Parametrización de Sistemas dinámicos

En el caso de sistemas autónomos consiste en encontrar la trayectoria (curva en el plano) que siguen las soluciones, normalmente en función del tiempo t. Para eso, Se parte del sistema:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}), \qquad donde\ \vec{x} = (x, y), \qquad \vec{x} = (x, y)^T$$

- Se encuentra $x(t), y(t)$, es decir, una parametrización del movimiento en el plano.

La parametrización consiste en expresar las trayectorias del sistema como curvas en el plano (x, y) (o en $(x1, x2, \dots)$, ya sea: en función del tiempo: (x(t), y(t)), o como una relación de variables y=f(x) (eliminando el tiempo)

Parametrización de Sistemas dinámicos

La parametrización permite:

a) Entender cómo se mueven las soluciones.
b) Representar gráficamente las trayectorias.
c) Estudiar propiedades del sistema (como energía conservada, comportamiento oscilatorio, etc.).
d) Clasificar tipos de trayectorias (espirales, círculos, líneas, etc.).

Métodos:

1. Solución explicita con respecto al tiempo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \rightarrow x(t), y(t)$$

Ideal cuando el sistema es desacoplado o lineal

Parametrización de Sistemas dinámicos

2. Eliminación de tiempo usando $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

Este método muestra la forma de las trayectorias sin saber cómo cambia en el tiempo, es decir representa las curvas direcciones en el plano de fase, básicamente dibujamos una función $y = f(x)$.

3. Curvas de Nivel (energía conservada)

En sistemas conservativos, $H(x,y) = c$, curvas de nivel, en estas curvas la energía permanece constante (describe trayectorias cerradas).

Un caso típico sería; $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin(x)$, $y = \pm\sqrt{2(c - v(x))}$, ideal para sistema donde hay conservación de energía como (péndulos, masa resorte y otros)

Parametrización de Sistemas dinámicos

4. Transformación a coordenadas polares

Se usa $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$\dot{r} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r}$,

$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{r^2}$,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Útil para analizar trayectorias radiales o espirales

La parametrización en sistemas dinámicos permite describir y visualizar trayectorias sin necesidad de simular todo el sistema. Según el tipo de sistema (lineal, conservativo, radial, etc.), hay métodos específicos para obtener estas curvas.

Caso sistema no autónomo

En un sistema no autónomo existe la dependencia explicita del tiempo, parámetro (t)

$\dot{x} = (x, y, t), \dot{y} = (x, y, t)$

A diferencias de sistemas autónomos acá el tiempo actúa como una variable externa

la parametrización en sistemas no autónomos se limita casi exclusivamente a:

- Resolver el sistema para obtener $(x(t), y(t))$
- Visualizar la trayectoria como función del tiempo
- Ampliar el espacio de fases: (x, y, t)

Ejemplo: $\dot{x} = x + t, \dot{y} = -y + \cos(t)$

Se resuelve por separado:

$\dot{x} = x + t$, la resolvemos con un factor integrante: tiene la forma $\dot{x} - x = t$, entonces $\mu(t) = e^{\int -dt} = e^{-t}$, multiplicamos por el factor integrante toda la ecuación y obtenemos:

$e^{-t}\dot{x} - e^{-t}x = te^{-t}$, y reescribimos de la siguiente manera: $\frac{d}{dt}(xe^{-t}) = te^{-t}$, ahora solo falta resolver la integral por partes:

$$x(t) = e^{t}\int te^{-t}\,dt = -t - 1 + c_1e^{t}$$

Para $\dot{y} = -y + \cos(t)$, igual reescribimos y planteamos una solución, en este caso el factor integrante también se puede usar, y es $\mu(t) = e^{\int dt} = e^{t}$, entonces podemos llegar a lo siguiente: $e^{t}y(t) = \int e^{t}\cos(t)\,dt$, resolvemos y despejamos: $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t) + c_2e^{t}$

Ejemplo tipo Bifurcación de Hopf

Sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

μ es el parámetro, y su punto de equilibrio es: (0,0)

Estudio de estabilidad:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & \mu - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

Evaluamos en (0,0)

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

Resolvemos los autovalores:

Los valores propios: $det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} \mu - \lambda & -1 \\ 1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = (\mu - \lambda)(\mu - \lambda) + 1 = 0,$$

$entonces: \lambda = \mu \pm i$

Análisis:

