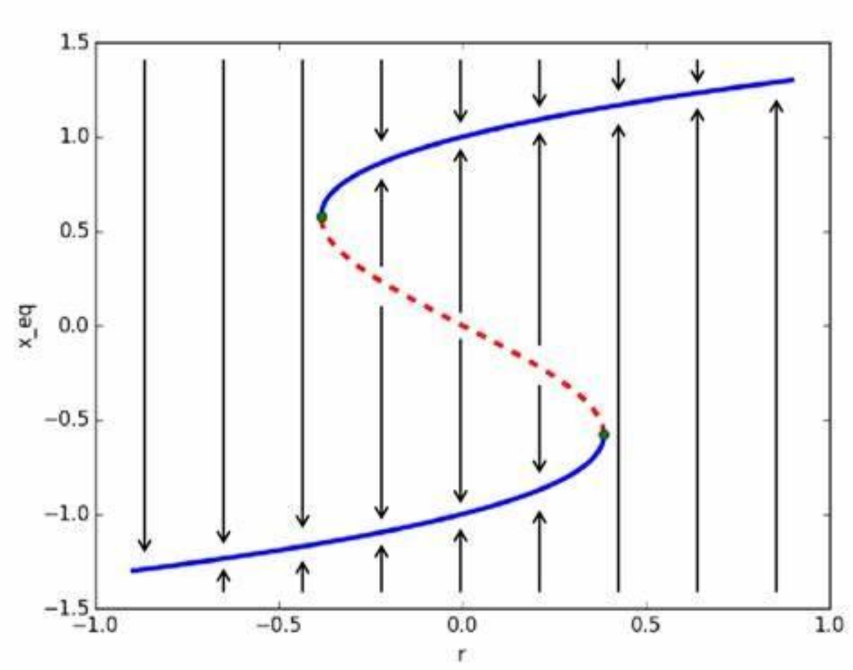
Bifurcaciones

Las **bifurcaciones en sistemas dinámicos** ocurren cuando un pequeño cambio en los parámetros provoca un cambio cualitativo en su comportamiento. Como la aparición o desaparición de un punto de equilibro,, ciclos limites o cambios en la estabilidad. Son fundamentales en el estudio de ecuaciones diferenciales y sistemas no lineales.



Bifurcación
1. Nodo-Silla
2. Tridente,
3. Hopf.

Tipos de bifurcaciones

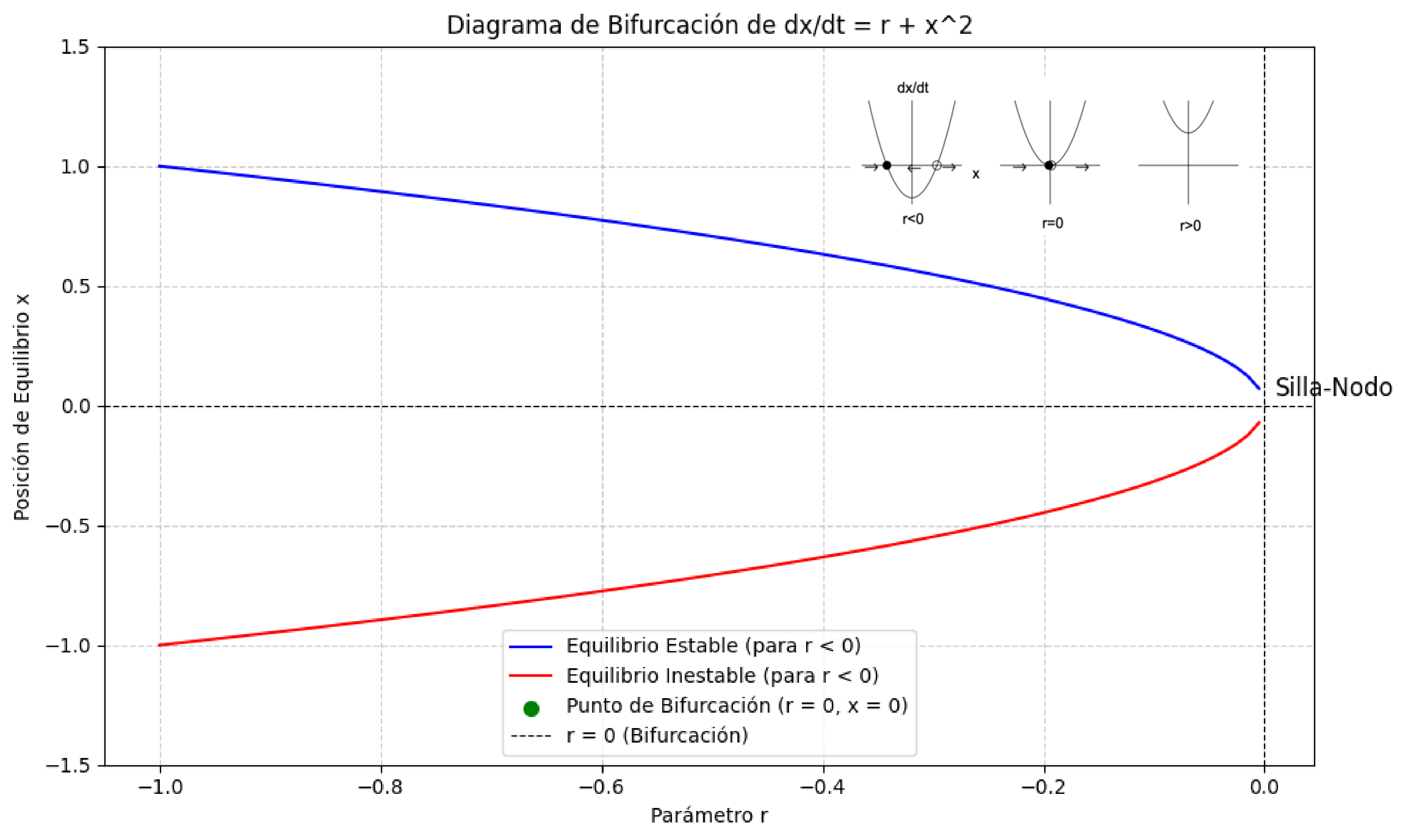
- Bifurcación tipo Local: Es aquella que puede ser analizada completamente mediante cambios en las propiedades de la est de la estabilidad local. Como puntos de equilibrio, orbitas locales u otros conjuntos invariantes. Conforme los parámetros atraviesan umbrales críticos.

