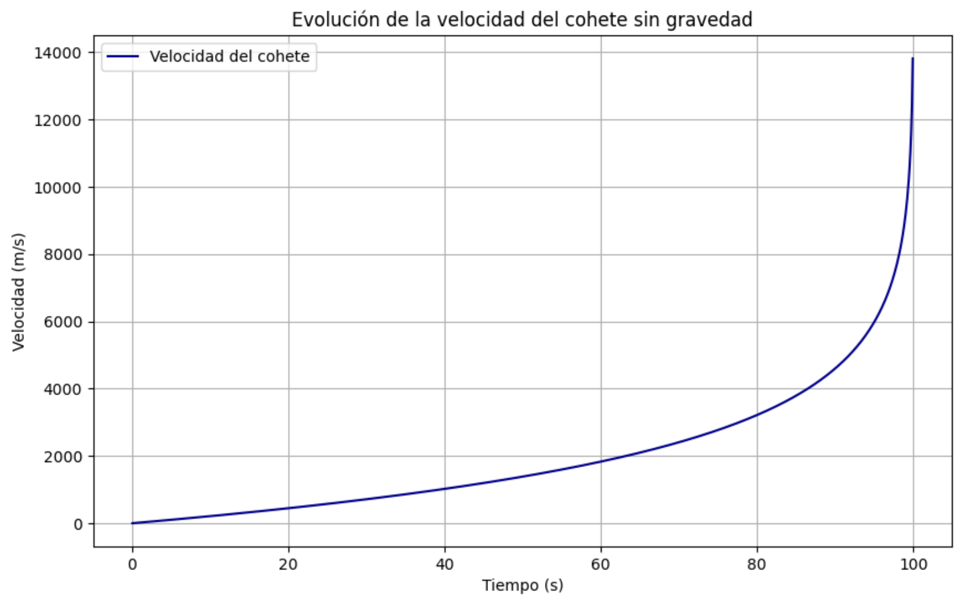
Sistemas dinámicos no lineales Aplicaciones

Los **sistemas dinámicos** tienen aplicaciones amplias en ciencia, ingeniería, economía y biología

- Movimiento de planetas (Newton).
- Reacciones químicas y cinética.
- Flujos atmosféricos y climáticos.



APLICACIONES DE SISTEMAS DINAMICOS

En el libro sistemas no lineales y caos de Steven Strogatz plantea la relación amor odio entre dos amantes (Romeo y Julieta), la descripción de la dinámica emocional es la siguiente:

Aquí se modelan interacciones románticas mediante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Name-calling)

Se da el sistema en su forma estándar:

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = cR + dJ \end{cases}$$

Para Romeo la ecuación que gobierna la dinámica es:

$$\dot{R} = aR + bJ$$

donde:

- R: el amor (o desamor) de Romeo hacia Julieta
- J: el amor (o desamor) de Julieta hacia Romeo
- a: cómo influye su propio estado en él mismo
- b: cómo lo afecta lo que siente Julieta

De manera similar Julieta:

$$\dot{J} = cR + dJ$$

donde:

- R: el amor (o desamor) de Romeo hacia Julieta
- J: el amor (o desamor) de Julieta hacia Romeo
- c: cómo la afecta lo que siente Romeo
- d: cómo influye su propio estado en ella misma

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = cR + dJ \end{cases}$$

clasificación de estilos románticos de Romeo

Signo de (a)	Signo de (b)	Estilo romántico	Explicación
a>0	b>0	Apasionado	Romeo se enamora más cuando ya está enamorado, y aún más si Julieta lo ama
a>0	b<0	Contradictorio	Romeo se autoalimenta de amor, pero el amor de Julieta lo espanta
a<0	b>0	Dependiente	Romeo pierde interés por sí solo, pero se enamora si Julieta lo ama
a<0	b<0	Evasivo	Romeo se desenamora solo y aún más si Julieta lo ama

clasificación de estilos románticos de Julieta

Signo de d	Signo de c	Estilo de Julieta	Explicación
d>0	c>0	Apasionada	Julieta se emociona sola, y aún más si Romeo la ama
d>0	c<0	Contradictoria	Julieta se emociona sola, pero rechaza el amor de Romeo
d<0	c>0	Dependiente	Julieta pierde el interés sola, pero se enamora si Romeo la ama
d<0	c<0	Evasiva	Julieta pierde el interés sola, y más si Romeo la ama.

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = cR + dJ \end{cases}$$

Resumen:

Ambos (Romeo y Julieta) pueden clasificarse en los mismos cuatro estilos según los signos de los coeficientes que definen su sistema emocional:

- **Apasionado**: responde positivamente tanto a sí mismo como a la otra persona.
- **Contradictorio**: se enamora solo, pero rechaza el amor del otro.
- **Dependiente**: necesita del otro para amar, por sí solo se apaga.
- **Evasivo**: se apaga solo y el amor del otro también lo ahuyenta.