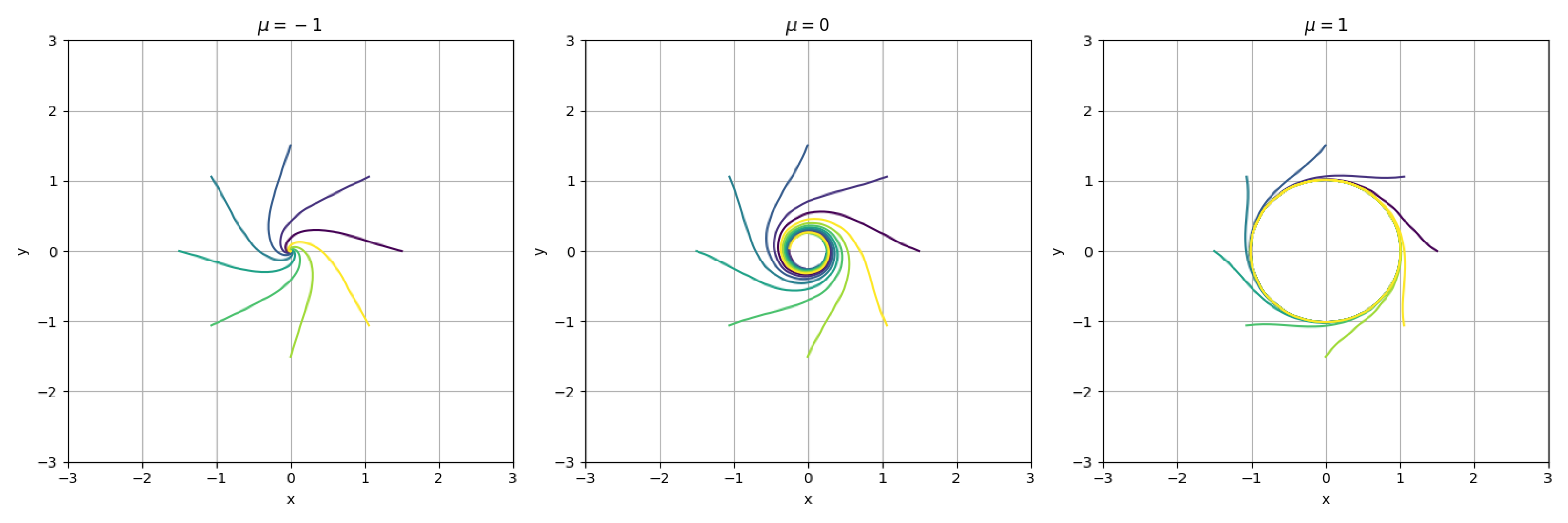
- $Si\ \mu = 0:\ foco\ centro$ puro (órbitas cerradas)

  Este cambio de estabilidad con aparición de órbitas cerradas es característico de una bifurcación de Hopf.

Sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \qquad \lambda = \mu \pm i$$



Ejemplo 2 (soluciones explicitas), suponga la dinámica siguiente:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} X$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$X(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t) \\ x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) \end{bmatrix}$$

Acá la interpretación del parámetro λ:

$\lambda < 0$ Las soluciones son espirales que decaen al equilibrio

$\lambda = 0$ Las soluciones son órbitas cerradas: centros, movimientos puramente oscilatorios

$\lambda > 0$ Las soluciones son espirales que crecen exponencialmente: foco inestable

¿Qué es la solución final parametrizada?

Cuando una solución final parametrizada en sistemas dinámicos como:

$$\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

Básicamente es una expresión explicita en función de (t), que describe como evoluciona el estado del sistema en el plano fase $\left(x(t), y(t)\right)$, a lo largo del tiempo

Las constantes arbitrarias c_1, c_2 son absorbidas luego de evaluar la solución general en condiciones iniciales.