Bifurcación Silla Nodo

$$\dot{x} = r + x^2$$

$$\dot{x} = f(x,r) \; con \; x \in R, r \in R$$

Es un fenómeno en sistemas dinámicos donde dos puntos de equilibrio (uno estable y otro inestable) colisionan y desaparecen cuando un parámetro varía. Es una de las bifurcaciones más comunes en ecuaciones diferenciales.

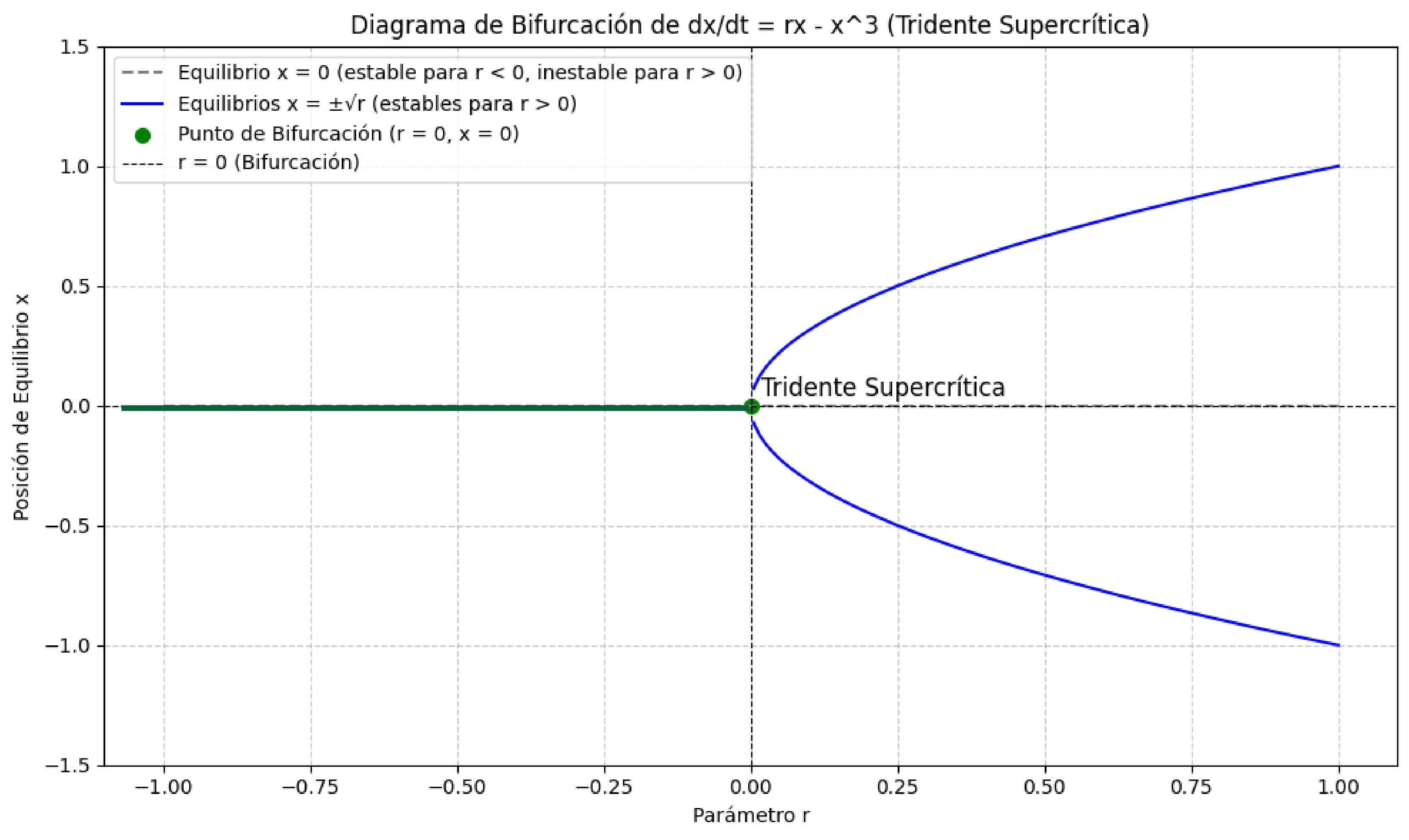


Bifurcación Pitchfork