Caso 1: $\begin{cases} \dot{R} = -J \\ \dot{J} = R \end{cases}$

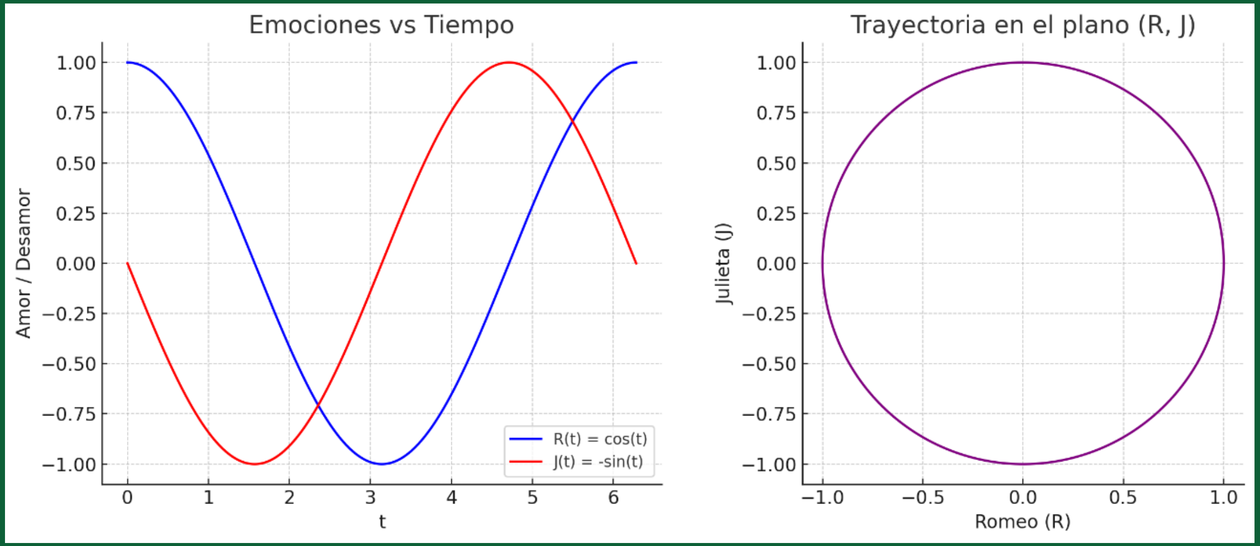
Este sistema modela cómo evolucionan los sentimientos de **Romeo (R)** y **Julieta (J)** con el tiempo.

Análisis: como En este caso:

- $a = 0, b = -1 \implies$ $\textit{Romeo no reacciona a sí mismo, pero rechaza lo que siente Julieta} \Rightarrow \textit{evasivo}$
- $c = 1,\ d = 0 \implies$ $\textit{Julieta no reacciona a sí misma, pero se enamora si Romeo la ama} \Rightarrow \textit{dependiente}$

Analizamos el punto fijo en el origen:

$$\begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$



Caso 2: condición para espiral

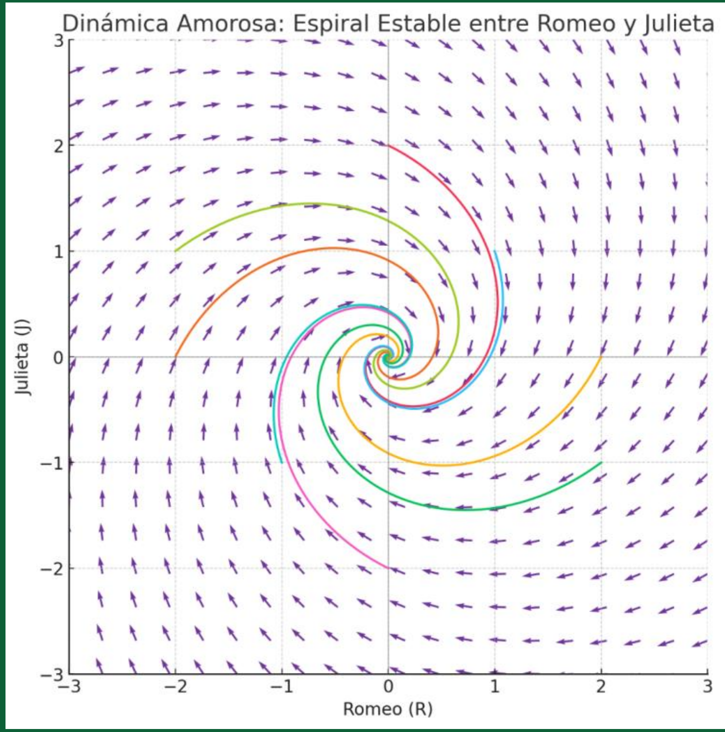
Un sistema lineal tiene una espiral (estable o $inestable$) $cuando$:

- $El\ \boldsymbol{trazado}\ (suma\ de\ diagonal\ de\ la\ matriz)\ tr(A) \neq 0$
- $El\ \boldsymbol{determinante}\ \Delta = ad - bc > 0$
- $El\ \boldsymbol{discriminante}\ tr(A)2 - 4\Delta < 0\ \rightarrow\ raíces\ complejas\ conjugadas.$

Un ejemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -2R + 4J \\ \dfrac{dj}{dt} = -4R - 2J \end{cases}$$

Este sistema modela cómo evolucionan los sentimientos de **Romeo (R)** y **Julieta (J)** con el tiempo.