Ahora bien, en algunos casos se puede eliminar el parámetro (t), suponga que las soluciones ´para las variables de estado son: $(t) = \cos(t)\,, y(t) = -\sin(t)\,,$ entonces el sistema describe curvas soluciones centradas en el origen ya que $x^2 + y^2 = 1$

Ejemplo:

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{t} \end{pmatrix},$
$x(t) = ae^{2t},$
$y(t) = be^{t}$

despejando e^ty despejando $e^t = \frac{y}{b}$, y sustituimos en $x(t) = a\left(\frac{y}{b}\right)^2$

se comporta como una parábola. Esto representa una familia de parábolas que se abren hacia la derecha si $a > 0$ o hacia la izquierda si $a < 0$

Ejemplo:

$\vec{x}(t) = ae^{t}\vec{v}1 + be^{-t}\vec{v}\vec{2}$, (solución general)

$\vec{x}(t) = (ae^{t}, be^{-t})$ parametrizada

Las orbitas son $y = \frac{ab}{x}$ *, hipérbolas*

Análisis de la estructura orbital de un sistema dinámico

En sistemas dinámicos, la estructura orbital se refiere a la forma y disposición geométrica de las órbitas (trayectorias de las soluciones) en el espacio de fases, particularmente cerca de los puntos de equilibrio o atractores. Es un concepto central en el análisis cualitativo de sistemas, ya que describe cómo se comportan las soluciones sin necesidad de resolver el sistema de forma explícita.

Definición de Estructura Orbital
La estructura orbital de un sistema dinámico es el conjunto de todas las órbitas (curvas solución del sistema en el espacio de fases) organizadas en torno a:
puntos de equilibrio,

Componentes de la estructura orbital

1. **Órbitas (trayectorias)**:
   - Pueden ser cerradas (ciclos límite), espirales, líneas rectas, etc.
2. **Puntos de equilibrio**:
   - Nodo, espiral, centro, silla, etc.
   - Determinan la organización local de las órbitas.
3. **Variedades estables/inestables**:
   - Son trayectorias que se acercan o alejan del equilibrio a medida que $t \to \pm\infty$
4. **Separatrices**:
   - Curvas especiales que separan comportamientos cualitativamente distintos (ej. la trayectoria de una silla).
5. **Ciclos límite**:
   - Órbitas cerradas aisladas que atraen o repelen otras trayectorias.
6. **Conjunto límite $\boldsymbol{\omega(x0)}$**:
   - Conjunto de puntos que una órbita se aproxima cuando $t \to +\infty$
   - El **conjunto $\boldsymbol{\alpha(x0)}$** es el análogo para $t \to -\infty$

Conjuntos Limites

En sistemas dinámicos, los **conjuntos límite** describen el **comportamiento a largo plazo** de una solución (órbita). Nos indican **hacia dónde tiende** una trayectoria cuando el tiempo va hacia el infinito (positivo o negativo).

Sea $\phi(t, x0)$ la solución del sistema dinámico con condición inicial $x0$. Entonces:

El **conjunto límite positivo** de $x0$, denotado $\omega(x0)$, es:

$\omega(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_n \to +\infty \text{ tal que } \phi(t_n, x_0) \to y\}$

El **conjunto límite negativo** de $x0$, denotado $\alpha(x_0)$, es:
$\alpha(x0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_n \to -\infty \text{ tal que } \phi(t_n, x_0) \to y\}$

Es decir:
- $\omega(x0)$: lo que la órbita se acerca cuando $t \to +\infty$
- $\alpha(x0)$: lo que la órbita se acerca cuando $t \to -\infty$

Ejemplo:

$\{\dot{x} = -x + y, \dot{y}$
$= -y, y \; el \; punto \; inicial \; es \; (1{,}1)$

Este sistema es un nodo degenerado:

Autovalor: $\lambda = -1$, $Autovector: \; v = [10 \;]$,
vector generalizado: $w = [01]$

Entonces:

$$\vec{X}(t) = e^{-t}\left(c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\right)$$

Para condiciones iniciales $x_0 = \binom{1}{1}$, resolvemos el sistema y hallamos los valores de las constantes arbitrarias, entonces la solución particular es:

$$\vec{X}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}t+1\\1\end{pmatrix}, \; x(t) = e^{-t}(t+1), e \; y(t) = e^{-t}$$

Comportamiento cuando $t \to +\infty$

$x(t) = (1+t)e^{-t} \to 0,$

$y(t) = e^{-t} \to 0$

Entonces: $\lim_{t\to\infty} \vec{X}(t) = 0$

$\omega(1{,}1) = \{(0{,}0)\}$

Comportamiento cuando $t \to -\infty$

$x(t) = (1+t)e^{-t} \to -\infty \cdot \infty = \infty$ (crece exponencialmente)

Se resuelve la indeterminación con L'Hopital

$\| x(t) \| \to \infty$

$\alpha(1{,}1) = \emptyset$, la trayectoria escapa al infinito hacia atrás