$$\dot{x} = rx - x^3$$

1.Supercrítica:

- Para valores pequeños del parámetro, el sistema tiene un único equilibrio estable.
- Cuando el parámetro cruza un valor crítico, aparecen dos nuevos equilibrios estables y el original se vuelve inestable.



Bifurcación Pitchfork

$$\dot{x} = rx + x^3$$

2. Subcrítica:

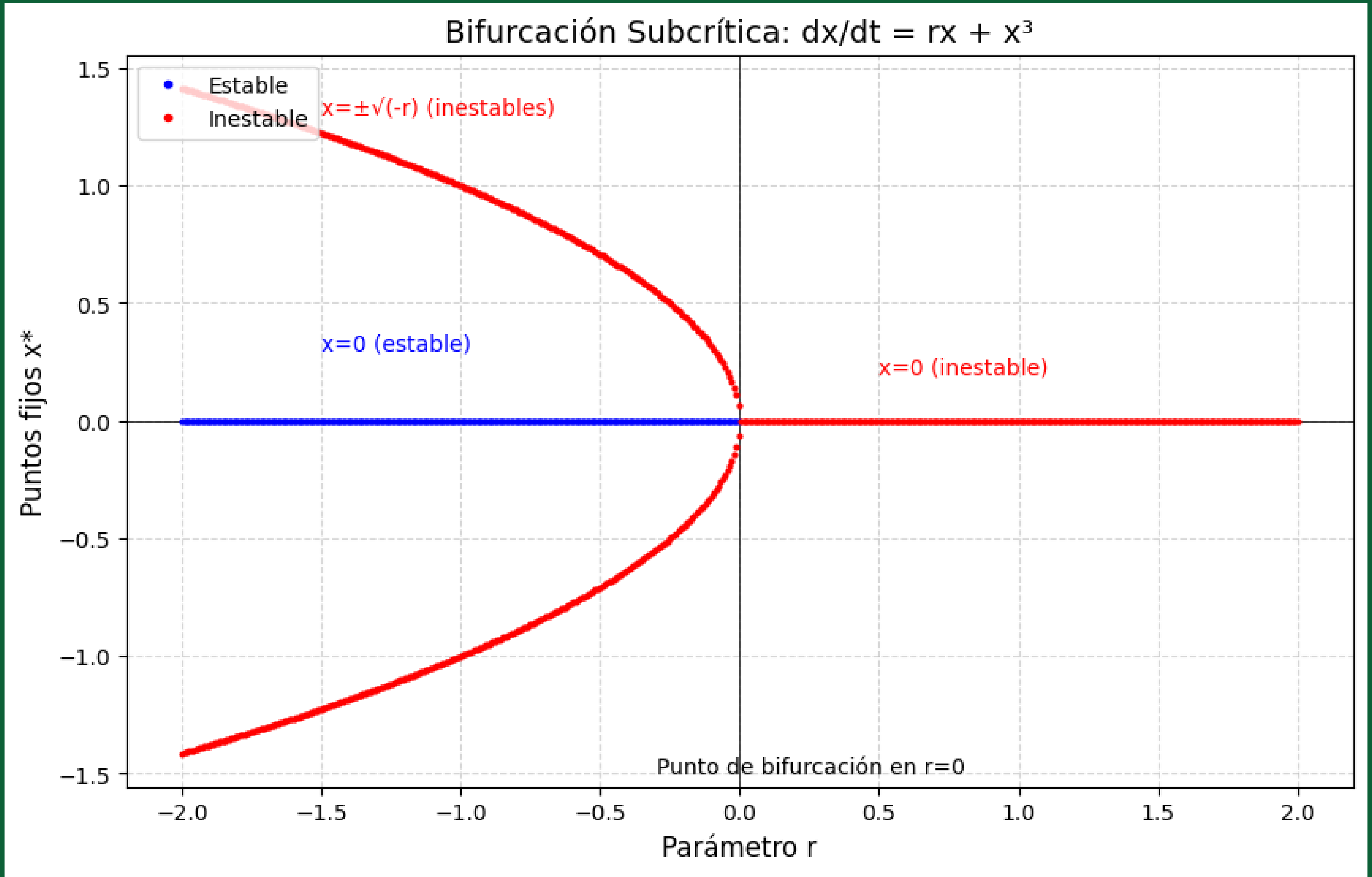
- Similar a la supercrítica solo que ahora $r < 0$