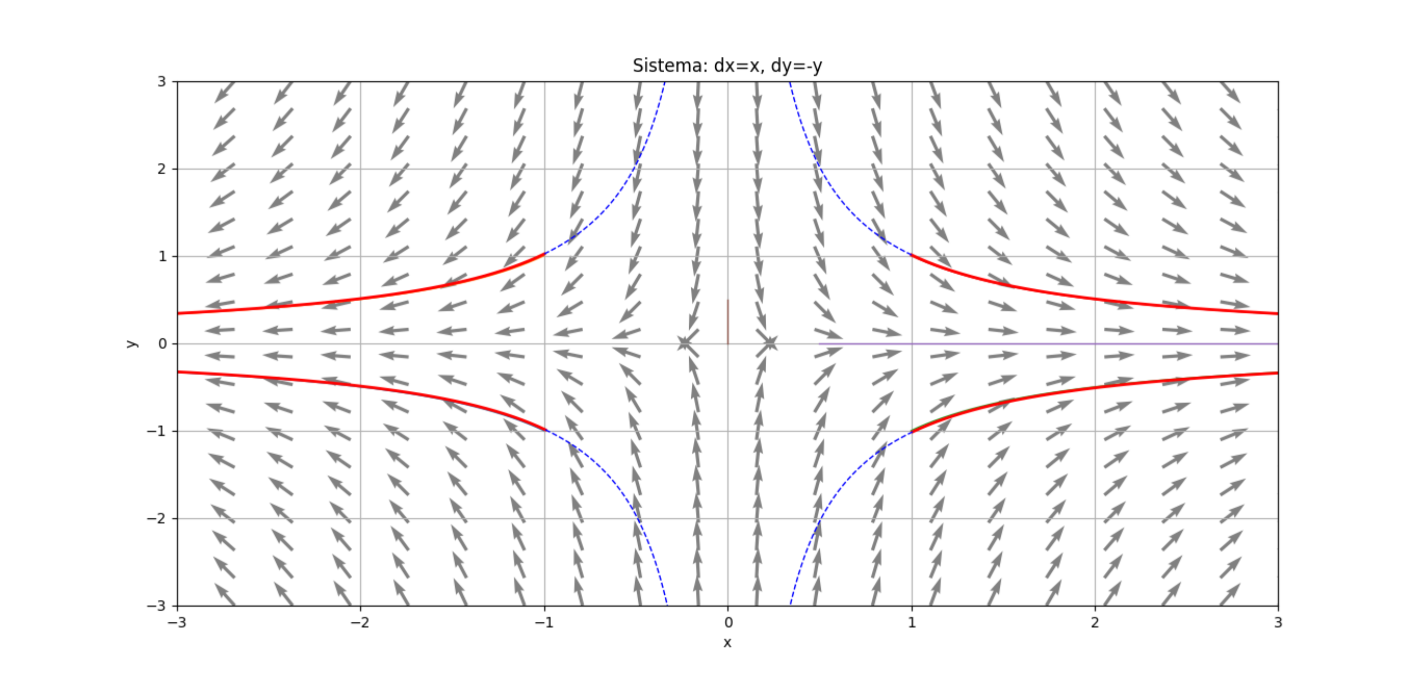


Caso 3:

Propongamos un sistema como un punto silla, x(t) el amor odio de Rome, y(t) el amor odio de Julieta. Entonces se modela como sigue:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

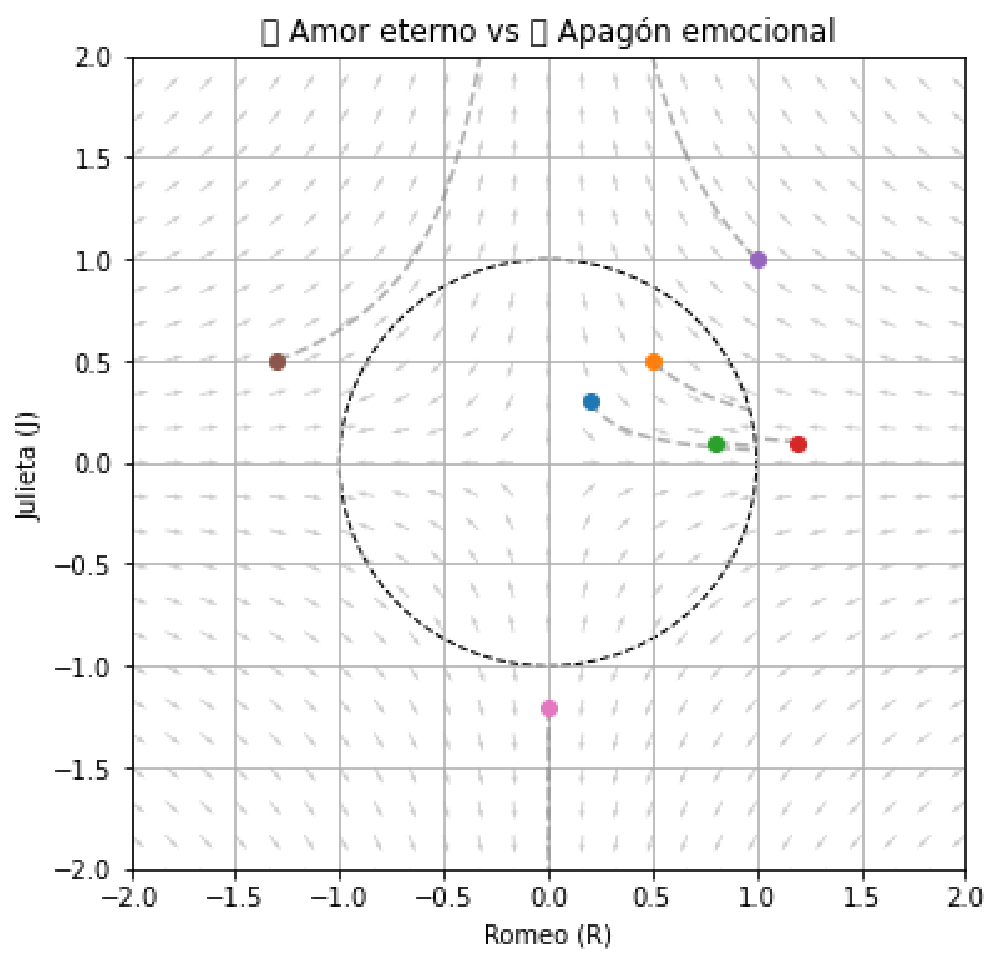
Este sistema modela cómo evolucionan los sentimientos de **Romeo (R)** y **Julieta (J)** con el tiempo.



