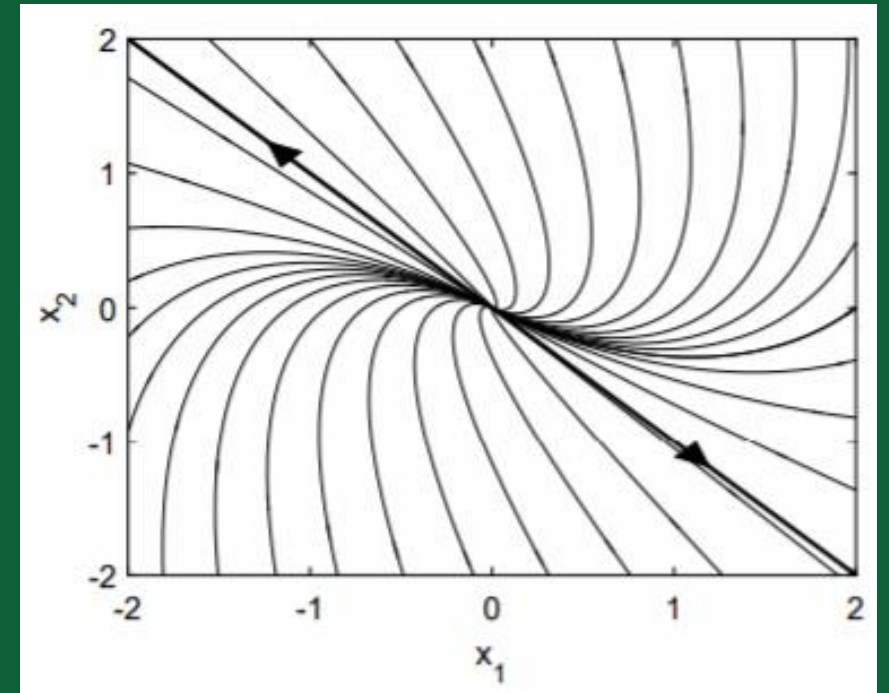


## Sistemas Dinámicos

Son modelos matemáticos que describen cómo cambia el estado de un sistema a lo largo del tiempo. Estos sistemas pueden ser de tiempo continuo o discreto y se utilizan en diversas disciplinas como la física, la biología, la economía y la ingeniería.

### Características de los Sistemas Dinámicos

1. Evolución Temporal: El estado del sistema cambia con el tiempo, lo que puede ser descrito por ecuaciones diferenciales (en el caso de sistemas continuos) o por ecuaciones en diferencias (en el caso de sistemas discretos)
2. Determinismo: En muchos sistemas dinámicos, el estado futuro del sistema está completamente determinado por su estado actual y las leyes que gobiernan su evolución.
3. No Linealidad: Muchos sistemas dinámicos son no lineales, lo que significa que las ecuaciones que los describen no son lineales. Esto puede llevar a comportamientos complejos como el caos.



# MODELADO Y SIMULACIÓN

## Ecuaciones Diferenciales

### CLASE 7

Ing. Omar Cáceres

## Sistemas Dinámicos

Newton  
Euler  
Laplace  
Poincare  
Lorent



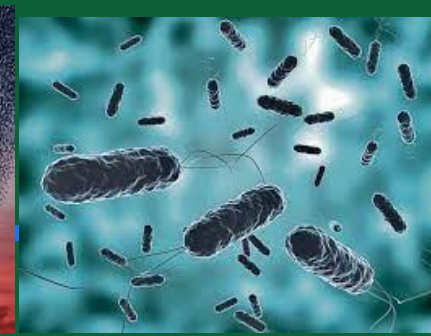
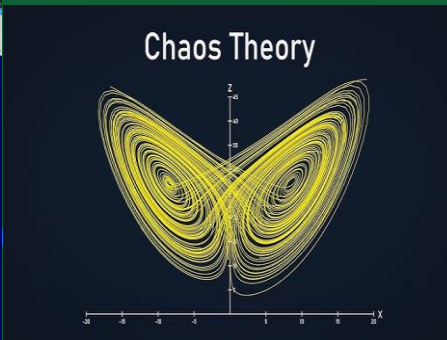
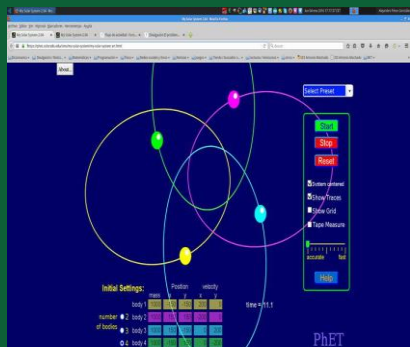
Isaac Newton  
1642-1727



Henri Poincaré  
1854-1912

La historia de los sistemas dinámicos es fascinante y tiene raíces profundas en la matemática y la física. Su origen se remonta a la mecánica newtoniana, donde Isaac Newton formuló ecuaciones diferenciales para describir el movimiento de los cuerpos. A lo largo del tiempo, matemáticos como Euler y Laplace contribuyeron al desarrollo de la teoría, estableciendo principios fundamentales sobre la evolución de los sistemas en el tiempo.

En el siglo XX, la teoría de los sistemas dinámicos se expandió con el estudio del caos y la teoría de bifurcaciones, lo que permitió comprender fenómenos complejos en diversas disciplinas, desde la biología hasta la economía. Hoy en día, los sistemas dinámicos son esenciales para modelar procesos naturales y sociales, ayudando a predecir comportamientos y optimizar soluciones.