Hay tres equilibrios $x^* = 0$

que es estable y $x^* = \pm\sqrt{-r}$

que son inestables.

En el momento de la bifurcación cuando los equilibrios inestables colisionan con el origen desaparecen, mientras que el origen sigue siendo un punto de equilibrio, pero cambia su naturaleza



Bifurcación Pitchfork (histeresis)

$\dot{x} = rx + x^3 - x^5$

3. Subcrítica: el sistema muestra como

$- x^5$ crea una estructura mas rica

En r=- 0.25, aparece una ifurcacion silla-nodo, que crea dos puntos fijos; un par estable (rama exterior), un par inestable (rama interior)

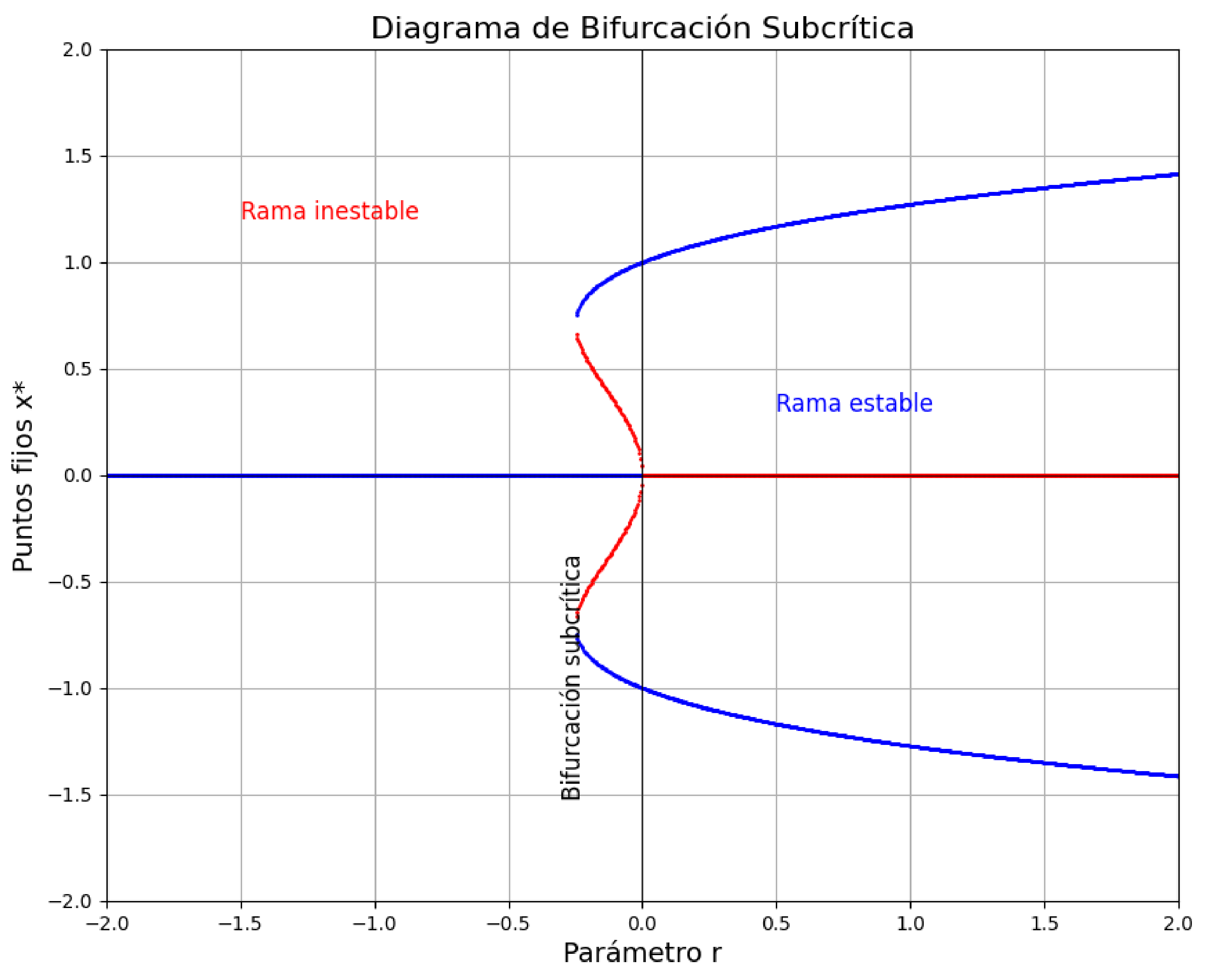
- Para -0.25 $< r < 0$, $x^* = 0$

Sigue siendo estable y las ramas inestables

En r = 0, el (0) cambia de estable a inestable y las ramas inestables se fusionan en el origen.

En r>0

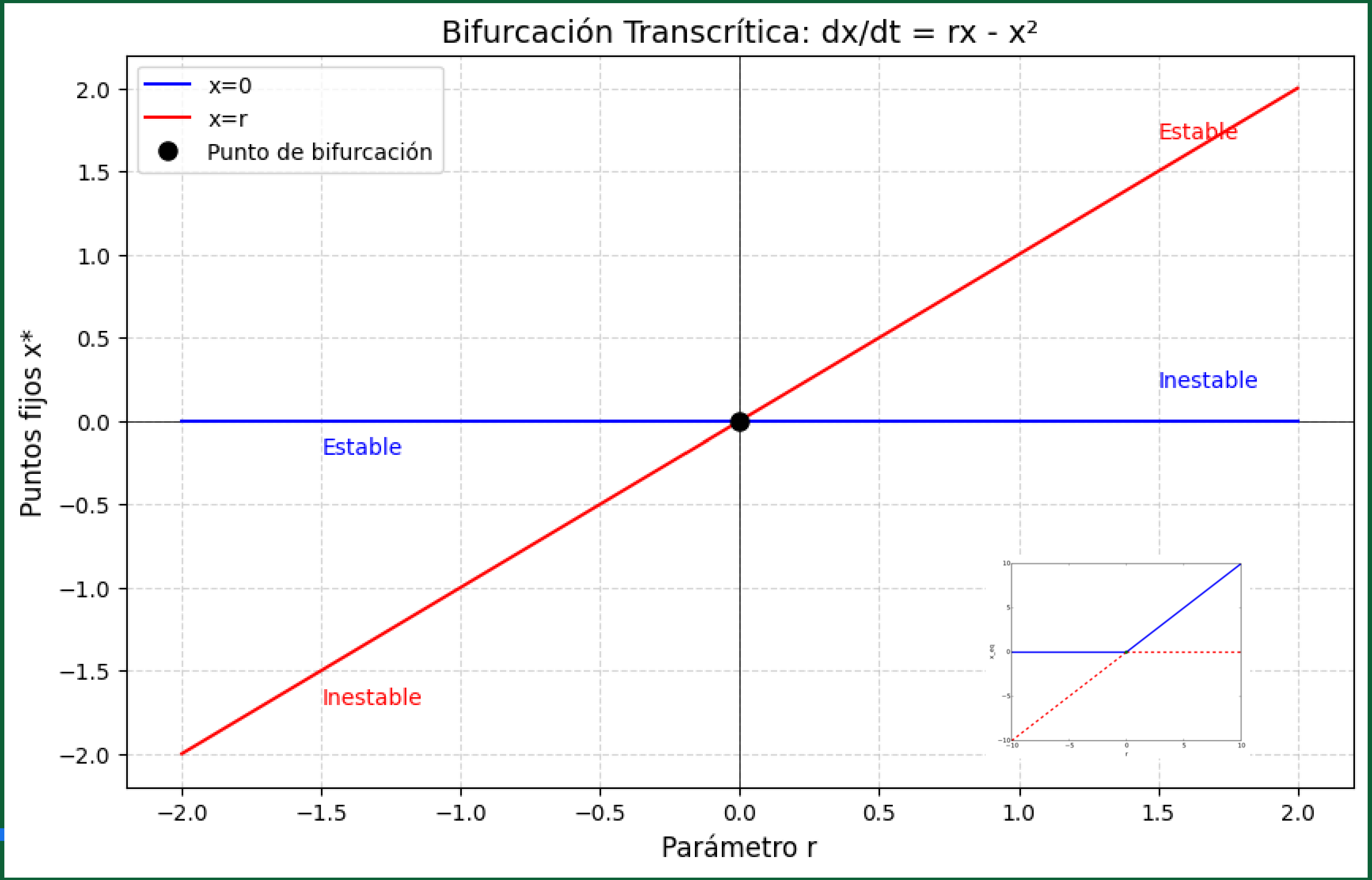
solo persisten las ramas estables exteriores. X=0 es inestable.