Caso 4: otro caso donde aparezca un ciclo limite seria

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = R(1 - R^2 - J^2) \\ \dfrac{dJ}{dt} = -J(1 - R^2 - J^2) \end{cases}$$

Este sistema modela cómo evolucionan los sentimientos de **Romeo (R)** y **Julieta (J)** con el tiempo.



Interpretación:

- R(t): amor/odio de Romeo.
- J(t): amor/odio de Julieta.
- Hay una **frontera circular** (radio 1) que separa dos zonas:
  - **Dentro del círculo** $R^2 + J^2 < 1$: ambos tienden a equilibrio estable en el ciclo limite → la relación se mantiene en ciclo
  - **Fuera del círculo** $R^2 + J^2 > 1$: ambos se alejan del origen según su signo → amor explosivo o ruptura descontrolada.

Ejemplos clásicos de sistemas no lineales

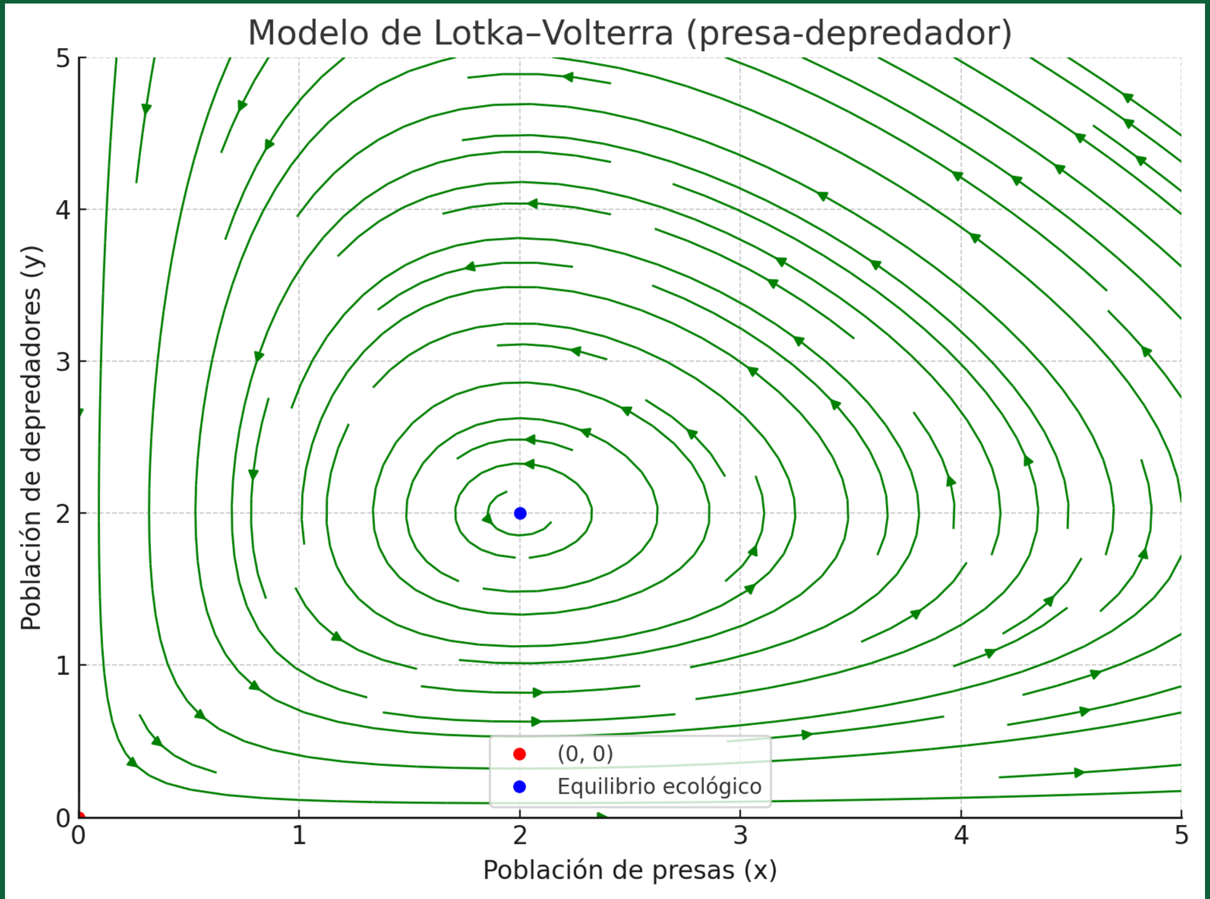
1. Sistema Depredador-Presa (Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

Donde: $x(t)$ =presas, $y(t) =$ depredadores, y los parámetros; $\alpha,\ \beta, \delta, \gamma > 0$ son propios de la dinámica del sistema, como tasa de reproducción, mortalidad y otras.

