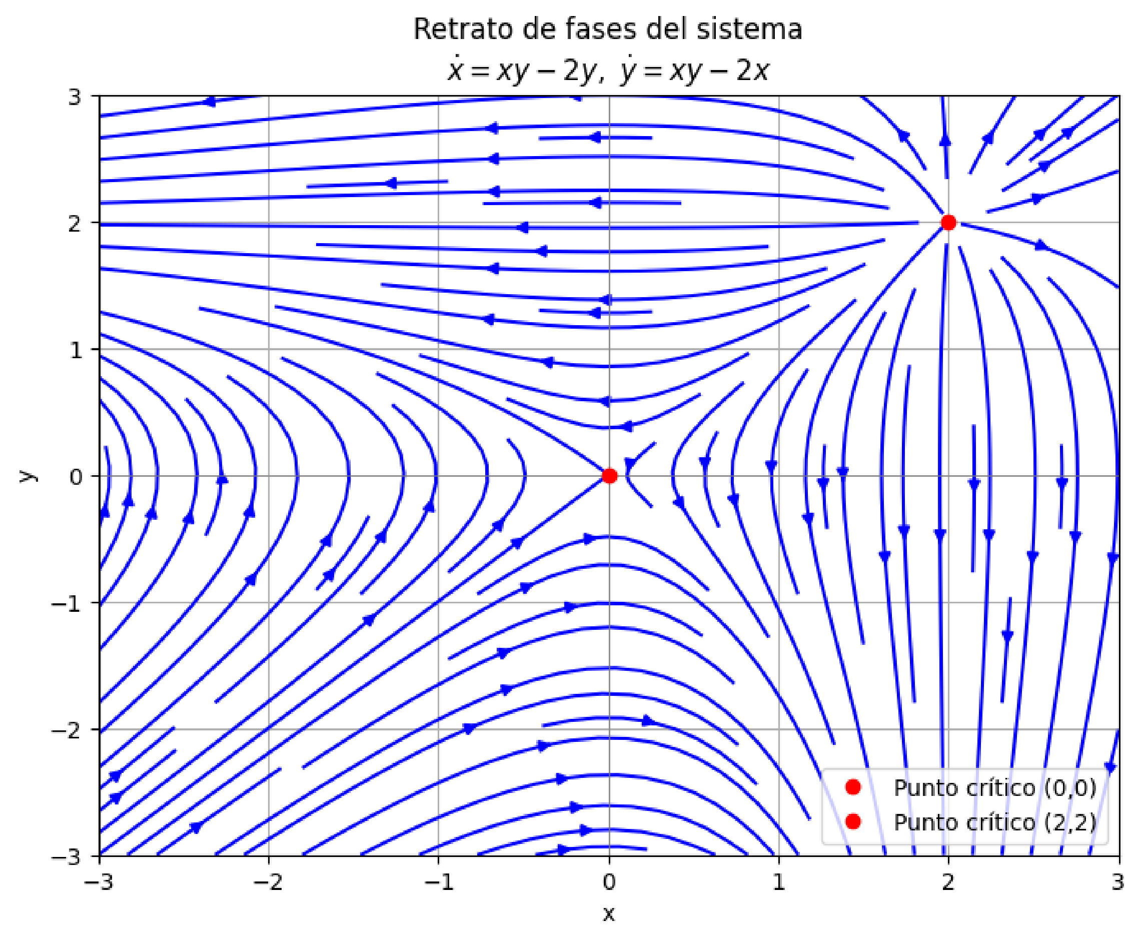
Ejemplo 4

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - 2y \\ \dot{y} = xy - 2x \end{cases}$$

hay dos puntos críticos: (0,0) es un punto silla, y (2,2) un nodo inestable

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} y & x-2 \\ y-2 & x \end{bmatrix}$$

Este ejemplo tiene dos puntos críticos, un punto silla y un nodo fuente ambos hiperbólicos así que la linealización con el jacobiano es suficiente para predecir su comportamiento en el diagrama de fases.



Ejemplo 3

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

hay dos puntos críticos: (-1,0) es un centro lineal, por lo que la linealización no es suficiente para determinar su naturaleza necesita un análisis adicional fuente, (1,0) es un punto silla (hiperbólico).

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & 2y \end{bmatrix}$$