Bifurcación Transcrita

La **bifurcación transcrita** es un tipo de bifurcación en sistemas dinámicos donde dos puntos de equilibrio intercambian estabilidad a medida que un parámetro varía. Es común en modelos ecológicos, económicos y físicos.

En r $= 0$ ocurre una bifurcación, los puntos de equilibrio cambian su naturaleza: $x^* = 0$
Cambia de estable a inestable y para $x = r$
cambia de inestable a estable

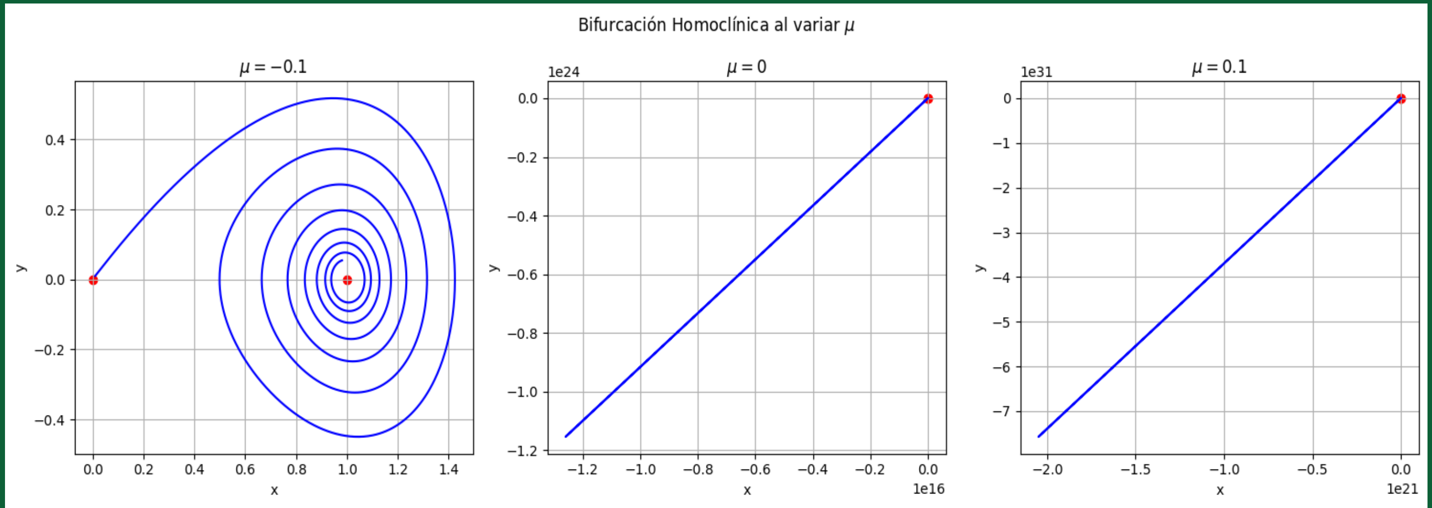


Tipos de bifurcaciones

- Bifurcación tipo Global: Ocurre cuando grandes conjuntos invariantes, como orbitas periódicas, colisionan con equilibrios. Esto causa cambios en la topología de las trayectorias en el espacio fase que no pueden ser restringidos a un pequeño entorno, como ocurre con las bifurcaciones locales.

Tipo:

1. Monoclínicas
2. Heteroclinicas

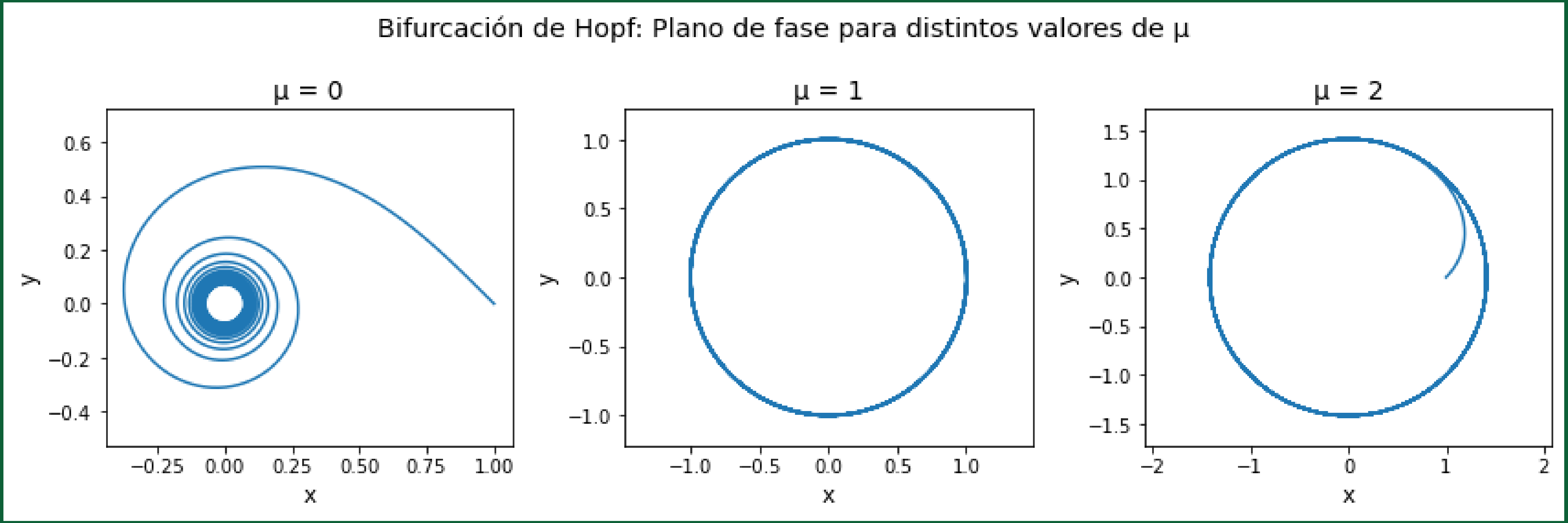


$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^2 + \mu y \end{cases}$$

Tipo Hopf

Aunque los autovalores **son siempre complejos con parte real negativa**, el **ciclo límite emerge** cuando los **términos no lineales** provocan un cambio de comportamiento. En este sistema, la bifurcación **de Hopf ocurre en r=1**

$$\begin{cases} \dot{x} = ry - x \\ \dot{y} = -rx - y + (x^2 + y^2)y \end{cases}$$



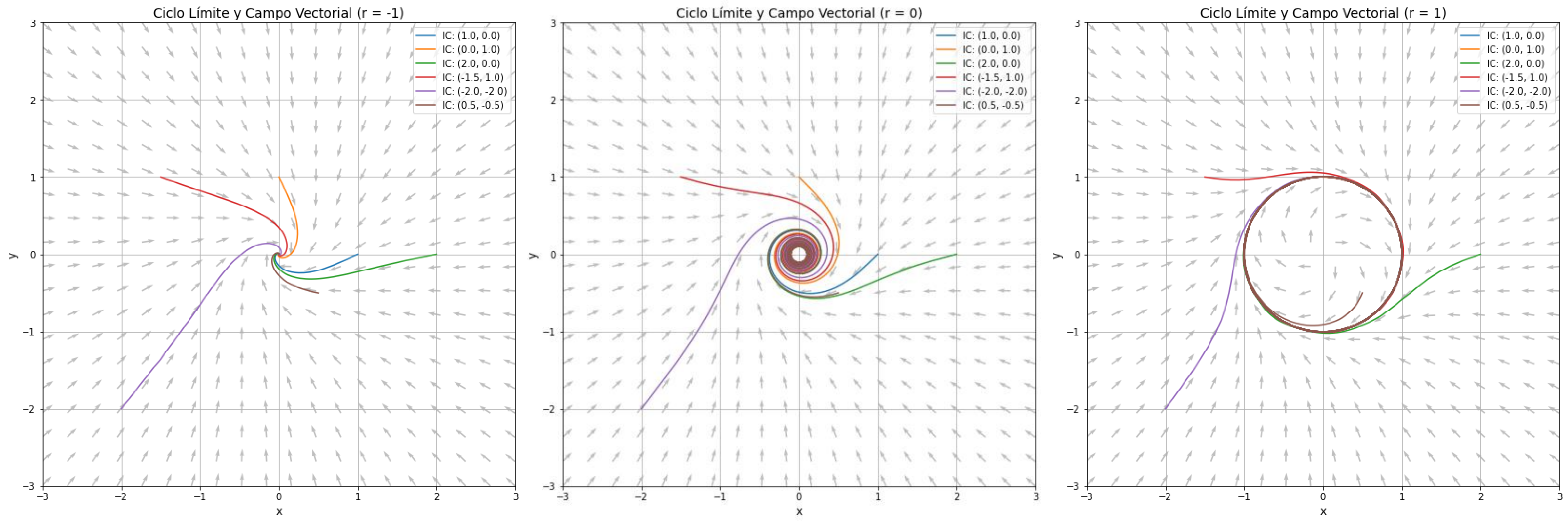
Ciclos Limites

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x(r - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(r - x^2 + y^2) \end{cases}$$