- Este sistema tiene dos equilibrios en: (0,0) donde se extinguen ambas especies, y en $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, las soluciones son órbitas cerradas → centro (requiere análisis no lineal).

donde:
•α>0: tasa de crecimiento de las presas en ausencia de depredadores.
•β>0: tasa de depredación.
•δ>0: tasa de conversión de presas en nuevos depredadores.
•γ>0: tasa de muerte natural de los depredadores.



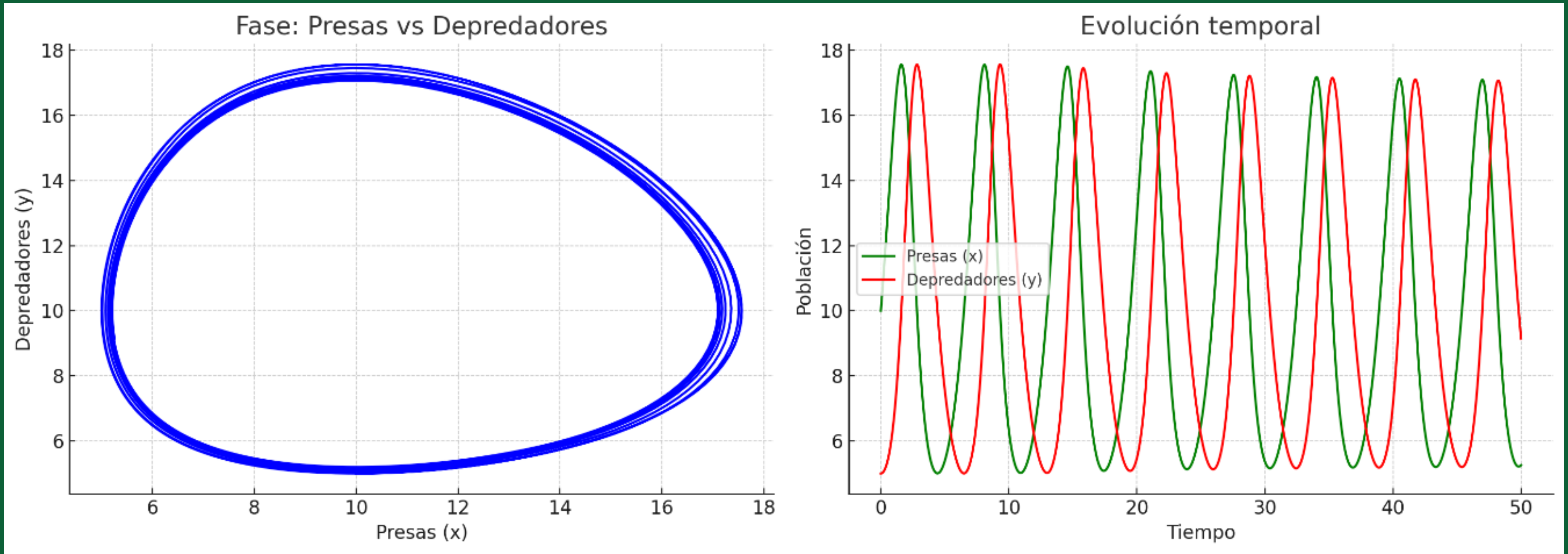
Comportamiento clásico

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = cxy - dy \end{cases}$$

Por ejemplo, si:

- a=1 (crecimiento de presas)
- b=0.1 (eficiencia de caza)
- c=0.1 (beneficio del depredador por presa)
- d=1 (mortalidad del depredador)

resolvemos el sistema y simulamos



Comportamiento clásico
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = cxy - dy \end{cases}$$

Parámetro	Tipo de tasa	Afecta a...	Efecto principal
α\alpha	Crecimiento de presas	x	Aumento natural sin depredadores
β\beta	Eficiencia de caza	x, y	Disminución de presas por interacción
δ\delta	Conversión a depredadores	y	Aumento de depredadores tras cazar presas
γ\gamma	Mortalidad de depredadores	y	Disminución de depredadores sin alimento

El problema del Cohete

Un cohete se mueve en el espacio (sin fricción del aire) expulsando masa a una velocidad constante relativa. La masa del cohete disminuye con el tiempo porque expulsa combustible.