## Conceptos Básicos

1. Diagramas de Fase: Los **diagramas de fase** son herramientas visuales que se utilizan para representar el comportamiento de sistemas dinámicos en el espacio de fases. Estos diagramas muestran todas las trayectorias posibles del sistema a partir de diferentes condiciones iniciales, proporcionando una visión clara de cómo evoluciona el sistema con el tiempo.

### Características de los Diagramas de Fase

- ❖ **Ejes del Espacio de Fases:** Los ejes del diagrama representan las variables del sistema. Por ejemplo, en un sistema de dos dimensiones, los ejes podrían ser la posición y la velocidad.
  - ❖ **Trayectorias:** Las curvas en el diagrama representan las trayectorias del sistema, mostrando cómo cambia el estado del sistema a lo largo del tiempo.
  - ❖ **Puntos Críticos:** Los puntos donde las trayectorias se cruzan o terminan pueden ser puntos de equilibrio, donde el sistema no cambia con el tiempo.
-

## Clasificación de los puntos de equilibrio

- 1. Punto de Silla:** Si al menos uno de los valores propios tiene parte real positiva y otro tiene parte real negativa, el punto de equilibrio es un punto de silla y es inestable.
  - 2. Nodo Estable:** Si todos los valores propios tienen partes reales negativas, el punto de equilibrio es un nodo estable (atractor).
  - 3. Nodo Inestable:** Si todos los valores propios tienen partes reales positivas, el punto de equilibrio es un nodo inestable (repulsor).
  - 4. Centro:** Si todos los valores propios son puramente imaginarios (sin parte real), el punto de equilibrio es un centro y es estable en el sentido de Lyapunov, pero no asintóticamente estable.
  - 5. Punto de Equilibrio No Hiperbólico:** Si al menos uno de los valores propios tiene parte real cero, el análisis lineal no es concluyente y se requiere un análisis no lineal más detallado.
-

#### Análisis de Estabilidad sistemas no lineales 1D

Se evalúa cada punto de equilibrio en la primera derivada:

Si  $f'(x^*) < 0$  (es estable)

Si  $f'(x^*) > 0$  (es inestable)

#### Análisis de Estabilidad sistemas no lineales 2D

La estabilidad de un punto de equilibrio se determina observando los valores propios de la matriz Jacobiana evaluada en ese punto. Aquí hay un resumen de cómo interpretar estos valores propios:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

### Estabilidad Asintótica (teorema de Lyapunov)

La estabilidad asintótica es un concepto fundamental en teoría de sistemas dinámicos que describe como un sistema queda acotado ante pequeñas perturbaciones, sino que además converge al equilibrio en el tiempo.

Un punto de equilibrio  $x^*$  en un sistema dinámico autónomo

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Cumple dos condiciones:

1. Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si,  $\|x(0) - x^*\| < \delta$ , entonces  $\|x(t) - x^*\| < \epsilon$  para todo  $t \geq 0$
2. Convergencia al equilibrio, donde:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

Básicamente la distancia  $\|x(t) - x^*\|$ , tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$

## Estabilidad Asintótica

Según Lyapunov las trayectorias de un sistema dinámico se aproximan arbitrariamente al equilibrio, pero no necesariamente lo tocan en un tiempo finito.

Un punto de equilibrio es asintóticamente estable, si:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

Para todas las condiciones iniciales en una vecindad del equilibrio

Básicamente la distancia  $\|x(t) - x^*\|$ , tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$

Sin embargo, en tiempo finito las trayectorias no necesariamente alcanzan el equilibrio, solo se acercan.

La interpretación física: para la estabilidad simple, una perturbación ligera en el sistema, su nuevo estado de equilibrio permanece cerca del anterior, pero no vuelve a el.

En el caso de estabilidad asintótica: el sistema no solo se mantiene sino que vuelve al equilibrio después de la perturbación.

#### Sistemas dinámicos Autónomos

Un sistema autónomo desacoplado y acoplado unidimensional es un concepto clave en el estudio de ecuaciones diferenciales de la forma:

Ecuación diferencial  
Ordinaria

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Donde:

$x(t)$  = Es la variable dependiente (estado del sistema)

$(t)$  = Variable independiente

La ecuación  $f(x)$  no depende de  $(t)$  explícitamente.

Las soluciones pueden analizarse mediante diagramas de fase, donde se estudia los puntos de equilibrio  $f(x) = 0$ , y su estabilidad.

#### Sistemas desacoplados unidimensionales

Un sistema desacoplado implica que las ecuaciones que lo componen no interactúan entre si. En el caso unidimensional esto significa que tenemos una ecuación de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Ejemplo:  $\frac{dx}{dt} = -kx, \quad (k > 0)$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -k dt \quad x(t) = x_0 e^{-kt} \quad \text{Donde } x_0: \text{ Constante}$$

#### Sistemas Acoplados unidimensionales

En realidad, el termino (acoplado) generalmente se aplica a sistemas multidimensionales (con varias variables), donde las ecuaciones interactúan. Sin embargo, si consideramos un sistema acoplado unidimensional a un parámetro externo, podríamos tener:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda)$$

Donde  $\lambda$  : Parámetro externo, que puede cambiar con el tiempo o depender de una ecuación (esto implicaría un sistema de dos variables)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$