Para r < 0 Foco estable

Para r = 0 Bifurcación Hopf

Para r > 0 Ciclo limite radio $\sqrt{r}$



MODELADO Y SIMULACIÓN
Ecuaciones Diferenciales

Ing. Omar Cáceres

Sistema Lorent

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

ρ = número de Rayleigh (controla el calor, bifurcaciones)

β: relacionado con la geometría (≈ 8/3)

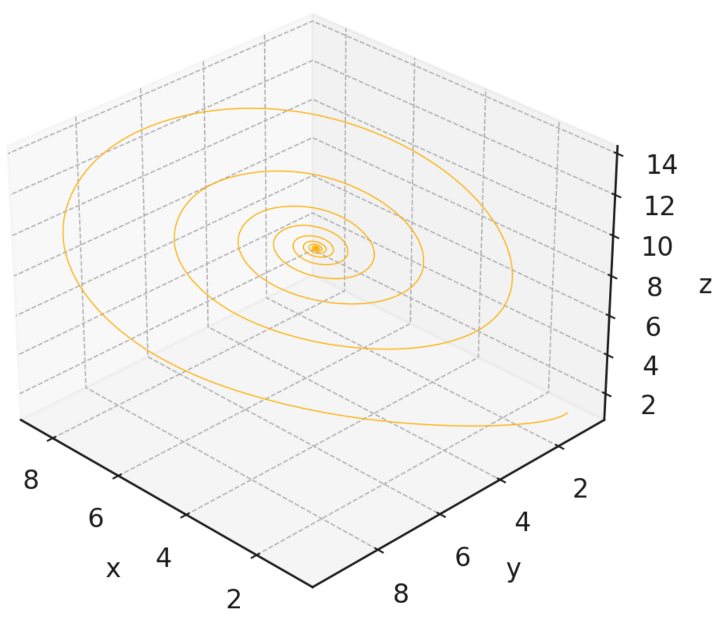
$\sigma = numero\ de\ prant\ \approx 10$

Para $\rho = 10$ el sistema es estable, la trayectoria converge al equilibrio

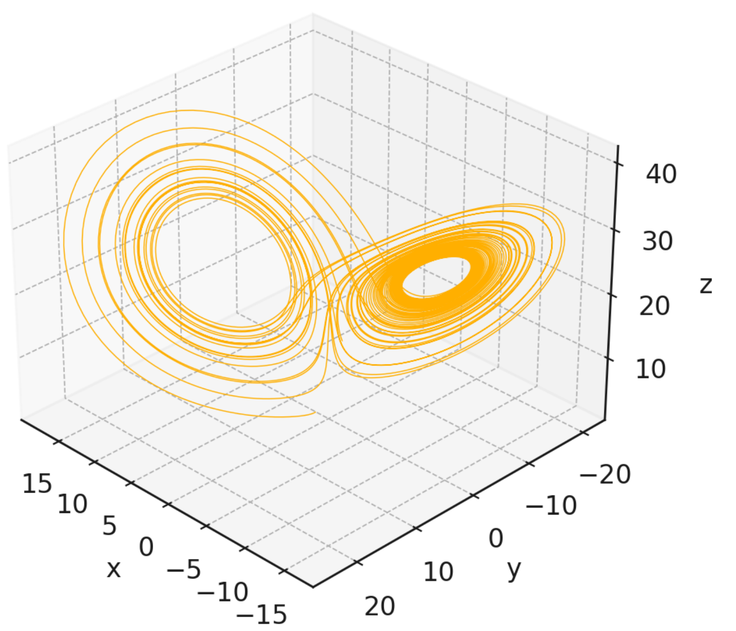
Para $\rho = 24.74$ se produce la bifurcación Hopf, los puntos de equilibrio pierden estabilidad, aparecen oscilaciones

Para $\rho = 28$ El sistema entra en régimen cotico, aparece el atractor raro de Loren en forma de mariposa, las trayectorias nunca se repiten

Atractor de Lorenz
ρ = 10



Atractor de Lorenz
ρ = 24.74



Atractor de Lorenz
ρ = 28