Ecuación fundamental (Ecuación de Tsiolkovsky):

$$m(t)\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt}$$

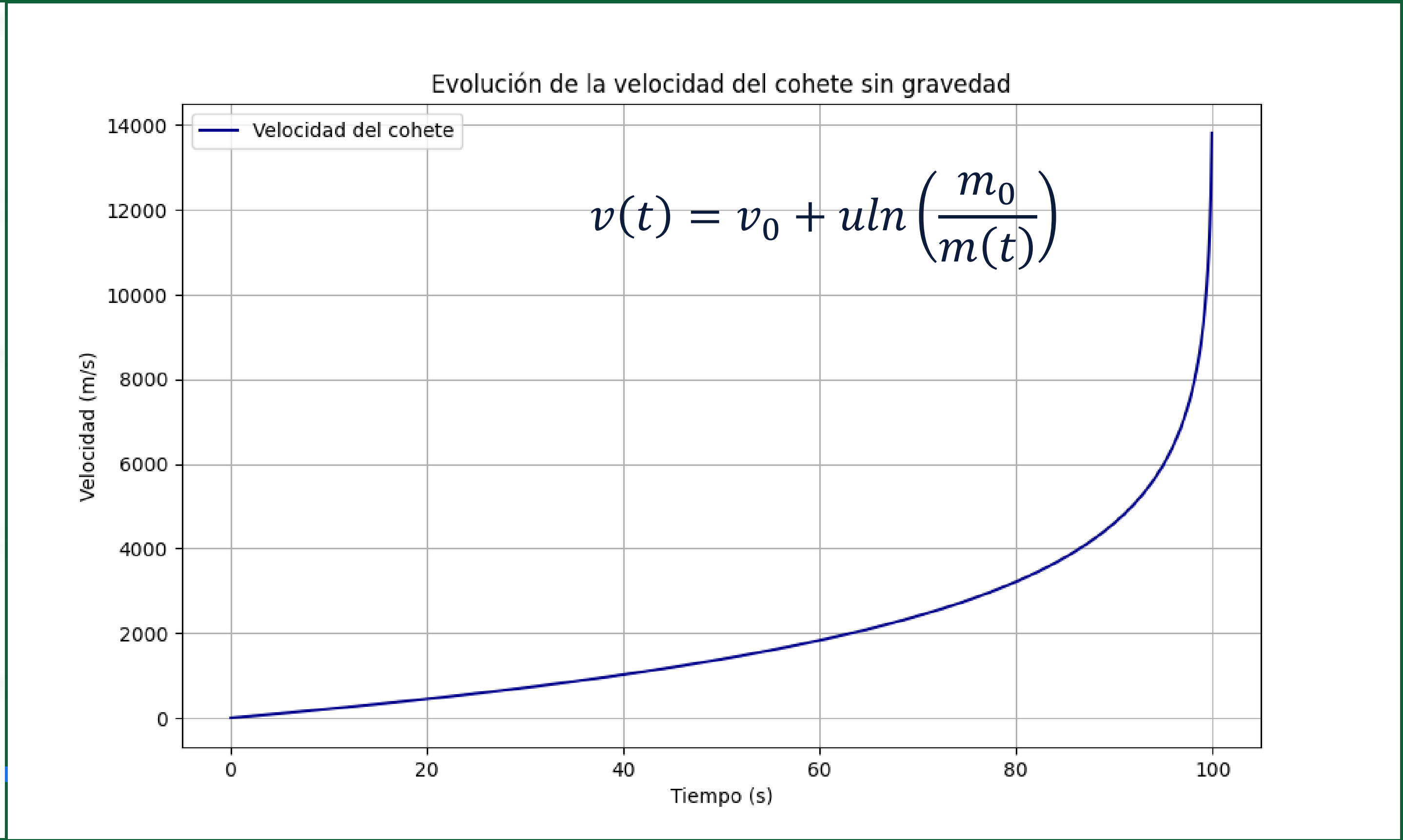
Variables involucradas:

m(t) masa del cohete en el tiempo t

$v(t)$: velocidad del cohete

u: velocidad del gas expulsado **respecto al cohete** (constante)

$\dot{m}(t) = \frac{dm}{dt} < 0$: razón de pérdida de masa



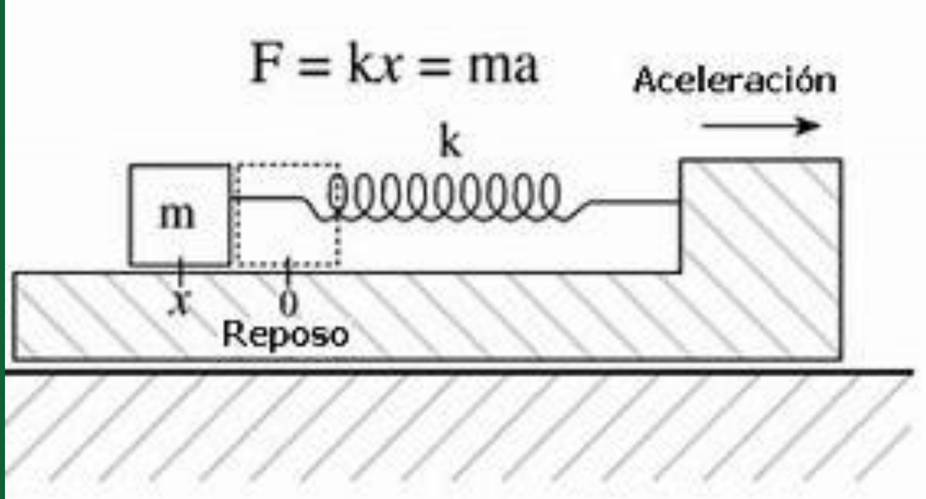
Ecuación diferencial del oscilador armónico sin fricción:

$$\ddot{x} + w^2 x = 0$$

donde:

- x(t): posición de la masa en el tiempo,
- ω: frecuencia angular = $\sqrt{\frac{k}{m}}$,
- k: constante del resorte,

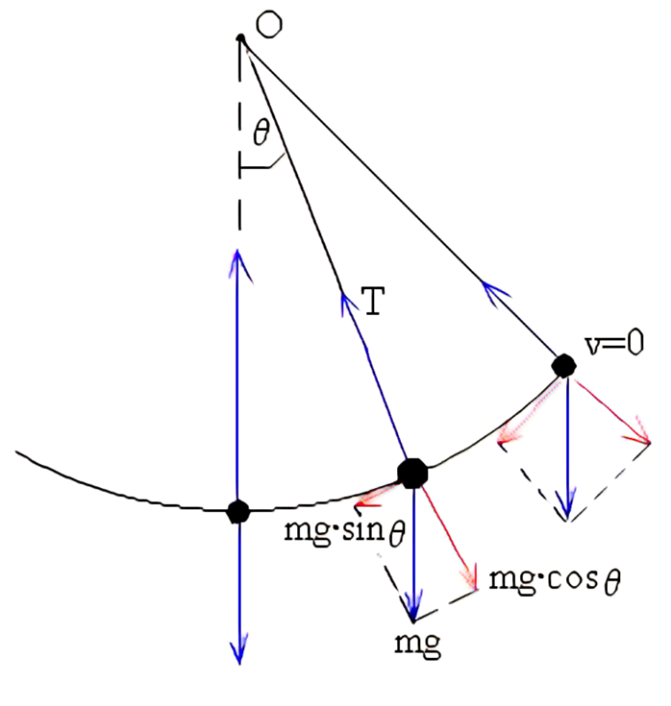
m: masa.

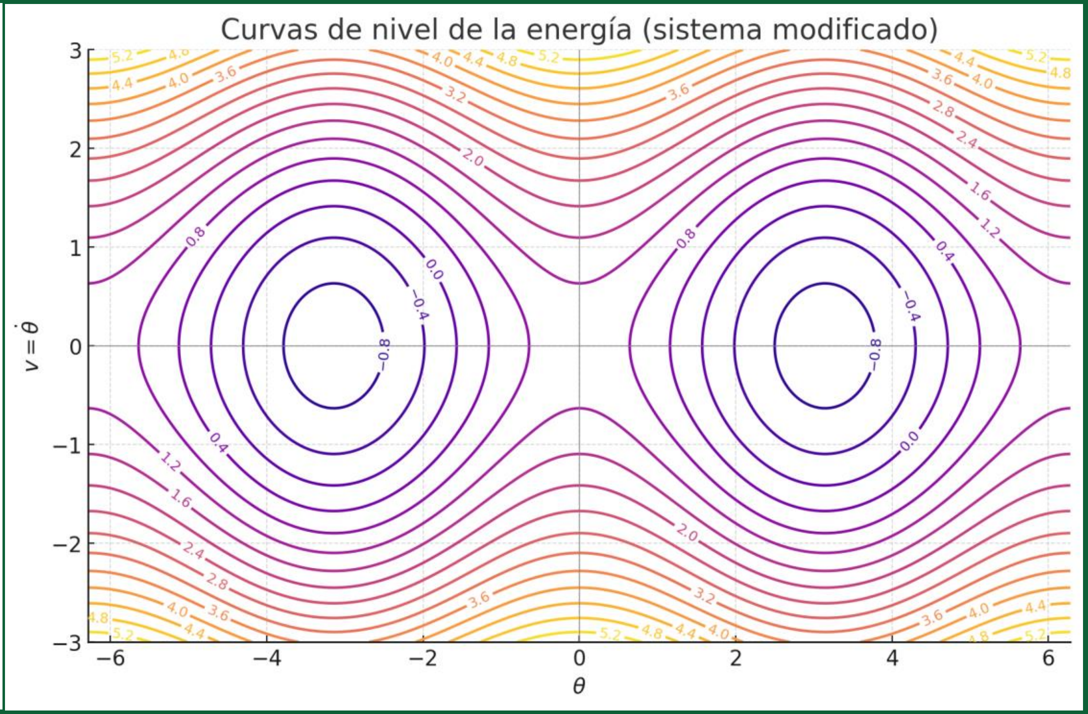


Péndulo

$$J(\theta, v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos\theta & 0 \end{vmatrix} \qquad J(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad J(\pi, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad J(-\pi, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = \sin\theta \end{cases}$$





Sistema conservativo de pozo doble

$$\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$$

$V(x)$= Potencial

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

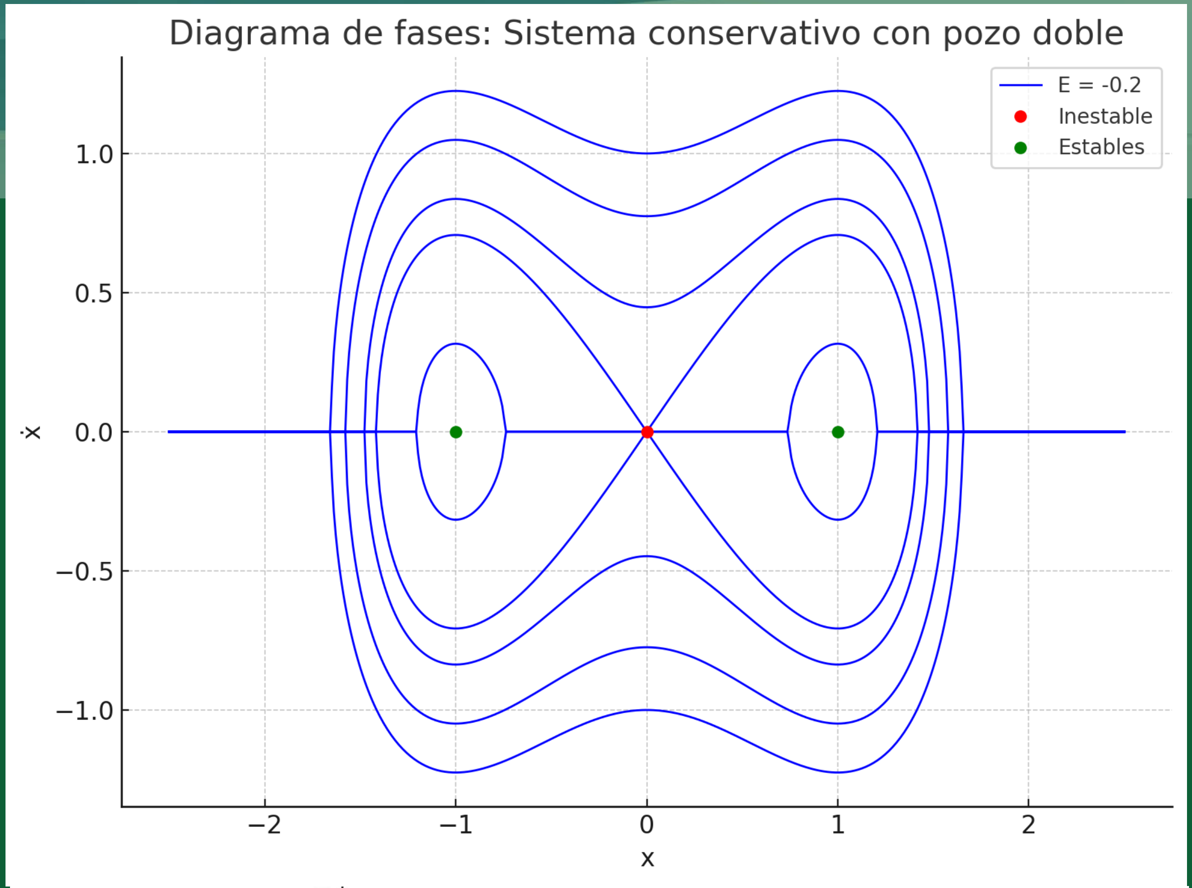
$$\ddot{x} = -(-x + x^3) = x - x^3$$

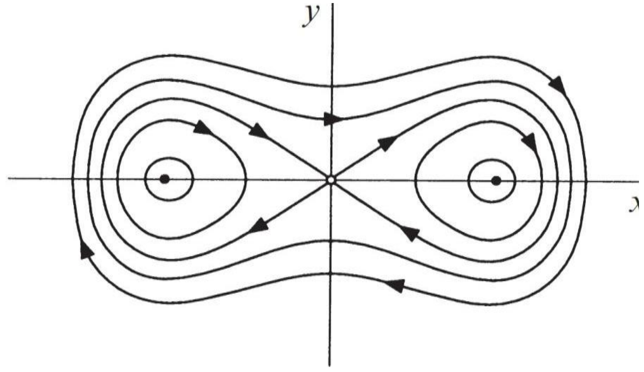
Equilibrios

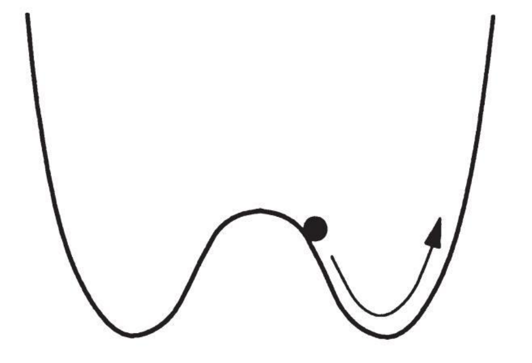
$$(-1,0);\ (0,0), (1,0)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = x - x^3 \end{cases}$$

Esto define un sistema de dimensión 2 en el espacio de fase $(x, \dot{x})$, pero sigue siendo unidimensional físicamente, porque solo describe el movimiento en una coordenada espacial.







Sistema conservativo con potencial no lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - x^3 \end{cases}$$

Función Hamiltoniana $H(x, y)$

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = 0 \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

$$\frac{dH}{dt} = (x + x^3)\dot{x} + y\dot{y} = (x + x^3)y + y(-x - x^3) = 0$$

Sistema conservativo